

MATHESIS

세계 수학과 / 내용 중심 개정판

지식의 길

기록에서 출발해 직접 계산하는 수학의 역사

역사 / 도해 / 탐구

REVISED EDITION / 2026

차례

본문의 흐름에 따라 편집한 실제 PDF 쪽번호다.

그림으로 다시 읽는 보충 탐구	4
움직이는 책과 남겨야 할 관계	5
한 줄이 아닌 길의 그물	6
숫자를 옮기면 남는 구조	17
기록의 재료와 책의 구조	25
번역이 옮겨야 하는 논리	35
상인의 장부와 계산의 이동	43
단위가 바뀌어도 같은 양	51
천문표의 줄 사이를 읽기	59
지도를 읽는 수학	69
인쇄된 숫자를 검산하기	78
대수 기호와 번역의 약속	86
편지와 학술 교류의 기록	93
디지털 기록과 새로운 길	101
자료를 다시 엮는 편집자의 작업실	109
참고 자료와 자료 읽기	115

READING THE WORLD

이 책을 여는 질문

이 책은 같은 분량으로 잘라 놓은 전시실이 아니라 서로 다른 질문을 지닌 여덟 권의 책에서 출발한다. 계산을 남긴 재료와 해결해야 했던 문제를 함께 읽으면 비슷한 수식 뒤에 있는 차이가 드러난다. 한 지역을 오늘의 국가 경계에 가두거나 다른 지역을 한 줄의 발전 순서에 놓지 않는다.

읽는 순서는 자유롭다. 수를 기록하는 방법이 궁금하다면 산가지와 자리값 및 키푸를 오가면 된다. 도형의 이유를 묻고 싶다면 넓이의 보존과 완전제곱 및 증명을 이어 읽을 수 있다. 서로 닮은 계산을 발견했을 때에는 구조의 공통점과 역사적 전파의 증거를 따로 살핀다.

이번 개정에서는 원고 단위마다 페이지를 끝내던 방식을 없앴다. 문장과 그림이 차지하는 실제 길이에 따라 다음 페이지로 이어지며 짧은 해설만 남는 쪽을 줄이도록 장 사이의 흐름도 연결했다. 빈 공간을 만들기 위해 본문을 늘리거나 일정한 쪽수를 맞추기 위해 설명을 나누지 않았다.

탐구 문제의 수치와 문자식은 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 재구성이다. 먼저 조건을 읽고 직접 계산한 뒤 풀이를 비교한다. 역사적 사실을 판단할 때에는 본문의 출처와 유물 설명을 함께 확인한다.

지식의 길 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이 장은 개정판에 새로 붙인 보충 탐구다. 본문의 각 장이 계산의 결과나 조건을 말로 설명하고 지나간 자리에서 그림을 하나 더 그려 그 이유를 눈으로 확인하도록 구성했다. 단원마다 이어 읽을 본문의 장을 표시했으므로 해당 장을 읽은 뒤 펼치면 흐름이 자연스럽다.

여기에 실은 도해와 수치는 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 현대 재구성이다. 옛 자료가 실제로 이런 그림을 남겼다는 뜻은 아니며 자료가 말하는 범위는 각 단원 끝의 출처에서 따로 확인할 수 있다. 이번 개정에서는 본문에서 표로만 보여 주던 일부 도해도 실제 그림으로 다시 그렸다.

지식의 길 / 01

움직이는 책과 남겨야 할 관계



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

같은 도형을 그린 여러 장의 종이가 있다고 해서 그 사이의 전송 경로가 저절로 밝혀지는 것은 아니다. 책의 제목과 언어 및 제작 시기를 대조하고 어떤 문장과 풀이가 함께 옮겨졌는지 확인해야 한다. 연결을 그리는 지도는 탐색을 도와주지만 빈 자료를 대신 채워 주지 않는다. 이 관에서는 가능한 길과 확인된 이동을 나누어 읽는다.

번역과 단위 변환 및 표의 복사는 표현을 바꾸면서 관계를 보존해야 하는 작업이다. 숫자를 정확히 옮겨도 열의 단위를 잘못 읽으면 결과가 달라진다. 문장의 단어를 그대로 바꾸어도 모든 경우를 뜻하는 조건이 빠지면 주장이 바뀐다. 여러 지역을 거치는 지식의 역사는 이런 작은 검산의 필요성을 선명하게 보여 준다.

한 줄이 아닌 길의 그물

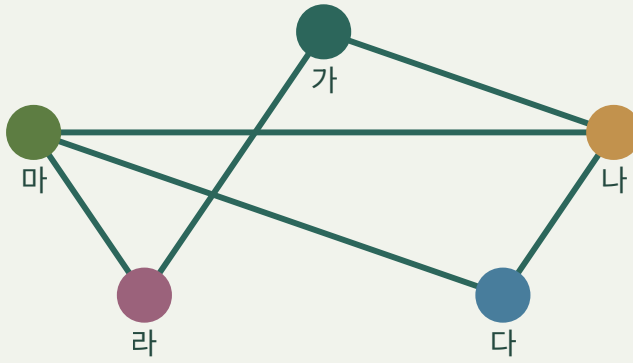
길을 하나로 그리지 않기

지식은 여러 사람과 장소를 거치며 형태를 바꿉니다.

실크로드라는 이름에서 동쪽과 서쪽을 잇는 긴 선 하나를 떠올리기 쉽다. 유네스코의 설명은 서로 연결된 여러 길과 그 위의 도시를 함께 다룬다. 교역망은 상품만 운반하지 않았다. 사람과 신앙 및 기술도 이동했다. 그러나 같은 길에 놓였다는 사실만으로 특정 수학 지식이 그 경로를 지나갔다고 확정할 수는 없다.

이 책에서는 실제 역사 설명과 계산을 위한 가상 모형을 나누어 제시한다. 가상의 다섯 도시를 점으로 표시하고 왕래할 수 있는 구간을 선으로 잇자. 도시의 실제 위치를 그리지 않아도 연결 관계를 비교할 수 있다. 점의 간격이 여행 거리를 뜻하지 않는다는 약속을 먼저 적어야 한다.

출발점에서 도착점까지 이어진 선이 있으면 이 모형에서 이동 가능하다. 그 길이 가장 짧거나 안전하다는 결론은 아직 나오지 않는다. 거리와 계절 및 통행 조건을 추가해야 다른 질문에 답할 수 있다. 모형의 장점은 모든 것을 보여 주는 데 있지 않다. 어떤 질문에 필요한 정보를 남겼는지 분명하게 하는 데 있다.



실제 지리가 아닌 다섯 거점의 가상 연결망

탐구

이 그림의 선분 길이를 자로 재어 실제 여행 거리를 비교할 수 있는가?

풀이와 확인

할 수 없다. 이 그림에는 연결 여부만 주어졌다. 거리 정보가 필요하면 각 구간에 실제 거리나 가정한 거리를 별도로 적어야 한다.

[SR01] UNESCO. Silk Roads: the Routes Network of Chang'an-Tianshan Corridor

출발과 도착 사이의 선택

경로의 수는 갈림길을 어떻게 이어 놓았는지에 따라 달라집니다.

가에서 나로 가는 길이 두 개이고 나에서 다로 가는 길이 세 개라고 하자. 반드시 나를 거치며 앞 구간과 뒤 구간의 선택이 서로를 제한하지 않는다면 가에서 다까지의 선택은 $2 \times 3 = 6$ 개이다. 첫 구간을 하나 고를 때마다 뒤에 세 선택이 붙는 구조이다.

