

MATHESIS

세계 수학과 / 내용 중심 개정판

한국관

기록에서 출발해 직접 계산하는 수학의 역사



역사 / 도해 / 탐구

REVISED EDITION / 2026

차례

본문의 흐름에 따라 편집한 실제 PDF 쪽번호다.

그림으로 다시 읽는 보충 탐구	4
막대와 눈금과 책 사이에서	5
삼국과 고려의 산학	6
조선의 시간과 측정	27
심화 탐구 기록과 계산의 구조	45
수의 배열과 방정식	55
현대의 수학과 열린 질문	86
연표와 탐구 해설 및 참고 자료	112
참고 자료와 자료 읽기	125

READING THE WORLD

이 책을 여는 질문

이 책은 같은 분량으로 잘라 놓은 전시실이 아니라 서로 다른 질문을 지닌 여덟 권의 책에서 출발한다. 계산을 남긴 재료와 해결해야 했던 문제를 함께 읽으면 비슷한 수식 뒤에 있는 차이가 드러난다. 한 지역을 오늘의 국가 경계에 가두거나 다른 지역을 한 줄의 발전 순서에 놓지 않는다.

읽는 순서는 자유롭다. 수를 기록하는 방법이 궁금하다면 산가지와 자리값 및 키푸를 오가면 된다. 도형의 이유를 묻고 싶다면 넓이의 보존과 완전제곱 및 증명을 이어 읽을 수 있다. 서로 닮은 계산을 발견했을 때에는 구조의 공통점과 역사적 전파의 증거를 따로 살핀다.

이번 개정에서는 원고 단위마다 페이지를 끝내던 방식을 없앴다. 문장과 그림이 차지하는 실제 길이에 따라 다음 페이지로 이어지며 짧은 해설만 남는 쪽을 줄이도록 장 사이의 흐름도 연결했다. 빈 공간을 만들기 위해 본문을 늘리거나 일정한 쪽수를 맞추기 위해 설명을 나누지 않았다.

탐구 문제의 수치와 문자식은 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 재구성이다. 먼저 조건을 읽고 직접 계산한 뒤 풀이를 비교한다. 역사적 사실을 판단할 때에는 본문의 출처와 유물 설명을 함께 확인한다.

한국관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이 장은 개정판에 새로 붙인 보충 탐구입니다. 본문의 각 장이 계산의 결과나 조건을 말로 설명하고 지나간 자리에서 그림을 하나 더 그려 그 이유를 눈으로 확인하도록 구성했습니다. 단원마다 이어 읽을 본문의 장을 표시했으므로 해당 장을 읽은 뒤 펼치면 흐름이 자연스럽게 습니다.

여기에 실은 도해와 수치는 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 현대 재구성입니다. 옛 자료가 실제로 이런 그림을 남겼다는 뜻은 아니며 자료가 말하는 범위는 각 단원 끝의 출처에서 따로 확인할 수 있습니다. 이번 개정에서는 본문에서 표로만 보여 주던 일부 도해도 실제 그림으로 다시 그렸습니다.

한국관 / 01

막대와 눈금과 책 사이에서



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

산가지와 관측 기구와 산서는 서로 다른 일을 맡는다. 막대는 계산하는 동안 값을 바꿀 수 있는 공간을 만들고 눈금은 관측한 현상을 일정한 기준으로 읽게 하며 책은 풀이를 다른 사람에게 전한다. 도구의 외형을 알아보는 데서 한 걸음 더 나아가 무엇을 바꿀 수 있고 무엇을 고정해야 하는지 물으면 각 장의 수학이 연결된다.

이 관에서는 계산의 단위를 정하는 문제에서 시작해 시간과 양을 측정하는 조건을 살핀다. 이어 수의 배열과 미지수를 다루는 방법을 읽고 회전과 그래프를 통해 현대 수학의 언어에 다가간다. 조선의 산서에 현대의 기호가 그대로 실려 있었다고 가정하지 않는다. 옛 기록을 설명하는 언어와 지금 새로 탐구하는 언어를 구별하면서 공통된 질문을 찾는다.

삼국과 고려의 산학

나라가 셈을 가르치다

1장 | 삼국과 고려의 산학

사람이 모여 사는 사회에는 계산해야 할 일이 생깁니다. 창고의 곡식을 기록하고 공사에 필요한 재료를 마련하며 토지의 크기를 비교해야 합니다. 계산이 틀리면 부담과 배분에도 차이가 생깁니다. 셈을 익힌 사람을 길러 내는 일은 나라의 운영을 뒷받침하는 업무였습니다.

신라 국학의 산학 교육은 이 관계를 보여 줍니다. 682년에 설치된 국학과 관련된 기록에는 산학을 가르치는 담당자와 교재 이름이 전합니다. 다만 학교의 설치 연도와 기록에 담긴 모든 세부 제도가 동시에 확정되었다고 단정할 필요는 없습니다.

고려의 국자감에서도 산학은 전문 교육의 한 분야였습니다. 오늘날 학교의 수학과 이름이 닮았지만 가르친 대상과 목적 및 내용은 같지 않습니다. 국가의 업무에 필요한 계산 전문가를 양성했다는 맥락에서 당시의 교육을 살펴보아야 합니다.

살림의 문제	필요한 수학적 생각
논밭을 비교한다	넓이와 단위
곡식을 나눈다	비율과 분수
일할 사람을 정한다	수량과 배분
계절과 날짜를 정한다	주기와 계산

읽기의 초점

산학을 현대 수학의 미완성 단계로만 보지 마세요. 어떤 업무를 해결하기에 적합한 지식이었는지 먼저 살펴봅시다.

계산 담당자의 확인 순서

곡식 장부에는 처음 양과 들어온 양과 내보낸 양을 구분해 적을 수 있습니다. 처음 300단위에서 120단위가 들어오고 75단위가 나갔다면 남은 양은 345단위입니다. 마지막 수만 남기지 않고 변화의 과정을 함께 기록해야 다른 사람도 계산을 확인할 수 있습니다.

역사 자료 [2] [6]

산학을 배운다는 것

업무를 해결하는 지식의 자리

오늘날의 수학 교실을 그대로 떠올리면 옛 산학 교육의 성격을 놓치기 쉽습니다. 산학은 나라를 운영하는 데 필요한 전문 지식과 연결되어 있었습니다. 계산을 맡은 사람에게는 수를 다루는 능력뿐 아니라 정해진 문서와 단위를 읽는 능력도 필요했습니다.

예를 들어 창고의 장부를 확인하려면 처음 보관한 양과 새로 들어온 양을 구별해야 합니다. 기록된 수가 크다고 해서 재산이 늘었다고 곧바로 판단할 수는 없습니다. 이미 내보낸 양이 빠졌는지와 여러 기록이 같은 기간을 가리키는지 먼저 살펴야 합니다.

산학의 내용을 읽을 때는 어떤 일을 해결하려 했는지 묻는 편이 좋습니다. 오늘의 기호로 쉽게 나타낼 수 있는 계산에도 실제 업무에서는 여러 판단이 필요합니다. 문제를 수식으로 바꾸기 전에 대상과 기준을 정하는 일은 지금도 수학을 사용하는 과정의 일부입니다.

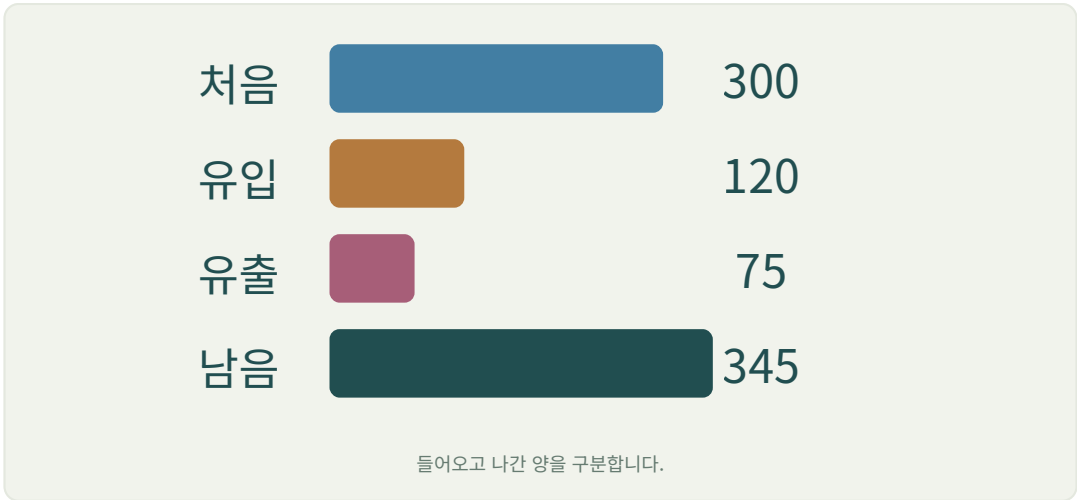
확인할 것	창고 장부에서의 예
대상	어떤 곡식을 세었는가?
단위	모든 기록의 한 단위가 같은가?
기간	언제부터 언제까지의 출납인가?
관계	처음 양 + 들어온 양 - 나간 양 = 남은 양

자료 읽기

산학 교육의 존재를 확인하는 기록과 실제 수업 장면을 자세히 복원하는 자료는 다릅니다. 확인된 범위를 넘어 구체적인 일과를 상상해 쓰지 않도록 주의합니다.

창부에서 지켜지는 관계

남은 양에서 처음 양을 빼면 순증가량이 됩니다. $345 - 300 = 45$ 이며 들어온 양에서 나간 양을 뺀 $120 - 75$ 와 같습니다. 서로 다른 두 계산이 같은 변화를 설명하는지 확인하면 누락된 기록을 찾는 데 도움이 됩니다.



역사적 배경 [6] | 창부 예시는 창작

숫자보다 먼저 정할 단위

한 되와 한 자를 읽기 위한 준비

측정값은 수와 단위가 함께 있을 때 뜻이 분명해집니다. 길이가 12라고만 적혀 있다면 크기를 판단하기 어렵습니다. 무엇을 기준으로 열두 번 잰 것인지 알아야 다른 길이와 비교할 수 있습니다. 옛 기록을 읽을 때도 단위 이름을 건너뛰어서는 안 됩니다.

같은 단위 이름이 모든 시대와 지역에서 정확히 같은 크기를 뜻한다고 가정하는 일도 조심해야 합니다. 역사적 환산에는 해당 시기의 제도와 실제 사용례를 확인하는 과정이 필요합니다. 이 책은 계산 원리를 설명하는 활동에서 현대 단위를 사용하고 당시의 수치와 구별합니다.

단위를 바꿀 때 보존되어야 하는 것은 대상의 실제 크기입니다. 길이 1 m를 100 cm로 써도 막대가 길어지지 않습니다. 단위가 작아지면 같은 크기를 나타내는 수가 커집니다. 이 관계를 이해하면 단위 변환을 암기한 규칙이 아니라 같은 양을 다시 표현하는 일로 볼 수 있습니다.

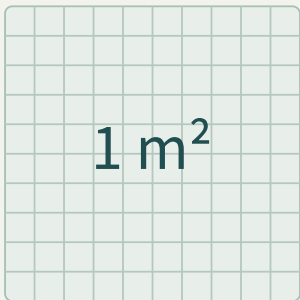
같은 대상	큰 단위로 표현	작은 단위로 표현
길이	2 m	200 cm
넓이	2 m ²	20 000 cm ²
부피	2 m ³	2 000 000 cm ³

단위가 달라질 때

길이의 환산 배수가 넓이와 부피에 그대로 적용되지 않는 까닭을 생각해 보세요. 넓이는 두 방향의 길이로 이루어집니다.

넓이의 환산을 직접 세기

한 변이 1 m인 정사각형의 각 변을 100 cm로 나타내면 안에는 1 cm²짜리 정사각형이 100 × 100 개 들어갑니다. 따라서 1 m²는 100 cm²가 아니라 10 000 cm²입니다. 단위 이름만 바꾸기보다 작은 단위가 몇 번 들어가는지 세어 보면 환산 배수가 드러납니다.



100 cm × 100 cm

작은 칸의 한 변은 10 cm입니다.

산가지의 빈자리

아무것도 놓지 않은 자리도 정보를 담습니다.

산가지는 작은 막대를 놓고 옮기며 수를 나타내고 계산하는 도구입니다. 수의 크기를 알려면 막대의 개수와 놓인 자리를 함께 보아야 합니다. 오늘날 숫자 2가 2와 20과 200에서 서로 다른 값을 나타내듯이 산가지의 자리도 수의 뜻을 결정합니다.

전통적인 산가지 표기에서는 이웃한 자릿수의 막대 방향을 번갈아 바꾸어 구별했습니다. 수가 0인 자리는 비워 두었습니다. 302를 나타낼 때 십의 자리가 비어 있어야 백의 자리와 일의 자리가 서로 섞이지 않습니다. 빈자리는 계산에 필요한 정보를 보존합니다.

덧셈에서 한 자리에 열 개가 모이면 바로 왼쪽 자리의 하나로 바꿀 수 있습니다. 받아올림은 외워야 할 신호이기 전에 같은 양을 다른 단위로 표현하는 교환입니다. 막대를 직접 옮겨 보면 계산 절차와 수의 구조를 함께 볼 수 있습니다.

백의 자리

빈자리

십의 자리

일의 자리

302의 자리값을 차례로 살펴봅니다. 전통 산가지 전체 표기의 복원도는 아닙니다.

작은 탐구 A

302와 32를 구별하는 정보는 무엇인가요? $28 + 17$ 을 계산할 때 일의 자리에서 일어난 교환을 말로 설명해 보세요.

빈자리 두 개가 있는 수

3002에는 십의 자리와 백의 자리가 모두 비어 있습니다. 이를 32와 구별하려면 두 빈자리의 위치를 보존해야 합니다. 302에 10을 더하면 312가 되고 3002에 10을 더하면 3012가 됩니다. 같은 덧셈도 어느 자리에 작용하는지 살펴보면 수의 차이를 분명히 볼 수 있습니다.

전시와 도구 설명 [2] | 탐구 A 해설 101쪽

받아올림을 교환으로 보기

열 개를 하나로 바꾸어도 양은 같습니다.

28과 17을 더할 때 먼저 일의 자리에서 8과 7을 합하면 15가 됩니다. 이 중 열 개를 십의 자리 하나로 옮기면 일의 자리에는 다섯 개가 남습니다. 십의 자리에는 원래 있던 두 개와 한 개에 새로 옮긴 한 개가 더해집니다. 결과는 45입니다.

받아올림은 숫자를 위에 작게 적는 동작만을 뜻하지 않습니다. 같은 양을 더 큰 단위로 묶어 바꾸는 과정입니다. 자리마다 열 배의 관계가 유지되기 때문에 옮기는 규칙도 일정합니다. 어떤 단계에서도 전체 양은 달라지지 않습니다.

뱀셈의 받아내림은 이 교환을 반대로 이용합니다. 43에서 18을 빼려면 십의 자리 하나를 일의 자리 열 개로 바꿉니다. 그러면 43은 십 세 개와 일 열세 개가 됩니다. 표기가 달라졌어도 같은 양이므로 남은 양을 안전하게 계산할 수 있습니다.

3십 + 15일

교환 전

→

4십 + 5일

교환 후

같은 양 45를 다른 묶음으로 나타냅니다.

십의 자리와 일의 자리 사이에서 단위를 교환해도 전체 양은 같습니다.

계산을 설명하기

답만 말하지 말고 어느 단위를 어느 단위로 바꾸었는지 설명해 보세요. $43 - 18 = 25$ 를 덧셈으로도 확인할 수 있습니다.

계산을 반대로 확인하기

$43 - 18 = 25$ 를 얻었다면 $25 + 18 = 43$ 인지 확인할 수 있습니다. 뱀셈에서는 십 하나를 일 열 개로 바꾸었고 검산의 덧셈에서는 일 열 개를 십 하나로 바꿉니다. 서로 반대인 교환을 따라가면 두 계산이 같은 양의 관계를 나타낸다는 사실이 보입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

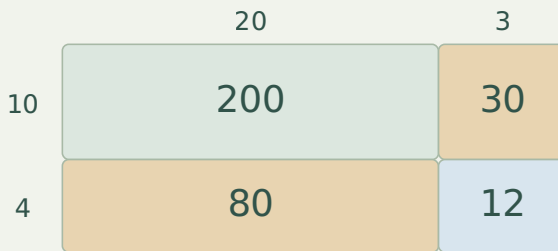
곱셈을 넓이로 펼치다

계산의 단계를 보이게 만드는 그림

23×14 를 한 번에 계산하기 어렵다면 두 수를 나누어 생각할 수 있습니다. 23은 $20 + 3$ 이고 14는 $10 + 4$ 입니다. 가로 23과 세로 14인 직사각형을 이 길이에 맞추어 나누면 네 개의 작은 직사각형이 생깁니다.

각 부분의 넓이는 200과 30과 80과 12입니다. 네 넓이를 더하면 전체 넓이 322를 얻습니다. 어느 부분도 겹치지 않고 빠지지 않았으므로 나누어 계산한 결과와 한 번에 구한 결과가 같습니다. 세로셈에서 부분곱을 적는 절차도 이 관계로 이해할 수 있습니다.

그림은 분배법칙을 설명하는 교육용 표현입니다. 이를 특정 시대의 산학 수업에서 그대로 사용한 그림이라고 생각해서는 안 됩니다. 역사 속 계산을 오늘의 언어로 이해하는 일과 당시의 계산판을 복원하는 일은 구별해서 진행합니다.



$$200 + 30 + 80 + 12 = 322$$

두 길이를 나누어 만든 네 부분의 넓이를 합합니다. 길이는 도식적으로 표시했습니다.

전개해서 계산하기

19×21 은 $(20 - 1) \times (20 + 1)$ 로 바꾸어 계산할 수도 있습니다. 두 방법으로 계산하면 모두 399가 되는지 확인해 보세요.

가까운 수로 다시 계산하기

23×14 를 $23 \times (15 - 1)$ 로 보아도 됩니다. $23 \times 15 = 345$ 에서 23을 빼면 322입니다. 네 부분의 넓이를 더한 결과와 일치합니다. 여러 풀이를 비교할 때는 빠르기만 보지 말고 어느 계산이 머릿속에서 수의 관계를 더 쉽게 유지하게 하는지 살펴보세요.

수학 개념 해설과 창작 탐구

나눗셈에 남는 두 가지 질문

몇 묶음인가와 한 묶음에 얼마인가

곡식 48단위를 한 자루에 6단위씩 담는다면 자루가 몇 개 필요한지 묻게 됩니다. 반대로 48단위를 여섯 자루에 똑같이 나누어 담는다면 한 자루의 양을 묻게 됩니다. 두 문제 모두 $48 \div 6$ 으로 계산하지만 답이 가리키는 대상은 다릅니다.

나눗셈을 이해하려면 계산식에 단위를 붙여 보는 것이 좋습니다. 앞의 문제에서 6은 한 자루에 담는 곡식의 양입니다. 뒤의 문제에서 6은 자루의 수입입니다. 숫자가 같더라도 어떤 양으로 나누었는지에 따라 몫의 단위가 달라집니다.

남는 양이 있을 때는 현실의 조건을 확인해야 합니다. 곡식 50단위를 한 자루에 최대 6단위씩 담으면 여덟 자루를 채우고 2단위가 남습니다. 남은 곡식도 운반해야 한다면 아홉 번째 자루가 필요합니다. 계산의 나머지가 실제 업무에서 어떤 뜻인지 해석해야 답이 완성됩니다.

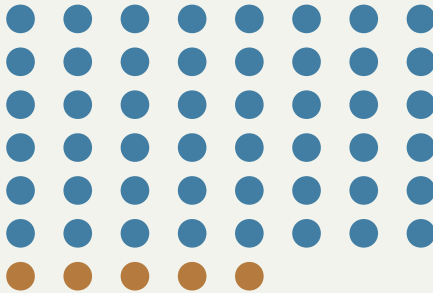
질문	계산	답의 뜻
48을 6씩 담으면?	$48 \div 6 = 8$	자루 8개
48을 여섯 자루로 나누면?	$48 \div 6 = 8$	자루마다 8단위
50을 최대 6씩 모두 담으면?	$50 = 6 \times 8 + 2$	자루 9개 필요

새 탐구 1

사람 53명이 한 대에 8명까지 탈 수 있는 배를 이용합니다. 한 번에 모두 이동하려면 배가 최소 몇 대 필요하나요?해설 118쪽

나머지를 묶음에 넣기

53명을 여덟 명씩 나누면 여섯 묶음과 다섯 명이 남습니다. 여섯 대의 정원 48명이 이미 찼으므로 남은 다섯 명에게는 일곱 번째 배가 필요합니다. 반면 배 한 대의 평균 탑승 인원을 묻는다면 사람 수를 실제 배의 수로 나누는 다른 계산이 필요합니다.



$8 \times 6 + 5 = 53$

마지막 다섯 명도 배가 필요합니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

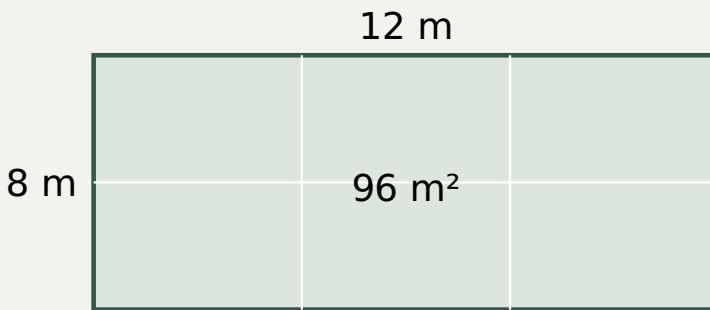
땅을 재는 일의 두 단계

도형을 계산하기 전에 측정 기준을 정합니다.

토지의 넓이를 구하려면 경계를 정하고 길이를 측정하는 일이 먼저입니다. 굽은 경계를 어떤 도형으로 나타낼지와 경사진 땅의 어떤 면을 잴지도 결정해야 합니다. 수치가 정밀해 보여도 측정 대상과 기준이 불분명하면 결과를 바르게 해석하기 어렵습니다.

직사각형 모양의 밭을 생각해 봅시다. 가로가 12 m이고 세로가 8 m라면 넓이는 96 m^2 입니다. 같은 길이를 다른 단위로 쓰더라도 실제 넓이는 바뀌지 않습니다. 하지만 길이의 단위를 두 배 크게 정하면 길이의 수치는 절반이 되고 넓이의 수치는 네 분의 일이 됩니다.

역사 속 조세는 넓이 하나만으로 결정되지 않았습니다. 토지의 질과 수확 조건과 시대별 제도가 함께 작용했습니다. 그러므로 넓이와 세금을 곧바로 같은 것으로 놓는 설명은 교육용 단순화임을 밝혀야 합니다. 수학적 모형이 현실의 어떤 조건을 남기고 어떤 조건을 생략했는지 확인하는 태도가 필요합니다.



현대 단위를 사용한 교육용 예시입니다.

작은 탐구 B

위 밭에서 넓이 1 m^2 마다 씨앗 3 g을 뿌리려 합니다. 필요한 씨앗은 얼마인가요? 비탈진 실제 땅에도 이 계산을 그대로 적용할 수 있을까요?

측정 오차가 넓이에 미치는 영향

가로 12 m를 실제보다 0.1 m 길게 읽고 세로 8 m는 정확히 읽었다면 계산한 넓이는 96.8 m^2 입니다. 가로의 작은 차이가 세로 8 m 전체에 걸쳐 더해집니다. 결과에 소수 자릿수가 많다는 사실만으로 측정이 정밀하다고 판단할 수는 없습니다.

역사적 맥락 [2] | 탐구 B 해설 101쪽

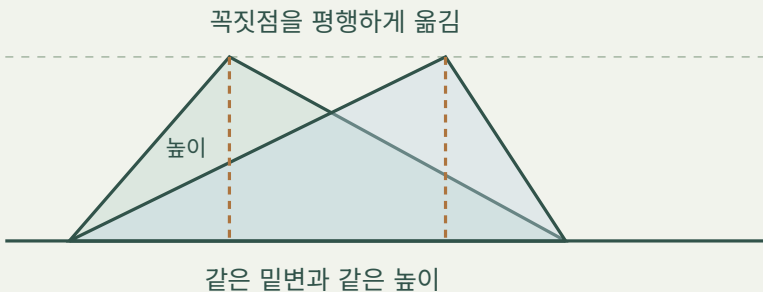
같은 넓이를 다른 모양으로

잘라 옮겨도 보존되는 양을 찾습니다.

직사각형의 넓이는 가로와 세로의 곱으로 구합니다. 삼각형의 넓이도 이 관계에서 출발할 수 있습니다. 한 삼각형과 합동인 삼각형을 하나 더 만들어 맞추면 평행사변형이 되고 그 넓이는 밑변과 높이의 곱입니다. 삼각형 하나의 넓이는 그 절반이 됩니다.

여기서 높이는 기울어진 변의 길이가 아닙니다. 밑변이 놓인 직선에서 맞은편 꼭짓점까지 수직으로 잰 거리입니다. 밑변을 그대로 두고 꼭짓점을 밑변과 평행한 방향으로 옮기면 모양은 변하지만 높이는 변하지 않습니다. 따라서 넓이도 같습니다.

넓이를 구하는 공식은 모양마다 외워야 하는 별개의 약속만은 아닙니다. 이미 아는 도형으로 나누거나 옮겨 붙이면서 보존되는 양을 찾을 수 있습니다. 토지를 평면 도형으로 나타낼 때도 먼저 어느 길이가 밑변과 높이에 해당하는지 분명히 해야 합니다.



색이 다른 두 삼각형은 꼭짓점의 위치가 달라도 넓이가 같습니다.

새 탐구 2

밑변이 10 m이고 높이가 6 m인 삼각형에서 꼭짓점을 밑변과 평행하게 4 m 옮겼습니다. 넓이는 어떻게 될까요?해설 118쪽

높이를 어디에서 잴까

삼각형의 꼭짓점이 밑변의 바깥쪽 위로 옮겨 가도 높이는 밑변이 놓인 직선까지 수직으로 잹니다. 수선의 발이 도형 밖에 놓일 수 있지만 넓이 공식은 같습니다. 높이를 항상 삼각형 안에 그려야 한다고 생각하면 둔각삼각형을 읽을 때 막히기 쉽습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

이어 읽기 / 삼국과 고려의 산학

수선의 발이 밖에 놓인 삼각형의 넓이

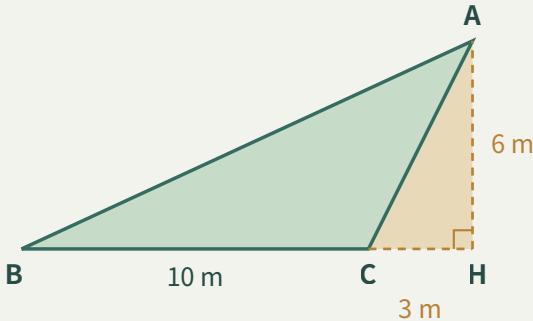
꼭짓점이 밑변 바깥쪽 위로 옮겨 가도 넓이 공식이 그대로인 이유를 빼기로 확인합니다.

본문은 삼각형의 꼭짓점이 밑변의 바깥쪽 위로 옮겨 가도 넓이 공식이 같다고 설명했습니다. 이때 꼭짓점에서 밑변이 놓인 직선에 내린 수선의 발은 삼각형 밖에 놓입니다. 공식이 같다는 말을 믿고 넘어가기보다 이미 아는 넓이로 직접 확인해 보면 둔각삼각형도 낯설지 않게 됩니다. 여기서는 큰 직각삼각형에서 작은 직각삼각형을 빼는 방법을 사용합니다.

밑변 BC가 10 m이고 꼭짓점 A에서 내린 수선의 발 H가 C에서 3 m 바깥에 있다고 합시다. 높이 AH는 6 m입니다. 직각삼각형 ABH는 밑변 13 m와 높이 6 m를 가지므로 넓이가 39 m^2 입니다. 직각삼각형 ACH의 넓이는 $3 \times 6 \div 2 = 9 \text{ m}^2$ 입니다. 삼각형 ABC는 큰 직각삼각형에서 작은 직각삼각형을 뺀 부분이므로 넓이는 30 m^2 입니다.

바깥 거리 3 m를 다른 값으로 바꾸어도 결과는 같습니다. 바깥 거리를 e 로 쓰면 큰 직각삼각형의 넓이는 $(10 + e) \times 6 \div 2$ 이고 작은 직각삼각형의 넓이는 $e \times 6 \div 2$ 입니다. 두 식을 빼면 e 가 들어간 부분이 정확히 지워지고 $10 \times 6 \div 2$ 만 남습니다. 꼭짓점을 밑변과 평행하게 옮기면 e 만 달라지므로 넓이가 변하지 않는다는 본문의 설명이 이 계산으로 뒷받침됩니다.

이 방법은 높이를 왜 밑변이 놓인 직선까지 재야 하는지도 보여 줍니다. 빼기에 쓰인 두 직각삼각형은 모두 같은 높이 AH를 공유합니다. 기울어진 변 AC의 길이를 높이로 잘못 쓰면 두 넓이의 차가 맞지 않습니다. 토지를 도형으로 나타낼 때도 측정한 길이가 수직 거리인지 먼저 확인해야 합니다.



- 직각삼각형 ABH
 $13 \times 6 \div 2 = 39$
- 직각삼각형 ACH
 $3 \times 6 \div 2 = 9$
- 삼각형 ABC
 $39 - 9 = 30$
 $= 10 \times 6 \div 2$

큰 직각삼각형에서 작은 직각삼각형을 빼면 밑변 $\times$ 높이 $\div 2$ 가 남습니다.

바깥 거리	큰 직각삼각형	작은 직각삼각형	삼각형 ABC
1 m	33 m^2	3 m^2	30 m^2
3 m	39 m^2	9 m^2	30 m^2
6 m	48 m^2	18 m^2	30 m^2

탐구

밑변 8 m와 높이 5 m인 삼각형에서 수선의 발이 밑변의 연장선 위 4 m 바깥에 놓였습니다. 두 직각삼각형의 넓이를 빼서 삼각형의 넓이를 구해 보세요.

풀이와 확인

큰 직각삼각형의 밑변은 $8 + 4 = 12 \text{ m}$ 이므로 넓이는 $12 \times 5 \div 2 = 30 \text{ m}^2$ 입니다. 작은 직각삼각형의 넓이는 $4 \times 5 \div 2 = 10 \text{ m}^2$ 입니다. 두 넓이의 차는 20 m^2 이며 $8 \times 5 \div 2 = 20$ 과 같습니다. 바깥 거리 4 m는 계산 과정에서 지워지므로 결과에 영향을 주지 않습니다.

[2] MATHESIS 전시실 1. 국학과 산가지와 첨성대 및 토지 측량

울타리와 씨앗은 다른 양을 묻는다

둘레와 넓이를 구별하는 이유

밭에 울타리를 두르는 문제와 씨앗을 뿌리는 문제는 같은 땅을 바라보지만 필요한 양이 다릅니다. 울타리의 길이는 경계를 따라 켜 둘레로 결정됩니다. 씨앗의 양은 일정한 밀도로 뿌린다는 조건 아래 땅의 넓이에 비례합니다.

가로 12 m와 세로 8 m인 직사각형의 둘레는 40 m이고 넓이는 96 m^2 입니다. 가로 15 m와 세로 5 m인 직사각형도 둘레는 40 m입니다. 그러나 넓이는 75 m^2 이므로 두 밭에 필요한 씨앗의 양은 다릅니다. 같은 둘레가 같은 넓이를 보장하지 않습니다.

문제의 숫자를 보자마자 공식을 고르기보다 무엇을 구하는지 먼저 말로 풀어 보세요. 경계를 따라가는 길이인지 표면을 덮는 크기인지 구별하면 단위도 자연스럽게 정해집니다. 계산을 마친 뒤에는 답의 단위가 질문과 맞는지 확인하는 습관이 도움이 됩니다.

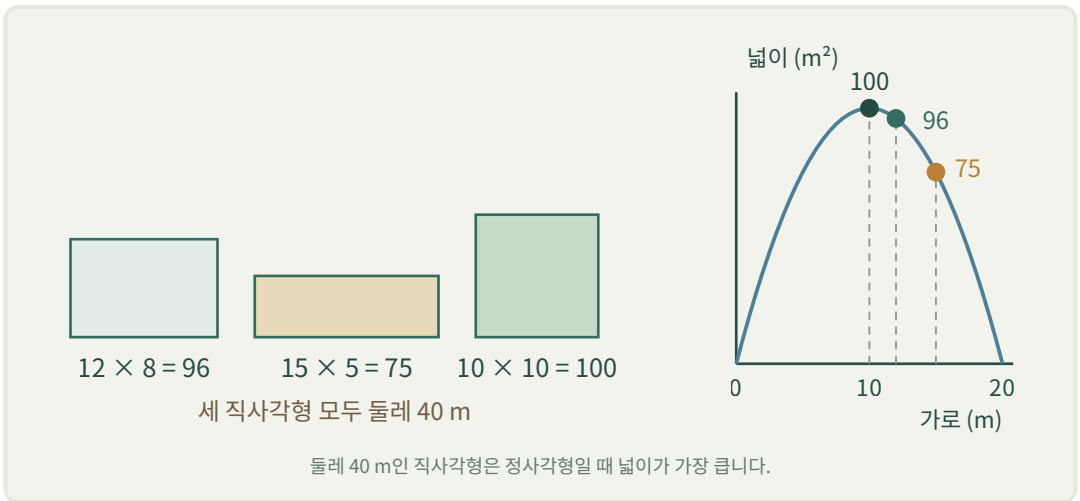
가로와 세로	둘레	넓이
12 m와 8 m	40 m	96 m^2
15 m와 5 m	40 m	75 m^2
10 m와 10 m	40 m	100 m^2

더 생각할 거리

둘레가 40 m인 직사각형을 여러 개 그려 보세요. 가로와 세로가 서로 가까워질수록 넓이에 어떤 변화가 있는지 비교할 수 있습니다.