앞 구간을 북쪽길과 남쪽길로 부르고 뒤 구간을 강길과 언덕길과 들길로 부르면 여섯 조합을 빠짐없이 적을 수 있다. 그림을 먼저 그리고 표로 옮겨도 좋다. 곱셈은 가능한 조합들을 같은 크기의 묶음으로 나누어 센 결과이다.

만약 북쪽길에서 도착한 집은 강길을 사용할 수 없다는 조건을 넣으면 경우의 수는 달라진다. 북쪽길에는 두 선택만 남고 남쪽길에는 세 선택이 있으므로 합계는 다섯이다. 교통망을 계산할 때에는 선택들이 독립적인지 확인해야 한다. 조건을 읽지 않고 갈림길의 수만 곱하면 실제로는 불가능한 조합까지 세게 된다.

첫 구간	가능한 둘째 구간	경로 수
북쪽길	강길 / 언덕길 / 들길	3
남쪽길	강길 / 언덕길 / 들길	3
합계	두 묶음의 합	6

탐구

북쪽길은 강길만 이용하고 남쪽길은 세 길을 모두 이용한다면 몇 개인가?

풀이와 확인

$1+3=4$ 개이다. 첫 선택에 따라 뒤의 선택 수가 달라지므로 2×3 을 적용하지 않는다. 서로 겹치지 않는 두 경우를 나누어 더한다.

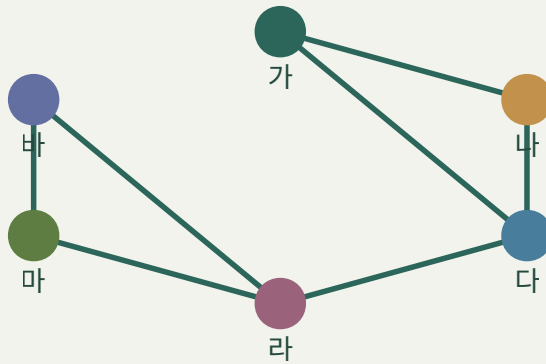
중간 거점의 힘

한 장소의 중요성을 이웃 수 하나로 판단할 수는 없습니다.

가와 나와 다를 삼각형으로 연결하고 라와 마와 바도 삼각형으로 연결하자. 두 묶음 사이에는 다와 라를 잇는 구간 하나만 둔다. 다와 라는 각각 이웃이 세 개이고 나머지 도시에는 이웃이 두 개씩 있다. 이웃 수의 차이는 작아 보여도 두 묶음 사이의 이동은 반드시 다와 라를 거친다.

다와 라 사이의 구간을 지우면 연결망이 둘로 나뉜다. 이런 성질은 여러 경로가 모이는 장소의 역할을 이해하는 데 도움이 된다. 다만 실제 도시의 문화적 중요성은 수학 모형의 연결 수만으로 환원할 수 없다. 학교와 시장 및 언어 공동체 같은 조건도 함께 살펴야 한다.

모형에서는 중요한 연결을 찾는 질문을 정확하게 만들 수 있다. 어떤 구간이 끊어질 때 서로 왕래할 수 없게 되는 도시 쌍이 생기는가를 묻는다. 그림을 한 번에 판단하기 어려우면 구간을 하나씩 지우고 출발 가능한 점들을 표시해 보자. 눈에 띄는 중앙 위치와 연결을 유지하는 역할은 서로 다를 수 있다.



두 묶음을 잇는 다-라 구간을 찾아보는 모형

탐구

가와 나 사이의 구간만 지우면 전체 연결이 끊어지는가?

풀이와 확인

끊어지지 않는다. 가에서 다를 거쳐 나로 갈 수 있다. 두 삼각형을 잇는 다-라 구간과 삼각형 내부의 구간은 전체 연결에서 다른 역할을 한다.

이어 읽기 / 한 줄이 아닌 길의 그물

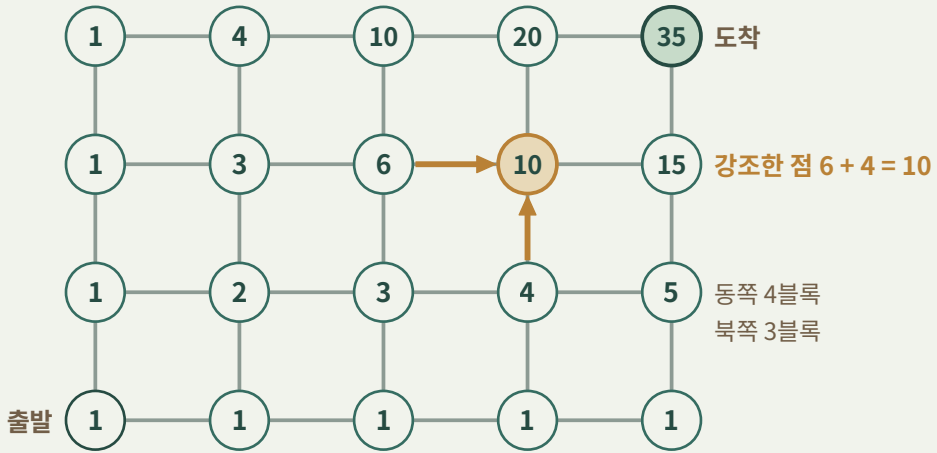
격자 길에서 경로 수를 더해 세기

갈림길마다 도착하는 경로 수를 더해 가면 곱셈 하나로 셀 수 없는 연결망도 빠짐없이 셀 수 있다.

1장에서는 반드시 나를 거치는 길에서 앞 구간 2개와 뒤 구간 3개의 선택을 곱해 $2 \times 3 = 6$ 을 얻었다. 이 곱셈은 모든 경로가 같은 중간 거점을 지나고 앞뒤 선택이 서로를 제한하지 않을 때 성립한다. 도로가 격자처럼 얹혀 있으면 경로마다 지나는 거점이 달라 한 번의 곱셈으로는 셀 수 없다. 이런 연결망에서는 각 교차점에 도착하는 방법의 수를 차례로 적어 나가는 편이 확실하다.

현대 재구성으로 동쪽 4블록과 북쪽 3블록 떨어진 목적지까지 동쪽과 북쪽으로만 가는 경로를 세어 보자. 어떤 교차점에 도착하는 마지막 걸음은 서쪽 이웃에서 오거나 남쪽 이웃에서 온다. 두 경우는 겹치지 않으므로 그 교차점의 경로 수는 두 이웃의 수를 더한 값이다. 출발점과 같은 줄이나 같은 열에 있는 교차점은 한 방향으로만 갈 수 있으므로 모두 1로 시작한다.

이 규칙으로 표를 채우면 둘째 줄은 1과 2와 3과 4와 5가 되고 셋째 줄은 1과 3과 6과 10과 15가 된다. 마지막 줄은 1과 4와 10과 20과 35이므로 목적지까지의 최단 경로는 35개다. 일곱 걸음 가운데 북쪽 걸음 세 개의 자리를 고르는 방법을 세면 $7 \times 6 \times 5 \div (3 \times 2 \times 1) = 35$ 가 되어 결과가 일치한다. 공식은 빠르지만 덧셈 표는 길 하나가 막힌 경우에도 그대로 쓸 수 있다는 장점이 있다.



각 교차점의 수는 서쪽과 남쪽 이웃의 수를 더한 값이다.

탐구

출발점에서 동쪽 1블록과 북쪽 1블록 떨어진 교차점에서 동쪽으로 나가는 구간 하나가 막히면 목적지까지의 경로는 몇 개인가?

풀이와 확인

막힌 구간을 지나는 경로는 그 교차점까지 가는 2가지와 다음 교차점에서 목적지까지 가는 6가지를 곱한 12개다. 따라서 $35 - 12 = 23$ 개가 남는다. 막힌 구간을 빼고 덧셈 표를 다시 채워도 마지막 수가 23이 되어 두 방법이 일치한다.

물건이 사람보다 멀리 갈 때

전달의 연쇄와 한 사람의 여행을 구별해야 합니다.

한 장의 계산서가 가에서 나로 옮겨지고 다른 사람이 그것을 다로 가져간 뒤 다시 라에서 복사했다고 하자. 자료는 세 구간을 통과했지만 같은 사람이 처음부터 끝까지 여행했다는 결론은 나오지 않는다. 지식의 이동을 한 명의 영웅적인 여정으로 그리면 중간의 전달자가 사라질 수 있다.

이 관계를 방향이 있는 기록으로 적으면 가→나와 나→다 및 다→라가 된다. 화살표는 자료 전달의 방향을 나타낸다. 나에서 가로 돌아온 자료가 있다는 뜻은 아니며 사람이 왕래할 수 있는 모든 길을 표시한 것도 아니다. 화살표가 무엇을 뜻하는지 범례에 적는 일이 중요하다.

역사 연구에서 여러 기록이 서로 이어질 때에는 자료의 시기도 맞아야 한다. 라의 사본이 다의 사본보다 먼저 만들어졌다면 단순한 전달 순서를 다시 검토해야 한다. 이름이 비슷한 책을 발견한 것만으로 같은 계보라고 확정하지 않는다. 본문의 배열과 특징적인 오류 등 더 구체적인 증거가 필요하다.

가에서 작성

나에서 전달

다에서 해설 추가

라에서 다시 필사

전달 단계와 담당자가 달라질 수 있는 가상 자료의 이동

탐구

세 구간의 전달이 확인되면 원저자가 라를 방문했다고 말할 수 있는가?

풀이와 확인

말할 수 없다. 확인된 것은 자료 전달의 연쇄이다. 원저자의 이동은 별도의 여행 기록이나 연대 자료로 입증해야 한다.

계절을 넣으면 달라지는 지도

열려 있는 길과 언제나 쓸 수 있는 길은 다릅니다.

가에서 다로 가는 직접 구간은 8일이 걸리고 나를 거치는 구간은 각각 5일과 5일이 걸린다고 하자. 모든 길을 사용할 수 있다면 직접 가는 8일 경로가 빠르다. 그러나 직접 구간을 겨울에 이용할 수 없다면 겨울의 최소 이동 시간은 10일이다.

같은 연결망이라도 계절에 따라 사용할 수 있는 선이 달라진다. 지도에 선이 그어졌다는 사실만으로 모든 시기의 이동을 설명하지 못하는 이유이다. 실제 여행에서는 고개 상태와 물 공급 및 항해 조건 같은 요소가 경로 선택에 영향을 주었을 것이다. 여기의 일수는 원리를 살펴보기 위해 정한 가상 수치이다.

자료를 표로 만들 때에는 구간과 이동 시간뿐 아니라 이용 가능한 조건을 함께 적는다. 조건이 바뀌었을 때 어느 행을 제외해야 하는지 분명해진다. 수학적으로 가장 빠른 경로를 구했다면 결론에도 적용 범위를 남겨야 한다. 모든 계절에서 빠르다고 쓰는 대신 주어진 조건에서 8일이라고 적는 편이 정확하다.

구간	이동 시간	사용 조건
가→다	8일	겨울에는 불가
가→나	5일	이 모형에서는 상시
나→다	5일	이 모형에서는 상시

탐구

봄에 직접 구간의 대기 시간이 3일 추가되면 어느 경로가 빠르냐?

풀이와 확인

직접 가면 $8+3=11$ 일이고 나를 거치면 10일이다. 이동 시간과 대기 시간을 함께 계산하면 나를 거치는 경로가 1일 빠르다.

접촉과 전승의 다른 질문

만날 수 있었다는 사실은 배웠다는 사실과 같지 않습니다.

두 학자가 같은 도시에서 활동했다는 기록이 있으면 서로 만날 가능성을 생각할 수 있다. 그렇지만 같은 도시에 있었다는 사실만으로 한 사람이 다른 사람에게 정리를 배웠다고 결론 내릴 수는 없다. 활동 시기가 겹치는지부터 확인해야 하고 수학 내용의 연결을 보여 주는 자료도 필요하다.

논리를 간단한 모형으로 바꾸어 보자. 전승이 있었다면 접촉 가능한 경로가 있었을 것이라는 주장을 세운다. 그 역인 접촉 가능한 경로가 있으면 반드시 전승이 있었다는 주장은 성립하지 않는다. 조건문의 방향을 뒤집는 오류이다. 문장을 화살표로 적으면 두 주장의 차이가 잘 보인다.

전승의 근거로는 번역문의 대응이나 책에 적힌 서지 정보 및 특정 풀이를 인용한 흔적 등이 쓰일 수 있다. 각각의 자료도 해석이 필요하며 하나의 흔적이 모든 경로를 확정하지는 않는다. 역사적 설명은 빈칸이 있는 상태에서도 성립할 수 있다. 알지 못하는 부분을 그대로 표시하는 것이 근거 없는 연결을 추가하는 것보다 유익하다.

연대와 장소의 양립 확인

텍스트의 대응과 인용 확인

전승 경로에 관한 가설 검토

전승을 주장할 때 필요한 서로 다른 종류의 확인

탐구

비가 오면 길이 젖는다는 말에서 길이 젖었으므로 비가 왔다고 결론 내릴 수 있는가?

풀이와 확인

그 결론은 반드시 성립하지 않는다. 물을 뿌려도 길이 젖을 수 있다. 결과가 같다고 원인을 하나로 확정하는 오류를 전승 문제에서도 경계해야 한다.

살아남은 기록의 편향

남아 있는 수는 과거 전체의 수와 다를 수 있습니다.

가 지역에서 사본 20권이 발견되고 나 지역에서 5권이 발견되었다고 하자. 이 수만으로 가 지역에서 책을 네 배 많이 읽었다고 말하기는 어렵다. 보존 조건과 조사 범위 및 책을 모으는 방식이 서로 달랐을 수 있기 때문이다. 발견된 자료 수와 원래 제작된 수는 구별해야 한다.

계산 모형에서 가 지역 책의 20%가 남고 나 지역 책의 5%가 남았다고 가정해 보자. 발견 수를 보존 비율로 나누면 두 지역의 원래 수는 모두 100권으로 추정된다. 그러나 실제 보존 비율을 모른다면 이 계산 결과를 역사적 사실로 제시할 수 없다. 가정에 따른 결과일 뿐이다.

다른 가정을 넣어 보는 일은 결과의 민감도를 드러낸다. 나 지역의 보존 비율을 10%로 바꾸면 원래 수는 50권이 된다. 작은 표라도 가정과 관찰을 열로 나누면 무엇을 알고 무엇을 추정했는지 읽기 쉬워진다. 자료가 부족하다는 이유로 계산을 포기하기보다 계산이 말할 수 있는 범위를 명확하게 한다.

지역	발견된 수	가정한 보존 비율	추정한 원래 수
가	20권	20%	100권
나	5권	5%	100권

탐구

나 지역의 보존 비율이 2.5%라는 가정에서는 원래 수가 얼마인가?

풀이와 확인

$5 \div 0.025 = 200$ 권이다. 보존 비율을 절반으로 가정하면 같은 발견 수에서 추정하는 원래 수는 두 배가 된다. 이 값은 가정의 결과이다.