같은 둘레에서 넓이 비교하기

둘레가 40 m이면 가로와 세로의 합은 20 m입니다. 두 길이를 $10 + d$ 와 $10 - d$ 로 놓으면 넓이는 $100 - d^2$ 입니다. 두 길이의 차이가 커질수록 d^2 가 커져 넓이는 줄어듭니다. 직사각형들 가운데 정사각형에서 넓이가 가장 큰 이유를 이 식으로 설명할 수 있습니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

분수는 전체를 정한 뒤에 읽는다

절반이라는 말에 빠진 정보를 찾습니다.

절반을 나누었다는 말만으로 실제 양을 알 수는 없습니다. 곡식 20단위의 절반과 50단위의 절반은 서로 다릅니다. 분수는 전체와 부분의 관계를 나타내므로 무엇을 전체로 놓았는지 먼저 밝혀야 합니다.

같은 크기의 밭에서 삼분의 일과 사분의 일을 합친다고 생각해 봅시다. 두 부분을 비교하려면 같은 크기의 조각으로 나누어야 합니다. 전체를 열두 조각으로 나누면 삼분의 일은 네 조각이고 사분의 일은 세 조각입니다. 합은 열두 조각 중 일곱 조각이 됩니다.

통분은 분모를 맞추는 형식적인 조작이기 전에 비교 단위를 같게 만드는 과정입니다. 분모와 분자에 같은 수를 곱하면 조각의 크기는 작아지고 조각의 수는 그만큼 늘어납니다. 부분이 차지하는 실제 크기는 그대로 유지됩니다.

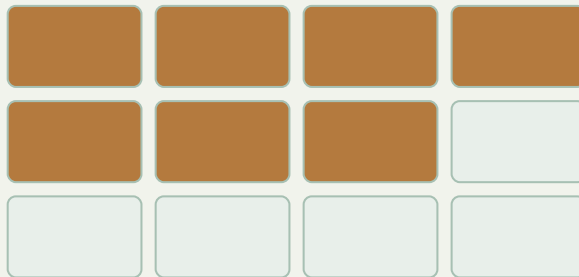
표현	열두 조각으로 다시 표현
전체의 1/3	전체의 4/12
전체의 1/4	전체의 3/12
두 부분의 합	전체의 7/12

새 탐구 3

곡식 60단위 가운데 1/3을 먼저 쓰고 처음 양의 1/4을 더 썼습니다. 남은 양은 얼마인가요? 두 번째 분수의 기준이 처음 양이라는 점을 확인하세요.해설 118쪽

같은 분수를 두 방식으로 읽기

처음 양의 1/3과 1/4을 사용하면 쓴 비율은 7/12이고 남은 비율은 5/12입니다. 처음 양이 60단위라면 $60 \times 5/12 = 25$ 단위가 남습니다. 각각의 사용량을 빼는 풀이와 남은 비율을 먼저 구하는 풀이가 같은 결과를 주는지 비교해 보세요.



사용 7/12 / 남은 5/12

같은 크기의 열두 조각으로 나눕니다.

첨성대 앞에서 멈추다

관찰한 사실과 붙인 해석을 구별합니다.

경주의 첨성대는 한국의 오래된 천문 전통을 떠올리게 합니다. 돌을 쌓은 구조와 창 의 위치와 높이는 실제로 살필 수 있는 대상입니다. 이 구조가 어떻게 사용되었는지를 설명하는 일에는 문헌과 비교 자료와 해석이 더 필요합니다.

돌의 수나 층수를 달력의 수와 연결하는 이야기는 기억에 남기 쉽습니다. 그러나 숫자가 비숫하다는 사실만으로 건축자의 의도를 확정할 수는 없습니다. 어떤 수를 썼는지부터 확인해야 합니다. 보이지 않는 부분이나 보수된 부분을 포함하는 기준에 따라 셈이 달라질 수 있기 때문입니다.

수학을 이용한 해석은 근거를 분명하게 만들기도 하지만 우연한 일치를 과장하기도 합니다. 첨성대를 읽을 때도 관측 시설이라는 전통적 이해와 구체적인 사용 방식에 관한 논의를 구별해야 합니다. 숫자의 상정을 설명하려면 그 해석을 뒷받침할 자료가 있는지 함께 확인합니다.

유적을 방문할 때는 숫자를 찾아내는 활동으로 끝내지 말고 주장과 근거를 짚지어 기록해 보세요. 어떤 설명은 눈으로 확인할 수 있고 어떤 설명은 별도의 자료를 찾아야 한다는 사실이 보일 것입니다.

진술의 종류	물어볼 질문
관찰	직접 보고 재거나 셀 수 있는가?
문헌 기록	어느 자료의 어떤 기록인가?
해석	다른 설명도 가능한가?
교육용 상상	실제 역사와 구별해 표시했는가?

관찰을 기록하는 문장

돌이 몇 개 보인다는 진술에는 관찰한 면과 가려진 부분을 처리한 기준을 함께 적어야 합니다. 그 수가 특정한 주기를 상징한다는 진술에는 별도의 근거가 필요합니다. 한 문장에 관찰과 해석을 섞기보다 나누어 적으면 무엇을 직접 확인했는지 분명해집니다.

전시의 신중한 해석을 따름 [2]

그림의 축척을 읽다

작은 도면이 실제 크기를 담는 방법

지도와 설계도는 큰 대상을 종이 위에 옮깁니다. 모든 길이를 같은 비율로 줄이면 모양의 관계를 유지할 수 있습니다. 축척 1:100인 도면에서 1 cm는 실제 100 cm에 해당합니다. 도면의 길이와 실제 길이를 연결하는 약속이 축척입니다.

길이를 백 분의 일로 줄였다고 해서 넓이도 백 분의 일이 되는 것은 아닙니다. 가로와 세로가 각각 줄어들기 때문에 넓이는 만 분의 일이 됩니다. 도면에서 잰 넓이를 실제 넓이로 바꿀 때는 길이의 비를 두 번 적용해야 합니다.

도면은 필요한 정보를 선택해 표현한 것입니다. 울퉁불퉁한 지표면의 모양이나 건물의 높이를 평면도 하나로 모두 알 수는 없습니다. 축척이 정확하더라도 무엇을 투영하고 무엇을 생략한 도면인지 확인해야 실제 대상과 바르게 연결할 수 있습니다.

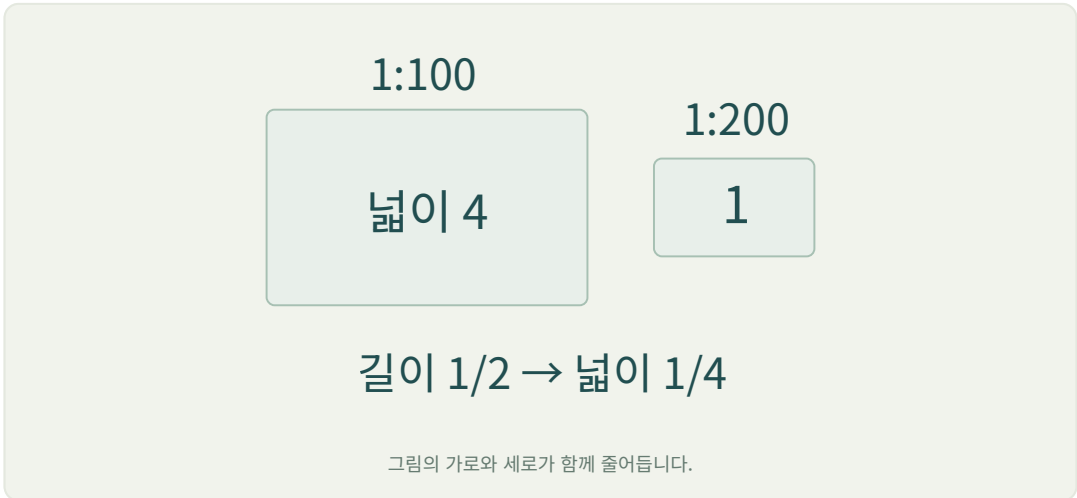
축척 1:100	도면	실제
가로	12 cm	12 m
세로	8 cm	8 m
넓이	96 cm ²	96 m ²

모형을 읽는 질문

축척이 표시되지 않은 그림에서 길이를 재어 실제 크기를 알아낼 수 있을까요? 그림의 모양과 치수 정보는 구별해야 합니다.

축척이 절반이 되면

같은 대상을 1:100 대신 1:200으로 그리면 도면의 가로와 세로는 각각 절반이 됩니다. 종이에서 차지하는 넓이는 사분의 일이 됩니다. 작은 도면을 다시 두 배 확대하면 길이는 원래 도면과 같아지지만 확대 과정에서 새로운 측정 정보가 생기는 것은 아닙니다.



산원의 계산을 다시 해 보다

활동 1 | 배분의 기준은 누가 정할까요?

세 마을이 독을 고치기 위해 공동으로 곡식 240단위를 모았습니다. 일한 날수를 기준으로 나누기로 했고 각 마을의 노동량은 2일과 3일과 5일입니다. 이 수치는 역사 기록을 재현한 것이 아니라 비례배분을 생각하기 위한 가상 조건입니다.

먼저 전체 노동량을 몇 몫으로 나눌 수 있는지 구합니다. 이어 한 몫의 양을 정해 각 마을에 배분합니다. 계산이 끝나면 세 몫의 합이 전체 양과 같은지 확인하세요. 각 결과를 해당 노동일수로 나눈 값도 비교하면 비례 관계가 유지되는지 검산할 수 있습니다.

이번에는 두 번째 마을에서 하루에 일한 사람이 다른 마을보다 두 배 많았다는 조건을 추가해 보세요. 일수만으로 나누는 것이 적절할까요? 사람 수까지 반영하려면 어떤 자료가 더 필요할까요? 계산의 정확성과 배분 기준의 타당성은 서로 다른 문제입니다.

마을	기록된 일수	배분한 곡식
가	2	_____
나	3	_____
다	5	_____
합계	10	240

토론하고 기록하기

같은 계산 결과라도 공정하다고 느끼는 정도가 다를 수 있습니다. 자신이 선택한 배분 기준과 그 이유를 두 문장으로 적어 보세요. HTML의 쪽 메모에 답을 남겨도 좋습니다.

사람 수까지 반영한 배분

각 마을의 하루 인원이 10명과 20명과 10명이며 작업 시간이 같다고 가정하면 노동량은 20과 60과 50인일입니다. 비는 2:6:5로 바뀝니다. 일수의 비 2:3:5를 그대로 쓰는 계산과는 다른 기준입니다. 어느 기준을 택했는지 먼저 밝힌 뒤 배분해야 합니다.

창작 탐구 | 해설 101쪽

비례배분의 검산

합과 비율을 함께 확인합니다.

전체 240을 2:3:5의 비로 나누면 한 몫은 24입니다. 각 몫은 48과 72와 120이 됩니다. 합이 240이라는 사실은 필요한 검산이지만 그것만으로 배분이 옳다고 확정할 수는 없습니다. 40과 80과 120도 합은 같기 때문입니다.

비례배분에서는 각 결과를 해당 비의 수로 나눈 값이 같아야 합니다. $48 \div 2$ 와 $72 \div 3$ 과 $120 \div 5$ 가 모두 24인지 확인하면 각 몫이 같은 기준으로 만들어졌음을 알 수 있습니다. 합의 조건과 비율의 조건은 서로 다른 부분을 검사합니다.

이런 검산은 계산을 그대로 한 번 더 하는 일과 다릅니다. 처음 풀이와 다른 관계를 이용하면 같은 실수를 반복할 가능성을 줄일 수 있습니다. 답을 원래 조건에 넣어 보는 습관은 비례 문제뿐만 아니라 방정식과 도형 문제에서도 유용합니다.

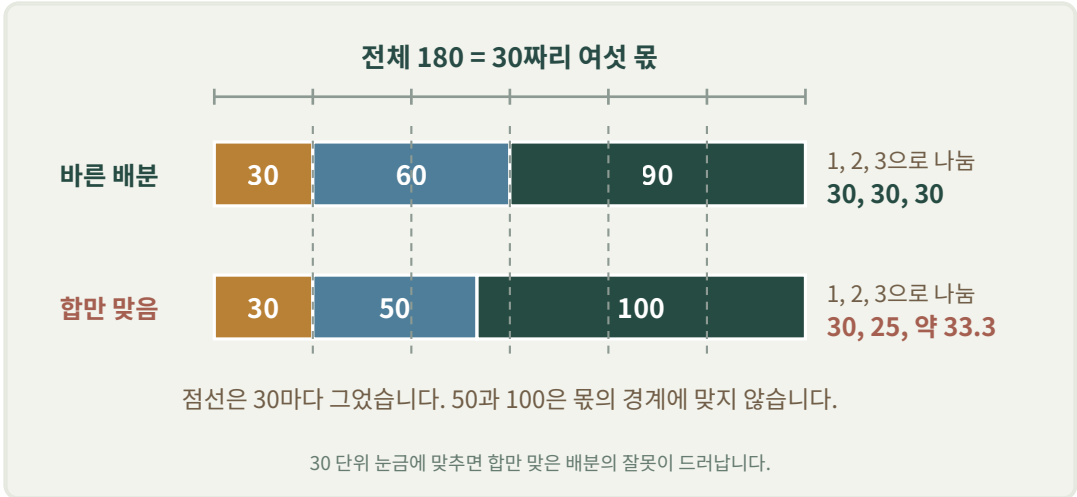
후보	합이 240인가?	2:3:5인가?
48 / 72 / 120	맞음	맞음
40 / 80 / 120	맞음	아님
24 / 36 / 60	아님	맞음

새 탐구 4

곡식 180단위를 1:2:3의 비로 나누어 보세요. 세 결과의 합과 각 결과를 비의 수로 나눈 값을 모두 확인합니다.해설 118쪽

검산에서 드러나는 잘못

전체 180을 1:2:3으로 나눌 때 30과 50과 100을 얻었다면 합은 맞습니다. 그러나 각 결과를 1과 2와 3으로 나눈 값은 서로 다릅니다. 합을 확인하는 검산만 했다면 놓칠 수 있는 오류입니다. 답의 조건마다 대응하는 확인 방법을 마련해야 합니다.



첫 전시실에서 가져갈 생각

계산은 기준을 세우는 일에서 시작합니다.

산가지의 자리는 수의 크기를 정하고 측정 단위는 길이와 넓이의 뜻을 정합니다. 배분 문제에서는 어떤 노동량을 기준으로 삼는지가 각자의 몫을 결정합니다. 계산을 시작하기 전에 기준을 정해야 한다는 사실이 여러 문제를 관통합니다.

정확한 계산도 잘못된 조건을 바로잡지는 못합니다. 서로 다른 크기의 단위를 같은 것으로 취급하거나 필요한 사람 수를 빠뜨리면 연산이 모두 맞아도 결과는 현실과 어긋납니다. 풀이를 검토할 때 숫자뿐 아니라 문제를 수식으로 바꾸는 과정도 돌아봐야 합니다.

다음 전시실에서는 눈앞의 땅과 곡식에서 하늘과 시간으로 시선을 옮깁니다. 직접 잡아 둘 수 없는 움직임을 어떻게 측정하고 기록했는지 살펴봅니다. 여기서 익힌 단위와 비례의 생각이 물시계와 강수량의 원리를 이해하는 데 다시 쓰입니다.

배운 개념	스스로 설명해 볼 내용
자리값	같은 막대가 자리마다 다른 값을 갖는 이유
단위	길이의 환산과 넓이의 환산이 다른 이유
비례	한 몫을 정한 뒤 전체를 배분하는 과정
검산	합이 맞아도 답이 틀릴 수 있는 이유

짧은 글쓰기

첫 전시실의 예 하나를 골라 문제의 기준과 계산 방법과 확인 방법을 한 문단으로 이어 써 보세요. 용어를 나열하기보다 풀이의 흐름을 설명합니다.

단위에서 측정으로 건너가기

이 장의 계산은 대상을 같은 기준으로 나타내는 데서 시작했습니다. 다음 장에서는 시간과 하늘의 움직임에도 기준을 붙입니다. 관측 도구의 눈금을 읽는다는 것은 변화하는 현상을 정해진 수의 체계로 옮기는 일입니다. 그 과정에서도 단위와 검산의 생각이 다시 필요합니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

조선의 시간과 측정

하늘을 읽어 생활을 맞추다

2장 | 세종의 하늘

달력은 날짜를 적은 표이면서 앞으로 일어날 변화를 예상하는 도구입니다. 농사와 의례와 행정의 일정은 계절과 해와 달의 움직임을 알아야 정할 수 있었습니다. 하늘을 관측하는 일과 관측값을 계산하는 일이 함께 필요했습니다.

세종 시대의 역법 연구와 관측 기구 제작은 이런 필요에 응답한 작업입니다. 이순지와 김담을 비롯한 학자들의 역산 연구에는 다른 지역에서 발전한 지식을 읽고 조선의 기준에 맞게 계산하는 일이 포함되었습니다. 지식을 받아들이는 일은 그대로 복사하는 일과 달랐습니다.

『칠정산』의 칠정은 해와 달과 당시 관측하던 다섯 행성을 가리킵니다. 내편은 수시력 계통의 전통과 연결되고 외편에는 회회력 계통의 지식이 담겼습니다. 동아시아와 이슬람 세계의 천문 계산이 조선의 학문 안에서 만나는 장면입니다.

『칠정산』의 완성 시기를 읽을 때는 편찬 과정과 간행을 구별해야 합니다. 전서에서 소개하는 1442년 무렵의 작업과 자료에 정리된 1444년 간행은 같은 사건을 가리키는 표현이 아닐 수 있습니다. 이 책은 본문에서 1440년대의 연구로 설명하고 연표에는 1444년 간행을 표시했습니다.

이번 장의 질문

같은 하늘을 보는데 왜 관측 장소와 계산 기준을 밝혀야 할까요? 정확한 도구만 있으면 서로 다른 곳의 측정값을 바로 비교할 수 있을까요?

달력을 읽는 두 가지 질문

날짜의 이름을 정하는 일과 천체의 위치를 계산하는 일은 연결되어 있지만 같은 작업은 아닙니다. 달의 모양과 계절의 변화를 함께 고려하려면 서로 다른 주기의 관계를 읽어야 합니다. 여러 역법을 비교할 때는 무엇을 맞추려는 체계인지 먼저 살펴보면 차이가 더 잘 보입니다.

전서 [3] | 역법과 연대 보완 [7] [8]

관측과 계산이 만나는 곳

하늘의 기록을 다음 관측의 예상으로 바꿉니다.

하늘을 관측해 얻은 수치는 그 자체로 달력이 되지 않습니다. 같은 현상을 여러 날 기록하고 변화의 규칙을 찾은 뒤 다음 위치를 계산하는 과정이 필요합니다. 관측은 계산을 위한 자료를 제공하고 계산은 다시 무엇을 언제 관측할지 알려 줍니다.

예상한 값과 실제 관측값이 어긋났다면 원인을 나누어 살펴야 합니다. 기구가 정확히 놓였는지와 기록을 잘못 옮기지 않았는지 확인할 수 있습니다. 이런 점검으로 차이가 설명되지 않는다면 계산에 사용한 수치나 모형도 검토해야 합니다. 한 번의 어긋남만으로 모든 원인을 판단하기는 어렵습니다.

세종 시대의 역산과 기구 제작을 함께 읽는 까닭도 여기에 있습니다. 좋은 계산에는 비교할 관측이 필요하고 좋은 관측에는 기준을 갖춘 기구와 기록이 필요합니다. 어느 한 사람의 착상만으로 완성되는 일보다 여러 역할이 맞물리는 작업으로 바라보면 과학의 실제 모습을 더 잘 이해할 수 있습니다.

과정	하는 일
관측	정한 시각과 장소에서 값을 얻음
기록	단위와 조건을 함께 남김
계산	규칙을 이용해 다음 값을 예상함
비교	예상과 관측의 차이를 검토함

관계를 읽기

예상과 실재가 다를 때 계산부터 고치는 것이 항상 옳을까요? 자료와 도구와 모형을 차례로 살펴볼 이유를 생각해 보세요.

다음 관측이 필요한 순간

예상한 그림자 길이가 20 cm인데 22 cm가 측정되었다면 차이는 2 cm입니다. 한 번의 관측으로 원인을 확정하지 말고 같은 조건에서 다시 측정합니다. 값이 비슷하게 어긋나는지와 측정할 때마다 흔들리는지를 구별하면 도구와 계산 중 어느 부분을 점검할지 판단하기 쉬워집니다.

역사적 배경 [7] [8] | 연구 과정은 개념 해설

다른 곳의 지식을 읽는 일

받아들인 방법을 자신의 기준에서 검토합니다.

천문 계산은 다른 지역에서 축적한 지식을 읽고 비교하는 과정과 연결되어 있었습니다.

『칠정산』의 내편과 외편은 서로 다른 역법 계통의 지식이 조선의 학문 안에서 다루어졌다는 사실을 보여 줍니다. 지식의 이동을 어느 한 나라가 모든 것을 홀로 만들었다는 이야기로 줄일 수는 없습니다.

책에 적힌 수치를 사용할 때는 그 수가 무엇을 기준으로 정해졌는지 알아야 합니다. 관측 장소와 계산의 출발점이 다르면 같은 현상을 다루더라도 수치의 쓰임이 달라질 수 있습니다. 낯선 방법을 읽는 일에는 용어를 이해하고 기존 방법과 비교하는 작업이 포함됩니다.

이 책은 내편과 외편의 실제 계산표를 재현하지 않습니다. 대신 단위와 기준을 바르게 읽는 일이 왜 필요한지를 설명합니다. 전통의 차이를 지워 하나의 방식으로 묶기보다 서로 다른 방법이 같은 문제를 어떻게 다루었는지 묻는 편이 생산적입니다.

책을 읽을 때	확인할 내용
무엇을 구하는가?	해와 달 또는 행성의 어떤 위치인가?
어디에서 보는가?	관측 장소와 좌표 기준은 무엇인가?
언제를 시작으로 삼는가?	계산의 기준 시점은 무엇인가?
어떤 수를 사용하는가?	단위와 근삿값의 정밀도는 어떠한가?

역사의 시선

지식이 전해진 경로와 그 지식을 새로 계산하고 해석한 일을 함께 살펴봅니다.

출발점이 다른 표를 비교하기

두 기록이 모두 5일째라고 적혀 있어도 시작 날짜가 다르면 같은 날을 뜻하지 않습니다. 단위가 같다는 조건에 더해 기준 시점도 맞아야 합니다. 시간표와 천문 계산을 읽을 때는 수치에 앞서 기준 시점과 경과 시간의 구분을 확인해야 합니다.

역법의 역사 [7] [8]

달력은 반복을 다루는 모형이다

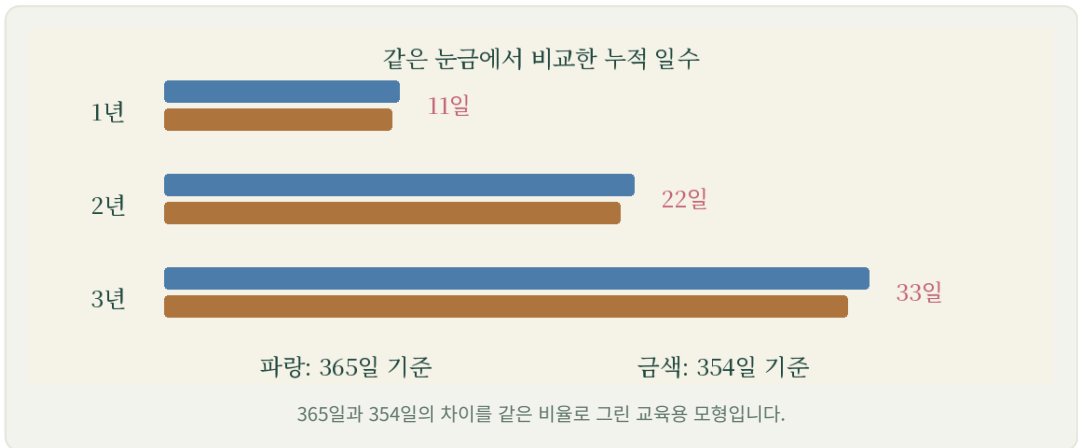
주기가 비슷하다고 꼭 맞아떨어지지 않습니다.

하루와 한 달과 한 해는 서로 다른 운동을 기준으로 정합니다. 문제는 이 주기들이 간단한 정수 관계를 이루지 않는다는 데 있습니다. 낮과 밤을 세는 일만으로 달의 모양과 계절을 언제나 동시에 맞출 수는 없습니다.

원리를 보기 위해 한 달을 29.5일로 가정해 봅시다. 열두 달은 354일이 됩니다. 한 해를 365일로 놓은 단순 모형과 비교하면 11일 차이가 납니다. 이 차이를 그대로 두면 달의 이름과 계절의 관계가 해마다 달라집니다. 윤달을 이해하는 출발점은 이런 주기의 어긋남입니다.

실제 역법은 이보다 훨씬 정밀합니다. 윤달을 언제 두는지 역시 단순히 몇 년마다 하루를 더하는 방식으로 설명할 수 없습니다. 여기서 쓴 수는 계산 원리를 살피기 위한 근삿값이며 『칠정산』에 실린 수치나 계산 절차를 재현한 것이 아닙니다.

모형은 복잡한 현상에서 필요한 관계를 골라 드러냅니다. 모형을 사용할 때는 무엇을 설명하려고 단순화했는지와 어느 정도의 오차를 허용했는지 함께 살펴야 합니다. 계산이 간단해졌다는 이유만으로 그 결과를 모든 상황에 적용할 수는 없습니다.



작은 탐구 C

같은 오차가 3년 동안 누적된다고 가정하면 차이는 며칠인가요? 이 계산만으로 실제 윤달의 위치를 결정할 수 없는 이유도 생각해 보세요.

역법의 역사적 배경 [7] [8] | 수치는 교육용 근사 모형 | 해설 101쪽

반복되는 주기의 어긋남

작은 차이가 긴 시간에 쌓입니다.

한 주기의 길이가 조금 다르면 처음에는 차이가 눈에 잘 띄지 않습니다. 그러나 반복 횟수가 늘어날수록 차이가 쌓입니다. 한 번에 11일씩 어긋나는 단순 모형에서는 세 번 반복한 뒤 33일의 차이가 생깁니다. 누적된 차이는 한 번의 차이보다 판단하기 쉬울 때가 있습니다.

두 시계 중 하나가 하루에 2분씩 늦어진다고 가정해 봅시다. 열흘 뒤에는 20분이 늦어집니다. 매일 생긴 오차가 같은 방향으로 이어지기 때문입니다. 실제 시계의 오차가 언제나 일정하지는 않지만 이런 모형은 반복되는 편향의 영향을 보여 줍니다.

달력의 문제도 주기를 어떤 방식으로 맞출 것인지와 관련됩니다. 다만 이 책의 365일과 354일은 설명을 위한 근삿값입니다. 실제 역법은 더 정밀한 주기와 별도의 배치 규칙을 사용하므로 차이를 나누는 계산만으로 윤달의 위치를 정할 수는 없습니다.

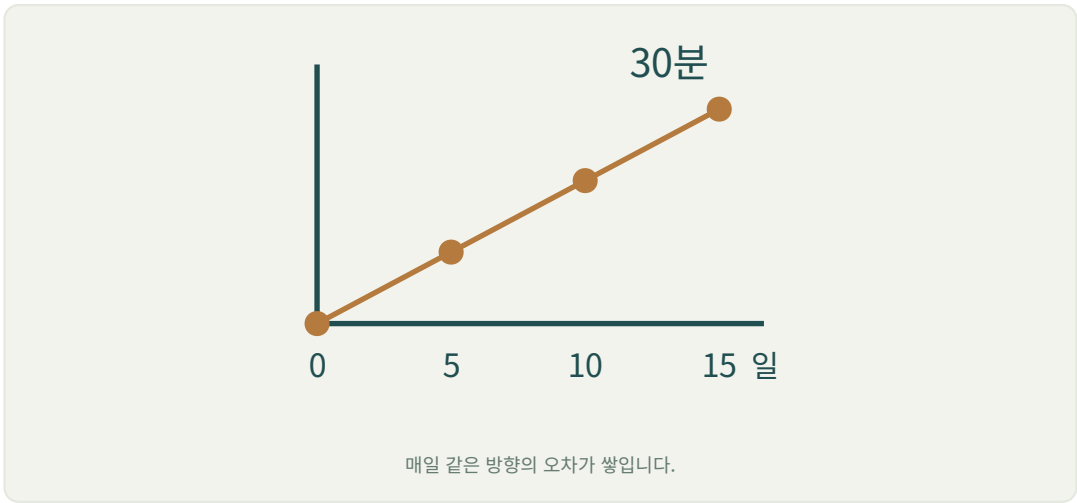
반복 횟수	365일 기준	354일 기준	차이
1	365일	354일	11일
2	730일	708일	22일
3	1095일	1062일	33일

새 탐구 5

하루마다 2분씩 늦어지는 시계가 처음에는 정확했습니다. 15일 뒤의 차이는 얼마인가요? 오차가 일정하다는 가정을 답에 함께 적어 보세요.해설 119쪽

오차의 방향을 함께 기록하기

하루에 2분 늦어지는 경우와 2분 빨라지는 경우는 차이의 크기는 같지만 보정 방향이 반대입니다. 늦음을 -2분으로 나타내면 15일 뒤에는 -30분입니다. 부호를 붙이면 같은 방향으로 쌓이는 변화와 서로 상쇄되는 변화를 하나의 계산 안에서 구별할 수 있습니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

근삿값에는 쓰임이 있다

정확한 자릿수보다 목적에 맞는 정밀도

원주율을 3으로 놓으면 암산은 쉽지만 원의 둘레를 꽤 거칠게 예상하게 됩니다. 3.14를 쓰면 결과가 더 가까워집니다. 어느 값을 사용할지는 목적에 따라 달라질 수 있습니다. 필요한 물건의 대략적인 수를 가늠하는 일과 정밀한 부품을 만드는 일은 요구하는 오차가 다릅니다.

한 달의 길이를 29.5일로 놓는 모형도 같은 관점에서 읽습니다. 이 값은 열두 달과 한 해가 간단히 맞지 않는다는 사실을 설명하는 데 유용합니다. 그러나 정확한 천문 현상의 시각을 예측할 자료로 쓰기에는 부족합니다. 모형이 설명하는 범위를 넘어 수치를 사용하지 않아야 합니다.

반올림한 수를 여러 번 더하거나 곱하면 작은 차이가 커질 수 있습니다. 계산을 시작할 때 어느 자리까지 남길지 정하고 중간 과정에서는 가능한 한 충분한 자릿수를 유지하는 편이 좋습니다. 마지막으로 목적에 맞추어 결과를 정리하면 불필요한 오차를 줄일 수 있습니다.

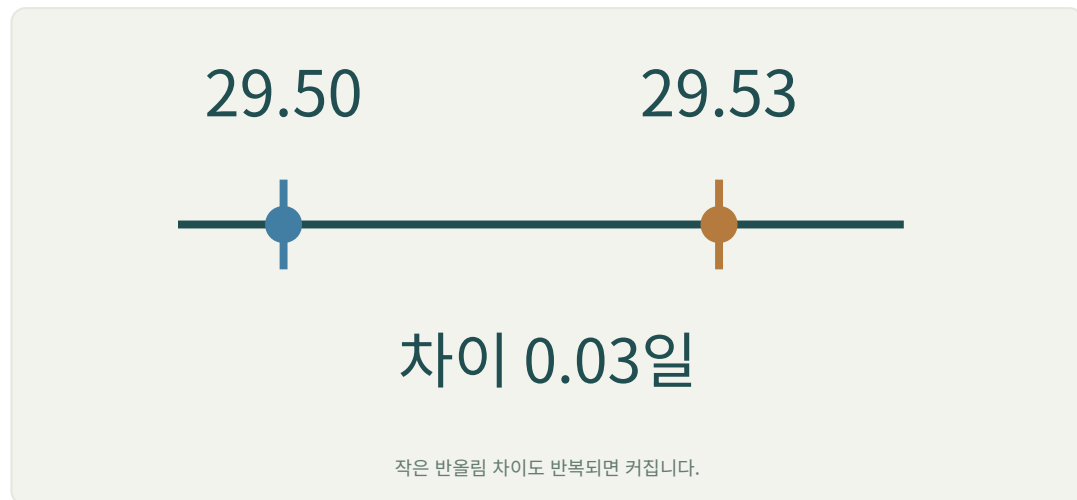
계산용 가정	열두 번 더한 값
한 주기 29.5일	354일
한 주기 29.53일	354.36일
두 가정의 결과 차이	0.36일

수치 읽기

위의 두 값은 반올림의 영향을 비교하기 위한 예입니다. 실제 달의 운동과 달력의 규칙을 완전히 기술하는 수치표가 아닙니다.

중간 반올림을 미루기

29.53을 먼저 29.5로 반올림한 뒤 열두 번 더하면 354입니다. 원래 값을 열두 번 더한 354.36을 마지막에 소수 첫째 자리로 반올림하면 354.4입니다. 어느 단계에서 자릿수를 줄였는지에 따라 결과가 달라질 수 있으므로 계산 과정도 함께 기록합니다.



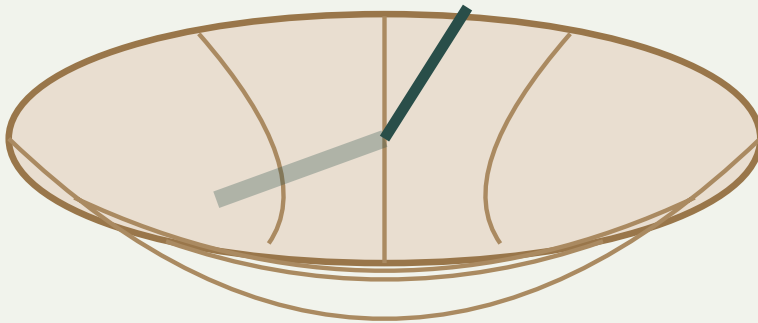
양부일구의 두 가지 눈금

그림자의 위치에서 시간과 계절을 읽습니다.

양부일구는 솥을 하늘로 향하게 놓은 듯한 오목한 시계판을 가진 해시계입니다. 영침이 만드는 그림자를 눈금과 비교해 시각을 읽습니다. 하루 동안 그림자가 옮겨 가는 변화와 계절에 따라 그 경로가 달라지는 변화가 하나의 기구에 담겨 있습니다.

1434년에 혜정교와 종묘 앞에 설치되었다는 기록은 시간을 알려 주는 일이 공공의 서비스였음을 보여 줍니다. 다만 오늘날 박물관에서 보는 양부일구를 모두 그때 제작된 물건으로 생각해서는 안 됩니다. 현존 유물 가운데에는 조선 후기에 만든 것도 있습니다.

해시계가 가리키는 태양시와 손목시계의 표준시는 언제나 같지 않습니다. 관측 장소의 경도와 계절에 따른 차이를 고려해야 합니다. 전자책의 그림은 눈금의 역할을 이해하기 위한 도식이며 실제 시각을 읽는 장치로 사용할 수 없습니다.



오목한 시계판과 영침의 관계를 나타낸 원리 도해입니다.

곡면 위의 눈금을 읽는 태도

평면 해시계를 떠올리면 그림자가 한 방향으로만 움직이는 것처럼 생각하기 쉽습니다. 양부일구의 오목한 면에서는 시각을 나타내는 눈금과 계절의 경로를 함께 읽어야 합니다. 모양만 보고 시간을 추정하지 말고 영침과 시계판이 어떤 기준으로 놓였는지부터 살펴봅니다.

전시 [3] | 공공시계와 현존 유물 [9]

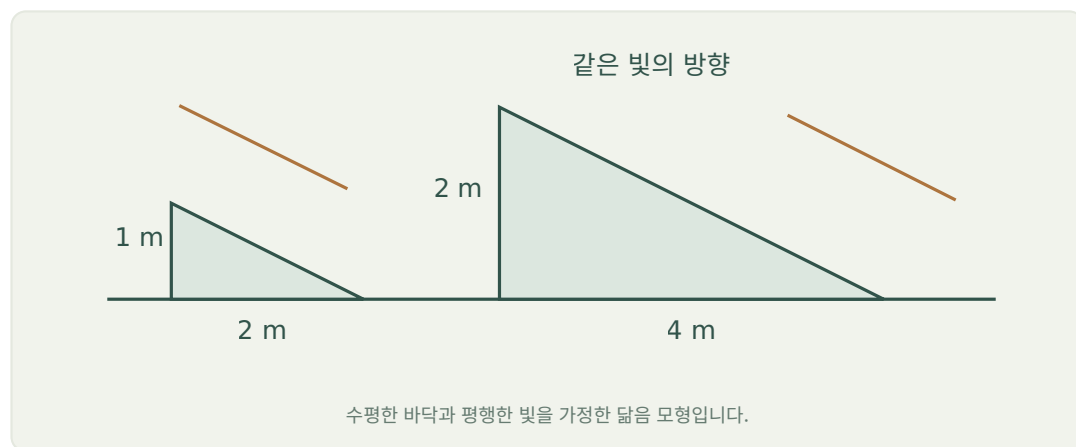
그림자가 움직이는 까닭

빛의 방향과 물체와 바닥의 관계

그림자의 길이는 물체의 높이만으로 정해지지 않습니다. 빛이 들어오는 방향이 달라지면 같은 막대도 서로 다른 길이의 그림자를 만듭니다. 햇빛이 낮은 각도로 들어올 때 그림자는 길어지고 높이 들어올 때는 짧아집니다. 해시계는 이런 변화에 일정한 기준을 붙인 장치입니다.

수평한 바닥에 막대를 수직으로 세운 간단한 모형을 생각해 봅시다. 같은 순간 가까운 두 막대에 들어오는 햇빛을 평행하다고 보면 두 그림은 닮은 삼각형을 이룹니다. 막대의 높이와 그림자의 길이 사이에 같은 비율이 생깁니다.

실험에서는 바닥의 기울기와 막대의 수직 상태를 확인해야 합니다. 관측 시간이 달라지면 빛의 방향도 달라질 수 있습니다. 비례식이 성립하는 조건을 갖추지 않은 채 길이만 비교하면 태양의 변화와 설치 오차를 혼동할 수 있습니다.



새 탐구 6

높이 0.8 m인 수직 막대의 그림자가 1.2 m입니다. 같은 조건에서 그림자 길이가 6 m인 나무의 높이를 구해 보세요. 해설 119쪽

비례식에 단위를 남기기

나무 높이를 h m로 놓으면 $h \div 0.8 = 6 \div 1.2$ 입니다. 오른쪽의 비가 5이므로 h 는 4입니다. 이 계산에서는 네 길이를 모두 m로 맞추었습니다. 한쪽 그림자만 cm로 기록했다면 먼저 단위를 맞추어야 같은 비를 비교할 수 있습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

태양시와 표준시를 나누어 읽기

시계의 기준을 알면 차이가 설명됩니다.

해시계는 태양의 위치를 이용해 시간을 읽습니다. 우리가 일상에서 사용하는 시계는 정해진 표준을 공유합니다. 두 시계가 같은 순간에 다른 값을 보인다고 해서 어느 하나가 반드시 고장 났다고 판단할 수는 없습니다. 서로 무엇을 기준으로 삼는지 먼저 확인해야 합니다.

지구가 한 바퀴 도는 각도 360° 를 24시간으로 나누면 한 시간에 15° 라는 평균적인 관계를 얻습니다. 이를 다시 나누면 경도 1° 에 약 4분이 대응합니다. 동서로 떨어진 두 장소에서 태양이 같은 위치에 오는 시각이 다른 이유를 이 관계로 짐작할 수 있습니다.

이 계산은 평균적인 회전을 이용한 설명입니다. 실제 해시계와 표준시의 차이를 구하려면 장소의 경도뿐 아니라 계절에 따라 달라지는 요소도 고려해야 합니다. 평균 모형으로 전체 원리를 이해한 뒤 정밀한 보정의 필요성을 살펴보는 순서가 좋습니다.

각도의 차이	평균적으로 대응하는 시간
15°	60분
1°	4분
3°	12분

두 질문을 구별하기

원리를 설명하는 계산과 특정 장소의 현재 시각을 정확히 구하는 계산은 요구하는 정보가 다릅니다.

각도와 시간을 연결하기

경도 차이 3°에 대응하는 평균 시간은 12분입니다. 동쪽의 장소에서 태양이 같은 위치를 먼저 지난다는 방향의 정보도 필요합니다. 수치만 계산해 더하거나 빼기 전에 어느 장소를 기준으로 비교하는지 정해 두어야 보정 방향을 거꾸로 적용하지 않습니다.



평균 회전 모형에서 한 구간은 한 시간입니다.

양부일구의 역사 [9] | 평균 회전 모형 해설

물의 흐름을 시간으로 바꾸다

자격루를 이해하는 첫 모형은 비례입니다.

물시계는 흐르는 물을 이용해 시간의 경과를 알아봅니다. 세종 시대 자격루에는 물의 변화가 시각을 알리는 기계 장치로 이어지는 구조가 있었습니다. 사람이 계속 눈금을 지켜보고 소리를 내는 부담을 줄이려는 장치였습니다.

단면적이 일정한 통에 물이 일정한 속도로 들어오는 간단한 모형을 생각해 봅시다. 통의 단면적을 A 로 쓰고 1분 동안 들어오는 물의 부피를 q 로 쓰면 t 분 뒤 물높이의 증가량은 qt/A 입니다. 같은 시간마다 같은 높이만큼 올라가므로 일정한 간격의 눈금을 붙일 수 있습니다.

실제 물의 흐름은 저절로 일정하게 유지되지 않습니다. 물을 내보내는 통의 수면이 낮아지면 흐르는 속도도 달라질 수 있습니다. 따라서 물 공급을 조절하는 구조와 오차를 줄이는 방법까지 살펴야 장치의 작동을 이해할 수 있습니다. 단순한 비례식은 이런 문제를 발견하게 해 주는 첫 모형입니다.

물높이의 증가량 = 들어온 부피 ÷ 단면적

$$\Delta h = qt / A$$

흐른 시간	$A = 100 \text{ cm}^2$ 일 때 높이 증가
1분	$q = 20 \text{ cm}^3/\text{분}$ 이면 0.2 cm
5분	1 cm
10분	2 cm

생각을 넓히기

위로 갈수록 넓어지는 통에서는 같은 양의 물이 들어와도 물높이가 같은 간격으로 올라갈까요?

장치의 역사 [3] | 비례식과 수치는 교육용 모형

일정한 유량을 가정하면

물높이의 눈금에 비례가 나타납니다.

통에 분당 20 cm^3 의 물이 들어오고 통의 단면적이 100 cm^2 로 일정하다고 합시다. 5분 동안 들어온 물의 부피는 100 cm^3 입니다. 이 부피를 단면적 100 cm^2 로 나누면 물높이는 1 cm 올라갑니다. 부피를 넓이로 나누었으므로 결과의 단위는 길이입니다.

유량이 일정하면 두 배 긴 시간 동안 두 배의 물이 들어옵니다. 통의 단면적도 일정하다면 높이 증가량 역시 두 배가 됩니다. 따라서 시간과 물높이 사이에 비례 관계가 생깁니다. 일정한 간격의 시간 눈금을 붙일 수 있는 조건이 여기서 드러납니다.

처음부터 통에 물이 들어 있었다면 전체 높이와 높이의 증가량을 구별해야 합니다. 시작 높이가 3 cm일 때 5분 뒤 높이는 4 cm입니다. 높이의 증가량은 시간에 비례하지만 전체 높이를 시간으로 나눈 값은 일정하지 않습니다.

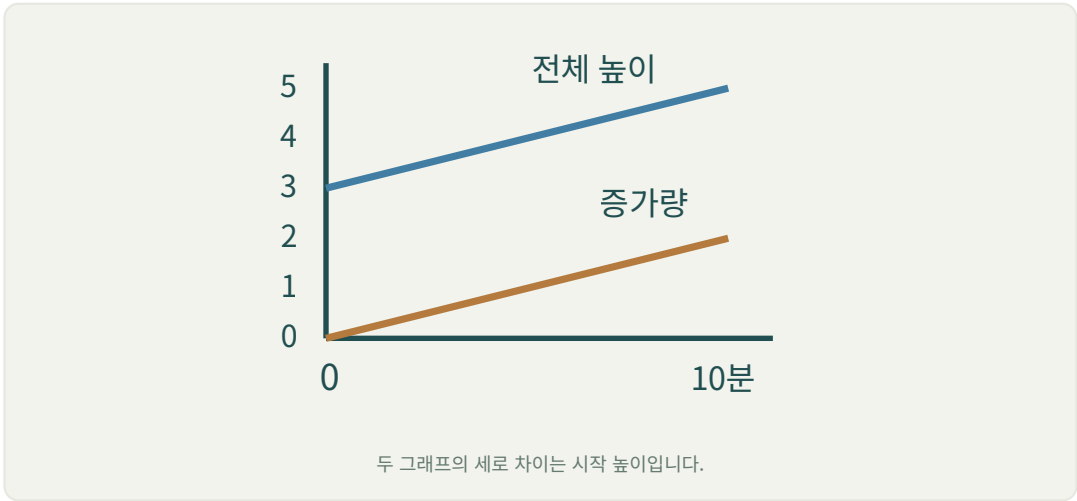
시간	증가한 높이	시작 높이 3 cm일 때
0분	0 cm	3 cm
5분	1 cm	4 cm
10분	2 cm	5 cm

식으로 정리하기

전체 높이 = 시작 높이 + 시간에 따라 증가한 높이입니다. 시작값이 있는 관계를 곧바로 정비례라고 부르지 않도록 주의합니다.

전체 높이와 증가량의 그래프

처음 높이가 3 cm인 통의 물높이는 $h = 3 + 0.2t$ 로 나타낼 수 있습니다. $t = 0$ 일 때도 h 가 3이므로 그래프는 원점을 지나지 않습니다. 반면 증가량만 그리면 $\Delta h = 0.2t$ 가 되어 원점에서 시작합니다. 어떤 양을 세로축에 놓았는지에 따라 그래프의 뜻이 달라집니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

통의 모양을 바꾸면

일정한 부피가 일정한 높이를 만들지 않습니다.

위로 갈수록 넓어지는 통에 물을 넣어 붓시다. 낮은 부분에서는 조금만 물을 부어도 수면이 많이 올라갑니다. 높은 부분에서는 같은 양을 부어도 넓은 공간에 퍼지므로 높이가 덜 올라갑니다. 물의 양이 일정하게 늘어나는 것과 높이가 일정하게 늘어나는 것은 다릅니다.

단면적 100 cm^2 인 곧은 통에서는 100 cm^3 를 넣으면 높이가 1 cm 올라갑니다. 단면적 200 cm^2 인 곧은 통에서는 같은 부피를 넣어도 0.5 cm 만 올라갑니다. 두 통을 비교하면 단면적이 높이 증가량에 어떤 영향을 주는지 알 수 있습니다.

물시계의 눈금을 설계하려면 물이 들어오는 속도와 통의 모양을 함께 고려해야 합니다. 같은 간격으로 그은 눈금이 언제나 같은 시간을 뜻하지는 않습니다. 이 설명은 물시계의 원리를 살피는 단순 모형이며 자격루의 실제 부품을 복원한 설계도가 아닙니다.

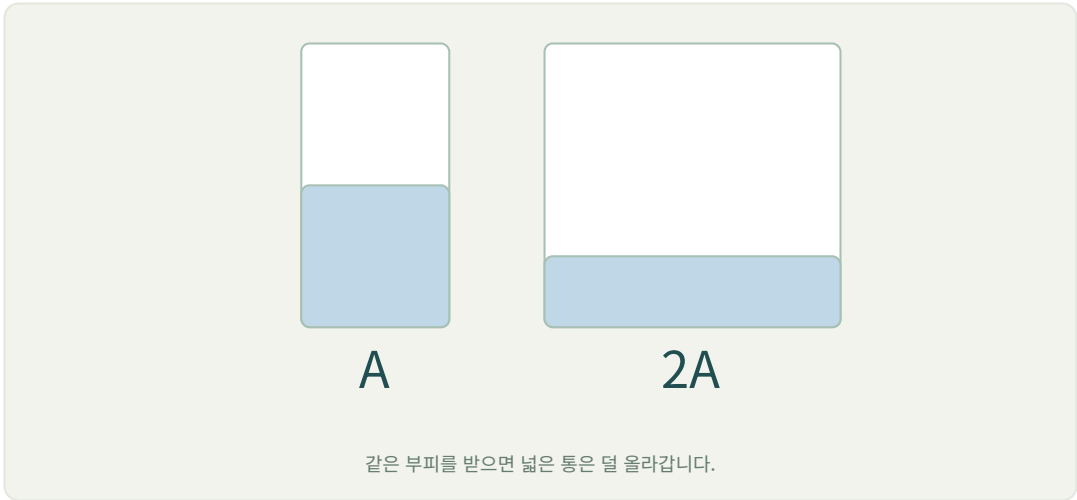
들어온 물	단면적	높이 증가량
100 cm^3	100 cm^2	1 cm
100 cm^3	200 cm^2	0.5 cm
100 cm^3	400 cm^2	0.25 cm

새 탐구 7

단면적 80 cm^2 인 통에 분당 16 cm^3 의 물이 들어옵니다. 15분 뒤 물높이는 얼마나 올라갈까요? 물이 새거나 넘치지 않는다고 가정합니다.해설 119쪽

넓이가 두 배인 통

같은 시간 동안 같은 부피가 들어온다면 단면적이 두 배인 통의 높이 증가량은 절반입니다. 높이를 같게 올리려면 두 배의 부피가 필요합니다. 통의 폭을 두 배로 늘린 것과 단면적을 두 배로 늘린 것도 구별해야 합니다. 원통의 반지름을 두 배로 하면 단면적은 네 배가 됩니다.



이어 읽기 / 조선의 시간과 측정

단면적이 바뀌는 통의 물높이 그래프

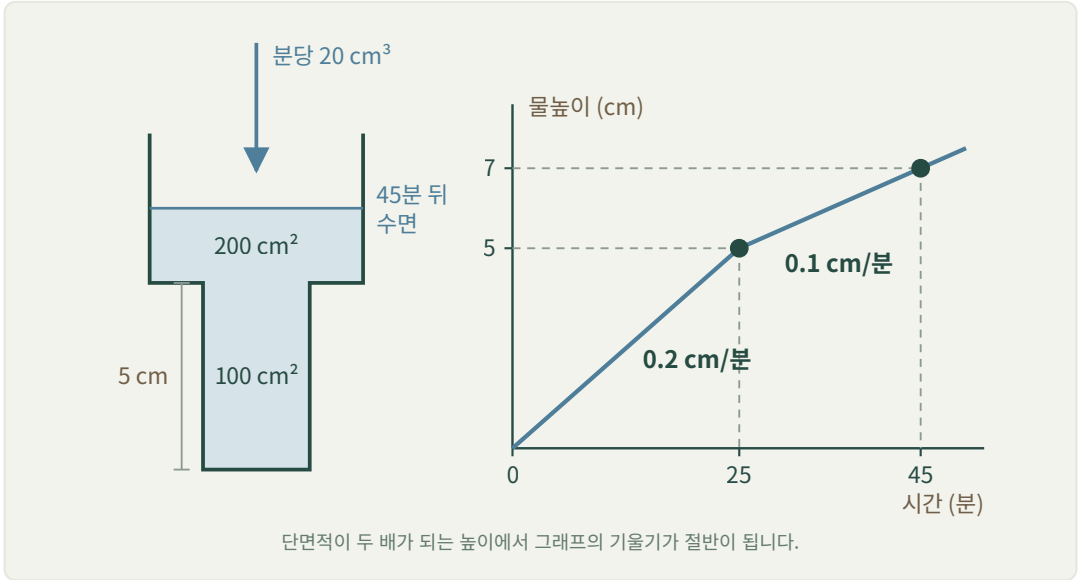
통의 폭이 중간에 달라지면 시간과 물높이의 그래프가 꺾입니다.

본문은 단면적이 일정한 통에서 물높이의 증가량이 시간에 비례한다는 것과 단면적이 두 배인 통은 덜 올라간다는 것을 따로 보였습니다. 이 두 사실을 한 통 안에 함께 넣어 볼 수 있습니다. 아래쪽 5 cm는 단면적이 100 cm^2 이고 그 위는 단면적이 200 cm^2 인 계단 모양의 통을 생각해 봅시다. 물은 분당 20 cm^3 씩 일정하게 들어온다고 가정합니다.

아래쪽에서는 1분마다 $20 \div 100 = 0.2 \text{ cm}$ 씩 올라갑니다. 아래쪽 부피 500 cm^3 를 채우는 데 25분이 걸리므로 25분 뒤 물높이는 5 cm입니다. 그 뒤로는 같은 부피가 넓은 단면에 퍼지므로 1분마다 0.1 cm씩만 올라갑니다. 45분 뒤의 물높이는 $5 + 20 \times 0.1 = 7 \text{ cm}$ 가 됩니다.

그래프로 옮기면 두 개의 선분이 25분에서 이어지며 꺾입니다. 각 선분의 기울기는 유량을 그 구간의 단면적으로 나눈 값입니다. 거꾸로 그래프의 기울기만 읽어도 통의 단면적을 알아낼 수 있습니다. 기울기가 0.1 cm/분 인 구간의 단면적은 $20 \div 0.1 = 200 \text{ cm}^2$ 입니다.

위로 갈수록 조금씩 넓어지는 통이라면 꺾이는 점이 하나가 아니라 계속 이어져 그래프가 완만하게 휘어집니다. 이때 같은 간격의 시간 눈금은 통의 벽에서 점점 좁은 간격으로 놓여야 합니다. 이 설명은 물시계의 원리를 살피기 위한 학습용 모형이며 자격루의 실제 부품을 복원한 것은 아닙니다.



시간	0분	10분	25분	35분	45분
물높이	0 cm	2 cm	5 cm	6 cm	7 cm

탐구

같은 통에서 물높이가 8 cm가 되는 때는 물을 넣기 시작한 지 몇 분 뒤일까요? 아래쪽 단면적이 50 cm^2 였다면 꺾이는 시각은 어떻게 바뀔까요?

풀이와 확인

5 cm를 넘은 뒤에는 1분에 0.1 cm씩 오르므로 3 cm를 더 오르는 데 30분이 걸립니다. 따라서 $25 + 30 = 55$ 분 뒤입니다. 아래쪽 단면적이 50 cm^2 라면 아래쪽 부피는 250 cm^3 이므로 12.5분 만에 5 cm에 도달합니다. 첫 구간의 기울기는 0.4 cm/분으로 더 가팔라집니다.

[3] MATHESIS 전시실 2. 세종 시대의 관측 및 시간 측정 기구

비의 양을 비교하는 방법

측정의 표준은 공정한 비교를 가능하게 합니다.

비가 많이 왔다는 말만으로는 서로 다른 지역의 강수를 정확히 비교하기 어렵습니다. 땅에 스며든 깊이를 재어도 흙의 상태가 다르면 값이 달라집니다. 측우기의 의미는 빗물을 받는 그릇뿐 아니라 정해진 방법으로 측정하고 기록하며 보고하는 체계를 마련했다는 데 있습니다.

『세종실록』에는 1441년 서운관과 지방 관청에 빗물을 받는 기구를 설치하도록 한 기록이 있습니다. 1442년에는 기구의 규격과 측정 단위 및 보고 항목을 더 구체적으로 정했습니다. 발명과 설치 명령과 관측 제도의 정비를 한 사건으로 묶지 않고 살펴야 합니다. 그릇에 모인 물의 깊이를 읽으면 서로 다른 강수 사건을 수치로 비교할 수 있습니다. 같은 절차와 단위를 사용해야 비교의 의미도 유지됩니다.

입구와 내부의 단면적이 같은 곧은 원통형 그릇을 생각해 봅시다. 비가 고르게 내렸고 물이 새거나 튀거나 증발하지 않았다면 모인 물의 부피를 입구 넓이로 나눈 값이 강수 깊이입니다. 그릇이 넓으면 물의 부피는 커지지만 깊이는 같을 수 있습니다.

강수 깊이 = 모인 물의 부피 ÷ 입구 넓이

원통형 그릇	입구 넓이	모인 부피	깊이
가	100 cm ²	200 cm ³	2 cm
나	200 cm ²	400 cm ³	2 cm

작은 탐구 D

두 그릇의 물 부피가 다르더라도 같은 비를 기록했다고 말할 수 있는 까닭을 설명해 보세요. 깔때기가 달린 그릇은 무엇을 더 확인해야 할까요?

집수 면적이 다른 장치

넓은 깔때기로 받은 물을 좁은 통에 모으면 통의 수면은 실제 강수 깊이보다 더 높아집니다. 집수 면적이 통의 단면적의 두 배라면 이상적인 조건에서 수면 상승은 강수 깊이의 두 배입니다. 눈금을 읽기 전에 물을 받은 면적과 물이 고인 면적을 구별해야 합니다.

역사 자료 [10] | 탐구 D 해설 101쪽

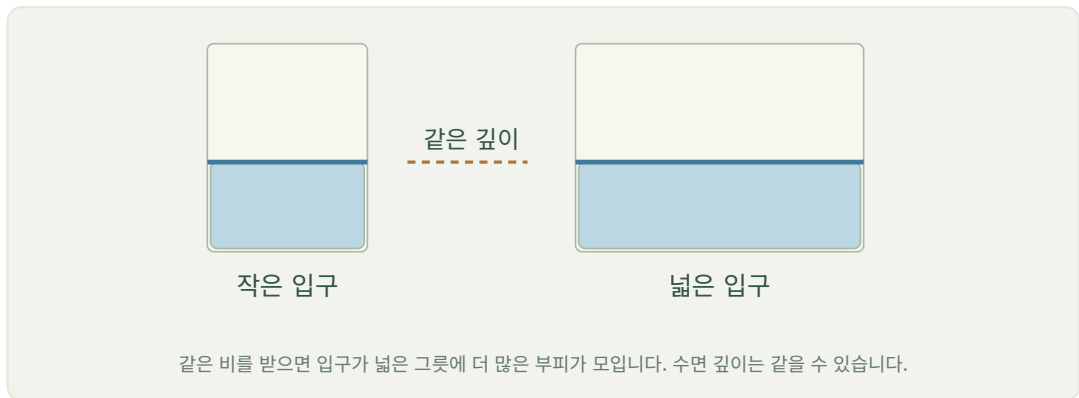
깊이로 비를 비교하는 이유

부피에서 그릇의 크기를 분리합니다.

비를 받은 물의 부피만 비교하면 큰 그릇이 언제나 더 많은 비를 기록한 것처럼 보일 수 있습니다. 입구가 넓으면 같은 비가 내려도 더 많은 물을 받기 때문입니다. 입구 넓이로 나누어 깊이로 표현하면 그릇 크기의 영향을 분리할 수 있습니다.

입구 넓이가 100 cm^2 인 그릇에 물 200 cm^3 가 모였다면 깊이는 2 cm 입니다. 입구 넓이가 200 cm^2 인 그릇에 400 cm^3 가 모인 경우도 같은 깊이입니다. 이 비교는 비가 고르게 내렸고 물이 손실되지 않았다는 조건 아래 성립합니다.

강수량을 mm로 표현하는 까닭도 깊이로 비교하기 위해서입니다. 2 cm 는 20 mm 입니다. 단위를 바꾸었을 뿐 비의 양이 달라진 것은 아닙니다. 지역과 시기를 비교할 때는 측정 도구 뿐 아니라 관측 기간과 기록 단위가 같은지도 살펴야 합니다.



비교의 조건

하루 동안 모은 값과 세 시간 동안 모은 값을 같은 기간의 강수량처럼 나란히 놓지 않도록 주의합니다.

강수 깊이에서 부피로 돌아가기

10 mm 의 비는 깊이 1 cm 에 해당합니다. 넓이 1 m^2 에 고르게 내렸다면 부피는 $10\,000 \text{ cm}^2 \times 1 \text{ cm} = 10\,000 \text{ cm}^3$ 입니다. 이는 10 L 입니다. 강수 깊이를 알면 넓이가 다른 지역에 내린 전체 물의 부피도 같은 원리로 환산할 수 있습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

심화 탐구 기록과 계산의 구조

기구에서 관측망으로

같은 비를 재는 일은 같은 형식으로 기록하는 일까지 이어집니다.

측우기 한 대의 원리를 이해한 뒤에는 여러 관청의 기록이 어떻게 연결되는지 살펴볼 수 있습니다. 『세종실록』의 1441년 설치 관련 기사는 중앙과 지방의 관측 및 보고를 함께 다룹니다. 이듬해 기록은 물의 깊이를 읽는 기준과 비가 시작하고 그친 시각을 남기는 일을 더 상세히 정합니다. 기구의 제작과 기록의 규칙이 함께 다듬어진 것입니다.

현대 단위로 새 관측 노트를 만들어 봅시다. 어느 마을에서는 오전 네 시간 동안 20 mm가 내렸고 다른 마을에서는 두 시간 동안 14 mm가 내렸다고 가정합니다. 누적 강수 깊이는 첫 마을이 크지만 관측 시간으로 나눈 평균 강도는 각각 시간당 5 mm와 7 mm입니다. 많이 왔다는 말을 누적량에 쓸지 평균 강도에 쓸지에 따라 비교 결과가 달라집니다.

평균 강도가 시간당 5 mm였다고 해서 매시간 정확히 5 mm씩 내렸다는 뜻은 아닙니다. 네 시간 중 한 시간에 17 mm가 집중되었을 수도 있습니다. 합계와 기간이 같아도 시간별 분포는 다를 수 있으므로 자료가 제공하는 해상도를 넘는 주장을 해서는 안 됩니다. 과거 기록을 현재의 세밀한 관측과 비교할 때도 같은 주의가 필요합니다.

관측값이 없는 날은 0 mm로 채우지 않습니다. 0은 관측했으나 비가 없었다는 판단이고 빈 칸은 관측 여부나 기록 상태를 더 알아야 한다는 뜻입니다. 월 합계를 구할 때 빠진 날이 있으면 확인된 날의 합과 자료가 없는 기간을 함께 적어야 합니다. 단위뿐 아니라 결측을 처리하는 약속도 비교의 일부입니다.

이 활동의 mm와 시간당 강도는 현대적 교육 모형입니다. 조선의 원문이 같은 단위와 표를 사용했다는 뜻은 아닙니다. 역사 자료에서는 실제 기록의 단위와 관측 간격을 먼저 읽고 환산 근거가 있는 부분만 현대 값으로 옮겨야 합니다.

비교 항목	가 마을	나 마을
관측 기간	4시간	2시간
누적 강수 깊이	20 mm	14 mm
평균 강수 강도	5 mm/시간	7 mm/시간

탐구

세 날의 기록이 0 mm와 빈칸과 12 mm입니다. 이 자료로 사흘 동안 내린 비가 12 mm라고 확정할 수 있을까요?

풀이와 확인

확정할 수 없습니다. 확인된 두 날의 합은 12 mm입니다. 빈칸인 날에 비가 없었는지 또는 기록이 빠졌는지는 알 수 없습니다. 전체 기간의 합계와 확인된 기록의 합계를 구분해야 합니다.

[KR24] 국사편찬위원회 세종실록 93권 세종 23년 8월 18일 제4기사 / [KR25] 국사편찬위원회 세종실록 96권 세종 24년 5월 8일 제1기사

눈금만 읽어서는 부족하다

설치 조건과 기록 절차를 확인합니다.

측정 기구에 정교한 눈금이 있어도 설치 조건이 잘못되면 결과가 달라질 수 있습니다. 빗물을 받는 입구가 기울어져 있거나 주변 물체가 비를 가리면 같은 장소에서도 다른 값이 나옵니다. 측정값은 기구의 성능과 사용 방법이 함께 만든 결과입니다.

값을 읽는 사람 사이에 차이가 생길 수도 있습니다. 눈의 높이가 수면과 다르면 눈금이 다르게 보일 수 있고 기록을 옮기는 과정에서 자릿수가 바뀔 수도 있습니다. 같은 절차를 정해 반복하면 이런 차이를 줄이고 서로의 기록을 검토하기 쉬워집니다.

측우기를 빗물을 담는 통으로만 설명하면 측정 체계의 의미를 놓칩니다. 여러 곳의 기록을 비교하려면 단위와 관측 시각과 보고 방식이 함께 정해져야 합니다. 공통의 규칙은 많은 사람의 관측을 하나의 자료로 연결하는 역할을 합니다.

점검할 부분	기록에 남길 질문
설치	입구가 수평인가? 가리는 물체가 있는가?
관측	언제부터 언제까지 모았는가?
판독	어떤 눈금과 단위를 사용했는가?
보고	옮겨 적은 수를 다시 확인했는가?

측정 노트

직접 실험한다면 성공한 값만 남기지 마세요. 기구를 건드렸거나 물을 흘린 상황도 적어 두어야 나중에 차이를 설명할 수 있습니다.

눈높이에 따른 읽기 차이

눈금보다 높은 곳에서 비스듬히 내려다보면 수면과 눈금의 대응이 달라 보일 수 있습니다. 수면과 비슷한 높이에서 정한 기준으로 읽는 절차를 공유하면 관측자 사이의 차이를 줄일 수 있습니다. 정밀한 기구를 갖추는 일과 일관된 읽기 방법을 정하는 일은 함께 필요합니다.

측우기의 제도적 배경 [10] | 측정 절차는 현대적 해설

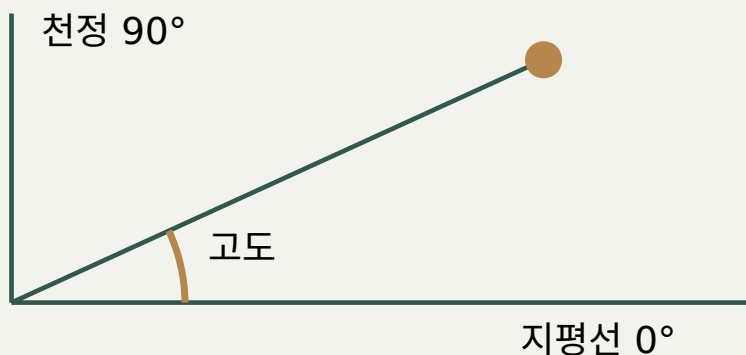
하늘에 좌표를 붙이다

별의 자리를 숫자로 옮기려면 기준이 필요합니다.