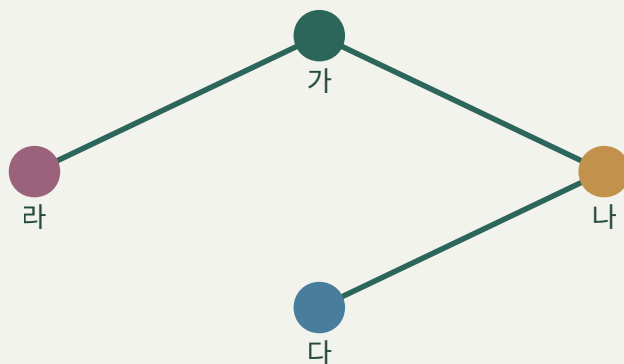
한 장의 연결망을 설명하기

선을 그린 뒤에는 그 선이 뜻하는 것을 문장으로 남깁니다.

가와 나가 연결되고 나와 다가 연결되며 가와 라도 연결된 모형을 보자. 가에서 다로 가려면 나를 거쳐 두 구간을 지나고 라에서 다로 가려면 가와 나를 거쳐 세 구간을 지난다. 여기서는 구간마다 같은 비용을 가정했으므로 구간 수가 적을수록 비용도 적다.

실제 길이 다르다면 구간 수와 거리의 순서는 달라질 수 있다. 두 구간의 합이 100km이고 세 구간의 합이 60km라면 구간이 많은 쪽이 더 짧다. 그래프의 모양만 보고 최단 거리라고 부르기 전에 무엇을 최소화하는지 정해야 한다. 구간 수와 거리 및 시간은 서로 다른 척도이다.

이 장을 읽고 직접 작은 연결망을 만들어 보자. 점은 무엇을 나타내는지 적고 선의 방향과 비용 및 사용 조건을 정한다. 이어 답할 수 있는 질문 두 가지와 답할 수 없는 질문 한 가지를 남긴다. 모형의 한계를 설명하는 일도 수학적 이해의 일부이다. 역사적 경로를 다룰 때에는 모형과 근거 자료를 함께 제시해야 한다.



거리와 시간이 없는 연결망에서는 구간 수만 비교할 수 있다

탐구

라에서 다까지 두 구간만에 이동할 수 있는가?

풀이와 확인

이 모형에서는 불가능하다. 라→가→나→다의 세 구간이 필요하다. 라에서 나로 가는 새 구간을 추가하면 두 구간으로 줄어든다.

지식의 길 / 03

숫자를 옮기면 남는 구조

기호와 수를 따로 보기

서로 다른 글자 모양이 같은 수량을 나타낼 수 있습니다.

열두 개의 돌을 한 줄로 놓은 것과 열 개를 묶고 두 개를 남긴 것은 같은 수량을 나타낸다. 표시는 달라도 셈의 대상은 바뀌지 않는다. 숫자 표기를 비교할 때에는 기호의 모양과 묶음의 규칙을 나누어 보아야 한다. 낫선 기호를 친숙한 모양으로 바꾸는 것만으로 모든 구조가 번역되는 것은 아니다.

교육용 기호로 막대 하나를 1과 네모 하나를 10이라고 약속해 보자. 네모 세 개와 막대 네 개는 34이다. 기호의 위치를 바꾸어도 각 기호의 값을 더한다면 총량은 같다. 반면 십진 자리 값 표기에서 34와 43은 다른 수이다. 기호의 순서가 뜻을 결정하는 방식이 서로 다르다.

한 표기에서 다른 표기로 바꾸는 절차는 총량을 먼저 계산한 뒤 새 규칙에 맞추어 다시 쓰는 것이다. 표기의 경제성을 비교하려면 어떤 수를 자주 기록하는지도 고려한다. 적은 기호로 쓸 수 있다는 장점과 손으로 더하기 쉽다는 장점이 언제나 함께 나타나지는 않는다. 이 장의 기호는 실제 고대 문자의 복원이 아닌 학습용 약속이다.

$$\begin{array}{c}
 10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1 \\
 3 \times 10 + 4 \times 1 \\
 34
 \end{array}$$

총량을 유지하며 덧셈 표기를 자리값 표기로 옮긴다

탐구

10을 뜻하는 기호 두 개와 1을 뜻하는 기호 일곱 개는 십진법으로 얼마인가?

풀이와 확인

$2 \times 10 + 7 = 27$ 이다. 기호 아홉 개를 썼다는 사실과 나타내는 수량이 27이라는 사실을 구별한다.

같은 세 글자의 다른 무게

자리값은 기호의 위치에 따라 가중치를 부여합니다.

숫자 2와 4와 7로 만든 247에서 각 숫자의 기여는 200과 40과 7이다. 수를 $2 \times 100 + 4 \times 10 + 7$ 로 펼치면 위치의 역할이 드러난다. 숫자의 모양 자체가 200을 뜻하는 것이 아니라 백의 자리에 놓인 2가 200을 나타낸다.

같은 숫자를 뒤집은 742는 $700 + 40 + 2$ 이다. 두 수의 차는 495이다. 백의 자리와 일의 자리에 있던 숫자의 차 5가 백의 자리에서는 500을 늘리고 일의 자리에서는 5를 줄이므로 순증가가 495가 된다. 중간 숫자 4는 움직이지 않아 차이에 영향을 주지 않는다.

이 관계를 일반화하면 서로 다른 세 자리 수를 비교할 때도 계산을 줄일 수 있다. 첫째 숫자와 마지막 숫자의 차의 절댓값에 99를 곱하면 뒤집기 전후의 차의 절댓값을 얻는다. 양쪽을 모두 세 자리 수로 비교하려면 첫째 숫자와 마지막 숫자가 모두 0이 아니어야 한다. 마지막이 0이라 뒤집은 표기가 두 자리가 되어도 자리값의 차이에 관한 식 자체는 성립한다. 표기 규칙에서 시작한 관찰이 대수 관계로 이어지는 예이다.

표기	백의 자리	십의 자리	일의 자리
247	200	40	7
742	700	40	2
차이	500	0	-5

탐구

358과 853의 차는 얼마이며 가운데 숫자 5가 계산에 영향을 주는가?

풀이와 확인

$(8-3) \times 99 = 495$ 이다. 가운데 자리는 두 수에서 같은 5이므로 차를 구할 때 소거된다. 직접 빼어도 $853-358=495$ 이다.

빈자리를 기록하는 약속

빈 칸의 존재를 표시하면 서로 다른 수를 구별할 수 있습니다.

십진 자리값에서 203은 백 두 묶음과 날개 세 개를 뜻한다. 십의 자리에는 아무 묶음도 없지만 그 자리의 존재는 남겨야 한다. 0을 빼서 23이라고 적으면 백의 자리였던 2가 십의 자리로 옮겨 간다. 비어 있는 양과 빠진 자리의 차이가 수의 뜻을 바꾼다.

여기에서는 오늘 사용하는 표기 규칙의 기능을 살핀다. 역사 속에서 0의 기호와 자리 표시 및 수로서의 연산이 어떻게 발전했는지는 별개의 자료 문제이다. 지금의 편리함을 설명했다고 한 사람이나 한 시점의 발명을 증명한 것은 아니다. 기능을 이해하는 계산과 역사적 기원을 묻는 조사는 함께 하되 섞지 않아야 한다.