별이 높이 떠 있다는 말만으로는 다른 사람이 같은 자리를 찾기 어렵습니다. 방향과 높이를 수로 나타내면 관측 결과를 기록하고 비교할 수 있습니다. 혼천의와 간의 같은 기구는 하늘의 위치를 일정한 기준에 따라 측정하려는 노력과 연결됩니다.

간단한 관측에서는 지평선에서 얼마나 올라가 있는지를 고도로 나타낼 수 있습니다. 지평선은 0° 이고 머리 바로 위는 90° 입니다. 같은 별이라도 시간과 관측 장소가 달라지면 이런 값이 달라집니다. 따라서 숫자만 기록하지 말고 언제 어디서 어떤 기준으로 측정했는지 함께 적어야 합니다.

하늘을 나타내는 좌표에는 여러 방식이 있습니다. 이 책의 그림은 고도의 뜻을 보여 주는 현대적 도해입니다. 옛 기구의 모든 눈금이 이 그림과 같은 좌표계를 썼다고 이해해서는 안 됩니다. 시대마다 사용한 기준과 계산 체계를 따로 읽어야 합니다.



관측자를 기준으로 한 별의 고도. 도해의 각도는 특정 관측값이 아닙니다.

고도는 위치의 한 성분입니다

고도가 30° 인 별은 하나로 정해지지 않습니다. 동쪽에도 서쪽에도 같은 높이의 방향이 있기 때문입니다. 방향을 나타내는 값과 높이를 나타내는 값을 함께 주어야 하늘의 한 위치를 더 구체적으로 가리킬 수 있습니다. 좌표를 빠짐없이 기록해야 하는 이유입니다.

관측 기구의 역사 [3] | 좌표 설명은 현대적 재구성

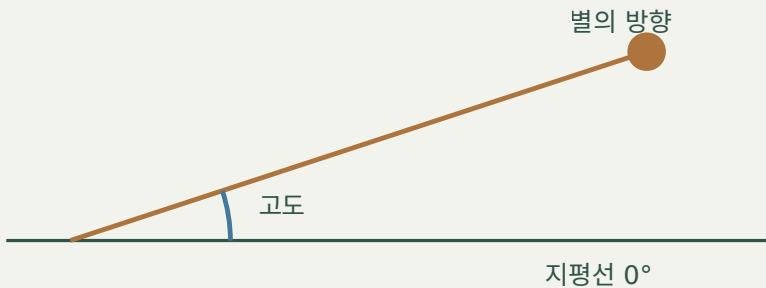
좌표는 약속에서 시작한다

두 수만으로는 위치를 완전히 알 수 없습니다.

같은 장소도 기준점을 어디에 두느냐에 따라 다른 좌표로 나타납니다. 교실의 왼쪽 앞을 출발점으로 삼을 때와 오른쪽 뒤를 출발점으로 삼을 때 같은 책상의 수가 달라집니다. 좌표는 대상의 고유한 이름이 아니라 정해진 기준 안에서 위치를 표현하는 방법입니다.

하늘에서 별의 위치를 나타낼 때도 방향을 재는 출발점과 각도가 늘어나는 방향을 정해야 합니다. 고도는 지평선에서 위로 잴 각도로 나타낼 수 있습니다. 방위각을 함께 기록하면 어느 방향에서 얼마나 높이 보이는지 설명할 수 있지만 사용한 약속도 밝혀야 합니다.

관측 시각과 장소도 빠뜨릴 수 없습니다. 같은 별이 시간에 따라 다른 방향과 높이에 보이기 때문입니다. 숫자 두 개를 정확히 적었더라도 기준과 조건이 없으면 다른 관측자에게 충분한 정보가 되지 않습니다.



지평선을 기준으로 위쪽으로 벌어진 각도를 고도로 읽습니다. 실제 관측값을 그린 도면은 아닙니다.

정보를 해석하기

북쪽을 0°로 삼아 시계 방향으로 재면 방위각 90°는 동쪽입니다. 위 그림은 고도의 뜻만 보여 줍니다. 별의 위치를 나타내려면 방위각과 관측 시각 및 장소도 함께 기록해야 합니다.

같은 각도를 다른 약속으로 쓰기

북쪽에서 시계 방향으로 재는 약속에서는 동쪽이 90°이고 남쪽이 180°입니다. 출발점이나 증가 방향이 달라지면 같은 방향을 다른 수로 적게 됩니다. 값이 다르다는 이유만으로 관측이 틀렸다고 판단하기 전에 좌표의 약속부터 비교해야 합니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

각도와 길이를 구별하기

멀리 있는 대상도 같은 각도로 보일 수 있습니다.

팔을 뻗어 작은 물체를 바라보면 멀리 있는 큰 물체를 가릴 수 있습니다. 눈에서 보이는 범위는 실제 길이뿐 아니라 거리에도 영향을 받습니다. 하늘의 위치를 각도로 나타낼 때는 지면 위의 거리를 재는 것과 다른 양을 다루고 있음을 기억해야 합니다.

두 별 사이의 각거리가 작다고 해서 두 별이 공간에서도 가까이 있다고 단정할 수는 없습니다. 시선 방향은 비슷해도 우리에게서 떨어진 거리는 크게 다를 수 있습니다. 평면에 찍힌 두 점의 간격과 실제 공간의 거리는 같은 정보가 아닙니다.

그림으로 천문 기구를 읽을 때도 원의 크기와 눈금의 뜻을 나누어 봅니다. 도해에서 크게 그려진 각도가 실제 각도와 비례하지 않을 수 있으므로 수치와 축척 표시를 확인해야 합니다. 이 책의 하늘 그림은 위치를 정하는 원리를 보여 주기 위한 도식입니다.

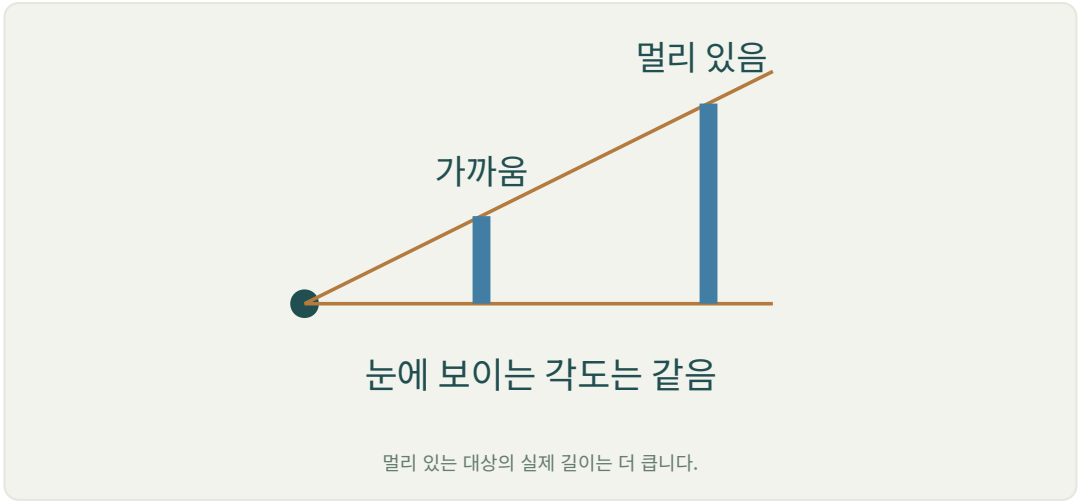
양	무엇을 나타내는가?	대표 단위
길이	두 지점 사이의 거리	m
각도	두 방향이 벌어진 정도	°
시간	두 사건 사이의 간격	초 또는 분

그림 읽기

눈에 보이는 간격이 같다는 사실과 실제 거리가 같다는 주장은 다릅니다. 둘을 연결하려면 어떤 정보가 더 필요한지 생각해 보세요.

시선 위에 있는 두 대상

눈에서 뻗은 같은 두 시선 사이에 놓인 물체는 거리가 달라도 비슷한 각도 크기로 보일 수 있습니다. 멀리 있는 물체가 가까운 물체보다 실제로 더 클 수 있는 까닭입니다. 각도 자료를 실제 길이로 바꾸려면 거리와 기하학적 관계에 대한 추가 정보가 필요합니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

좋은 측정에는 기록이 따라온다

활동 2 | 그림자의 변화를 표로 만듭니다.

맑은 날 같은 장소에 짧은 막대를 수직으로 세우고 그림자 길이를 여러 시각에 측정해 봅시다. 태양을 직접 바라보지 않고 바닥의 그림자만 살펴봅니다. 막대가 기울어지지 않았는지와 바닥이 평평한지를 먼저 확인하세요.

시각과 장소를 먼저 적고 막대의 높이와 그림자의 길이를 함께 기록합니다. 다른 사람이 측정해도 비교할 수 있도록 길이의 시작점과 끝점을 정해 두세요. 구름 때문에 그림자 끝이 흐리다면 정확한 값처럼 적기보다 관측 상태를 덧붙이는 편이 좋습니다.

아래 표는 실제 측정 자료가 아닌 연습용 자료입니다. 가장 짧은 그림자가 기록된 시각을 찾을 수는 있지만 이 표만으로 실제 태양의 남중 시각을 확정할 수는 없습니다. 측정 간격 사이에 더 짧은 순간이 있었을 수도 있습니다.

시각	막대 높이	그림자 길이
10:00	20 cm	25 cm
11:00	20 cm	18 cm
12:00	20 cm	15 cm
13:00	20 cm	16 cm
14:00	20 cm	21 cm

보고서의 마지막 문장

관측으로 확인한 사실 한 가지와 자료가 더 있어야 판단할 수 있는 사실 한 가지를 각각 적으세요. 측정 값의 개수가 많다고 모든 질문에 답할 수 있는 것은 아닙니다.

측정 간격을 좁혀 보기

12시 전후에 그림자가 가장 짧아 보였다면 11시 50분부터 12시 10분까지 더 자주 측정해 볼 수 있습니다. 처음 자료로 관심 구간을 고른 뒤 관측을 촘촘히 하는 방식입니다. 기록 횟수를 무조건 늘리기보다 확인하려는 질문에 맞추어 간격을 정합니다.

창작 탐구 | 해설 101쪽

반복 측정의 평균과 범위

한 번의 값보다 기록 전체를 읽습니다.

같은 길이를 다섯 번 재었더니 9.8 cm와 10.1 cm와 10.0 cm와 10.2 cm와 9.9 cm가 나왔다고 합시다. 눈금을 읽는 방식이나 기구의 위치가 조금씩 달라지면 측정값도 흩어질 수 있습니다. 하나만 고르기보다 기록 전체를 살펴보는 편이 좋습니다.

다섯 값을 더해 다섯으로 나누면 평균은 10.0 cm입니다. 가장 큰 값과 가장 작은 값의 차이는 0.4 cm입니다. 평균은 기록의 중심을 보여 주고 범위는 값들이 얼마나 퍼졌는지 간단히 나타냅니다. 두 정보가 함께 있어야 관측의 상태를 더 잘 이해할 수 있습니다.

평균을 구했다고 해서 참값을 알아낸 것은 아닙니다. 눈금의 시작이 잘못된 자를 사용했다면 여러 번 재어도 같은 방향으로 어긋날 수 있습니다. 반복 측정은 우연한 흔들림을 살피는데 도움이 되지만 기구의 편향을 스스로 없애 주지는 않습니다.

기록	값
다섯 측정값	9.8 / 10.1 / 10.0 / 10.2 / 9.9 cm
합	50.0 cm
평균	10.0 cm
최댓값 - 최솟값	0.4 cm

새 탐구 8

물높이를 네 번 읽은 값이 12 mm와 13 mm와 11 mm와 12 mm입니다. 평균과 범위를 구하고 이 둘이 서로 무엇을 알려 주는지 설명해 보세요. 해설 119쪽

평균에서 떨어진 만큼 더하기

평균 10.0 cm에서 다섯 측정값이 벗어난 양은 -0.2와 0.1과 0과 0.2와 -0.1 cm입니다. 이를 더하면 0이 됩니다. 평균보다 작은 값과 큰 값의 차이가 서로 균형을 이루는 것입니다. 다만 이런 균형이 측정 기구의 공통된 오차까지 없애 주지는 않습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

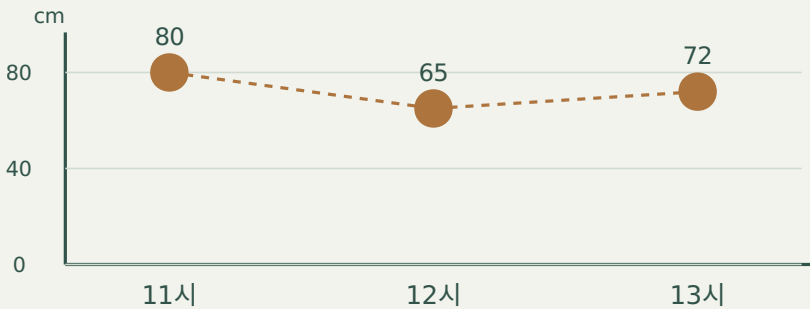
측정값을 표와 그래프로 옮기기

보이지 않은 구간은 추정으로 남겨 둡니다.

일정한 간격으로 그림자 길이를 재면 시간에 따른 변화를 표로 정리할 수 있습니다. 표는 정확한 측정값을 찾기 좋고 그래프는 증가와 감소의 흐름을 보기 좋습니다. 같은 자료라도 표현 방식에 따라 눈에 들어오는 특징이 달라집니다.

오전 11시와 낮 12시와 오후 1시에만 측정했다면 그 사이의 값은 직접 관측한 값이 아닙니다. 그래프의 점을 선으로 이으면 변화의 흐름을 예상할 수 있지만 선 위의 모든 점을 측정했다고 말할 수는 없습니다. 가장 짧은 그림자가 정확히 12시에 생겼다는 결론도 추가 관측 없이 확정하기 어렵습니다.

표와 그래프에는 축의 이름과 단위를 적어야 합니다. 세로축의 범위를 좁히면 작은 차이가 크게 보일 수 있습니다. 자료를 읽을 때는 모양만 보지 말고 눈금의 간격과 생략 여부를 함께 확인하는 습관이 필요합니다.



점은 연습용 관측값입니다. 점 사이의 점선은 변화를 연결해 보여 줄 뿐 실제 측정값은 아닙니다.

측정과 추정

이 세 값 가운데 최솟값은 65 cm입니다. 그러나 하루 전체의 최솟값이 반드시 65 cm라는 뜻은 아닙니다. 관측한 범위와 주장하는 범위를 맞추어야 합니다.

표와 그래프의 역할을 바꾸어 보기

표에서 12시의 값을 읽으면 65 cm라는 수를 곧바로 얻습니다. 그래프에서는 감소한 뒤 증가하는 흐름이 먼저 눈에 들어옵니다. 정확한 값을 전달하려는지 변화의 모습을 설명하려는지에 따라 표현을 선택하고 필요하면 두 방식을 함께 제시합니다.

수의 배열과 방정식

수의 배열에서 생각의 구조로

3장 | 조선 산학의 꽃

수를 계산할 때와 배열할 때는 주목하는 관계가 다릅니다. 계산에서는 주어진 양으로부터 필요한 값을 구합니다. 배열에서는 여러 조건을 동시에 만족하도록 수의 자리를 정합니다. 한 줄에서 맞는 선택이 다른 줄의 조건과 충돌할 수 있으므로 전체의 관계를 살펴야 합니다. 최석정의 『구수략』은 배열의 규칙을 탐구한 중요한 자료입니다. 오늘날 직교 라틴 방진으로 해석하는 9차 배열과 지수귀문도는 수의 배치가 풍부한 연구 대상이 될 수 있음을 보여줍니다. 이 책에서는 작은 배열부터 시작해 조건의 차이를 이해합니다.

홍정하의 『구일집』에서는 문제를 방정식으로 옮기는 사고를 만납니다. 서로 다른 생활 상황을 같은 수학적 관계로 표현하면 하나의 방법을 여러 문제에 적용할 수 있습니다. 계산 기술이 문제의 구조를 드러내는 언어가 되는 순간입니다.

조선의 산학을 이해할 때는 누가 지식을 생산했는지도 살펴야 합니다. 관료와 전문 기술자의 학자는 서로 다른 사회적 위치에 있었습니다. 저술과 문답과 협력은 지식이 개인의 머릿속에만 머무르지 않고 이어지는 통로였습니다.

탐구 대상	살펴볼 조건
마방진	합이 같은가?
라틴 방진	각 행과 열에 기호가 한 번씩 나오는가?
직교성	겹친 순서쌍이 전체에서 중복되지 않는가?
방정식	같아야 하는 두 양은 무엇인가?

계산 결과보다 관계를 묻기

마방진에서 같은 수를 서로 바꾸면 전체 합은 유지됩니다. 그러나 각 줄의 합은 달라질 수 있습니다. 전체의 양이 그대로라는 사실과 모든 조건이 유지된다는 사실은 다릅니다. 배열을 다루는 문제에서는 어떤 관계가 변화에 견디는지 따로 살펴야 합니다.

전서 [4] | 저술 자료 [11] [12] [13]

『구수락』을 펼치는 시선

배열의 아름다움과 당대의 사유를 함께 봅니다.

최석정의 『구수락』을 오늘날의 조합론 문제집처럼만 읽으면 책의 성격을 좁히게 됩니다. 이 책에는 계산과 방정식에 관한 내용뿐 아니라 수를 분류하고 질서를 설명하려는 당대의 생각도 담겨 있습니다. 오늘 우리가 관심을 갖는 배열의 구조와 저자가 수를 바라본 관점은 완전히 같지 않습니다.

한국민족문화대백과사전은 『구수락』의 내용을 네 편으로 나누어 설명합니다. 사칙계산과 응용 문제와 근을 구하는 방법 등이 다루어지며 수의 배열에 관한 연구도 포함됩니다. 이 구성을 보면 배열 하나가 책 전체를 대표하지는 않는다는 사실을 알 수 있습니다.

역사 속 수학을 읽을 때는 두 가지 일을 나란히 할 수 있습니다. 당시의 표현과 문제의식을 자료에 따라 이해하는 일이 하나입니다. 배열이 실제로 어떤 수학적 조건을 만족하는지 오늘의 언어로 확인하는 일이 다른 하나입니다. 둘을 구별하면 과거의 의미도 현대의 해설도 더 분명해집니다.

읽는 관점	살펴볼 대상
문헌의 맥락	책의 구성과 사용한 용어
당대의 사유	수를 분류하고 질서를 설명하는 방식
현대의 분석	배열의 조건과 중복 여부
교육용 활동	작은 배열로 원리를 확인하는 문제

자료 안내

이 책의 3×3 배열은 개념을 설명하기 위한 예입니다. 최석정의 모든 배열을 그대로 축소하거나 복원한 것이 아닙니다.

원전과 해설을 나란히 놓기

현대의 정의에 맞추어 배열을 설명하면 수학적 조건을 분명하게 확인할 수 있습니다. 그렇더라도 원전의 이름과 분류를 모두 현대 용어로 바꾸어 버리면 당시의 관점이 사라질 수 있습니다. 옛 표현을 소개한 뒤 현대적 해석의 범위를 밝히는 방식이 두 관점을 함께 읽는 데 도움이 됩니다.

『구수락』 해설 [20]

문제를 읽는 세 개의 층

대상과 조건과 질문을 나눕니다.

수의 배열 문제를 풀기 전에는 무엇을 놓을 수 있는지부터 확인해야 합니다. 1부터 9까지를 한 번씩 쓰는 문제와 같은 수를 반복해서 써도 되는 문제는 전혀 다릅니다. 사용할 대상이 정해져야 가능한 배열의 범위도 정해집니다.

다음으로 어떤 조건을 만족해야 하는지 읽습니다. 행의 합만 같으면 되는지와 열의 합도 같아야 하는지는 다른 요구입니다. 대각선에 대한 조건이 있는지도 확인해야 합니다. 문제에 쓰이지 않은 조건을 임의로 더하면 풀 수 있는 답을 놓칠 수 있습니다.

마지막으로 무엇을 구하는지 분명히 합니다. 조건에 맞는 배열 하나를 찾는 일과 가능한 배열을 모두 찾는 일은 난도가 다릅니다. 하나의 예를 찾았다고 해서 다른 예가 없음을 증명한 것은 아닙니다. 답을 제시할 때도 어느 질문에 답했는지 드러내야 합니다.

층	3차 마방진에서 확인할 내용
대상	1부터 9까지의 수를 한 번씩 사용
조건	행과 열 및 두 대각선의 합이 같음
질문	조건에 맞는 배열 하나를 찾음

풀이를 시작하기 전에

문제를 읽고 대상과 조건과 질문을 각각 한 문장으로 정리해 보세요. 계산을 시작하기 전에 빠진 정보가 보일 수 있습니다.

조건 하나가 빠진 문제

1부터 9까지 한 번씩 쓴다는 조건 없이 합만 15로 맞추라고 하면 모든 칸에 5를 놓을 수도 있습니다. 행과 열 및 대각선의 합은 맞지만 정상 마방진의 조건에는 맞지 않습니다. 사용 가능한 수와 반복 허용 여부는 답의 범위를 결정하는 중요한 조건입니다.

5	5	5
5	5	5
5	5	5

합 15 / 같은 수 반복

합은 맞지만 서로 다른 수를 쓴 조건은 어긋납니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

마방진의 조건을 읽다

같은 합을 만들려면 전체를 보아야 합니다.

1부터 9까지의 수를 한 번씩 사용해 3×3 배열을 만들고 모든 행과 열과 두 대각선의 합을 같게 해 봅시다. 이것이 아래에서 다루는 정상 마방진의 조건입니다. 한 행의 합만 맞추었다고 문제가 끝나지 않습니다. 다른 방향도 동시에 확인해야 합니다.

아홉 수의 전체 합은 45입니다. 세 행의 합이 모두 같고 그 합을 M 이라고 쓰면 $3M = 45$ 입니다. 따라서 M 은 15여야 합니다. 이 계산은 후보를 줄여 주지만 실제로 그런 배열이 존재한다는 증명까지 대신하지는 않습니다. 아래 배열을 직접 점검하면 존재를 확인할 수 있습니다.

가운데의 5를 사이에 두고 마주 보는 두 수를 살펴보세요. 각 쌍의 합이 10이므로 가운데 수를 더하면 15가 됩니다. 개별 칸의 수만 보던 시선을 여러 칸의 관계로 넓히면 배열을 이해하는 실마리가 생깁니다.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

모든 방향의 합은 15

행 3개 / 열 3개 / 대각선 2개

행과 열 및 두 대각선을 차례로 점검하는 3차 마방진입니다.

작은 탐구 E

배열 전체를 90° 돌리면 마방진의 성질이 유지될까요? 특정한 두 수만 맞바꾸는 경우에도 언제나 유지되는지 확인해 보세요.

가운데 수를 중심으로 보기

본문의 배열에서는 4와 6이 한 쌍이며 9와 1도 한 쌍입니다. 2와 8 및 3과 7도 각각 합이 10입니다. 각 쌍 사이에 5를 더하면 15가 됩니다. 마주 보는 수를 색으로 묶어 보면 중심을 지나는 네 줄의 구조가 한눈에 드러납니다.

마방진의 합을 먼저 구하다

배열을 완성하지 않아도 아는 수가 있습니다.

1부터 9까지의 수를 한 번씩 쓰는 3차 마방진을 생각해 봅시다. 모든 수의 합은 45입니다. 세 행의 합이 서로 같고 각 수가 정확히 한 행에 들어가므로 한 행의 합은 45를 3으로 나눈 15가 되어야 합니다. 배열을 아직 찾지 못했어도 목표가 되는 합은 알 수 있습니다.

이 계산은 완성된 배열의 예를 하나씩 확인하는 일보다 먼저 할 수 있습니다. 전체를 부분으로 나누어 보았을 때 반드시 유지되는 양을 이용한 것입니다. 조건을 만족하는 배열이 있다면 그 행의 합은 반드시 15라는 뜻입니다.

하지만 합이 15라는 사실만으로 배열이 마방진이 되는 것은 아닙니다. 수가 빠지거나 반복되지 않았는지와 모든 열 및 두 대각선의 합도 맞는지 확인해야 합니다. 반드시 필요한 조건 하나를 찾은 것과 모든 조건을 충족한 답을 찾은 것은 구별해야 합니다.

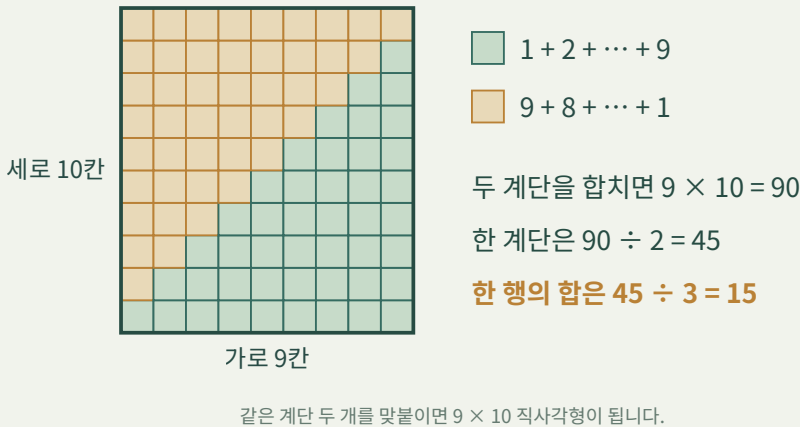
계산	결과
$1 + 2 + \cdots + 9$	45
$45 \div 3$	15
$4 + 9 + 2$	15
$4 + 5 + 6$	15

일반화의 첫걸음

1부터 16까지 한 번씩 쓰는 4차 마방진이 있다면 한 행의 합은 얼마여야 할까요? 전체 합 136을 네 행으로 나누어 보세요.

전체 합을 짝으로 구하기

1과 9를 짝지으면 10이고 2와 8도 10입니다. 같은 방식으로 네 쌍을 만든 뒤 가운데 5를 더하면 전체 합은 45입니다. 일반적으로 1부터 9까지의 합은 $9 \times 10 \div 2$ 로도 구할 수 있습니다. 합을 구하는 방법을 바꾸어도 한 행의 목표 합 15는 같습니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

이어 읽기 / 수의 배열과 방정식

3차 마방진의 가운데 수가 5인 이유

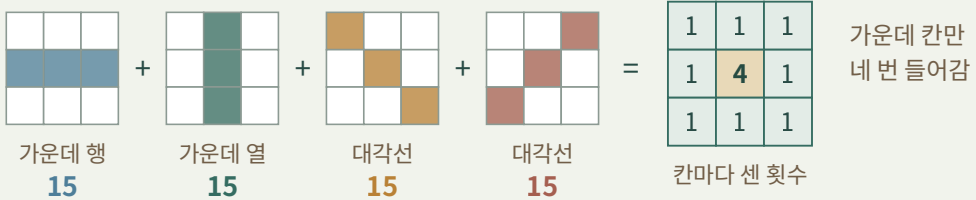
가운데 칸을 지나는 네 줄을 더하면 가운데 수가 하나로 정해집니다.

본문의 3차 마방진에서는 5가 가운데에 있고 마주 보는 두 수의 합이 10입니다. 그런데 이것이 그 배열에서 우연히 생긴 모습인지 모든 3차 마방진에서 반드시 성립하는 성질인지는 따로 따져야 합니다. 배열을 하나씩 만들어 보지 않고도 답할 수 있습니다. 한 행의 합이 15라는 사실을 구한 방법처럼 전체를 세는 방법을 한 번 더 사용합니다.

가운데 칸을 지나는 줄은 가운데 행과 가운데 열 및 두 대각선으로 모두 네 개입니다. 네 줄의 합은 각각 15이므로 모두 더하면 60입니다. 이 덧셈에서 가운데가 아닌 여덟 칸은 정확히 한 번씩 들어가고 가운데 칸만 네 번 들어갑니다. 따라서 60은 아홉 수의 합 45에 가운데 수를 세 번 더 더한 값입니다.

식으로 쓰면 $45 + 3 \times (\text{가운데 수}) = 60$ 이므로 가운데 수는 5입니다. 이제 가운데를 지나는 줄에서 양 끝 두 수의 합은 $15 - 5 = 10$ 이 되어야 합니다. 본문에서 관찰한 짝의 합 10은 이 계산의 결과이며 모든 3차 마방진에 공통으로 나타납니다. 관찰을 증명으로 바꾸는 데 필요했던 것은 각 칸이 몇 번 세어졌는지 기록하는 일이었습니다.

같은 생각을 더 밀고 가면 다른 칸에 대해서도 알 수 있습니다. 1부터 9까지 한 번씩 쓰는 3차 마방진을 컴퓨터로 모두 찾으면 여덟 개이며 어느 것이든 가운데는 5이고 모퉁이에는 짝수만 놓입니다. 이 사실은 현대적 점검의 결과입니다. 최석정의 『구수략』이 이런 방식으로 논증했다는 뜻은 아닙니다.



$$\text{네 줄의 합 } 4 \times 15 = 60 = 45 + 3 \times (\text{가운데 수})$$

$$\text{가운데 수} = (60 - 45) \div 3 = 5$$

가운데를 지나는 네 줄을 더하면 가운데 칸만 네 번 세어집니다.

탐구

3차 마방진에서 9가 모퉁이 칸에 올 수 없는 이유를 설명해 보세요.

풀이와 확인

9가 모퉁이에 있으면 가운데 5를 지나 마주 보는 모퉁이에는 1이 옵니다. 9가 속한 행과 열에서는 각각 나머지 두 칸의 합이 6이어야 하고 그 칸에는 5와 1이 들어갈 수 없습니다. 남은 수 2와 3과 4와 6과 7과 8에서 합이 6인 짝은 2와 4뿐입니다. 서로 겹치지 않는 짝이 두 개 필요하므로 불가능하며 9는 변의 가운데 칸에 놓여야 합니다.

[4] MATHESIS 전시실 3. 최석정과 홍정하 및 19세기 산서

[20] 한국민족문화대백과사전. 『구수략』

돌려도 남는 조건

배열의 모양과 성질을 구별합니다.

완성된 마방진을 종이 위에 그린 뒤 종이를 90° 돌려 봅시다. 원래의 행과 열은 각각 새 배열의 열과 행에 대응합니다. 두 대각선도 서로 자리를 바꿉니다. 수의 위치는 달라지지만 확인해야 할 줄들의 합은 그대로이므로 새 배열 역시 마방진입니다.

거울에 비춘 것처럼 좌우를 뒤집어도 같은 논리로 조건이 유지됩니다. 이런 조작을 이용하면 하나의 예에서 여러 배열을 얻을 수 있습니다. 그러나 수가 놓인 위치가 다르다는 것과 본질적으로 새로운 구조라는 것은 문제의 기준에 따라 구별해야 합니다.

가능한 마방진의 수를 셀 때 회전과 반사를 같은 것으로 볼지 먼저 정해야 합니다. 같은 대상을 세면서도 기준이 다르면 답이 달라질 수 있습니다. 썸의 시작에서 무엇을 서로 다른 경우로 인정하는지 분명히 하는 일이 중요합니다.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

↔

2	9	4
7	5	3
6	1	8

원래 배열

좌우 반사

두 배열 모두 행과 열 및 두 대각선의 합이 15입니다.

배열 실험

본문의 마방진을 좌우로 뒤집어 보세요. 2 / 9 / 4로 시작하는 첫 행을 얻습니다. 모든 조건을 다시 확인하면 원래의 배열과 어떤 관계인지 알 수 있습니다.

모양이 달라도 같은 검사

좌우로 뒤집은 배열의 첫 열은 원래 배열의 마지막 열을 거꾸로 읽지 않고 그대로 옮긴 것입니다. 대각선 두 개는 서로 교환됩니다. 각 줄이 원래의 어떤 줄에 대응하는지 짚지 않으면 모든 합을 새로 계산하지 않고도 성질이 유지되는 이유를 설명할 수 있습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

라틴 방진은 합을 묻지 않는다

행과 열에서 중복되지 않는 것이 핵심입니다.

라틴 방진은 n 종류의 기호를 $n \times n$ 칸에 넣어 각 행과 각 열에 모든 기호가 한 번씩 나타나게 한 배열입니다. 숫자를 써도 되지만 색이나 글자를 사용해도 됩니다. 기호의 크기보다 반복의 규칙이 중요하기 때문입니다.

아래 배열에서는 A와 B와 C가 각 행과 각 열에 한 번씩 나타납니다. 대각선에 같은 기호가 반복되어도 기본적인 라틴 방진의 조건을 어긴 것은 아닙니다. 격자의 모양이 비슷하다고 해서 마방진의 조건을 그대로 적용하지 않도록 주의합니다.

라틴 방진은 배치의 균형을 생각하게 해 줍니다. 세 활동을 세 시간대와 세 모둠에 배정할 때 각 모둠이 모든 활동을 한 번씩 하고 각 시간대에도 활동이 겹치지 않도록 배치하는 예를 만들 수 있습니다. 실제 실험 설계에서는 이 밖에도 조건을 더 검토해야 합니다.

ABCBCACAB

기호 A와 B와 C가 각 행과 각 열에 한 번씩 나타납니다.

개념 점검

각 행만 확인해서는 충분하지 않습니다. 행 조건을 만족하지만 열 조건은 여기는 배열을 하나 만들어 보세요.

기호 이름을 바꾸어도 될까

모든 A를 빨강으로 바꾸고 B와 C도 각각 다른 색으로 바꾸면 라틴 방진의 조건은 유지됩니다. 한 기호를 어디에서나 같은 새 기호로 바꾸었기 때문입니다. 반면 일부 칸의 A만 다른 기호로 바꾸면 중복이 생길 수 있습니다. 일관된 이름 바꾸기와 칸의 수정은 다른 조작입니다.

정의와 교육용 예시 | 최석정과의 연결 [13]

반복을 금지하면 보이는 구조

라틴 방진의 조건을 하나씩 점검합니다.

라틴 방진에서는 각 행과 각 열에 정해진 기호가 한 번씩 나와야 합니다. 기호가 숫자일 필요는 없습니다. 서로 구별할 수 있는 세 색이나 세 글자를 사용해도 같은 구조를 나타낼 수 있습니다. 크기나 합이 아니라 나타나는 횟수가 중요합니다.

첫 행을 A B C로 놓고 다음 행을 B C A로 놓으면 세 번째 행은 C A B로 채울 수 있습니다. 각 열에 빠진 기호가 무엇인지 확인하면 됩니다. 이 방법은 작은 예를 만들기 쉽지만 모든 라틴 방진이 같은 모양으로만 만들어지는 것은 아닙니다.

대각선에 기호가 반복된다고 해서 곧바로 틀린 배열은 아닙니다. 기본적인 라틴 방진의 조건은 행과 열에 관한 것이기 때문입니다. 마방진의 조건을 기억하고 있다고 해서 그 조건을 다른 문제에 그대로 가져오지 않도록 주의해야 합니다.

행	첫째 칸	둘째 칸	셋째 칸
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

새 탐구 9

위 배열에서 두 번째 행 전체를 지웠다면 어떻게 복원할 수 있을까요? 각 열에 빠진 기호를 차례로 찾아 이유와 함께 적어 보세요.해설 120쪽

행끼리 순서를 바꾸기

완성된 라틴 방진의 두 행 전체를 맞바꾸어도 각 열에 들어 있는 기호의 종류는 그대로입니다. 각 행의 내부도 변하지 않으므로 라틴 조건은 유지됩니다. 같은 원리로 열 전체를 맞바꿀 수도 있습니다. 임의의 두 칸만 바꾸는 경우에는 이런 보장이 없습니다.

A	B	C
?	?	?
C	A	B

빠진 행: B C A

각 열에 없는 기호를 찾습니다.

겹쳤을 때 새로 생기는 조건

직교 라틴 방진은 모든 짝을 한 번씩 만듭니다.

두 라틴 방진을 같은 위치끼리 겹쳐 봅시다. 첫 방진은 숫자 1과 2와 3을 쓰고 두 번째 방진은 A와 B와 C를 씁니다. 각 칸에서 숫자와 글자를 묶으면 1A와 같은 짝이 생깁니다. 아홉 칸에 가능한 아홉 짝이 한 번씩 나타나면 두 방진은 직교합니다.

직교성은 각 행과 열만 보는 조건이 아닙니다. 겹쳐진 배열 전체에서 같은 짝이 다시 등장하지 않아야 합니다. 두 방진이 각각 라틴 방진이라는 사실만으로 직교성이 보장되지는 않습니다. 같은 방진을 그대로 두 번 겹치면 짝이 반복되는 반례를 만들 수 있습니다.

최석정의 『구수략』에 나오는 9차 배열은 직교 라틴 방진의 역사와 연결해 다루어집니다. 아래의 3차 배열은 직교성의 조건을 이해하도록 새로 만든 예입니다. 원전의 배열을 축소해 복원한 그림은 아니며 옛 배열을 현대 개념으로 해석하는 과정에도 검토가 필요합니다.

숫자 배열	글자 배열	겹친 순서쌍
123	ABC	1A2B3C
231	CAB	2C3A1B
312	BAC	3B1C2A

같은 위치의 숫자와 글자를 묶으면 서로 다른 아홉 순서쌍이 됩니다.

작은 탐구 F

가능한 짝 아홉 개를 목록으로 만든 뒤 위 격자에서 하나씩 지워 보세요. 두 번째 행의 글자 순서를 A와 B와 C로 바꾸면 어떤 조건부터 깨질까요?

같은 방진을 두 번 겹치면

숫자 1과 2와 3을 각각 A와 B와 C로 바꾼 방진을 원래 방진에 겹치면 1A와 2B와 3C만 반복됩니다. 각 성분은 라틴 조건을 만족하지만 아홉 가지 쌍이 모두 나타나지는 않습니다. 성분의 조건과 두 성분 사이의 조건을 구별해야 하는 구체적인 반례입니다.

역사 연결 [13] | 탐구 F 해설 102쪽

순서쌍은 무엇을 더 기록할까

두 조건을 한꺼번에 확인하는 방법

숫자와 글자를 함께 기록하면 어느 숫자가 어느 글자와 만났는지 알 수 있습니다. 1A와 1B는 숫자는 같지만 글자가 다른 쌍입니다. 1A와 2A는 글자는 같지만 숫자가 다른 쌍입니다. 두 성분이 모두 같을 때만 같은 쌍으로 봅니다.

세 숫자와 세 글자로 만들 수 있는 쌍은 아홉 가지입니다. 첫 번째 숫자에 A와 B와 C를 붙이고 두 번째와 세 번째 숫자에도 같은 일을 하면 됩니다. 각 단계에서 세 가지 선택이 있으므로 전체 가짓수는 3×3 입니다.

두 라틴 방진을 겹쳤을 때 아홉 칸에 이 아홉 쌍이 한 번씩 나타나면 서로 직교한다고 합니다. 각 배열이 라틴 방진이라는 조건만으로 직교성이 저절로 따라오지는 않습니다. 성분별로 검사한 뒤 쌍의 중복도 따로 확인해야 합니다.

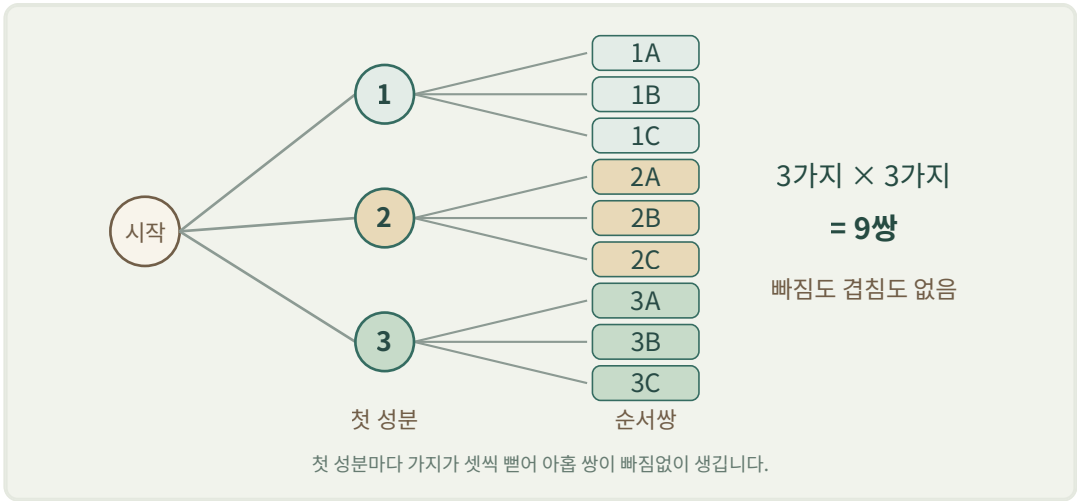
숫자	A와 만남	B와 만남	C와 만남
1	1A	1B	1C
2	2A	2B	2C
3	3A	3B	3C

검사 순서

숫자 배열의 행과 열을 검사합니다. 글자 배열의 행과 열도 검사합니다. 마지막으로 같은 쌍이 두 번 나타나는지 확인합니다.

목록을 빠짐없이 만드는 순서

첫 성분을 1로 고정한 채 A와 B와 C를 붙인 다음 첫 성분을 2로 바꾸어 같은 일을 반복합니다. 이 순서로 쓰면 중복과 누락을 확인하기 쉽습니다. 가능한 쌍의 수를 곱으로 구하는 계산과 실제 목록을 만드는 절차가 서로 대응합니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

짜의 중복을 식으로 막기

아홉 칸의 검사는 각 순서쌍의 자리를 되찾는 계산으로 바꿀 수 있습니다.

직교 라틴 방진의 예를 직접 만드는 방법을 살펴봅시다. 세 행과 세 열에 각각 0과 1과 2라는 번호를 붙입니다. 행 번호를 r 로 놓고 열 번호를 c 로 놓습니다. 첫 배열에는 $r + c$ 를 3으로 나눈 나머지를 적고 둘째 배열에는 $r + 2c$ 를 3으로 나눈 나머지를 적습니다. 여기서 사용하는 기호는 0과 1과 2이며 크기를 더하는 것보다 같은 기호의 반복 여부를 검사합니다.

첫 배열의 각 행은 열을 옮길 때 1씩 더해집니다. 3으로 나눈 나머지로 돌아가므로 세 칸에서 0과 1과 2를 모두 만납니다. 둘째 배열의 각 행은 2씩 더해집니다. 예를 들어 첫 행은 $0 / 2 / 1$ 입니다. 두 배열 모두 행 번호가 1씩 늘 때 각 열의 나머지도 1씩 바뀌므로 열 조건 역시 만족합니다.

두 배열이 직교하는지는 겹친 짜에서 원래 칸을 되찾을 수 있는지 물어보면 됩니다. 첫 성분을 u 라고 하고 둘째 성분을 v 라고 합시다. v 에서 u 를 빼고 3으로 나눈 나머지를 구하면 c 를 얻습니다. 이어 u 에서 c 를 빼고 나머지를 구하면 r 를 얻습니다. 따라서 같은 짜이 서로 다른 두 칸에 나타날 수 없습니다.

예를 들어 첫 성분이 1이고 둘째 성분이 0인 짜를 찾겠습니다. $0 - 1$ 의 나머지는 2이므로 열 번호는 2입니다. $1 - 2$ 의 나머지도 2이므로 행 번호 역시 2입니다. 음수를 다룰 때도 나머지는 0과 1과 2 가운데 하나로 정합니다. 실제 마지막 칸에 1과 0의 짜이 놓이는지 확인할 수 있습니다.

이 구성은 직교성의 뜻을 설명하기 위해 만든 현대적 작은 예입니다. 최석정의 9차 배열 자체를 복원한 것이 아닙니다. 칸을 모두 확인하는 방법과 짜에서 위치를 복원하는 방법은 같은 결론에 이르지만 설명하는 범위가 다릅니다. 뒤의 방법은 왜 중복이 생길 수 없는지를 규칙 전체에서 보여 줍니다.

행 번호	열 0	열 1	열 2
0	0 0	1 2	2 1
1	1 1	2 0	0 2
2	2 2	0 1	1 0

탐구

첫 성분이 2이고 둘째 성분이 0인 짝은 어느 칸에 있을까요? 같은 두 배열을 4로 나눈 나머지로 만들면 둘째 배열의 첫 행은 어떻게 될까요?

풀이와 확인

열 번호는 $0 - 2$ 의 나머지인 1입니다. 행 번호는 $2 - 1$ 인 1입니다. 4로 나누면 둘째 배열의 첫 행은 $0 / 2 / 0 / 2$ 가 되어 같은 기호가 반복됩니다. 3에서 성립한 구성을 모든 크기에 그대로 적용할 수는 없습니다.

두 조건을 고르게 섞는 배열

직교성을 배치 문제에 연결해 봅니다.

세 가지 재료와 세 가지 처리 방법을 조합하는 작은 실험을 생각해 봅시다. 모든 조합을 한 번씩 살펴보려면 아홉 개의 실험이 필요합니다. 어떤 조합을 빠뜨리거나 두 번 넣으면 전체를 고르게 비교하기 어렵습니다. 순서쌍의 목록은 이 누락과 중복을 점검하는 데 도움이 됩니다.

직교 라틴 방진을 사용하면 각 행과 각 열에서도 재료와 처리 방법이 각각 한 번씩 나타나도록 배치할 수 있습니다. 위치에 따라 결과가 달라질 가능성이 있을 때 이런 균형을 갖춘 배치를 생각할 수 있습니다. 수의 배열이 현실의 실험 설계와 연결되는 한 장면입니다.

그렇다고 배열 하나만으로 좋은 실험이 완성되는 것은 아닙니다. 실제 실험에는 반복과 무작위 배치와 측정 방법의 검토도 필요합니다. 여기서는 조합을 빠짐없이 고르게 배치한다는 수학적 원리만 살펴봅니다. 이 예를 최적정이 실제로 수행한 실험으로 읽어서는 안 됩니다.

자리	첫째 칸	둘째 칸	셋째 칸
첫째 행	1A	2B	3C
둘째 행	2C	3A	1B
셋째 행	3B	1C	2A

빠진 조합 찾기

아홉 칸을 숫자 순서로 다시 정리해 보세요. 1A부터 3C까지 모든 쌍이 한 번씩 있는지 확인할 수 있습니다.

배치의 균형과 결과의 공정성

각 행에 재료 1과 2와 3이 한 번씩 나타나면 재료 하나가 특정 행에만 몰리지 않습니다. 글자도 같은 방식으로 고르게 배치됩니다. 이런 균형은 비교를 돕지만 결과에 영향을 주는 모든 요인을 제거하지는 않습니다. 배열의 성질과 실험 전체의 타당성은 구별해야 합니다.

1A	2B	3C
2C	3A	1B
3B	1C	2A

행과 열에서도 균형

각 조합은 전체에서 한 번씩 나타납니다.

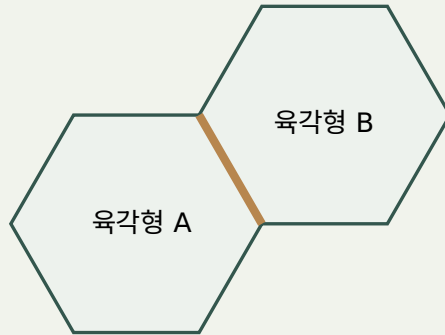
수학 개념 해설과 창작 탐구

거북 등처럼 연결된 수

지수귀문도는 이웃 관계를 생각하게 합니다.

최석정의 지수귀문도에는 육각형들이 이어진 모양에 수를 배치하고 합의 관계를 맞추는 생각이 담겨 있습니다. 격자 칸만 바라보던 시선을 꼭짓점과 이웃 관계로 넓혀 주는 예입니다. 한 자리에 놓인 수가 둘 이상의 도형에 동시에 영향을 줄 수 있습니다.

아래는 원전의 배열이 아니라 그 생각을 이해하기 위한 두 육각형 모형입니다. 두 도형이 한 변을 공유하면 그 변의 양 끝점에 놓인 수는 양쪽 합에 모두 들어갑니다. 두 육각형의 합을 같게 만들 때 공통으로 들어가는 부분을 지우고 나면 나머지 꼭짓점 합만 비교하면 됩니다. 겹치는 부분을 구별하면 같은 계산을 되풀이하지 않고 관계를 비교할 수 있습니다. 하나의 수가 어느 조건들에 함께 들어가는지 표시해 보세요. 그 수를 바꾸었을 때 영향을 받는 곳을 예상할 수 있습니다. 배열의 구조를 읽는다는 것은 이런 연결을 찾아내는 일입니다.



한 변을 공유하는 두 육각형의 개념도. 금색 변의 양 끝점은 두 합에 모두 들어갑니다.

A의 공통 아닌 부분 합 = B의 공통 아닌 부분 합

공통 부분을 식에서 지우기

두 육각형에 공통으로 들어가는 수의 합을 S로 놓고 나머지 합을 A와 B로 놓으면 두 전체 합은 $A + S$ 와 $B + S$ 입니다. 이 둘이 같다는 조건은 $A = B$ 와 같습니다. 양쪽에 똑같이 더해진 부분을 분리하면 비교할 양이 줄어듭니다.

전시 [4] | 개념 모형은 편집 재구성

겹친 부분은 두 번 세어진다

합을 더할 때 공통 부분을 살핍니다.

두 도형이 꼭짓점을 공유하는 수 배열을 생각해 봅시다. 각 도형의 꼭짓점 수를 더하면 공통 꼭짓점이 두 번 포함됩니다. 서로 다른 꼭짓점의 수를 구하려면 중복해서 센 부분을 한 번 빼야 합니다. 겹친 배열에서 전체 합을 다룰 때도 같은 생각이 필요합니다.

두 육각형이 한 변을 공유한다면 꼭짓점 두 개를 함께 사용합니다. 각각 여섯 꼭짓점을 갖지만 서로 다른 꼭짓점은 열 개입니다. $6 + 6 - 2 = 10$ 이라는 계산에서 마지막 2는 공유한 꼭짓점의 수입니다.

꼭짓점에 수를 적고 두 육각형의 합을 더한 경우에는 공유한 꼭짓점에 적힌 수가 두 번 더해 집니다. 전체의 합을 구하려면 그 두 수를 한 번씩 빼야 합니다. 단순히 꼭짓점의 개수만 빼는 것이 아니라 무엇을 세었는지에 맞게 중복을 바로잡아야 합니다.

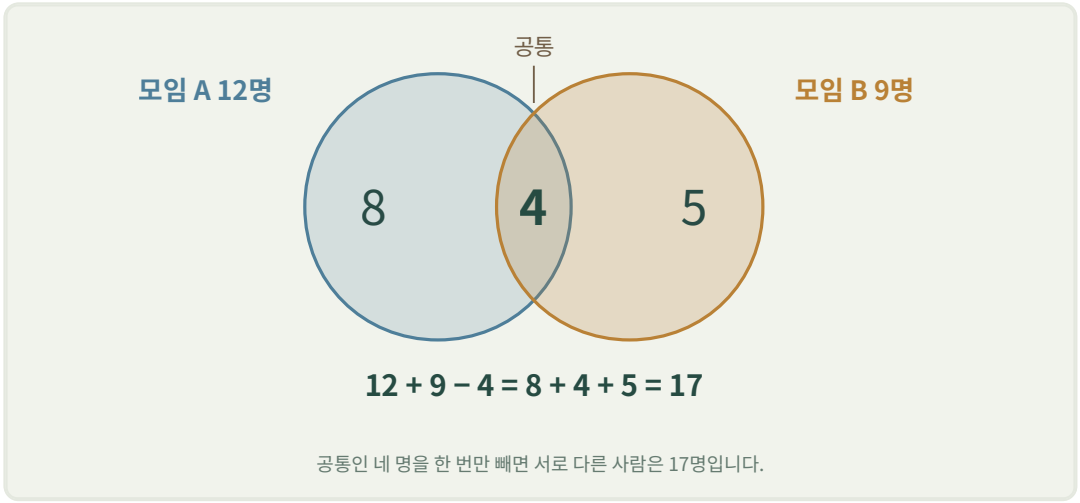
세는 대상	두 도형의 값을 더한 뒤
꼭짓점의 개수	공유한 꼭짓점의 개수를 한 번 뺌
꼭짓점에 적힌 수의 합	공유한 꼭짓점의 수들을 한 번씩 뺌
두 육각형이 한 변을 공유	서로 다른 꼭짓점은 10개

새 탐구 10

두 모임에 각각 12명과 9명이 있고 4명이 두 모임에 모두 속합니다. 두 모임에 속한 서로 다른 사람은 모두 몇 명인가요?해설 120쪽

공통 부분을 두 번 빼면

$12 + 9$ 에서 공통인 4명을 두 번 빼면 17명이 됩니다. 이 값은 두 모임 중 한쪽에만 속한 사람의 수입니다. 두 모임에 모두 속한 사람도 전체에 포함하려면 한 번만 빼야 합니다. 계산식이 가리키는 집합이 무엇인지 그림과 함께 확인해 보세요.



홍정하의 문제를 묻는 태도

문답의 가치는 답을 넘어 방법을 드러냅니다.

홍정하는 조선 후기의 산학자로 『구일집』을 남겼습니다. 이 책에는 기존 산서의 문제와 방법을 검토하고 재구성한 흔적이 나타납니다. 알려진 풀이를 사용하는 능력뿐 아니라 여러 문제를 일정한 체계 안에 배치하는 능력을 살필 수 있습니다.

『구일집』에는 1713년 청나라 인물 하국주와 문제를 주고받은 기록도 있습니다. 이 문답은 당시 수학 지식이 사람과 책의 이동을 통해 교류되었음을 보여 줍니다. 다만 한 문헌이 전하는 특정 문답을 두 나라 수학 전체의 우열을 확정하는 근거로 확대할 필요는 없습니다.

좋은 수학적 질문은 상대가 답을 아는지 확인하는 데서 끝나지 않습니다. 풀이에 사용한 조건과 방법이 적용되는 범위를 드러내게 합니다. 같은 문제를 다른 방법으로 풀어 보는 일도 도움이 됩니다. 한 풀이에서 감추어진 관계가 다른 풀이에서는 분명하게 보일 수 있기 때문입니다.

『구일집』의 편찬 연대는 각 부분과 기록을 함께 살펴 판단합니다. 이 책은 전체의 완성 연도를 1724년으로 정리한 자료를 따릅니다. 저술의 일부가 그보다 먼저 이루어졌다는 설명과 서로 모순되는 것은 아닙니다.

교실에서 이어 묻기

답이 맞았다는 사실을 확인한 뒤 친구에게 질문해 보세요. 이 방법은 수가 달라져도 될까? 조건 하나가 빠지면 답이 하나로 정해질까?

다른 풀이를 비교하는 기준

같은 문제의 두 풀이를 읽을 때는 사용한 가정과 중간 단계 및 계산 방법을 나누어 살펴봅니다. 한 풀이가 짧더라도 숨긴 조건이 많을 수 있습니다. 설명이 조금 길어도 각 단계의 이유가 분명하면 다른 문제에 적용하기 쉽습니다. 문답의 가치는 방법이 적용되는 범위를 드러내는 데에도 있습니다.

예를 들어 발의 넓이를 구하는 두 방법을 비교한다면 단위를 맞추는 단계부터 표시합니다. 한 방법은 도형을 나누고 다른 방법은 전체에서 일부를 뺄 수 있습니다. 답이 같다는 확인에 더해 같은 넓이를 서로 다른 부분으로 표현했다는 설명까지 남겨 보세요.

저자와 저술 [11] [12]

천원술을 오늘의 눈으로 읽기

기호가 달라도 미지의 양을 다룹니다.

방정식을 배우면 모르는 수를 x 로 놓는 일이 자연스럽게 느껴집니다. 그러나 수학의 역사를 돌아보면 미지의 양과 그 관계를 표현하는 방법은 여러 가지였습니다. 조선 산학의 천원술을 읽을 때도 오늘의 문자식과 당시의 표현을 바로 같은 것으로 취급해서는 안 됩니다.

현대의 해설에서는 계수를 차례로 적어 식의 구조를 설명할 수 있습니다. $x^2 + 3x - 40$ 이라는 식에는 이차항의 계수 1과 일차항의 계수 3과 상수항 -40 이 들어 있습니다. 각 수가 어느 차수에 해당하는지 알아야 식을 다시 읽을 수 있습니다. 자리와 약속이 의미를 결정한다는 점에서 자리값의 생각을 떠올릴 수 있습니다.

다만 이 계수표는 원리를 이해하기 위한 현대적 다리입니다. 당시 계산판의 정확한 배치와 조작을 복원한 것이 아닙니다. 낫선 표기를 익숙한 식으로 옮기면 이해가 쉬워지지만 그 번역에서 사라지는 특징도 있음을 기억해야 합니다.

현대식에서의 자리	이차항	일차항	상수항
계수	1	3	-40
각 항	x^2	$3x$	-40

빈 항도 정보입니다

$x^2 - 40$ 을 계수표로 나타내면 일차항의 계수는 0입니다. 중간 자리를 빼버리면 각 수가 어떤 항인지 잘 못 읽을 수 있습니다.

항의 순서가 알려 주는 것

$x^2 - 40$ 의 계수표를 1 / 0 / -40으로 적으면 일차항이 없다는 사실이 보존됩니다. 1 / -40만 적고 차수의 약속을 생략하면 다른 식으로 읽힐 수 있습니다. 기호가 없는 자리도 구조를 알려 준다는 점에서 산가지의 빈자리와 연결해 생각할 수 있습니다.

x^2

x

상수

1

0

-40

$$x^2 + 0x - 40$$

빠진 항의 계수는 0으로 남깁니다.

조선 산학의 배경 [6] [11] | 계수표는 현대적 설명

옛 책의 빈 항에서 계산 절차로

계수의 위치를 보존하면 긴 식을 짧은 반복 계산으로 읽을 수 있습니다.

장서각의 『구일집』 소장본은 9권을 8책으로 묶은 필사본입니다. 서지에 적힌 소장본의 기록 시기와 저자가 내용을 구성한 시기는 같은 정보가 아닙니다. 종이를 덧대거나 고친 흔적도 책이 읽히고 옮겨지는 과정을 보여 줍니다. 문헌을 만날 때는 저술과 필사 및 현재 남은 물건의 연대를 각각 확인할 필요가 있습니다.

수학적으로는 계수의 배열이 계산 절차를 어떻게 조직하는지 살펴볼 수 있습니다. 현대적 예로 $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ 을 놓겠습니다. 이차항은 없지만 그 자리를 버리면 안 됩니다. 차수가 높은 항부터 계수를 적으면 2 / 0 / -3 / 1입니다. 빠진 항의 0은 뒤의 수가 어느 차수에 속하는지 알려 줍니다.

$x = 2$ 를 대입할 때 매번 거듭제곱을 따로 구하지 않고 $f(x) = ((2x + 0)x - 3)x + 1$ 로 묶을 수 있습니다. 먼저 2에 2를 곱하고 0을 더해 4를 얻습니다. 여기에 다시 2를 곱하고 3을 빼면 5입니다. 마지막으로 2를 곱하고 1을 더하면 11이 됩니다. 원래 식에 대입한 $16 - 6 + 1$ 과 같은 값입니다.

이 계산은 곱한 뒤 다음 계수를 더하는 단계를 반복합니다. 어디까지 계산했는지를 순서로 유지하므로 계수가 하나 빠지면 뒤의 모든 단계가 다른 식을 계산하게 됩니다. 산가지의 빈 자리와 다항식의 빈 항은 다루는 대상이 다르지만 위치가 정보를 보존한다는 점에서 비교할 수 있습니다.

여기에 제시한 식의 묶기와 계산표는 현대적 재구성입니다. 이를 『구일집』의 특정 문제나 산대 조작의 직접 복원으로 제시하지 않습니다. 전통 계산의 실제 순서를 알아보려면 원문의 계수 배치와 풀이를 따로 대조해야 합니다.

읽은 계수	계산	중간 결과
2	첫 계수를 놓음	2
0	$2 \times 2 + 0$	4
-3	$4 \times 2 - 3$	5
1	$5 \times 2 + 1$	11

탐구

$x^3 - 4x + 2$ 에서 계수의 빈자리를 남긴 뒤 $x = 3$ 일 때 값을 같은 방식으로 구해 보세요.

풀이와 확인

계수는 1 / 0 / -4 / 2입니다. 1에서 시작해 3을 곱하고 0을 더하면 3입니다. 다시 3을 곱하고 4를 빼면 5입니다. 마지막으로 3을 곱하고 2를 더하면 17입니다. $27 - 12 + 2$ 와 같습니다.

[KR26] 한국학중앙연구원 디지털장서각 구일집 K3-412 서지와 해제

모르는 수를 먼저 정하다

천원술에서 오늘의 방정식으로 건너갑니다.

천원술은 모르는 양 하나를 정하고 문제의 조건을 다항식 관계로 나타내는 동아시아의 방법입니다. 오늘의 문자 x 를 두는 발상과 연결해 이해할 수 있습니다. 다만 기호와 계산판의 배열과 구체적인 알고리즘까지 현대의 식과 같았던 것은 아닙니다.

긴 변이 짧은 변보다 3만큼 길고 넓이가 40인 직사각형을 생각해 봅시다. 짧은 변을 x 로 정하면 긴 변은 $x + 3$ 입니다. 두 길이의 곱이 넓이이므로 $x(x + 3) = 40$ 이라는 식을 얻습니다. 미지수의 뜻을 정한 뒤 주어진 양의 관계를 그 기호로 옮긴 것입니다.

식을 정리하면 $(x + 8)(x - 5) = 0$ 이 됩니다. 대수적으로는 -8 과 5 가 후보이지만 길이를 묻는 상황에서는 양수인 5 를 선택합니다. 방정식을 푸는 일과 구한 해를 문제의 맥락에 맞게 해석하는 일은 모두 필요합니다.

$$x(x + 3) = 40$$

$$x^2 + 3x - 40 = 0$$

$$(x + 8)(x - 5) = 0$$

작은 탐구 G

세로가 5이면 가로는 얼마인가요? 두 길이를 원래 조건에 넣어 확인하세요. 이 페이지의 인수분해는 현대적 풀이이며 역사적 천원술 계산의 재현은 아닙니다.

식의 값으로 후보를 좁히기

x 가 4이면 $x(x + 3)$ 은 28이고 x 가 6이면 54입니다. 양수인 범위에서 값을 비교하면 40을 만드는 길이가 그 사이에 있음을 짐작할 수 있습니다. $x = 5$ 를 넣으면 정확히 40입니다. 대입은 해를 확인하는 방법이지만 모든 해를 구했다는 증명과는 구별해야 합니다.

역사적 개념 [11] [12] | 창작 예제 | 해설 102쪽

문장을 식으로 옮기는 순서

미지수의 뜻을 먼저 적습니다.

직사각형의 긴 변이 짧은 변보다 3 m 길고 넓이가 40 m²라고 합시다. 짧은 변의 길이를 x m로 정하면 긴 변의 길이는 $(x + 3)$ m입니다. 넓이는 두 변의 곱이므로 $x(x + 3) = 40$ 이라는 식을 얻습니다. 기호를 정할 때 길이의 단위도 함께 밝혀 둡니다.

식을 세웠다면 기호를 다시 문장으로 읽어 보세요. x 와 $x + 3$ 을 곱한 것이 실제로 직사각형의 넓이를 나타내는지 확인합니다. 잘못 세운 식을 아무리 정확히 풀어도 원래 문제의 답을 얻을 수는 없습니다. 식과 상황을 양쪽으로 오가며 점검해야 합니다.

이 방정식은 정리하면 $(x - 5)(x + 8) = 0$ 이 됩니다. 대수적으로는 5와 -8이 해이지만 길이는 양수여야 하므로 짧은 변은 5 m입니다. 구한 수를 해석하는 단계까지 진행해야 현실의 문제를 해결했다고 말할 수 있습니다.

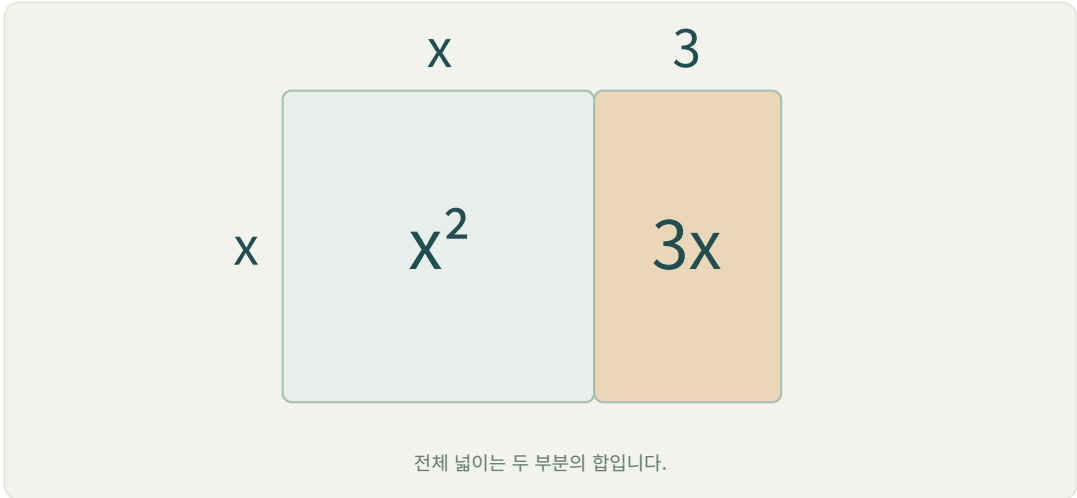
단계	표현
미지수를 정함	짧은 변의 길이 = x m
다른 양을 나타냄	긴 변의 길이 = $(x + 3)$ m
관계를 식으로 씀	$x(x + 3) = 40$
상황에 맞는 해를 선택함	짧은 변 5 m / 긴 변 8 m

답의 확인

5와 8의 차이는 3이고 곱은 40입니다. 처음의 두 조건을 모두 확인할 수 있습니다.

넓이 그림으로 식 읽기

짧은 변이 x 인 직사각형의 긴 변을 x 와 3으로 나누면 넓이가 x^2 인 정사각형과 넓이가 $3x$ 인 직사각형이 생깁니다. 둘의 합이 40이라는 뜻이 $x^2 + 3x = 40$ 입니다. 전개한 식의 각 항이 그림에서 어느 부분인지 찾아보면 문장과 식의 연결이 분명해집니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

남고 모자라는 양으로 풀기

차이를 이용하면 전체가 드러납니다.

어떤 사람들에게 물건을 나누어 주려 합니다. 한 사람에게 3개씩 주면 8개가 남고 4개씩 주면 2개가 모자랍니다. 같은 물건과 같은 사람들을 두 기준으로 바라본 문제입니다. 사람의 수를 n 으로 놓으면 물건의 수는 $3n + 8$ 이면서 $4n - 2$ 입니다.