203을 열 배로 만들면 2030이 되고 각 숫자의 기여도 열 배가 된다. 맨 뒤에 0을 붙인다는 기억법은 정수의 십진 표기에서 편리하지만 소수에 그대로 붙이면 틀릴 수 있다. 2.03 뒤에 0을 붙인 2.030은 같은 수이다. 숫자의 이동을 자릿값으로 설명하면 기억법의 적용 조건을 알 수 있다.

천	백	십	일
	2	0	3
2	0	3	

203을 열 배로 만들면 각 숫자가 한 자리씩 이동한다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

2.03의 열 배를 구하고 2.030과 비교하라.

풀이와 확인

열 배는 20.3이다. 2.030은 2.03과 같은 값이다. 소수점이 정해 주는 자릿값을 고려해야 하며 끝에 0을 쓰는 행동만으로 판단하면 안 된다.

밑을 바꾸어 같은 수 쓰기

묶음의 크기가 달라져도 총량은 유지됩니다.

십진법의 23을 다섯 개씩 묶는 표기로 바꾸자. 23에는 다섯 묶음이 네 개 들어가고 세 개가 남는다. 따라서 오진법으로 43이라고 쓰며 혼동을 피하기 위해 밑이 5임을 덧붙인다. 이 표기의 4는 4×5 를 나타내므로 십진법의 43과 다르다.

오진법의 124를 십진법으로 읽으면 $1 \times 25 + 2 \times 5 + 4 = 39$ 이다. 자리의 무게는 오른쪽부터 1과 5와 25가 된다. 십진법에서는 한 자리에 열 개가 모이면 받아올림하지만 오진법에서는 한 자리에 다섯 개가 모이면 다음 자리의 하나로 바꾼다. 기호보다 교환 규칙이 계산의 구조를 결정한다.

표기를 번역할 때에는 중간 계산을 남기는 것이 좋다. 39를 다시 5로 나누면 몫 7과 나머지 4가 나오고 7을 5로 나누면 몫 1과 나머지 2가 나온다. 남은 몫 1을 맨 앞에 써서 124를 얻는다. 서로 반대 방향의 계산을 하면 자리를 거꾸로 적는 오류를 찾을 수 있다.

$$39 = 7 \times 5 + 4$$

$$7 = 1 \times 5 + 2$$

$$39 = 1 \times 25 + 2 \times 5 + 4$$

반복 나눗셈으로 오진법 자리값을 찾는다

탐구

십진법의 31을 오진법으로 나타내라.

풀이와 확인

$31 = 1 \times 25 + 1 \times 5 + 1$ 이므로 오진법 111이다. 세 개의 1을 더해 3으로 읽으면 자리의 무게를 빠뜨린 것이다.

받아올림을 교환으로 설명하기

자리값의 규칙은 덧셈의 절차를 뒷받침합니다.

오진법에서 34와 23을 더해 보자. 일의 자리에서 $4+3=7$ 이므로 다섯 개를 한 묶음으로 바꾸고 두 개를 남긴다. 다음 자리에는 원래 있던 3과 2에 받아들인 1을 더하여 여섯 묶음이 생긴다. 다시 다섯 묶음을 위 자리 하나로 바꾸면 결과는 112가 된다.

십진법으로 계산하면 오진법 34는 19이고 23은 13이므로 합은 32이다. 결과 112를 십진법으로 바꾸면 $25+5+2=32$ 여서 일치한다. 서로 다른 표기를 거치는 계산은 같은 계산 실수를 그대로 반복할 가능성을 줄여 준다.

받아올림을 단순히 작은 숫자 1을 위에 적는 행동으로 배우면 그 1이 무엇을 뜻하는지 놓칠 수 있다. 일의 자리에서 옮긴 1은 다섯 개의 날개를 묶은 하나이고 다음 자리에서 옮긴 1은 스물다섯 개의 묶음이다. 기호는 같아도 위치에 따라 교환한 양이 다르다. 이 원리는 다른 밑의 자리값 계산에도 이어진다.

단계	계산	남기는 숫자	다음 자리로 옮김
일의 자리	$4+3=7$	2	1
다섯의 자리	$3+2+1=6$	1	1
스물다섯의 자리	받아온 1	1	없음

탐구

오진법의 44에 1을 더하면 어떻게 되는가?

풀이와 확인

일의 자리에서 $4+1$ 을 교환하고 다음 자리의 4에도 1이 더해져 다시 교환된다. 결과는 오진법 100이다. 십진법으로는 $24+1=25$ 이다.

같은 분수의 다른 모습

표현의 길이는 수 자체보다 표기 체계에 좌우될 수 있습니다.

분수 $1/2$ 은 십진법으로 0.5라고 짧게 나타낼 수 있다. 그러나 $1/3$ 은 0.333...처럼 같은 숫자가 끝없이 반복된다. 길게 쓰인다는 이유로 $1/3$ 이 부정확한 수가 되는 것은 아니다. 정확한 분수와 유한하게 잘라 쓴 소수 근삿값을 구별해야 한다.

어떤 분수가 유한소수가 되는지는 약분한 분모와 밑의 관계에 달려 있다. 십진법의 밑 10은 2×5 이므로 분모의 소인수가 2와 5뿐인 분수는 유한하게 끝난다. 예를 들어 $3/8$ 은 분모에 2만 들어 있어 0.375가 된다. $1/6$ 은 약분할 수 없는 분모에 3이 남아 끝나지 않는다.

표기 밑을 바꾸면 상황도 달라진다. 삼진법에서 $1/3$ 은 소수 첫 자리의 1로 나타낼 수 있다. 같은 양을 어느 체계에서는 짧게 쓰고 다른 체계에서는 반복해서 쓴다. 다른 문화의 수 표기를 읽을 때 친숙한 소수 모양만을 기준으로 효율을 판단하기 어려운 까닭이다.

분수	십진법 표현	끝나는가
$1/2$	0.5	예
$3/8$	0.375	예
$1/3$	0.333...	아니오
$1/6$	0.1666...	아니오

탐구

$7/40$ 은 십진법 유한소수가 되는가?

풀이와 확인

$40=2^3 \times 5$ 이므로 유한소수로 끝난다. 실제로 $7/40=0.175$ 이다. 분모에 어떤 소인수가 있는지 살피기 전에 약분이 가능한지도 확인한다.

규칙을 보존하는 번역

올바른 변환은 표현뿐 아니라 계산 결과도 이어 줍니다.

어떤 표기의 수를 다른 표기로 옮길 때 더하기의 결과가 유지되는지 확인할 수 있다. 오진법 12와 21을 먼저 십진법으로 옮기면 각각 7과 11이다. 합은 18이며 이를 다시 오진법으로 나타내면 33이다. 원래 오진법으로 직접 더해도 $12+21=33$ 이 나온다.

두 경로가 같은 결과를 준다는 사실은 번역 규칙을 점검하는 좋은 방법이다. 한 경로는 먼저 변환하고 나중에 계산한다. 다른 경로는 먼저 계산하고 나중에 변환한다. 양쪽이 다르면 계산 실수나 변환 규칙의 오해가 있는지 확인한다.

모든 번역이 이런 단순한 수치 대응으로 끝나지는 않는다. 옛 문헌의 문제 상황과 수학 용어에는 당시의 관습이 포함될 수 있다. 하지만 계산 가능한 수의 관계부터 확인하면 해석의 기반을 마련할 수 있다. 문장의 의미를 바꾸지 않았는지 검토하는 일과 수치 결과가 같은지 확인하는 일은 서로를 보완한다.

순서	첫 단계	둘째 단계
변환 먼저	$7 + 11$	18
계산 먼저	오진법 33	

변환과 덧셈의 순서를 바꾸어 같은 값을 얻는지 확인한다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

오진법 13과 22를 십진법으로 옮겨 합을 구하고 다시 오진법으로 써라.