두 표현은 같은 양이므로 $3n + 8 = 4n - 2$ 입니다. 한 사람에게 한 개씩 더 주는 데 필요한 전체 추가량은 남았던 8개와 모자란 2개를 합한 10개입니다. 따라서 사람은 10명이고 물건은 38개입니다. 차이를 비교하는 설명과 방정식 풀이가 같은 관계를 드러냅니다.

이 예는 남거나 부족한 양을 이용해 관계를 찾는 교육용 문제입니다. 숫자를 바꾸어도 같은 구조가 유지되는지 살펴볼 수 있습니다. 다만 한 사람에게 더 주는 양이 두 개라면 추가량을 사람 수로 바로 읽을 수 없다는 점을 주의해야 합니다.

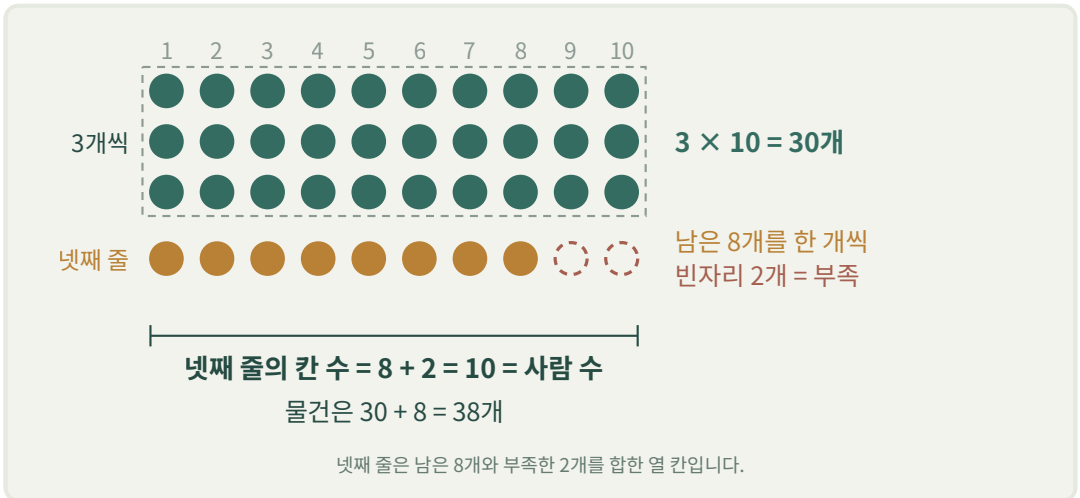
배분 기준	10명에게 필요한 양	38개와의 차이
한 사람에게 3개	30개	8개 남음
한 사람에게 4개	40개	2개 부족

새 탐구 11

한 사람에게 2개씩 주면 7개가 남고 3개씩 주면 5개가 모자랍니다. 사람 수와 물건 수를 구해 두 조건에 넣어 보세요.해설 120쪽

추가 배분량으로 바로 보기

3개씩 주는 기준에서 4개씩 주는 기준으로 바꾸면 사람마다 한 개를 더 주어야 합니다. 필요한 추가량 10개가 곧 사람 수가 되는 이유입니다. 만약 사람마다 두 개씩 더 주는 문제였다면 전체 추가량을 2로 나누어야 사람 수를 구할 수 있습니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

새로운 책을 읽는다는 것

남병길과 이상혁의 시대를 바라봅니다.

19세기 산학자들은 전통 산서와 새로 접한 수학 지식을 함께 검토했습니다. 남병길의 『산학정의』와 이상혁의 『익산』 및 『산술관견』은 이 시기를 읽는 데 등장하는 저술입니다. 서로 다른 지식 전통을 만나는 과정은 낡은 것을 한순간에 버리고 새것으로 바꾸는 단순한 교체가 아니었습니다.

새로운 기호를 배운다고 곧바로 새로운 개념까지 이해되는 것은 아닙니다. 비슷한 문제를 다른 방식으로 표현할 때 무엇이 같고 무엇이 다른지 확인해야 합니다. 기존 방법이 잘 작동하는 영역과 새로운 방법이 더 분명한 설명을 주는 영역도 비교할 수 있습니다.

오늘의 독자도 옛 책을 읽을 때 번역의 문제를 만납니다. 같은 단어가 시대에 따라 다른 뜻을 가질 수 있고 현대의 수식을 덧붙이는 과정에서 원전의 특징이 사라질 수도 있습니다. 설명을 쉽게 만드는 일과 원전의 모습을 보존하는 일 사이에 균형이 필요합니다.

책의 교류를 살피면 어떤 지식이 어디에서 전해졌는지와 함께 그것을 읽은 사람이 무엇을 선택했는지 알 수 있습니다. 기존 방법을 비교하고 내용을 다시 배열하며 새 문제에 적용하는 과정도 수학의 역사에 포함됩니다. 전달된 지식과 그것을 다룬 사람의 판단을 함께 보아야 합니다.

비교 읽기 활동

같은 문제를 그림으로 설명한 풀이와 식으로 설명한 풀이를 준비하세요. 각 풀이가 쉽게 보여 주는 정보와 감추는 정보를 나누어 적어 봅시다.

같은 용어를 곧바로 같게 읽지 않기

옛 책의 계산 절차를 현대의 방정식과 연결할 수 있어도 목적과 표현까지 같다고 단정할 수는 없습니다. 먼저 원문이 제시한 문제와 풀이의 순서를 살피고 그 뒤 현대적 표현을 덧붙이는 편이 좋습니다. 번역은 익숙한 말을 붙이는 작업과 함께 차이를 기록하는 작업이기도 합니다.

저술과 인물의 맥락 [21] [22] [23] | 현대적 비교 읽기 해설

남병길과 이상혁을 함께 읽기

책은 집필과 검토의 협력으로 다듬어집니다.

조선 후기의 수학을 인물 한 사람의 이름으로만 정리하면 책을 읽고 고치며 전한 관계가 잘 보이지 않습니다. 남병길과 이상혁의 활동에서는 수학 지식을 정리하고 검토하는 협력을 살펴볼 수 있습니다. 서로 다른 역할이 책의 완성에 기여했다는 사실에 주목할 만합니다.

1867년에 간행된 『산학정의』는 남병길이 저술하고 이상혁이 교정을 본 책으로 설명됩니다. 기초 계산에서 비례와 방정식 및 측량에 이르는 내용을 다룹니다. 이미 알려진 방법을 모아 오류를 바로잡고 읽기 좋게 정리하는 일도 수학 지식을 이어 가는 중요한 작업입니다. 새로운 정리를 발표한 일만이 학문의 전부는 아닙니다. 계산의 잘못을 찾고 설명의 빠진 부분을 보충하며 다음 독자가 이해할 수 있도록 쓰는 일이 필요합니다. 오늘 우리가 옛 책을 읽을 수 있는 데에도 이런 집필과 검토와 보존의 과정이 놓여 있습니다.

작업	독자에게 주는 도움
수집	흩어진 지식을 함께 읽게 함
정리	기초와 응용의 관계를 드러냄
교정	계산과 표기의 잘못을 바로잡음
전승	다음 독자가 책을 접할 길을 남김

인물 읽기

업적의 목록과 함께 누구의 책을 읽고 누구와 문제를 논의했는지 살펴보면 지식의 연결이 보입니다.

교정이 필요한 세 자리

계산 결과의 오류와 기호를 옮긴 오류 및 설명의 누락은 서로 다릅니다. 결과가 맞더라도 앞 단계에서 어떻게 이어졌는지 알 수 없다면 독자는 방법을 배우기 어렵습니다. 책을 검토할 때 이 세 가지를 나누어 살피면 수정해야 할 부분을 더 정확하게 설명할 수 있습니다.

남병길과 이상혁 [21] [22] | 『산학정의』 [23]

측량을 닢음으로 설명하기

직접 닿지 못하는 높이를 구하는 모형

높은 나무의 꼭대기에 자를 대기는 어렵습니다. 그러나 같은 순간의 그림자를 비교하면 닢음의 관계를 이용해 높이를 추정할 수 있습니다. 가까운 장소에 수직 막대를 세우고 막대의 높이와 두 그림자의 길이를 측정합니다. 햇빛이 평행하게 들어온다는 가정이 필요합니다.

높이 1.5 m인 막대의 그림자가 2 m이고 나무의 그림자가 8 m라면 그림자 길이는 네 배입니다. 같은 조건에서 높이도 네 배이므로 나무의 높이는 6 m로 추정됩니다. 비례식을 세우기 전에 두 삼각형이 왜 닮았는지 확인해야 합니다.

실제 지면이 경사지거나 나무가 기울어 있으면 이 단순한 관계를 그대로 사용할 수 없습니다. 측량은 공식의 적용만이 아니라 조건을 갖추고 오차를 검토하는 일입니다. 이 예는 전통 산학의 측량 문제와 연결해 읽는 현대적 모형이며 특정 문헌의 원문 문제는 아닙니다.

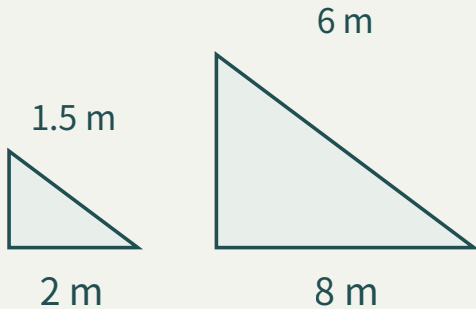
대상	높이	그림자 길이
막대	1.5 m	2 m
나무	6 m	8 m
나무 ÷ 막대	4배	4배

비례식

나무 높이 ÷ 1.5 = 8 ÷ 2입니다. 길이의 단위를 모두 m로 맞추 뒤 계산했습니다.

비례식의 두 가지 표현

나무 높이를 h 로 놓으면 $h/8 = 1.5/2$ 입니다. 높이와 그림자의 비를 비교한 식입니다. $h/1.5 = 8/2$ 로 쓰면 두 대상 사이의 확대 비를 비교합니다. 두 식은 같은 닮음 관계를 다르게 표현하며 모두 $h = 6$ 을 줍니다.



그림은 닮음의 원리를 나타낸 도식입니다.

조건을 바꾸면 문제가 달라진다

활동 3 | 방진 검수자가 되어 봅시다.

아래 두 배열을 보고 각각 어떤 조건을 만족하는지 판단해 보세요. 첫 번째는 숫자를 배열했고 두 번째는 숫자와 글자의 짝을 배열했습니다. 겉모양이 비슷하다는 이유로 같은 기준을 적용하지 않도록 주의합니다.

검수는 순서를 정하면 편리합니다. 먼저 각 행을 확인하고 다음으로 각 열을 확인합니다. 마방진이라면 대각선의 합까지 확인합니다. 직교 라틴 방진이라면 각 성분의 라틴 조건을 확인한 뒤 전체 순서쌍의 중복을 셉니다.

오류를 발견했다면 틀렸다는 판정과 함께 그 근거를 남기세요. 조건을 어긴 행이나 반복된 기호의 위치를 구체적으로 적으면 다른 사람도 판단을 확인할 수 있습니다. 한 칸을 고친 뒤에는 다른 조건이 새로 깨지지 않았는지 배열 전체를 다시 살펴봅니다.

123231312

배열 ①

1A2B3C2B3C1A3C1A2B

배열 ②

제출할 답

①은 라틴 방진인가요? 마방진인가요? ②의 숫자와 글자는 각각 라틴 방진인가요? 두 방진은 직교하나요? 각 판단의 근거를 하나 이상 적으세요.

반례가 되는 위치를 지목하기

배열 ①의 오른쪽 위에서 왼쪽 아래로 내려가는 대각선에는 3이 세 번 나옵니다. 합이 9이므로 다른 줄의 합 6과 다릅니다. 배열 전체가 막연히 이상하다고 말하기보다 조건을 어긴 위치와 계산을 남기면 다른 사람도 판단을 재현할 수 있습니다.

창작 탐구 | 해설 102쪽

예와 반례의 힘

한 번의 성공과 한 번의 실패는 역할이 다릅니다.

어떤 조건이 언제나 성립한다고 주장하려면 모든 경우를 다룰 이유가 필요합니다. 작은 예 몇 개가 맞다는 사실은 유용한 단서이지만 그 자체로 일반적인 증명이 되지는 않습니다. 더 큰 경우에서 달라지는 조건이 있는지 살펴야 합니다.

반면 모든 경우에 성립한다는 주장에 맞지 않는 예를 하나 찾으면 그 주장은 그대로 유지될 수 없습니다. 행의 합이 같으면 언제나 마방진이라는 주장에는 열의 합이 다른 배열 하나가 반례가 됩니다. 실패한 예도 주장의 정확한 범위를 정하는 데 중요한 역할을 합니다.

좋은 탐구는 맞는 예만 모으지 않습니다. 조건을 하나씩 바꾸어 어디에서 결과가 달라지는지 살펴봅니다. 무엇이 충분하고 무엇이 부족한지 드러나면 처음의 질문도 더 정확해집니다. 다음 장의 대칭과 그래프를 읽을 때도 이 태도를 이어 갈 수 있습니다.

확인한 것	말할 수 있는 범위
조건을 만족하는 예 하나	그런 예가 적어도 하나 있음
여러 작은 예의 성공	일반적인 규칙을 추측할 단서
주장에 맞지 않는 예 하나	모든 경우에 성립한다는 주장을 반박
모든 경우를 다루는 논리	정해진 조건 아래 성립함을 증명

주장을 고쳐 쓰기

틀린 주장을 버리는 데서 끝내지 마세요. 어떤 조건을 더하면 옳아질 수 있는지 생각해 보는 과정이 새로운 문제를 만듭니다.

주장을 좁혀서 다시 세우기

모든 직사각형에서 둘레가 같으면 넓이도 같다는 주장은 반례로 깨집니다. 그러나 두 변의 길이가 각각 같다면 넓이도 같다는 주장은 성립합니다. 반례를 발견한 뒤 어떤 조건이 부족했는지 살펴보면 더 정확한 주장으로 고쳐 쓸 수 있습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

현대의 수학과 열린 질문

배움의 공간이 넓어지다

4장 | 근현대의 수학자

근대 학교의 확산은 수학을 배우는 장소와 교재와 학습자의 범위를 바꾸었습니다. 산술은 학교의 정규 교과 속에서 가르쳐졌고 새로운 표기와 계산 방법이 교실에 들어왔습니다. 하지만 변화는 한날에 이루어지지 않았습니다. 기존 학문과 교육 관행은 새 제도와 함께 존재 하기도 했습니다.

연구 수학의 성장에는 교육 외에도 발표와 토론의 공간이 필요합니다. 1946년에 출발한 학회 활동은 오늘의 대한수학회로 이어졌습니다. 학술지와 학술대회는 개인의 결과를 공동체가 읽고 검토하는 통로입니다. 수학자가 고립된 천재로만 그려질 때 잘 보이지 않는 기반입니다.

현대 수학은 국경을 넘는 연구와 교육의 연결 속에서 발전합니다. 이임학과 허준이의 이야기도 한국과의 관계를 살피는 동시에 국제적인 연구 환경과 공동 작업을 함께 보아야 합니다. 출생지와 성장한 곳과 국적과 활동 기관은 서로 다른 정보입니다.

이 장에서는 전문적인 업적의 증명을 모두 다루지 않습니다. 대신 작은 예를 통해 대칭을 연산으로 표현하는 방법과 색칠의 가짓수에서 규칙을 찾는 방법을 살펴봅니다. 연구자가 어떤 질문을 던지는지 이해하는 입구로 읽어 주세요.

수학을 이어 주는 것

교과서와 학교뿐 아니라 학회와 도서관과 동료의 질문도 수학을 자라게 합니다. 자신의 공부에서 이런 역할을 하는 사람이나 공간을 떠올려 보세요.

공개된 결과가 지식이 되기까지

새 결과를 발표한 뒤에도 다른 연구자의 검토와 설명의 보완이 이어질 수 있습니다. 독자가 정의와 가정을 확인할 수 있어야 결과를 다른 문제에 사용할 수 있습니다. 발표와 읽기 및 질문이 반복되는 과정을 함께 보아야 수학이 공동체 안에서 이어지는 모습을 이해할 수 있습니다.

수학이 이어지는 공간

교실과 학술지와 학회의 역할

수학의 역사는 정리를 발견한 사람의 이야기이면서 지식을 나누는 공간의 역사이기도 합니다. 교실에서는 다음 세대가 공통의 언어를 배우고 학술지에서는 새로운 주장의 근거를 읽습니다. 학회와 세미나에서는 서로의 질문을 듣고 설명의 빈틈을 검토합니다.

새로운 결과가 알려지려면 다른 사람이 이해하고 확인할 수 있는 형태로 쓰여야 합니다. 기호의 뜻을 정하고 필요한 가정을 밝히며 각 단계가 왜 성립하는지 보여 주어야 합니다. 연구 논문은 결과를 알리는 문서이면서 검토를 가능하게 하는 기록입니다.

학문이 성장하는 과정을 상이나 유명한 인물의 이름으로만 표현하면 이런 기반이 가려질 수 있습니다. 한 사람의 성취를 이해할 때도 어떤 교육과 토론과 출판의 환경이 있었는지 함께 살펴볼 필요가 있습니다. 연구를 지속하는 일에는 개인의 노력과 공동의 제도가 모두 관여합니다.

공간	지식이 이어지는 방식
교실	공통 개념과 표현을 배움
세미나	질문을 나누고 풀이를 검토함
학술지	결과와 증명을 기록해 공개함
학회	연구자와 주제를 서로 연결함

한국관의 시선

근현대 수학을 읽을 때 연구 성과와 그 성과를 가능하게 한 배움의 환경을 함께 생각합니다.

독자에게 남겨야 할 정보

풀이를 공유할 때는 문제의 조건과 기호의 뜻 및 결론의 범위를 함께 적습니다. 필요한 가정을 생략하면 다른 사람이 더 넓은 상황에 결과를 잘못 적용할 수 있습니다. 읽는 사람이 검토할 수 있도록 설명한다는 원칙은 교실의 풀이와 연구의 글쓰기에 공통으로 중요합니다.

학회의 역사적 배경 [14] | 연구 문화 해설

증명은 설명의 책임이다

왜 항상 성립하는지 다른 사람에게 보입니다.

연속한 두 정수의 합을 몇 번 계산하면 항상 홀수가 나온다는 규칙을 짐작할 수 있습니다. 2와 3의 합은 5이고 8과 9의 합은 17입니다. 그러나 살펴본 예만 나열해서는 모든 정수에 대해 성립하는 까닭을 충분히 설명하지 못합니다.

앞의 정수를 n 으로 놓으면 다음 정수는 $n + 1$ 입니다. 둘의 합은 $2n + 1$ 이 됩니다. n 이 정수일 때 $2n$ 은 짝수이므로 여기에 1을 더한 수는 홀수입니다. 이 설명은 특정한 숫자에 의존하지 않으므로 모든 연속한 두 정수를 함께 다룹니다.

증명은 어려운 기호를 길게 쓰는 일과 같지 않습니다. 주장이 어떤 조건에서 성립하는지 밝히고 빠진 경우 없이 이유를 연결하는 일입니다. 그림이나 말로 설명하더라도 다른 사람이 각 단계를 확인할 수 있어야 합니다.

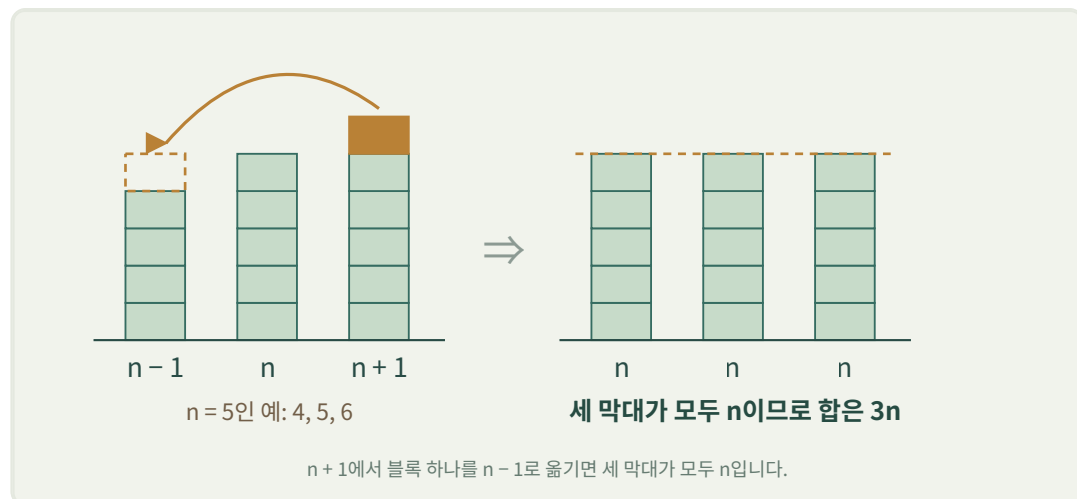
설명의 단계	표현
대상을 일반적으로 놓음	연속한 두 정수 n 과 $n + 1$
관계를 정리함	$n + (n + 1) = 2n + 1$
정의를 이용함	$2n + 1$ 은 홀수
결론의 범위를 밝힘	모든 연속한 두 정수의 합은 홀수

작은 증명

연속한 세 정수의 합이 3의 배수임을 같은 방식으로 설명해 보세요. 가운데 수를 n 으로 놓으면 관계가 간단해집니다.

가운데 수를 기준으로 묶기

연속한 세 정수를 $n - 1$ 과 n 과 $n + 1$ 로 나타내면 합은 $3n$ 입니다. 양쪽의 -1 과 $+1$ 이 서로 없어지고 같은 n 이 세 개 남습니다. 가운데 수의 세 배라는 사실을 알면 왜 합이 언제나 3의 배수인지도 함께 설명할 수 있습니다.



이임학과 Ree 군

대칭의 새로운 구조를 발견하다.

이임학은 1922년에 태어나 2005년에 세상을 떠난 수학자입니다. 캐나다 브리티시컬럼비아 대학교에서 활동하며 군론 연구에 기여했습니다. 그의 이름을 딴 Ree 군은 유한군 연구에서 중요한 대상입니다.

군은 원소와 그 원소 사이의 연산이 일정한 조건을 만족하는 수학적 구조입니다. 도형을 움직이는 조작을 이어 하는 예로 시작할 수 있지만 모든 군이 눈에 보이는 도형의 움직임으로 주어지는 것은 아닙니다. 기호와 연산으로 정의된 추상적인 대상도 군론에서 다룹니다.

유한 단순군은 유한군의 구조를 이해하는 데 기본적인 역할을 합니다. 단순하다는 말은 계산이 쉽다는 뜻이 아닙니다. 여기서의 단순성은 정규부분군이라는 개념과 관련된 전문적 조건입니다. 소수를 정수의 구조를 이해하는 기본 요소로 보는 것에 비유할 수 있지만 두 이론이 동일한 것은 아닙니다.

한국어 표기에서 특히 주의할 점이 있습니다. 이임학의 이름을 딴 Ree 군과 노르웨이 수학자 Sophus Lie의 이름에서 나온 Lie 군은 같은 용어가 아닙니다. 관련된 이론적 배경이 있어도 이름의 구별은 필요합니다.

이름으로 구별하기

Ree groups: 이임학의 이름을 딴 유한군의 계열.

Lie groups: 연속적인 구조와 군 연산을 함께 다루는 대상.

이어지는 정사각형 회전은 군을 배우는 입문 예입니다. Ree 군의 구체적인 구조를 그린 것은 아닙니다.

작은 예가 맡는 역할

정사각형 회전의 군은 원소가 네 개라서 연산 결과를 모두 적어 볼 수 있습니다. 이런 예로 군의 정의를 익히는 것과 Ree 군의 구체적인 구조를 이해하는 것은 구별해야 합니다. 입문 예는 전문 연구를 축소해 대신하는 모형이 아니라 필요한 언어를 익히게 하는 출발점입니다.

인물 [15] | 연구 문헌 [16]

군이라는 구조의 문턱에서

대상의 모양보다 연산의 규칙을 살핍니다.

현대 대수학에서는 대상을 따로 보는 데서 나아가 그 대상에 어떤 연산을 할 수 있는지 살펴봅니다. 정수에는 덧셈을 할 수 있고 도형의 움직임에는 연속해서 실행하는 합성을 할 수 있습니다. 겉모습이 달라도 연산의 규칙이 비슷하면 같은 틀에서 이해할 수 있습니다.

군을 이루려면 연산한 결과가 다시 집합 안에 있어야 합니다. 세 대상을 계산할 때 묶는 위치를 바꾸어도 결과가 같아야 하며 아무 변화도 주지 않는 항등원이 있어야 합니다. 또한 각 원소에는 합성했을 때 항등원이 되는 역원이 필요합니다.

이임학의 Ree 군을 작은 도형의 회전과 같은 대상으로 생각해서는 안 됩니다. 정사각형의 회전은 군이라는 말의 입구를 보여 주는 예입니다. 이 예를 통해 구조를 보는 관점을 익힌 뒤 훨씬 복잡한 연구가 있다는 사실을 이해하는 순서로 읽으면 좋습니다.

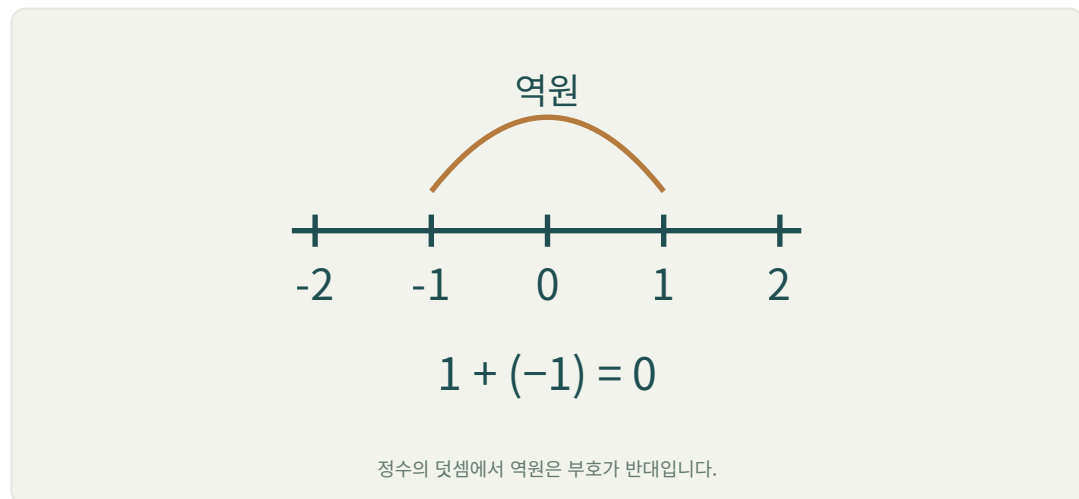
군의 조건	회전 예에서의 뜻
닫혀 있음	두 회전을 이어도 허용된 회전임
결합법칙	세 회전을 묶는 위치가 결과를 바꾸지 않음
항등원	돌리지 않기
역원	앞선 회전을 되돌리는 회전

이름을 읽을 때

수학자의 이름이 붙은 대상은 인물을 기리는 표시이면서 구체적인 정의를 가진 연구 대상입니다. 이름을 아는 것과 구조를 이해하는 것은 다른 단계입니다.

덧셈에서 찾는 군의 조건

정수의 덧셈에서는 두 정수의 합도 정수입니다. 0을 더하면 수가 바뀌지 않고 n 의 역원은 $-n$ 입니다. 자연수만 두고 같은 연산을 생각하면 양의 수를 되돌릴 음수가 빠져 있습니다. 원소의 범위를 어떻게 정했는지에 따라 같은 연산도 다른 구조가 됩니다.



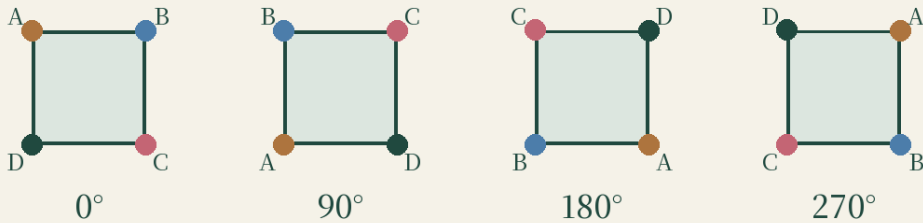
정사각형을 돌리며 군을 만나다

조작의 결과를 다시 하나의 조작으로 읽습니다.

정사각형을 중심 주위로 90° 씩 돌려 봅시다. 돌리지 않기와 90° 와 180° 와 270° 회전은 정사각형이 차지하는 자리를 그대로 유지합니다. 꼭짓점에 서로 다른 이름을 붙이면 같은 외곽선 안에서도 자리가 어떻게 바뀌는지 볼 수 있습니다.

90° 회전을 두 번 하면 180° 회전과 같은 위치에 놓입니다. 90° 회전 뒤에 270° 를 더 돌리면 처음 위치로 돌아옵니다. 이런 조작의 합성을 연산으로 삼으면 네 회전은 하나의 군을 이룹니다. 90° 회전의 횟수를 4로 나눈 나머지로 나타내면 계산을 간단히 기록할 수 있습니다.

군의 조건에는 연산을 해도 집합 안에 머문다는 성질과 결합법칙과 항등원과 역원의 존재가 있습니다. 이 예의 항등원은 돌리지 않기입니다. 90° 회전의 역원은 270° 회전입니다. 그림에서 각 꼭짓점이 어디로 옮겨 가는지 확인하면 조작의 결과를 구별할 수 있습니다.



꼭짓점 이름을 따라가며 회전의 합성을 확인합니다. PDF에는 네 위치를 함께 표시합니다.

작은 탐구 H

90° 회전을 7번 하면 어느 회전과 같을까요? 정사각형을 뒤집는 조작까지 넣으면 같은 네 가지 회전만으로 모두 표현할 수 있을까요?

점의 이름이 필요한 이유

꼭짓점 이름을 지우면 90° 회전 뒤의 정사각형은 처음과 같아 보입니다. 그러나 A가 어느 자리로 옮겨 갔는지 표시하면 조작을 구별할 수 있습니다. 같은 외곽선과 같은 꼭짓점 배치는 다른 조건입니다. 군의 원소로 세는 것은 이 경우 회전이라는 조작입니다.

회전을 더하면 남는 것

한 바퀴를 지나도 같은 위치가 나타납니다.

정사각형을 반시계 방향으로 90° 돌리고 다시 180° 돌리면 처음에서 270° 돌아간 위치에 놓입니다. 반대로 270° 를 돌린 뒤 90° 를 돌리면 한 바퀴를 돌아 처음 위치로 돌아옵니다. 최종 위치만 구별하는 관점에서는 360° 회전과 0° 회전을 같은 것으로 봅니다.

90° 회전의 횟수를 0과 1과 2와 3으로 나타내면 합성은 두 횟수를 더한 뒤 4로 나눈 나머지를 구하는 계산과 같습니다. 예를 들어 3과 2를 더하면 5이지만 최종 위치는 한 번 돌린 위치와 같으므로 1로 기록합니다.

여기서 같은 것으로 보는 것은 최종 위치입니다. 실제로 움직인 경로나 걸린 시간을 기록한다면 0° 와 360° 는 다르게 다루어야 할 수 있습니다. 수학적 모형을 만들 때 어떤 차이를 남기고 어떤 차이를 무시하는지 정하는 일이 중요합니다.

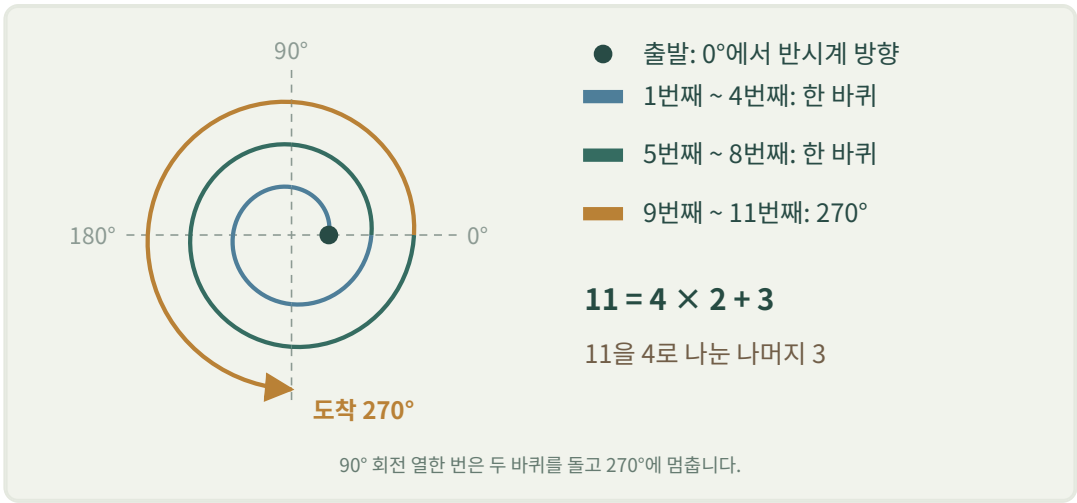
앞의 회전	뒤의 회전	최종 위치
90°	180°	270°
270°	90°	0°
270°	180°	90°

새 탐구 12

정사각형을 같은 방향으로 90°씩 열한 번 돌렸습니다. 처음과 비교한 최종 위치는 몇 도 회전과 같을까요?해설 120쪽

한 바퀴를 묶어 버리기

열한 번의 90° 회전은 4 + 4 + 3번으로 나눌 수 있습니다. 앞의 두 묶음은 각각 한 바퀴이므로 최종 위치에는 세 번의 회전만 남습니다. 나머지로 계산하는 방법은 시간을 12시간 또는 24시간 단위로 읽을 때도 비슷하게 나타납니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

연산표로 구조를 읽다

결과를 빠짐없이 나란히 놓습니다.