풀이와 확인

13은 8이고 22는 12이므로 합은 20이다. 오진법에서는 40이다. 직접 더하면 일의 자리 $3+2$ 를 받아올려 같은 40을 얻는다.

밑을 모를 때 찾아보기

표기의 규칙을 미지수로 놓으면 새로운 문제를 만들 수 있습니다.

어떤 자리값 표기에서 24가 십진법의 18을 뜻한다고 하자. 밑을 b 라고 놓으면 $2b+4=18$ 이므로 $b=7$ 이다. 숫자 4를 사용할 수 있으려면 밑은 4보다 커야 하므로 $b=7$ 은 기호 사용 조건에도 맞는다. 수식의 답과 표기 체계의 조건을 함께 확인했다.

같은 방식으로 어떤 표기의 31이 십진법 16이라면 $3b+1=16$ 에서 $b=5$ 를 얻는다. 그런데 31이 십진법 10이라고 하면 $b=3$ 이 나오며 숫자 3 자체를 밑 3의 한 자리 숫자로 사용할 수 없다. 방정식에 정수해가 있다는 사실만으로 유효한 표기 체계가 되는 것은 아니다.

이 문제는 실제 역사 문헌의 밑을 추정하는 절차를 그대로 대신하지 않는다. 문헌에는 단위와 생략 및 다른 표기 관습이 섞여 있을 수 있다. 여기서의 자리값 체계라는 가정을 먼저 정한 교육용 문제를 다룬다. 가정을 문장으로 적어 두면 계산이 어디까지 유효한지 독자가 따라갈 수 있다.

표기 24 → 십진법 18

$$2b + 4 = 18$$

$$b = 7 > 4$$

밑을 구한 뒤 모든 숫자가 밑보다 작는지 확인한다

탐구

표기 32가 십진법의 20이라면 밑은 얼마인가?

풀이와 확인

$3b+2=20$ 이므로 $b=6$ 이다. 사용한 숫자 3과 2가 모두 6보다 작으므로 유효하다. 다시 $3 \times 6 + 2 = 20$ 으로 검산한다.

지식의 길 / 04

기록의 재료와 책의 구조

재료가 바꾸는 기록의 모습

내용을 담는 물건의 구조도 읽는 방식에 영향을 줍니다.

점토판과 두루마리 및 접은 종이책은 글을 담는 방식이 다르다. 같은 계산을 적더라도 줄의 길이와 수정 방법 및 여러 쪽을 넘기는 행동이 달라질 수 있다. 재료가 모든 수학적 생각을 결정하는 것은 아니지만 무엇을 쉽게 기록하고 다시 찾아볼 수 있는지에는 영향을 준다.

가상의 계산표에 열 여섯 개와 행 열 개가 있다고 하자. 한 쪽에 여덟 열과 열 행만 담을 수 있다면 표를 두 쪽에 나누어야 한다. 단순히 칸 수만 절반으로 자르면 행 제목이 둘째 쪽에서 사라질 수 있다. 같은 행을 이어 읽을 수 있도록 식별 정보를 반복해야 한다.

기록을 압축하는 일과 읽기 쉽게 만드는 일은 항상 같은 방향이 아니다. 행 제목을 두 쪽에 반복하면 글자 수가 늘지만 독자는 서로 대응하는 값을 더 쉽게 찾는다. 숫자를 줄이는 것만 효율이라고 부르기보다 쓰는 사람과 읽는 사람의 부담을 함께 생각해 볼 수 있다. 전자책의 쪽번호와 장 제목도 이런 탐색을 돕는다.

행	첫째 쪽	둘째 쪽
가	열 1-8	열 9-16
나	열 1-8	열 9-16
다	열 1-8	

넓은 표를 나누어도 행의 대응을 유지하는 편집 모형 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

행 제목을 둘째 쪽에도 반복하면 왜 도움이 되는가?

풀이와 확인

두 쪽을 동시에 보지 않아도 어떤 대상의 값인지 확인할 수 있다. 반복 정보는 기록량을 늘리지만 대응 오류를 줄이는 역할을 한다.

접으면 생기는 쪽의 수

종이의 면과 책의 쪽을 혼동하지 않아야 합니다.

종이 한 장을 가운데에서 한 번 접으면 앞 두 개가 생긴다. 각 앞에는 앞뒤 두 면이 있으므로 책의 쪽은 네 개이다. 접기 전의 종이 한 장과 접은 뒤의 앞 두 개 및 번호를 붙이는 네 쪽은 서로 다른 단위이다.

이런 종이를 세 장 겹쳐 접어 한 묶음으로 만들면 앞은 여섯 개이고 쪽은 열두 개이다. 바깥 쪽 종이의 한 면에는 맨 앞쪽과 맨 뒤쪽이 나란히 놓인다. 책을 펼친 순서대로 1부터 12까지 적은 것과 인쇄할 종이 위의 배치는 다르다.

간단한 모형을 직접 만들어 쪽번호를 붙인 뒤 종이를 다시 펼쳐 보자. 가장 바깥 종이에서는 12와 1 및 2와 11이 짝이 된다. 안쪽 종이는 8과 5 및 6과 7이 짝이 된다. 이 배열은 특정 고서의 제책법을 대표하는 것이 아니라 한 번 접은 종이를 중첩한 교육용 모형이다. 구조의 가정을 분명히 해야 실제 책의 형태와 비교할 수 있다.

종이	한 면의 쪽번호	다른 면의 쪽번호
바깥	12 / 1	2 / 11
가운데	10 / 3	4 / 9
안쪽	8 / 5	6 / 7

탐구

한 번 접은 종이 다섯 장을 겹치면 모두 몇 쪽인가?

풀이와 확인

한 장당 네 쪽이므로 $5 \times 4 = 20$ 쪽이다. 앞의 수는 10개이다. 표지나 별도 삽입물이 없다는 조건에서 계산했다.

이어 읽기 / 기록의 재료와 책의 구조

겹쳐 접은 종이의 쪽번호 규칙

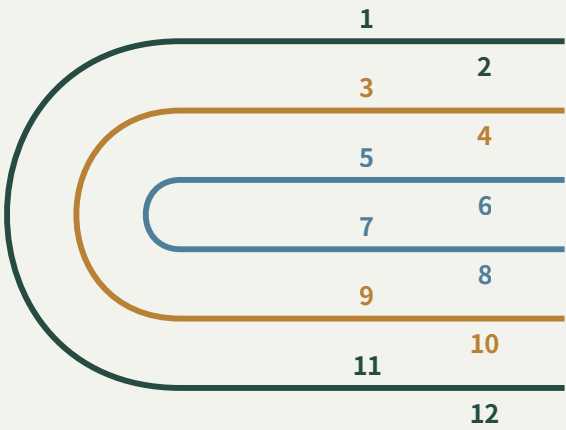
한 번 접은 종이를 여러 장 겹치면 같은 면에 나란히 놓이는 두 쪽의 합이 언제나 같다.

3장에서는 세 장을 겹쳐 접은 열두 쪽 모형에서 바깥 종이에 1과 2 및 11과 12쪽이 놓인다는 것을 확인했다. 이 배치에는 눈에 띄는 규칙이 있다. 한 면에 나란히 놓이는 두 쪽은 12와 1, 2와 11처럼 합이 모두 13이다. 가운데 종이의 10과 3, 안쪽 종이의 8과 5에서도 합은 13이다.

규칙의 이유는 쪽번호를 매기는 순서에 있다. 책을 넘기면 앞쪽 절반에서는 바깥 종이부터 안쪽 종이로 들어가며 번호가 늘고 뒤쪽 절반에서는 안쪽에서 바깥으로 나오며 번호가 늘다. 그래서 바깥에서 k 번째 종이는 앞에서 k 번째 앞과 뒤에서 k 번째 앞을 함께 가진다. 앞에서 $센$ 번호와 뒤에서 $센$ 번호를 더하면 전체 쪽수에 1을 더한 값이 된다.

일반적으로 n 장을 겹쳐 접으면 쪽은 $4n$ 개이고 바깥에서 k 번째 종이에 $2k-1$ 과 $2k$ 및 $4n+1-2k$ 와 $4n+2-2k$ 쪽이 놓인다. 짝이 되는 두 쪽의 합은 $4n+1$ 이다. $n=3$ 이면 13이 되어 앞의 모형과 맞고 $n=5$ 이면 21이 된다. 이 식은 한 번 접은 종이를 중첩한 교육용 모형에서만 성립하며 실제 제책은 접는 횟수와 묶는 방식에 따라 다를 수 있다.

이 규칙은 결락을 판단할 때 바로 쓸 수 있다. 쪽 하나가 빠진 것을 발견하면 $4n+1$ 에서 그 번호를 빼어 같은 종이의 짝 쪽을 찾는다. 3장의 질문처럼 3과 4 및 9와 10쪽이 함께 없다면 $3+10$ 과 $4+9$ 가 모두 13이므로 가운데 종이 한 장이 빠졌다는 설명과 맞는다. 빠진 쪽들의 짝이 맞지 않으면 여러 장의 손실이나 다른 제책 구조를 함께 검토한다.



바깥쪽 종이

1, 2, 11, 12
 $1+12 = 2+11$

가운데 종이

3, 4, 9, 10
 $3+10 = 4+9$

안쪽 종이

5, 6, 7, 8
 $5+8 = 6+7$

짝의 합 $4n+1 = 13$

세 장을 겹쳐 접으면 같은 면에 놓이는 두 쪽의 합은 13이다.

종이	쪽번호	짝의 합
바깥	1, 2, 11, 12	13
가운데	3, 4, 9, 10	13
안쪽	5, 6, 7, 8	13

탐구

다섯 장을 겹쳐 접은 20쪽 모형에서 7쪽과 같은 종이에 놓이는 쪽은 무엇인가?

풀이와 확인

$n=5$ 이므로 짝의 합은 $4n+1=21$ 이다. $2k-1=7$ 에서 $k=4$ 이므로 7쪽은 바깥에서 넷째 종이에 있고 같은 종이에 8쪽과 $21-8=13$ 쪽 및 $21-7=14$ 쪽이 놓인다. 7과 14, 8과 13의 합이 모두 21인지 확인하면 계산이 맞다.

없어진 한 장을 찾아내기

쪽번호의 공백은 책의 물리적 구조와 함께 읽어야 합니다.

열두 쪽짜리 중첩 제책 모형에서 바깥 종이 한 장이 빠졌다고 하자. 없어지는 쪽은 1과 2 및 11과 12이다. 연속한 네 쪽이 아니라 처음 두 쪽과 마지막 두 쪽이 함께 사라진다. 종이 한 장에 대응하는 쪽번호를 알면 결락의 모양을 설명할 수 있다.

안쪽 종이가 빠지면 5와 6 및 7과 8이 없어져 연속한 네 쪽이 사라진다. 같은 한 장의 손실이라도 어디에 놓였는지에 따라 번호의 공백이 다르게 보인다. 단순히 네 쪽이 없다는 관찰만으로 어느 종이가 빠졌는지 알 수 없는 까닭이다.

실제 문헌에서는 원래 쪽번호가 없거나 후대에 다시 번호를 붙인 경우도 있을 수 있다. 본문의 연결과 제책 흔적 및 종이의 특징을 함께 보아야 한다. 이 예의 계산은 가능한 설명을 만드는 데 도움을 주지만 실제 자료의 물리적 조사를 대신하지 않는다. 가상 모형과 관찰 결과를 서로 대조하는 방식으로 접근한다.

빠진 종이		사라지는 앞부분	사라지는 뒷부분
바깥	1 / 2	11 / 12	
가운데	3 / 4	9 / 10	
안쪽	5 / 6		

세 장을 겹쳐 접은 열두 쪽 모형의 결락 패턴 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

3쪽과 4쪽 및 9쪽과 10쪽이 없다면 어떤 종이가 빠졌는가?

풀이와 확인

가운데 종이가 빠진 경우와 맞는다. 쪽번호가 원래 구조를 유지하고 있다는 가정 아래 가능한 판단이다.

날짜가 남은 인쇄본

가장 오래된 자료라는 말에는 범위를 붙여야 합니다.

영국도서관의 국제둔황프로젝트는 868년의 날짜가 남아 있는 금강경 인쇄본을 소개한다. 날짜가 명시된 완전한 인쇄본이라는 설명과 인쇄가 그때 처음 시작되었다는 설명은 같은 말이 아니다. 남아 있는 자료의 범위와 기술의 시작을 구별해야 한다.

연대순 목록을 생각해 보자. 제작 시기가 850년에서 900년 사이로 추정되는 자료 가와 868년이라고 적힌 자료 나가 있다. 가가 더 오래되었을 가능성도 있지만 두 자료의 순서를 확정한 수는 없다. 가의 가능한 범위가 나의 연대를 포함하기 때문이다.

날짜 하나가 주어진 자료는 비교하기 편리하지만 그 날짜가 무엇을 뜻하는지 확인해야 한다. 인쇄일인지 발원문 작성일인지 후대의 소장 기록인지에 따라 해석이 달라진다. 이 장에서는 기록된 날짜와 물리적 자료의 설명을 함께 읽는 태도를 강조한다. 정확한 숫자가 보인다는 이유만으로 그 숫자의 역할까지 자동으로 분명해지는 것은 아니다.

자료	알려진 연대	말할 수 있는 것
가	850-900년 추정	범위 안의 여러 시점 가능
나	868년 날짜 표기	기록된 날짜를 확인 가능
비교	구간이 겹침	가와 나의 순서 단정 불가

탐구

자료 가의 범위가 820-850년으로 좁혀진다면 자료 나와의 순서를 알 수 있는가?

풀이와 확인

같은 종류의 제작 시기를 비교한다는 조건 아래 가가 먼저이다. 가의 가장 늦은 시점 850년도 868년보다 이르기 때문이다.

[SR03] British Library IDP. Buddhist texts: The Diamond Sutra

필사와 인쇄의 비용 모형

처음 준비하는 비용과 한 부를 더 만드는 비용을 나누어 봅니다.

가상의 책을 손으로 베끼는 데 한 부당 12시간이 걸린다고 하자. 인쇄 모형에서는 판을 준비하는 데 80시간이 들고 한 부를 더 찍는 데 2시간이 걸린다. n 부를 만들 때 걸리는 시간은 필사에서 $12n$ 이고 인쇄에서 $80+2n$ 이다. 실제 역사적 생산 시간을 재현한 수치는 아니다.

두 시간이 같아지는 지점은 $12n=80+2n$ 이므로 $n=8$ 이다. 여덟 부에서는 모두 96시간이고 그보다 많이 만들면 이 단순 모형에서 인쇄가 유리해진다. 한 부만 만든다면 필사는 12시간이고 인쇄는 82시간이어서 순서가 반대이다.