회전의 합성을 표로 정리하면 가능한 경우를 빠뜨리지 않고 확인할 수 있습니다. 행의 수와 열의 수를 더한 뒤 4로 나눈 나머지를 칸에 적습니다. 표에 나타나는 수가 언제나 0부터 3까 지라는 사실은 연산 결과가 같은 집합 안에 머문다는 것을 보여 줍니다.

0이 있는 행과 열에서는 상대의 수가 그대로 나타납니다. 따라서 0은 항등원 역할을 합니다. 합이 0이 되는 짝을 찾으면 역원도 읽을 수 있습니다. 1과 3이 서로 짝이고 2는 자기 자신과 합성하면 0이 됩니다.

이 표는 작은 구조를 한눈에 살피기에 좋습니다. 다만 모든 군이 이 표처럼 대칭적인 모양을 갖는 것은 아닙니다. 정사각형의 회전끼리는 순서를 바꾸어도 결과가 같지만 다른 연산에서는 순서가 중요할 수 있습니다.

합성	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

표의 약속

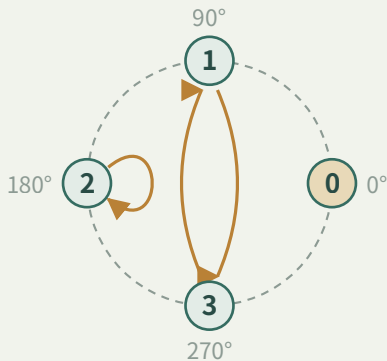
0은 회전 없음입니다. 1과 2와 3은 각각 90°와 180°와 270°의 반시계 회전을 뜻합니다.

역원을 표에서 찾는 방법

행 1에서 결과 0이 놓인 열은 3입니다. 따라서 1의 역원은 3입니다. 행 2에서는 열 2에 0이 있으므로 2는 자기 자신의 역원입니다. 이 표에서 모든 행과 열에 0이 한 번씩 나타나는 모습은 되돌리는 조작이 하나씩 정해진다는 사실과 연결됩니다.

합성	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

행 + 열을 4로 나눈 나머지



1과 3은 서로 역원, 2는 자기 자신

연산표의 0이 놓인 칸이 서로 역원인 회전의 짝을 알려 줍니다.

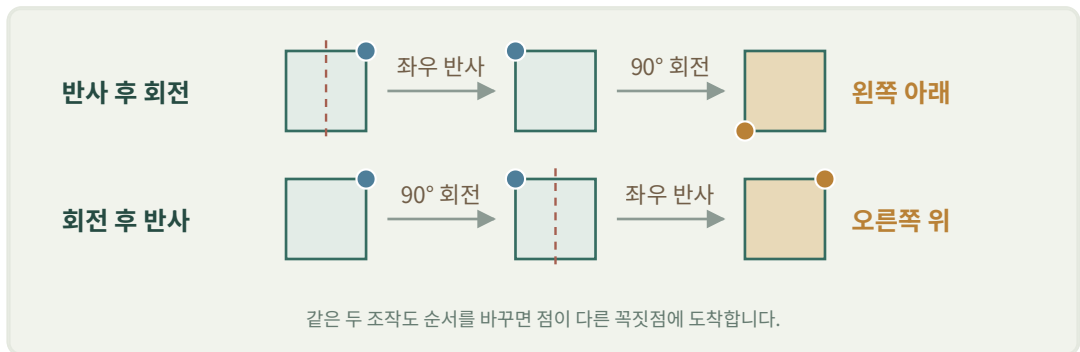
순서를 바꾸면 달라지는 조작

회전과 반사를 함께 해 봅니다.

정사각형의 오른쪽 위 꼭짓점에 점을 찍어 봅시다. 먼저 세로 중심선을 기준으로 좌우를 뒤집으면 점은 왼쪽 위로 갑니다. 그다음 반시계 방향으로 90° 돌리면 왼쪽 아래로 이동합니다. 두 조작을 순서대로 따라가면 최종 위치를 확인할 수 있습니다.

이번에는 같은 점을 먼저 반시계 방향으로 90° 돌려 봅시다. 점은 왼쪽 위로 갑니다. 이어서 처음과 같은 세로 중심선을 기준으로 좌우를 뒤집으면 오른쪽 위로 돌아옵니다. 조작의 종류는 같지만 순서를 바꾸었더니 결과가 달라졌습니다.

군의 조건인 결합법칙은 연산의 순서를 바꾸어도 된다는 뜻이 아닙니다. 세 조작의 순서를 그대로 둔 채 어느 두 조작을 먼저 묶어 계산할지 바꾸는 규칙입니다. 순서를 바꾸는 교환법칙과 묶는 위치를 바꾸는 결합법칙을 구별해야 합니다.



손으로 확인하기

종이에 정사각형과 점을 그려 두 순서를 직접 실행해 보세요. 반사에 사용하는 세로축은 종이와 함께 돌아가지 않는 고정된 축입니다.

묶음과 순서의 차이

세 조작 A와 B와 C를 차례로 한다고 합시다. 결합법칙은 앞의 둘을 하나로 묶거나 뒤의 둘을 하나로 묶어도 된다는 뜻입니다. A와 B의 순서를 바꾸는 규칙은 아닙니다. 반사와 회전의 예는 이 두 규칙을 혼동하면 안 되는 이유를 보여 줍니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

이어 읽기 / 현대의 수학과 열린 질문

정사각형의 대칭은 왜 여덟 가지인가

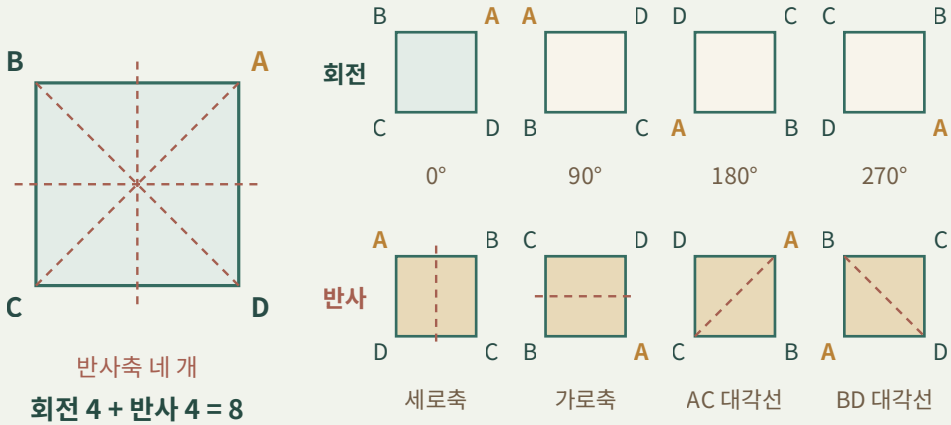
네 회전에 네 반사를 더하면 정사각형을 제자리에 놓는 조작이 모두 모입니다.

본문은 정사각형의 네 회전이 하나의 군을 이룬다는 것을 보였고 탐구 해설에서는 뒤집기를 포함하면 대칭이 여덟 가지가 된다고 짧게 덧붙였습니다. 여기서는 그 여덟 가지가 무엇이며 왜 더 많을 수 없는지 살펴봅니다. 꼭짓점에 A와 B와 C와 D라는 이름을 반시계 방향으로 붙이고 A를 오른쪽 위에 둡니다. 조작이 끝난 뒤 정사각형은 같은 자리를 차지하고 이름만 옮겨 갑니다.

회전은 0° 와 90° 와 180° 와 270° 의 네 가지입니다. 반사는 세로축과 가로축 및 두 대각선을 기준으로 하는 네 가지입니다. 반사축이 대각선이면 그 대각선 위의 두 꼭짓점은 제자리에 남고 다른 두 꼭짓점이 맞바뀝니다. 그림의 아래 줄을 보면 반사한 뒤에는 이름이 시계 방향 순서로 읽힌다는 공통점이 보입니다.

여덟 가지보다 많을 수 없는 이유는 세어 보면 알 수 있습니다. A가 갈 수 있는 자리는 네 모퉁이 가운데 하나입니다. A의 자리가 정해지면 이웃한 B는 A의 양옆 두 모퉁이 가운데 하나에만 갈 수 있습니다. A와 B의 자리가 정해지면 C와 D의 자리도 저절로 정해지므로 가능한 경우는 $4 \times 2 = 8$ 가지입니다.

본문의 순서를 바꾸면 달라지는 조작도 이 여덟 가지 안에서 설명됩니다. 세로축 반사 뒤에 90° 회전을 하면 오른쪽 위의 점이 왼쪽 아래로 가는데 이는 BD 대각선에 대한 반사 한 번과 같습니다. 두 조작을 이어 해도 여덟 가지 밖으로 나가지 않으므로 여덟 대칭도 군을 이룹니다. 1부터 9까지 쓰는 3차 마방진 여덟 개가 하나의 배열을 이 여덟 대칭으로 옮겨 얻은 것이라는 사실도 이 대칭으로 설명됩니다. 다만 3차 마방진이 본질적으로 하나뿐이라는 점은 따로 확인한 사실입니다.



네 회전과 네 반사가 꼭짓점 이름을 서로 다르게 옮깁니다.

조작	A의 자리	B의 자리
0° 회전	오른쪽 위	왼쪽 위
90° 회전	왼쪽 위	왼쪽 아래
세로축 반사	왼쪽 위	오른쪽 위
AC 대각선 반사	오른쪽 위	오른쪽 아래

탐구

90° 회전 뒤에 세로축 반사를 하면 여덟 대칭 가운데 어느 것과 같을까요? 꼭짓점 A와 B가 어디로 가는지 따라가 확인해 보세요.

풀이와 확인

90° 회전에 오른쪽 위의 A는 왼쪽 위로 가고 왼쪽 위의 B는 왼쪽 아래로 갑니다. 이어 세로축 반사를 하면 A는 오른쪽 위로 돌아오고 B는 오른쪽 아래로 갑니다. A가 제자리에 있고 B와 D가 맞바뀌었으므로 A와 C를 지나는 대각선에 대한 반사와 같습니다. 순서를 바꾼 본문의 경우에는 BD 대각선 반사가 되었으므로 두 결과가 다르다는 것도 확인됩니다.

[5] MATHESIS 전시실 4. 근대 교육과 이임학 및 허준이

서울에서 만난 세계의 수학

2014년 세계수학자대회라는 장면.

2014년 8월 13일부터 21일까지 서울에서 세계수학자대회가 열렸습니다. 세계수학자대회는 여러 분야의 연구자가 모여 성과와 방향을 나누는 큰 학술 모임입니다. 유명한 상의 시상식도 열리지만 대회의 의미가 시상에만 있는 것은 아닙니다.

서로 다른 분야의 강연을 듣는 일은 자기 문제를 다른 언어로 볼 기회를 줍니다. 어떤 분야에서 익숙한 방법이 다른 분야에서는 새로운 도구가 될 수 있습니다. 허준이의 연구를 이해할 때도 분야 사이의 만남이라는 관점이 중요합니다.

국제 학술대회를 개최하는 일에는 행사의 준비와 함께 연구를 뒷받침하는 환경이 필요합니다. 교육 기관과 연구 기관 및 지속적인 교류가 그 기반을 이룹니다. 다만 한 번의 개최만으로 모든 분야의 연구 수준을 일괄적으로 판단할 수는 없습니다.

수학사를 읽을 때는 수상자 이름과 함께 질문이 오가던 장면도 상상해 보세요. 누군가의 강연을 듣고 새로운 질문을 떠올리는 일이 다음 연구의 출발점이 될 수 있습니다. 오늘의 교실에서 친구의 풀이를 듣는 일도 이와 닮은 경험입니다.

우리 교실의 작은 학술대회

같은 문제에 대한 서로 다른 풀이 두 가지를 발표합니다. 청중은 더 빠른 풀이를 고르는 대신 각 풀이에서 새롭게 보인 관계를 한 가지씩 말합니다.

듣는 사람이 만드는 질문

강연을 들으며 새 결과의 내용과 그 결과가 필요한 이유를 따로 적어 보세요. 어떤 조건에서만 성립하는지와 알려진 문제 가운데 무엇을 바꾸는지도 물을 수 있습니다. 설명을 이해하는 과정에서 생긴 질문은 발표자의 논리를 더 분명하게 만들고 다음 탐구의 방향을 정하는 데 도움이 됩니다.

발표자가 작은 예를 보여 주면 그 예에서 꼭 필요한 조건을 하나 골라 바꾸어 보세요. 결론이 그대로인지 확인하고 달라진다면 어느 단계가 성립하지 않는지 찾습니다. 이런 질문은 발표 내용을 수동적으로 받아 적는 데서 벗어나 논증을 직접 따라가게 합니다.

행사 일정과 장소 [17] | 나머지는 교육적 해설

허준이가 연결한 두 언어

세는 문제에 기하학의 생각을 가져오다.

허준이는 2022년 필즈상을 받았습니다. 국제수학연맹의 수상 설명은 호지 이론의 아이디어를 조합론에 가져온 연구와 여러 추측의 해결을 중요한 성과로 제시합니다. 조합론은 대상의 배치와 선택과 연결을 다루며 가짓수를 세는 문제도 포함합니다.

색칠 방법의 수처럼 단순해 보이는 질문도 대상이 커지면 복잡한 구조를 가질 수 있습니다. 값을 하나씩 계산하는 것을 넘어 그 값을 담은 다항식의 계수가 어떤 질서를 따르는지 묻는 순간 새로운 문제가 시작됩니다.

기하학의 도구를 썼다는 말이 종이에 그림을 그려 눈으로 답을 찾았다는 뜻은 아닙니다. 대수기하와 호지 이론은 추상적인 공간과 대수적 관계를 다루는 전문 이론입니다. 서로 다른 분야에서 발전한 구조를 연결해 한쪽의 어려운 문제에 새로운 설명을 제공한 것입니다.

이어지는 쪽에서는 작은 그래프의 색칠 다항식을 계산하고 그 계수의 관계를 살펴봅니다. 직접 확인할 수 있는 예를 통해 연구 질문의 형태를 이해하려는 활동입니다. 이런 계산이 일반적인 정리나 그 증명을 대신하지는 않습니다.

읽기의 초점

수상 사실을 기억하는 데서 한 걸음 더 나아가 봅시다. 무엇을 세었는가? 세어 얻은 식에서 어떤 질서를 찾았는가? 왜 다른 분야의 도구가 필요했는가?

가짓수에서 계수로 시선 옮기기

삼각형을 세 색으로 칠하는 경우가 6가지라는 답은 특정한 질문을 해결합니다. 색의 수를 q 로 놓으면 하나의 식으로 여러 경우를 다룰 수 있습니다. 그 식을 전개한 뒤 계수 사이의 관계를 묻는 순간 관심의 대상이 개별 값에서 다항식의 구조로 옮겨 갑니다.

삼각형에서는 색이 두 가지뿐이면 세 점을 조건에 맞게 칠할 수 없습니다. $q = 2$ 를 식에 넣었을 때 값이 0이 되는지 확인해 보세요. 식의 구조를 탐구할 때에도 작은 정수를 대입해 원래의 색칠 문제와 연결하면 기호의 뜻을 놓치지 않을 수 있습니다.

필즈상 수상 사유 [18]

다른 언어로 같은 문제 보기

조합과 기하를 잇는다는 뜻

그래프의 색칠 문제는 경우의 수를 세는 문제처럼 보입니다. 기하학은 공간과 도형의 성질을 다루는 분야로 먼저 떠오릅니다. 서로 멀어 보이는 언어가 연결되면 한쪽에서 풀기 어려운 문제를 다른 쪽의 도구로 바라볼 수 있습니다. 허준이의 연구를 소개할 때 이런 연결이 중요한 배경이 됩니다.

그러나 쉬운 색칠 예제를 계산했다고 해서 그 연구의 증명을 따라간 것은 아닙니다. 작은 그래프는 어떤 수들이 나타나는지 경험하게 해 주고 계수의 규칙이 왜 질문이 되는지 보여줍니다. 일반적인 정리를 증명하려면 훨씬 깊은 개념과 논리가 필요합니다.

입문 해설의 역할은 어려운 내용을 이미 이해했다고 느끼게 하는 데 있지 않습니다. 무엇을 묻는 연구인지와 작은 예에서 어디까지 볼 수 있는지 분명히 하는 데 있습니다. 이어지는 쪽에서는 직접 셀 수 있는 그래프를 통해 질문의 모양을 살펴봅니다.

단계	이 책에서 할 수 있는 일
경험	작은 그래프의 색칠을 직접 셈
표현	가짓수를 색의 수에 관한 식으로 씀
관찰	다항식의 계수 사이 관계를 비교
한계	일반 정리의 증명은 별도의 심화 학습이 필요

자료 안내

필즈상 수상 사유의 공식 설명은 참고 자료에서 확인할 수 있습니다. 본문의 계산은 연구의 의미에 접근하기 위한 입문 예제입니다.

연결을 설명할 때 남길 경계

작은 그래프를 그릴 수 있다는 사실과 깊은 기하학적 이론을 사용했다는 사실은 같은 의미가 아닙니다. 본문의 그림은 질문을 직관적으로 보여 줍니다. 일반 정리의 증명에 어떤 추상적 구조가 필요한지는 별도의 학습이 필요하다는 경계도 함께 남겨 두어야 합니다.

국제수학연맹의 허준이 수상 사유 [18]

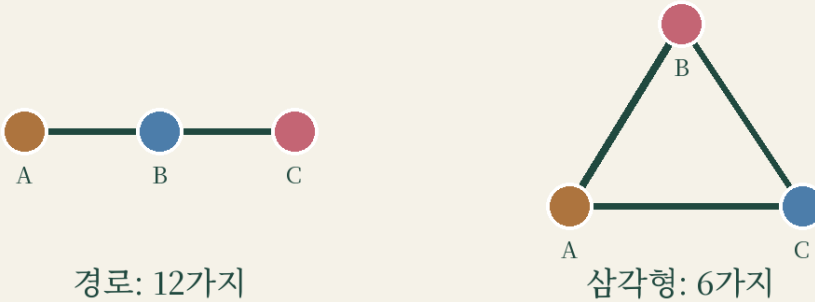
색칠의 가짓수를 식으로 쓰다

꼭짓점 세 개만 있어도 구조가 드러납니다.

점과 선으로 이루어진 그래프에서 선으로 연결된 두 점은 서로 다른 색으로 칠하기로 합니다. 사용할 수 있는 색은 q 종류입니다. 일렬로 연결한 세 점의 첫 점에는 q 가지 선택이 있습니다. 둘째 점은 첫째와 달라야 하므로 $q - 1$ 가지입니다. 셋째 점도 둘째와만 다르다면 되므로 $q - 1$ 가지입니다.

이번에는 세 점을 삼각형으로 연결해 봅시다. 셋째 점은 첫째와 둘째 모두와 연결되어 있으므로 $q - 2$ 가지 선택만 남습니다. 선 하나를 추가했을 뿐인데 식의 구조가 바뀝니다. 그래프는 점의 개수뿐 아니라 무엇이 무엇과 연결되었는지를 답합니다.

이 활동에서는 각 점과 각 색의 이름을 구별합니다. 그래프를 돌렸을 때 같아 보이는 색칠도 이름이 붙은 점의 색이 다르면 별개의 경우입니다. 무엇을 서로 다른 경우로 셀지 먼저 정해야 계산한 가짓수의 뜻이 분명해집니다.



이름이 구별되는 세 색으로 칠합니다. 경로의 양 끝점은 같은 색이어도 됩니다.

경로: $q(q - 1)^2$

삼각형: $q(q - 1)(q - 2)$

창작 예제 | 연구 주제의 연결 [18]

경로를 한 점씩 색칠하기

곱의 법칙을 사용할 조건을 확인합니다.

점 A와 B와 C가 차례로 연결된 경로를 생각해 봅시다. 서로 이웃한 점은 다른 색으로 칠해야 하며 사용할 수 있는 색은 q 개입니다. 먼저 A의 색은 q 가지로 고를 수 있습니다. B는 A와 같은 색을 피해야 하므로 $q - 1$ 가지 선택이 있습니다.

C는 B와 다른 색이면 됩니다. A와 C는 직접 연결되어 있지 않으므로 같은 색을 사용해도 괜찮습니다. 따라서 C에도 $q - 1$ 가지 선택이 있습니다. 각 단계의 선택 수를 곱하면 전체 가짓수는 $q(q - 1)^2$ 입니다.

곱의 법칙을 적용할 때는 앞 단계의 선택에 따라 뒤의 가짓수가 달라지지 않는지 확인해야 합니다. 이 경로에서는 A가 어떤 색이든 B가 피해야 할 색은 하나이고 C도 마찬가지입니다. 이런 일정함이 간단한 곱셈으로 셀 수 있게 해 줍니다.

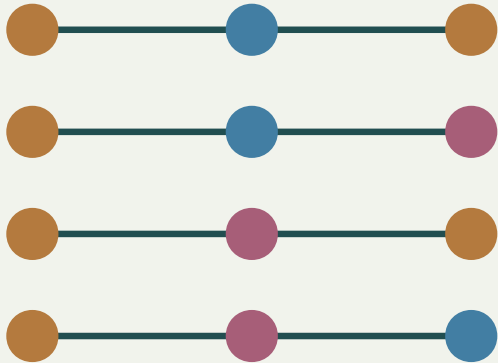
사용할 색	A의 선택	B의 선택	C의 선택	전체
2개	2	1	1	2
3개	3	2	2	12
4개	4	3	3	36

색의 이름

이 책에서는 색의 이름을 구별합니다. 빨강과 파랑을 서로 바꾸어 얻은 색칠은 다른 경우로 셉니다.

첫 색을 고정한 뒤 세기

A의 색을 한 가지로 고정하면 B는 두 가지이고 C도 두 가지이므로 네 경우가 생깁니다. A를 나머지 두 색으로 고정해도 각각 네 경우입니다. 세 부류는 A의 색이 달라 서로 겹치지 않으므로 $4 + 4 + 4 = 12$ 로도 셀 수 있습니다.



A의 색을 고정하면 네 경우가 남습니다.

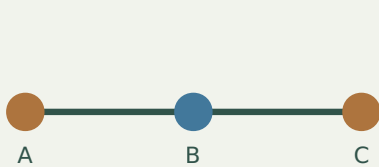
경로에 변 하나가 더해지면

새 조건이 선택의 수를 줄입니다.

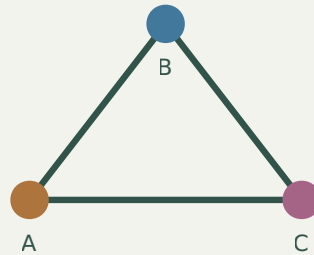
세 점을 경로로 연결한 뒤 A와 C 사이에도 변을 추가하면 삼각형이 됩니다. 이제 A와 C도 서로 다른 색이어야 합니다. 앞에서 허용되던 색칠 가운데 양 끝점이 같은 색인 경우가 사라집니다. 조건이 하나 더해져 가능한 경우가 줄어드는 것입니다.

A에는 q 가지 선택이 있고 B에는 $q - 1$ 가지 선택이 있습니다. C는 A와 B의 색을 모두 피해야 하므로 $q - 2$ 가지 선택이 있습니다. 따라서 전체 가짓수는 $q(q - 1)(q - 2)$ 입니다. 세 색을 사용하면 6가지이고 두 색만 사용하면 0가지입니다.

두 색으로 삼각형을 칠할 수 없다는 사실은 직접 번갈아 칠해 보아도 확인할 수 있습니다. 마지막 점에서 두 이웃의 색을 모두 피할 수 없기 때문입니다. 식의 값이 0이 되는 현상과 그림에서 막히는 이유가 같은 조건을 표현합니다.



경로: 세 색으로 12가지



삼각형: 세 색으로 6가지

경로에서는 A와 C가 같은 색이어도 됩니다. 삼각형에서는 세 점의 색이 모두 달라야 합니다.

차이를 세어 보기

세 색으로 경로를 칠할 때 A와 C가 같은 경우는 6가지입니다. 전체 12가지에서 이를 빼면 삼각형의 6가지를 얻습니다.

사라지는 경우를 따로 세기

경로에서 A와 C가 같은 색인 경우만 세어 봅시다. 그 색은 q 가지이고 가운데 B는 $q - 1$ 가지입니다. 따라서 $q(q - 1)$ 가지가 삼각형에서 제외됩니다. 경로의 식에서 이 수를 빼면 $q(q - 1)(q - 2)$ 가 되어 직접 센 결과와 일치합니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

선을 지우고 점을 합치는 셈

복잡한 색칠 문제를 두 부류로 나누면 작은 그래프의 계산으로 돌아갑니다.

삼각형에서 변 AC를 잠시 지우면 세 점 A와 B와 C가 경로를 이룹니다. 이 경로의 올바른 색칠은 A와 C의 색이 다른 경우와 같은 경우로 나뉩니다. 두 경우는 겹치지 않으며 빠짐없이 전체를 이룹니다. 다른 색인 경우만 남기면 원래 삼각형의 색칠입니다.

A와 C가 같은 색인 경우에는 두 점을 하나로 합쳐 생각할 수 있습니다. 합쳐진 점의 색을 q 가지로 고른 뒤 B의 색을 $q-1$ 가지로 고르면 됩니다. 따라서 경로의 색칠 수 $q(q-1)^2$ 에서 $q(q-1)$ 을 빼면 삼각형의 색칠 수 $q(q-1)(q-2)$ 가 남습니다. 새 식을 외우지 않고 두 부류의 관계로 계산한 것입니다.

이 방법은 루프가 없는 그래프의 한 변 e 에도 적용할 수 있습니다. $G-e$ 는 변을 지운 그래프이고 G/e 는 그 변의 양 끝점을 합친 그래프라고 쓰겠습니다. 지운 그래프의 색칠을 양 끝의 색이 같은 경우와 다른 경우로 나누면 $P_G(q) = P_{G-e}(q) + P_{G/e}(q)$ 를 얻습니다. 합치며 생긴 평행한 변은 같은 색칠 금지 조건을 반복하므로 하나만 남겨도 가짓수는 같습니다.

네 점이 고리로 연결된 정사각형 그래프에 적용해 봅시다. 한 변을 지우면 네 점 경로이므로 색칠 수는 $q(q-1)^3$ 입니다. 그 변의 양 끝을 합치면 삼각형이 됩니다. 따라서 정사각형 고리의 식은 $q(q-1)^3 - q(q-1)(q-2)$ 입니다. 전개하면 $q^4 - 4q^3 + 6q^2 - 3q$ 이고 세 색일 때는 18가지입니다.

이 식의 0이 아닌 계수에 절댓값을 취하면 $1/4/6/3$ 을 얻습니다. $4^2 \geq 1 \times 6$ 과 $6^2 \geq 4 \times 3$ 이 모두 성립합니다. 허준이의 논문은 작은 예의 확인을 넘어 그래프 색칠 다항식 계수의 로그 오목성을 다룹니다. 여기서의 분류 계산은 그 연구가 묻는 대상을 이해하는 발판이며 일반 정리의 증명은 아닙니다.

대상	색칠 다항식	$q = 3$
네 점 경로	$q(q-1)^3$	24
삼각형	$q(q-1)(q-2)$	6
네 점 고리	두 식의 차이	18

탐구

네 점 고리를 두 색으로 칠하면 몇 가지일까요? 본문의 식에 대입한 값과 직접 번갈아 칠한 결과를 비교해 보세요.

풀이와 확인

$2 \times 1^3 - 2 \times 1 \times 0 = 2$ 입니다. 첫 점의 색을 정하면 나머지는 번갈아 정해지며 마지막 점과 첫 점도 다른 색이 됩니다. 첫 점의 선택이 두 가지이므로 전체도 두 가지입니다.

[KR27] June Huh. Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs / [KR28] 국제수학연맹 2022년 필즈상 수상 사유

계수에 숨어 있는 질서

로그 오목성을 작은 예로 확인합니다.

삼각형 그래프의 색깔 다항식을 전개하면 $q^3 - 3q^2 + 2q$ 입니다. 부호를 떼어 낸 계수의 크기를 차례로 보면 1과 3과 2를 얻습니다. 이 수열의 가운데 항 3의 제곱은 양옆 항의 곱보다 크거나 같습니다.

음이 아닌 수열에서 내부의 각 항이 $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$ 을 만족하면 로그 오목하다고 합니다. 용어는 낯설지만 여기서는 가운데 값의 제곱과 이웃한 값의 곱을 비교하는 조건으로 읽으면 됩니다. 1과 3과 2에서는 $9 \geq 2$ 를 확인할 수 있습니다.

몇 개의 작은 그래프에서 관계를 확인했다고 해서 모든 그래프에 대한 결론이 따라오지는 않습니다. 계산 가능한 예를 넘어 일반적인 이유를 밝히는 일이 연구의 과제입니다. 허준이의 성과는 이런 조합적 규칙을 깊은 기하학적 구조와 연결한 맥락에서 읽을 수 있습니다.

끝의 상수항 0을 포함한 계수열을 쓰더라도 이 예의 로그 오목성은 유지됩니다. 이 책에서는 비교의 핵심을 보기 쉽도록 0이 아닌 계수만 먼저 표시했습니다. 표현을 단순화할 때는 무엇을 생략했는지 밝혀 두는 편이 좋습니다.

$$q(q-1)(q-2) = q^3 - 3q^2 + 2q$$

$$3^2 \geq 1 \times 2$$

작은 탐구 I

경로 그래프의 식 $q(q-1)^2$ 를 전개하세요. 0이 아닌 계수의 절댓값도 같은 조건을 만족하는지 확인해보세요.

계수열을 기록하는 순서

삼각형의 다항식에서 차수가 높은 항부터 계수를 쓰면 1 / -3 / 2 / 0입니다. 부호를 떼어 낸 수열은 1 / 3 / 2 / 0입니다. 순서와 생략한 항을 분명히 해야 다른 다항식의 계수와 같은 기준으로 비교할 수 있습니다.

수학 개념 해설 | 연구 성과의 근거 [18] | 해설 102쪽

로그 오목성을 작은 수로 읽다

이웃한 세 항의 관계를 비교합니다.

양수인 수열에서 가운데 항의 제곱이 양옆 항의 곱보다 크거나 같으면 그 자리에서 로그 오목성 조건을 만족한다고 말합니다. 세 항이 a 와 b 와 c 라면 $b^2 \geq ac$ 를 확인합니다. 항이 네 개 이상이면 가능한 모든 가운데 자리에서 이 조건을 검사해야 합니다.

수열 1과 3과 2에서는 $3^2 = 9$ 이고 $1 \times 2 = 2$ 이므로 조건이 성립합니다. 수열 1과 2와 5에서는 $2^2 = 4$ 가 $1 \times 5 = 5$ 보다 작으므로 성립하지 않습니다. 가운데 항이 양옆 항보다 모두 커야 한다는 뜻은 아닙니다. 비교하는 것은 제곱과 곱입니다.

이런 수의 관계가 그래프의 다항식 계수에서 일반적으로 나타나는지 묻는 것은 작은 계산보다 훨씬 큰 문제입니다. 본문에서는 절댓값을 취한 계수열의 예를 통해 조건의 뜻을 익힙니다. 몇 개의 예를 확인한 일을 일반 정리의 증명으로 바꾸어 말하지 않습니다.

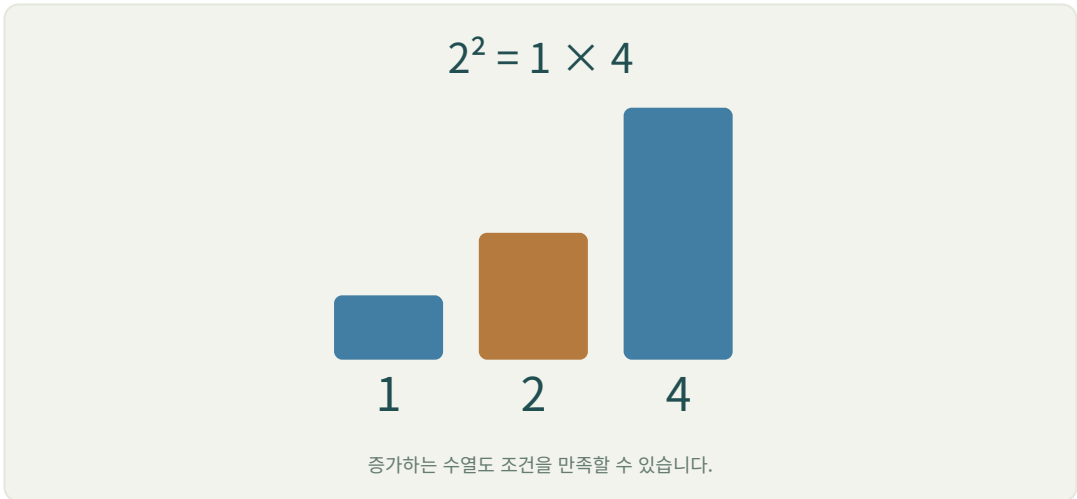
수열	가운데 항의 제곱	양옆의 곱	판정
1 / 3 / 2	9	2	성립
1 / 2 / 1	4	1	성립
1 / 2 / 5	4	5	성립하지 않음

0의 처리

다항식의 모든 계수를 다룰 때는 끝에 붙은 0을 어떻게 포함하는지도 정의에 맞추어야 합니다. 이 쪽에서는 양수인 세 항만 비교합니다.

증가하는 수열도 가능할까

1 / 2 / 4는 계속 증가하지만 가운데 항의 제곱 4와 양옆의 곱 4가 같으므로 조건을 만족합니다. 가운데 수가 양옆보다 커야 하는 조건이 아니라는 점을 보여 줍니다. 이름의 인상보다 정의의 식을 직접 적용하는 편이 정확합니다.



이러 읽기 / 현대의 수학과 열린 질문

경로 그래프의 계수와 파스칼 삼각형

점을 일렬로 이은 그래프에서는 로그 오목성이 모든 크기에서 성립함을 보일 수 있습니다.

본문은 세 점 경로의 색칠 다항식 $q(q-1)^2$ 을 구하고 끝에 점 하나를 더 붙이면 $q(q-1)^3$ 이 된다는 것을 보였습니다. 점을 하나 더 이을 때마다 새 점은 이웃한 한 점의 색만 피하면 되므로 $(q-1)$ 이 한 번씩 더 곱해집니다. 따라서 n 개의 점을 일렬로 이은 경로의 색칠 다항식은 q 에 $(q-1)$ 을 $n-1$ 번 곱한 식입니다. 이 규칙 덕분에 작은 예를 넘어 경로 전체를 한꺼번에 다룰 수 있습니다.

식을 전개하면 부호를 뺀 계수가 파스칼 삼각형의 한 줄과 같습니다. 세 점에서는 1과 2와 1이고 네 점에서는 1과 3과 3과 1이며 다섯 점에서는 1과 4와 6과 4와 1입니다. $(q-1)$ 을 거듭 곱할 때 각 항의 계수가 바로 위 줄의 이웃한 두 수의 합으로 만들어지기 때문입니다. 마지막 곱하는 q 는 차수만 하나씩 올리고 계수는 바꾸지 않습니다.

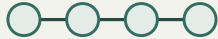
다섯 점 경로의 계수에서 이웃한 두 항의 비를 차례로 구하면 4와 1.5와 약 0.67과 0.25로 점점 작아집니다. 양수인 수열에서 이 비가 줄어든다는 것은 가운데 항의 제곱이 양옆 항의 곱보다 크거나 같다는 조건과 같은 내용입니다. 실제로 $4^2 = 16$ 은 1×6 보다 크고 $6^2 = 36$ 은 4×4 보다 큼니다. 파스칼 삼각형의 어느 줄에서나 이 비는 앞으로 갈수록 작아지므로 경로 그래프의 계수는 항상 로그 오목합니다.

경로 그래프는 계수가 간단한 식으로 주어지는 특별한 경우입니다. 일반적인 그래프에서는 계수를 이처럼 한 줄의 공식으로 쓸 수 없습니다. 허준이의 연구는 일반적인 그래프의 색칠 다항식 계수를 다루었으며 그 증명에는 훨씬 깊은 도구가 필요했습니다. 이 단원의 계산은 그 질문의 모양을 경험하기 위한 학습용 예입니다.



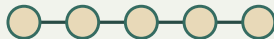
3점

$q(q-1)^2 \rightarrow 1, 2, 1$



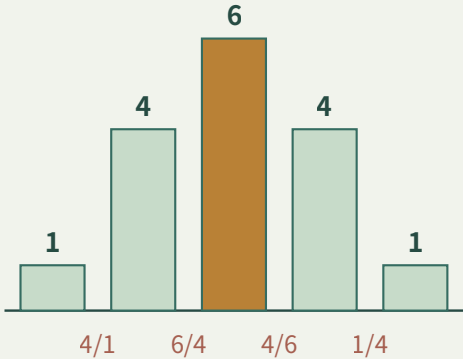
4점

$q(q-1)^3 \rightarrow 1, 3, 3, 1$



5점

$q(q-1)^4 \rightarrow 1, 4, 6, 4, 1$



이웃한 두 항의 비가 점점 작아집니다

경로의 점이 늘면 계수가 파스칼 삼각형의 다음 줄이 됩니다.

경로의 점 수	부호를 뺀 계수	세 색일 때
3	1, 2, 1	12
4	1, 3, 3, 1	24
5	1, 4, 6, 4, 1	48

탐구

여섯 점을 일렬로 이은 경로의 색칠 다항식에서 부호를 뺀 계수를 구하고 세 색으로 칠하는 가짓수를 계산해 보세요. 계수가 로그 오목성 조건을 만족하는지도 확인해 보세요.

풀이와 확인

계수는 파스칼 삼각형의 다음 줄인 1과 5와 10과 10과 5와 1입니다. 세 색이면 첫 점이 3가지이고 나머지 다섯 점이 각각 2가지이므로 $3 \times 32 = 96$ 가지입니다. 가운데 항을 차례로 검사하면 $5^2 = 25 \geq 1 \times 10$ 과 $10^2 = 100 \geq 5 \times 10$ 과 $10^2 = 100 \geq 10 \times 5$ 와 $5^2 = 25 \geq 10 \times 1$ 이 모두 성립합니다. 이웃한 항의 비도 5와 2와 1과 0.5와 0.2로 점점 작아집니다.

[18] 국제수학연맹. June Huh 필즈상 수상 사유

[KR27] June Huh. Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs

작은 예에서 좋은 질문으로

활동 4 | 점 하나와 선 하나의 차이.

88쪽의 경로 그래프와 삼각형 그래프를 색 세 가지로 칠해 보세요. 먼저 식에 $q = 3$ 을 넣어 가짓수를 예상합니다. 그다음 첫 점의 색을 하나로 고정하고 나머지 선택을 분류해 보세요. 모든 색칠을 무작정 그리는 방법보다 체계적으로 셀 수 있습니다.

이번에는 경로 그래프에 다른 점과 연결되지 않은 점 하나를 추가합니다. 새 점은 기존 색칠과 관계없이 세 색 가운데 하나를 선택할 수 있습니다. 그래서 기존 가짓수에 3을 곱할 수 있습니다. 반면 새 점을 기존 점과 연결하면 어떤 색을 쓸 수 있는지 조건이 생깁니다.

가짓수를 셀 때는 같은 경우를 두 번 세거나 가능한 경우를 빠뜨리기 쉽습니다. 분류 기준을 먼저 정한 뒤 각 부류가 겹치지 않는지와 모든 경우를 포함하는지 확인하세요. 이런 점검은 조합론뿐 아니라 자료를 정리하고 주장의 범위를 검토하는 일에도 도움이 됩니다.

그래프	색 3개일 때 예상	이유
세 점의 경로	_____	첫 점과 다음 점의 선택
세 점의 삼각형	_____	마지막 점의 추가 제약
경로와 고립점 하나	_____	독립적인 선택의 곱

한국관을 나서는 질문

산가지와 측우기와 방진과 그래프 사이에서 공통으로 발견한 사고방식은 무엇인가요? 서로 다른 두 장의 사례를 연결해 5문장 안팎으로 적어 보세요.

독립적인 선택을 확인하기

고립점은 기존 점과 연결되어 있지 않으므로 어떤 색을 골라도 기존 색칠의 조건을 바꾸지 않습니다. 이 독립성 때문에 가짓수에 색의 수를 곱할 수 있습니다. 새 점을 기존 점 하나에 연결하면 그 점의 색을 피해야 하므로 선택 수는 $q - 1$ 가지입니다. 선택할 색은 앞선 색칠에 따라 달라져도 선택 수는 일정하므로 이 경우에도 곱의 법칙을 사용할 수 있습니다.

창작 탐구 | 해설 102쪽

조건을 바꾸며 연구 노트 쓰기

작은 계산에서 질문을 키웁니다.

세 점 경로에 연결되지 않은 점 하나를 추가해 봅시다. 새 점은 다른 점의 색에 영향을 받지 않으므로 q 개의 색 중 아무 것이나 고를 수 있습니다. 기존 색칠마다 q 가지가 더 생기며 전체 가짓수는 $q^2(q - 1)^2$ 이 됩니다. 점 하나를 더해도 연결 방식에 따라 식이 달라집니다.

반대로 새 점을 경로의 끝에 붙이면 기존 끝점과 같은 색만 피하면 됩니다. 이때 새 선택은 $q - 1$ 가지이므로 전체 가짓수는 $q(q - 1)^3$ 입니다. 두 경우를 나란히 비교하면 점의 개수만으로 색칠의 가짓수를 결정할 수 없다는 사실이 드러납니다.

연구 노트에는 바꾼 조건과 예상과 실제 계산을 함께 적어 보세요. 예상이 틀렸다면 지우기 보다 왜 틀렸는지 남기는 편이 좋습니다. 질문을 정확하게 고치는 과정도 배움의 일부이며 다음 탐구를 시작할 자료가 됩니다.

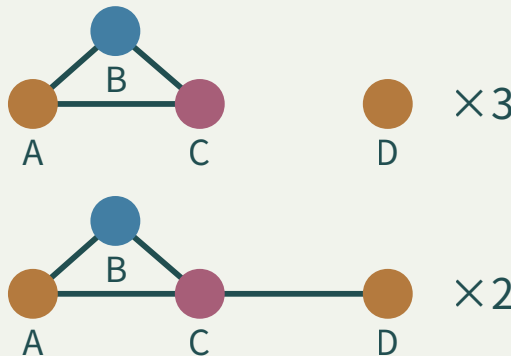
세 점 경로에 추가한 것	세 색으로 칠하는 가짓수
연결되지 않은 점 하나	$12 \times 3 = 36$
끝에 연결한 점 하나	$12 \times 2 = 24$

나의 마지막 질문

삼각형에 점 하나를 연결하면 어떻게 될까요? 연결하지 않을 때와 한 꼭짓점에 연결할 때를 나누어 생각하고 계산의 이유를 적어 보세요.

세 결과를 나란히 비교하기

세 색으로 삼각형을 칠하는 경우는 6가지입니다. 고립점을 추가하면 18가지가 되고 한 꼭짓점에 연결한 점을 추가하면 12가지가 됩니다. 점의 수는 같아도 연결 방식이 결과를 바꿉니다. 그래프를 기록할 때 점과 변을 함께 표시해야 하는 이유입니다.



고립점과 연결된 점의 선택 수는 다릅니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

연표와 탐구 해설 및 참고 자료

한국관을 잇는 시간의 지도

연대는 외우는 표보다 맥락을 찾는 기준입니다.

이 연표는 본문에 등장한 사건을 골라 정리한 것입니다. 한국 수학사의 모든 흐름을 담은 연표는 아닙니다. 제도와 도구 및 저술과 연구가 서로 다른 시간에 변화했다는 점을 살피며 각 장의 내용을 다시 연결해 보세요.

시기	이 책에서 만난 장면
682년	신라 국학 설치
992년	고려 국자감 설치
1434년	양부일구와 자격루
1442년	측우기의 규격과 관측 및 보고 기준 정비
1444년	『칠정산』 간행으로 정리한 연대
1700년 무렵	최석정의 수 배열 연구
1713년	홍정하와 하국주의 문답
1724년	『구일집』의 완성 연대
19세기	남병길과 이상혁의 산학 연구
1946년	오늘의 대한수학회로 이어지는 학회 출발
1960~1961년	이임학의 Ree 군 관련 연구 발표
2014년	서울 세계수학자대회
2022년	허준이의 필즈상 수상

연대 읽기의 주의점

발명과 제도화와 간행은 서로 다른 사건입니다. 한 유물의 제작 시기와 그 종류가 처음 등장한 시기도 구별해야 합니다.

근거 자료는 참고 자료의 주제별 목록 참조

용어를 다시 만나는 쪽

뜻을 안다는 것은 예와 반례를 들 수 있다는 뜻입니다.

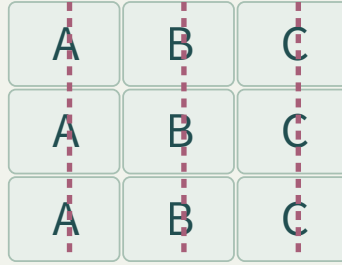
용어	이 책에서의 뜻
산학	전통 사회에서 계산과 관련 문제를 다루던 학문.
자리값	같은 숫자라도 놓인 위치에 따라 값이 달라지는 원리.
비례배분	정한 비에 따라 전체 양을 나누는 방법.
역법	천체의 주기와 위치를 계산해 달력을 구성하는 체계.
표준화	서로 비교할 수 있도록 측정 방법과 기준을 맞추는 일.
마방진	여기서는 모든 행과 열과 두 대각선의 합이 같은 수 배열.
라틴 방진	각 행과 각 열에 모든 기호가 한 번씩 나타나는 배열.
직교 라틴 방진	겹쳤을 때 모든 순서쌍이 전체에서 한 번씩 나오는 두 라틴 방진.
천원술	하나의 미지수를 정해 다항식 관계를 세우는 전통적 방법.
군	결합법칙과 항등원과 역원 등의 조건을 만족하는 연산 구조.
색칠 다항식	사용 가능한 색 수에 따른 올바른 그래프 색칠의 수를 나타내는 다항식.
로그 오목성	음이 아닌 수열에서 각 내부 항의 제곱이 양옆 항의 곱 이상인 성질.

복습 방법

용어 하나를 고른 뒤 책에 없는 예를 만들어 보세요. 조건 하나를 어기는 반례까지 만들면 개념의 경계가 더 분명해집니다.

정의에 맞는 예를 만들기

라틴 방진을 설명하려면 행과 열을 모두 확인하는 예를 고릅니다. 군을 설명하려면 원소의 집합뿐 아니라 연산도 정해야 합니다. 정의를 외운 뒤 그 정의의 각 부분이 예에서 어디에 해당하는지 짚어 보면 빠뜨린 조건을 발견할 수 있습니다.



행은 맞춤 / 열은 반복

정의의 일부만 확인하면 오류를 놓칩니다.

개념을 다시 연결하는 사전

비슷한 말 사이의 차이를 정리합니다.

한 번 읽은 용어도 다른 문제에서 만나면 뜻이 흐려질 수 있습니다. 단어 하나만 외우기보다 무엇과 구별해야 하는지 함께 기억하면 도움이 됩니다. 넓이와 둘레는 같은 도형에서 구하지만 다른 양입니다. 결합법칙과 교환법칙은 모두 연산의 규칙이지만 바꾸는 대상이 다릅니다.

이 표는 앞에서 만난 개념 사이의 경계를 정리합니다. 정의를 읽고 본문의 예를 하나씩 떠올려 보세요. 자신만의 예를 만들 수 있다면 용어를 문장 속에서 사용할 준비가 된 것입니다. 헷갈리는 개념은 찾아보기를 이용해 설명이 나온 쪽으로 돌아가면 됩니다.

용어	이 책에서 기억할 뜻
축척	도면의 길이와 실제 길이의 비
근삿값	목적에 맞추어 정확도를 제한한 값
유량	단위 시간 동안 흐르는 부피
평균	여러 값의 합을 값의 개수로 나눈 수
반례	모든 경우에 성립한다는 주장을 반박하는 예
항등원	연산해도 상대를 바꾸지 않는 원소
역원	주어진 원소와 어느 순서로 연산해도 항등원을 만드는 원소
결합법칙	연산 순서를 유지하면서 묶는 위치를 바꾸는 규칙

말로 설명하기

용어를 쓰지 않고 그 개념을 설명해 보세요. 이어서 그 용어가 필요한 이유를 한 문장으로 덧붙여 봅시다.

혼동하기 쉬운 두 쌍

근삿값은 목적에 맞추어 수를 제한한 표현이고 측정 오차는 측정값과 기준값 사이의 차이입니다. 둘은 연결될 수 있지만 같은 개념은 아닙니다. 반례는 주장을 반박하는 예이며 계산 실수로 얻은 틀린 값과도 구별해야 합니다.

결합의 비교

$$(A \ B) \ C \quad \leftrightarrow \quad A \ (B \ C)$$

교환의 비교

$$A \ B \quad \leftrightarrow \quad B \ A$$

묶는 위치와 실행 순서는 다릅니다.

탐구 해설 ①

답을 확인한 뒤 자신의 설명과 비교하세요.

A. 자리값

302에서는 십의 자리를 비워 백의 자리와 일의 자리를 구별합니다. $28 + 17$ 의 일의 자리에 서는 $8 + 7 = 15$ 이므로 10을 십의 자리 하나로 바꾸고 5를 남깁니다. 결과는 45입니다.

B. 넓이와 단위

$12 \times 8 = 96 \text{ m}^2$ 이므로 씨앗은 $96 \times 3 = 288 \text{ g}$ 입니다. 실제 비탈에서는 경사면 넓이와 수평 투영 넓이가 다를 수 있습니다. 어떤 넓이에 맞춘 파종 기준인지 확인해야 합니다.

활동 1. 비례배분

전체 10몫이므로 한 몫은 24입니다. 각 마을에 48과 72와 120을 배분하면 합이 240입니다. 사람 수가 다르면 일수만으로 노동량을 비교하기 어렵습니다. 인원과 작업 시간 등의 추가 정보가 필요합니다.

C. 주기의 어긋남

단순 모형의 3년 차이는 $11 \times 3 = 33$ 일입니다. 실제 천체 주기의 정밀값과 역법의 규칙을 반영하지 않은 계산이므로 실제 윤달의 위치를 결정할 수는 없습니다.

D. 강수 깊이

두 그릇 모두 부피를 입구 넓이로 나누면 2 cm입니다. 깔때기가 있다면 물을 받은 입구 넓이와 물이 고인 부분의 단면적이 다를 수 있어 수면 깊이를 강수량으로 곧바로 읽으면 안 됩니다.

활동 2. 관측의 한계

표에 기록된 값 중 가장 짧은 그림자는 12:00의 15 cm입니다. 다만 12:00 전후의 더 세밀한 관측이 없으므로 정확히 그 순간에 최소였다고 확정할 수는 없습니다.

검산을 한 줄 더 남기기

비례배분의 세 묶 48과 72와 120을 각각 2와 3과 5로 나누면 모두 24입니다. 씨앗의 양 288 g을 단위 넓이당 3 g으로 나누면 다시 96 m²를 얻습니다. 결과를 얻은 계산과 반대 방향의 계산을 함께 남기면 어떤 양을 구했는지 더 분명해집니다.

$$48 \div 2 = 24$$

$$72 \div 3 = 24$$

$$120 \div 5 = 24$$

각 묶을 같은 기준으로 되돌려 확인합니다.

탐구 해설 ②

조건과 맥락까지 설명하면 풀이가 완성됩니다.

E와 F. 배열의 조건

마방진을 90° 돌리면 행과 열 및 대각선이 서로 대응하므로 합이 유지됩니다. 임의의 두 수 교환은 보장하지 않습니다. 57쪽의 아홉 짝은 모두 다릅니다. 둘째 행 글자를 A와 B와 C로 바꾸면 글자 배열의 열에서 중복이 생깁니다.

G. 방정식의 해석

세로는 5이고 가로는 8입니다. 차이가 3이며 넓이가 40이므로 조건에 맞습니다. -8은 방정식의 해이지만 길이라는 조건에는 맞지 않습니다.

활동 3. 방진 검수

①은 라틴 방진입니다. 행과 열의 합은 6이지만 한 대각선의 합은 $1 + 3 + 2 = 6$ 이고 다른 대각선은 $3 + 3 + 3 = 9$ 이므로 마방진은 아닙니다. ②의 숫자와 글자는 각각 라틴 방진입니다. 그러나 1A와 2B와 3C만 반복되므로 직교하지 않습니다.

H. 회전의 연산

7을 4로 나눈 나머지가 3이므로 270° 회전과 같습니다. 뒤집기는 이 네 회전만으로 표현되지 않습니다. 뒤집기를 포함하면 정사각형의 대칭은 여덟 가지가 됩니다.

I. 계수의 비교

$q(q-1)^2 = q^3 - 2q^2 + q$ 입니다. 계수의 크기 1과 2와 1에 대해 $2^2 \geq 1 \times 1$ 이 성립합니다.

활동 4. 색칠하기

경로는 $3 \times 2 \times 2 = 12$ 가지입니다. 삼각형은 $3 \times 2 \times 1 = 6$ 가지입니다. 경로에 고립점 하나를 더하면 $12 \times 3 = 36$ 가지입니다. 연결 제약이 있는 새 점에는 같은 곱을 무조건 적용할 수 없습니다.

반례를 구체적으로 제시하기

라틴 조건을 만족하는 두 방진이 직교하지 않는다는 사실은 반복되는 쌍 하나만 찾아도 반박할 수 있습니다. 본문 배열에서는 1A가 여러 칸에 나타납니다. 모든 조건이 맞다는 주장을 부정할 때는 어느 조건이 어느 위치에서 깨지는지 밝히는 것으로 충분합니다.

1A	2B	3C
2B	3C	1A
3C	1A	2B

1A가 세 번 나타납니다.

한 쌍의 중복만으로도 직교성을 반박합니다.

확장 탐구 해설 ①

새 탐구 1부터 4까지

새 탐구 1에서는 배가 7대 필요합니다. $53 = 8 \times 6 + 5$ 이므로 여섯 대에 48명이 타고 다섯 명이 남습니다. 남은 사람들도 동시에 이동해야 하므로 배 한 대를 더 마련해야 합니다. 나머지가 생겼을 때 답을 버리거나 반올림할지는 상황에 따라 결정합니다.

새 탐구 2의 넓이는 30 m^2 입니다. 밑변은 10 m 이고 높이는 6 m 이므로 $10 \times 6 \div 2$ 로 구합니다. 꼭짓점을 밑변과 평행하게 옮기면 높이가 변하지 않습니다. 따라서 삼각형의 모양은 달라져도 넓이는 같습니다.

새 탐구 3에서 처음 쓴 양은 20단위이고 다음에 쓴 양은 15단위입니다. 두 분수 모두 처음 양 60을 기준으로 하므로 남은 양은 $60 - 20 - 15 = 25$ 단위입니다. 두 번째 분수를 남은 40의 사분의 일로 읽으면 다른 문제를 풀게 됩니다.

새 탐구 4에서는 비의 합이 6이고 한 몫은 30단위입니다. 배분 결과는 30과 60과 90입니다. 합은 180이고 각 결과를 1과 2와 3으로 나누면 모두 30이 됩니다. 합의 조건과 비율의 조건이 함께 맞는지 확인했습니다.

탐구	답	핵심 조건
1	배 7대	모두 한 번에 이동
2	30 m^2	밑변과 높이가 유지됨
3	25단위	두 분수의 기준이 처음 양
4	30 / 60 / 90단위	합과 비율을 모두 확인

풀이를 비교하기

답이 같더라도 사용한 가정을 살펴보세요. 어떤 조건이 달라지면 답도 달라지는지 말할 수 있어야 풀이를 충분히 이해한 것입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

확장 탐구 해설 ②

새 탐구 5부터 8까지

새 탐구 5의 차이는 30분입니다. 하루에 2분씩 늦어지는 상태가 15일 동안 일정하게 유지된다고 가정했으므로 2×15 로 구합니다. 실제 오차가 날마다 달라진다면 각 날의 오차를 더해야 하며 이 단순한 곱셈을 그대로 사용할 수 없습니다.

새 탐구 6에서 나무의 높이는 4 m입니다. 나무의 그림자는 막대 그림자의 다섯 배이므로 높이도 0.8 m의 다섯 배입니다. 수평한 바닥과 수직인 물체 및 같은 순간의 평행한 햇빛이라는 조건이 닮음의 관계를 뒷받침합니다.

새 탐구 7에서 15분 동안 들어온 물의 부피는 $16 \times 15 = 240 \text{ cm}^3$ 입니다. 이를 단면적 80 cm^2 로 나누면 물높이는 3 cm 올라갑니다. 이 값은 증가량입니다. 처음의 물높이가 주어졌다면 전체 높이를 구할 때 그 값을 더해야 합니다.

새 탐구 8의 평균은 12 mm이고 범위는 2 mm입니다. 네 값의 합 48을 4로 나누어 평균을 구하고 최댓값 13에서 최솟값 11을 빼서 범위를 구합니다. 평균은 중심을 나타내고 범위는 퍼진 정도의 한 측면을 보여 줍니다. 어느 하나도 참값을 보증하지는 않습니다.

탐구	답	확인할 단위
5	30분 늦음	분/일 $\times$ 일
6	4 m	높이의 비와 그림자의 비
7	3 cm 증가	$\text{cm}^3 \div \text{cm}^2$
8	평균 12 mm / 범위 2 mm	모두 길이 단위

실험으로 이어가기

정답을 구한 뒤에는 어떤 가정이 실제 실험에서 잘 지켜지기 어려운지 생각해 보세요. 가정을 점검하는 일이 측정의 정확도를 높입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

확장 탐구 해설 ③

새 탐구 9부터 12까지

새 탐구 9의 두 번째 행은 B C A입니다. 첫째 열에는 A와 C가 있으므로 B가 필요합니다. 둘째 열에는 B와 A가 있으므로 C가 필요하고 셋째 열에는 C와 B가 있으므로 A가 필요합니다. 복원한 행에서도 세 기호가 한 번씩 나타나는지 확인합니다.

새 탐구 10의 사람 수는 17명입니다. 12와 9를 더하면 두 모임에 모두 속한 4명을 두 번 세게 됩니다. 그 네 명을 한 번 빼면 $12 + 9 - 4 = 17$ 이 됩니다. 공통 부분을 모두 없애는 것이 아니라 중복해서 센 한 번만 바로잡습니다.

새 탐구 11에서 사람은 12명이고 물건은 31개입니다. 한 사람에게 한 개씩 더 주려면 남은 7개와 부족한 5개를 합한 12개가 필요합니다. $2 \times 12 + 7$ 과 $3 \times 12 - 5$ 가 모두 31이므로 두 조건을 만족합니다.

새 탐구 12의 최종 위치는 반시계 방향 270° 회전과 같습니다. 열한 번 중 여덟 번은 두 바퀴를 이루어 처음 위치로 돌아가고 세 번이 남습니다. 실제로 움직인 전체 각도는 990° 이지만 최종 위치만 비교할 때는 270° 와 같습니다.

탐구	답	핵심 생각
9	B C A	열마다 빠진 기호 찾기
10	17명	공통 부분의 중복 바로잡기
11	12명 / 31개	남음과 부족함의 차이
12	270° 회전과 같은 위치	4로 나눈 나머지

답 이후의 질문

같은 관계를 가진 새 문제를 숫자만 바꾸어 만들어 보세요. 다른 사람이 풀 수 있도록 필요한 조건을 빠짐없이 적습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

참고 자료 ①

전시의 흐름과 역사적 사실을 확인하는 길.

기존 한국관의 자료 목록을 바탕으로 확장 원고의 근거를 보강했습니다. 『구수략』과 『산학정의』 및 관련 인물의 맥락을 확인할 자료는 추가 목록에 정리했습니다. 제목을 누르면 해당 자료로 이동합니다. 외부 자료와 전시 페이지를 열려면 인터넷 연결이 필요합니다.

[1] MATHESIS 한국관

전체 전시 구성과 인물 연결.

[2] MATHESIS 전시실 1

국학과 산가지와 첨성대 및 토지 측량.

[3] MATHESIS 전시실 2

세종 시대의 관측 및 시간 측정 기구.

[4] MATHESIS 전시실 3

최석정과 홍정하 및 19세기 산서.

[5] MATHESIS 전시실 4

근대 교육과 이임학 및 허준이.

[6] 한국민족문화대백과사전: 산학

고려 산학 교육 제도.

[7] 한국민족문화대백과사전: 산법교정소

세종 시대 역산 연구와 1444년 완성 설명.

[8] 한국민족문화대백과사전: 과학

『칠정산』의 1444년 간행과 지식 교류.

[9] 국사편찬위원회 우리역사넷: 양부일구

공공시계 설치와 현존 유물의 제작 시기.

[10] 한국민족문화대백과사전: 측우기

개발 과정과 우량 관측 제도. 개정 참고 자료의 1441년과 1442년 실록 기사도 함께 참조.

자료를 읽을 때

온라인 전시와 참고 자료의 연대 표현이 다르면 편찬 과정과 간행 시점을 구별해 읽습니다. 이 책은 전시의 모든 문장을 그대로 옮기거나 원전 전체를 번역한 책이 아닙니다.

확장 원고의 참고 자료

문헌과 인물의 맥락을 보강한 자료

확장 원고에서는 조선 산학서의 구성과 저술 및 교정의 관계를 확인할 수 있는 자료를 더했습니다. 백과사전의 설명은 관련 문헌을 찾아가는 출발점으로 활용했습니다. 본문은 자료의 내용을 길게 옮기지 않고 필요한 사실을 요약한 뒤 수학적 해설과 구별했습니다.

옛 수학의 세부 계산을 더 공부하려면 백과사전 항목만으로 끝내기보다 원문과 연구 논문을 함께 대조해야 합니다. 특히 오늘의 기호로 바꾸는 과정에서는 당시의 표기와 문제의식이 일부 가려질 수 있습니다. 이 책의 현대식 예제는 그 차이를 인정한 입문 해설입니다.

번호	자료와 연결 내용
[20]	한국민족문화대백과사전 『구수략』 / E0005877
[21]	한국민족문화대백과사전 남병길 / E0011915
[22]	한국민족문화대백과사전 이상혁 / E0044627
[23]	한국민족문화대백과사전 『산학정의』 / E0026398

자료의 역할

본문에 직접적인 역사 설명이 없는 수학 예제는 이 책을 위해 구성했습니다. 도해와 GIF는 개념을 보여주는 교육용 그림이며 유물 사진이나 원문 영인 이미지가 아닙니다.

자료를 더 읽는 순서

먼저 백과사전 항목에서 책의 이름과 인물 및 구성의 개요를 확인합니다. 이어 소장처의 서지 정보로 판본과 자료의 성격을 살펴봅니다. 원문을 볼 때는 현대 해설에서 사용한 기호가 실제 문헌에도 있는지 구별합니다. 하나의 요약만으로 문헌 전체의 의도를 확정하지 않는 편이 좋습니다.

자료마다 말기는 질문을 구분해 보세요. 인물의 활동 시기는 인물 항목에서 확인하고 책의 물리적 형태와 판본은 소장 자료에서 확인합니다. 수학적 주장과 증명의 범위는 연구 문헌에서 살핍니다. 서로 다른 자료를 함께 읽는 이유는 같은 정보를 반복해서 모으기 위해서만은 아닙니다.

추가 자료 [20]~[23] | 자료 확인 2026. 10. 11.

참고 자료 ②와 판권

역사적 사실과 연구 배경을 확인하는 자료

[11] 한국민족문화대백과사전: 구일집

1724년 완성 및 방정식과 문답 기록.

[12] 한국학중앙연구원 디지털장서각: 구일집

홍정하의 저술과 소장 자료.

[13] Courtois 등: On Latin Squares...

최석정의 9차 직교 라틴 방진 관련 논의. 원문 62쪽.

[14] Lee: KMS 학술지의 역사

대한수학회 학술지의 발달. Science Editing. 2018.

[15] UBC 수학과: In Memoriam

Rimhak Ree의 생몰년과 대학 활동.

[16] Ree: G_2 형 단순군 관련 원논문

Bulletin of the AMS 66. 1960. 508–510쪽. 관련 문헌 안내는 [19] 참조.

[17] IMU: 서울 ICM 2014 첫 안내문

2014년 8월 13–21일 서울 개최.

[18] IMU: June Huh 수상 사유

2022년 필즈상과 조합론 및 호지 이론의 연결.

[19] Ree 군 연구의 문헌 해설

Les groupes simples de Suzuki et de Ree. 원논문 계열의 서지와 수학적 배경.

MATHESIS 세계 수학과 전자책 01

한국판 | 개정판 내용 보강판 | 2026. 10. 12. 본문과 교육용 예제 및 도해는 이 전자책을 위해 새로 구성했습니다. 역사 유물 사진과 인물의 상상 초상은 사용하지 않았습니다. 한국판의 내용과 편집 및 기능을 검토하기 위한 판본입니다.

표지와 도해에 관하여

표지는 천문 관측 기구와 산가지에서 영감을 얻어 AI로 생성한 삽화에 제목을 별도로 조판했습니다. 특정 유물의 정확한 복원도는 아닙니다. 본문의 수학 도해 58개는 설명하는 관계에 맞추어 제작했으며 그중 6개는 HTML에서 움직임으로 볼 수 있습니다.

글꼴은 Noto Serif KR과 Noto Sans KR을 사용했습니다. 두 글꼴은 SIL Open Font License에 따라 포함했습니다. 확대와 인쇄에서도 글자와 수식의 구분이 유지되도록 편집했습니다.

한국관 / 08

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[KR24] 국사편찬위원회 세종실록 93권 세종 23년 8월 18일 제4기사

https://sillok.history.go.kr/id/kda_12308018_004

[KR25] 국사편찬위원회 세종실록 96권 세종 24년 5월 8일 제1기사

https://sillok.history.go.kr/id/kda_12405008_001

[KR26] 한국학중앙연구원 디지털장서각 구일집 K3-412 서지와 해제

https://jsg.aks.ac.kr/dir/view?dataId=JSG_K3-412

[KR27] June Huh. Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs

<https://web.math.princeton.edu/~huh/MilnorChromatic.pdf>

[KR28] 국제수학연맹 2022년 필즈상 수상 사유

<https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2022>

[KR29] 브리티시컬럼비아대학교 수학과 Rimhak Ree 추모 기록

<https://webdrupal.math.ubc.ca/about-our-department/memoriam>