생산 방식의 장점을 말할 때 수량을 함께 밝혀야 한다. 또한 수정 비용과 재료비 및 도구의 수명은 이 식에 포함하지 않았다. 책의 내용을 바꾸면 판을 다시 준비해야 할 수 있고 필사도 검수 시간이 필요하다. 모형에 포함된 항목을 명시하면 계산으로 얻은 결론을 실제 상황에 과도하게 확장하는 일을 줄일 수 있다.

부수	필사 시간	인쇄 시간
1	12	82
8	96	96
20	240	

고정 준비 시간과 부수에 비례하는 시간을 나눈 가상 모형 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

인쇄 준비 시간이 100시간이라면 두 방식이 같아지는 부수는 얼마인가?

풀이와 확인

$12n=100+2n$ 에서 $10n=100$ 이므로 10부이다. 한 부당 시간 차이 10시간이 준비 시간 100시간을 상쇄하는 지점이다.

줄 수와 글자 수의 관계

판형을 바꾸면 기록량과 가독성이 함께 달라집니다.

한 쪽에 25줄을 놓고 한 줄에 평균 20글자를 적으면 본문은 약 500글자이다. 80쪽의 같은 조판이라면 약 40000글자가 들어간다. 제목과 표 및 그림이 들어가는 공간을 따로 계산하지 않은 단순한 추정이다. 실제 책의 글자 수는 쪽마다 달라진다.

글자 폭과 줄 간격을 모두 20%씩 줄이면 이론적으로 같은 면적에 들어가는 글자 수는 $1 \div 0.8^2$ 배가 된다. 이는 약 1.5625배이다. 두 방향의 변화가 곱해지므로 단순히 40%가 늘어나는 것이 아니다. 다만 작은 글자가 읽기에 적절한지는 다른 문제이다.

내용이 부족한 책을 조판만 크게 만들어 쪽수를 늘리면 독자의 기대와 실제 정보량이 어긋날 수 있다. 반대로 글을 지나치게 압축하면 도해와 계산을 따라가기 어렵다. 쪽수와 글자 수 및 시각 자료가 맡는 역할을 함께 평가하는 편이 좋다. 여백도 제목과 본문의 관계를 드러내지만 내용 대신 쪽수를 채우는 수단이 되어서는 안 된다.

항목	계산	값
한 쪽 글자 수	25×20	약 500
80쪽 글자 수	500×80	약 40000
두 방향 20% 축소	$1 \div 0.64$	약 1.5625배

탐구

한 쪽 24줄과 한 줄 22글자라면 50쪽에 대략 몇 글자가 들어가는가?

풀이와 확인

$24 \times 22 \times 50 = 26400$ 글자이다. 제목과 그림 및 빈 줄이 차지하는 공간을 빼지 않은 추정값이다. 정확한 원고 분량과 구별한다.

복제된 책의 갈라지는 판본

공통된 차이는 자료 사이의 관계를 살피는 실마리가 됩니다.

원본 가를 보고 나와 다를 각각 베꼈다고 하자. 나에는 한 줄이 빠졌고 다에는 숫자 하나가 바뀌었다. 이어 나를 보고 라를 만들었다면 라에서도 같은 줄의 결락이 보일 수 있다. 이런 공통된 특징은 사본 사이의 관계를 추정하는 단서가 된다.

그러나 같은 오류가 독립적으로 생길 가능성도 있고 필사자가 여러 사본을 대조했을 수도 있다. 사본의 계보를 항상 단순한 나무 모양으로 그릴 수 있는 것은 아니다. 하나의 공통 오류만으로 부모와 자식 관계를 확정하지 않고 여러 독립적인 특징을 살펴야 한다.

교육용 표에서는 각 사본의 특징을 예와 아니오로 기록해 보자. 줄의 결락과 특정 숫자 및 문장의 순서가 어떻게 함께 나타나는지 비교할 수 있다. 표가 계보를 자동으로 증명하는 것은 아니지만 관찰 자료와 가설을 분리해 주는 장점이 있다. 원본이 사라졌다면 어느 형태가 먼저였는지를 판단하는 일은 더 조심스러워진다.

사본	한 줄 결락	숫자 변경
나	있음	없음
다	없음	있음
라	있음	

공통 특징은 계보 가설의 단서이며 그 자체로 확정 증거는 아니다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

라에 나와 같은 결락이 있다는 사실만으로 라가 나를 직접 베꼈다고 확정할 수 있는가?

풀이와 확인

확정할 수 없다. 둘이 공통 조상 사본을 따랐을 수도 있고 같은 오류가 별도로 생겼을 수도 있다. 여러 특징과 연대를 함께 확인해야 한다.

복사본을 남기는 이유

보존 가능성은 사본의 수뿐 아니라 위험의 공유에도 달려 있습니다.

가상 모형에서 한 보관 장소가 일정 기간 안에 손실될 확률을 $1/5$ 이라고 하자. 서로 독립적인 두 장소에 사본을 나누어 두면 둘 다 손실될 확률은 $1/5 \times 1/5 = 1/25$ 이다. 적어도 하나가 남을 확률은 $24/25$ 이다. 독립성은 계산을 가능하게 하는 중요한 가정이다.

두 사본을 같은 건물의 같은 방에 두었다면 화재 같은 사건을 함께 겪을 수 있다. 이때 두 손실을 독립이라고 놓고 곱해서는 안 된다. 사본을 늘렸다는 사실만으로 위험이 같은 비율로 줄어드는 것은 아니다. 무엇이 함께 실패할 수 있는지 살펴야 한다.

이 계산은 실제 문헌 보존의 확률을 측정한 결과가 아니다. 보관 방식을 비교하는 현대의 교육용 모형이다. 디지털 파일에서도 복사본을 같은 기기에만 두면 기기 고장이라는 위험을 공유한다. 책과 파일의 차이를 인정하면서도 독립적인 사본과 기록의 중요성이라는 질문을 연결할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{각 장소 손실 확률} &= 1/5 \\ \text{독립인 두 장소 모두 손실} &= 1/25 \\ \text{적어도 하나 보존} &= 24/25 \end{aligned}$$

독립성 가정 아래 두 사본의 보존 가능성을 계산한다

탐구

서로 독립인 세 장소에 보관하면 모두 손실될 확률은 얼마인가?

풀이와 확인

$(1/5)^3 = 1/125$ 이다. 하나 이상 남을 확률은 $124/125$ 이다. 실제 위험이 독립이라는 근거 없이 이 값을 현실의 보존 확률로 제시해서는 안 된다.

번역이 옮겨야 하는 논리

아델라르라는 이름 뒤의 여러 텍스트

한 사람의 이름 아래 전해진 책도 서로 다른 판본과 편집을 품고 있다.

바스의 아델라르는 아랍어를 거쳐 유클리드의 원론을 라틴어로 옮긴 전승과 연결된다. 그러나 아델라르 판본이라고 불린 모든 텍스트의 저자가 같은 인물이라고 단정할 수는 없다. 특히 이른바 제2판본의 저자 귀속은 재검토되어 왔다. 번역사의 이름표도 연구에 따라 더 정밀해진다.

같은 명제가 전해져도 증명을 줄이거나 새 설명을 붙인 텍스트가 있을 수 있다. 명제의 문장과 증명과 도형의 글자 배치를 각각 비교해야 어떤 차이가 생겼는지 알 수 있다. 책 제목이 같다는 사실만으로 두 책의 수학적 내용이 완전히 같다고 볼 수 없다.

이 장에서는 실제 판본을 새로 판정하는 대신 번역이 보존해야 할 조건과 논리를 학습한다. 이어지는 설명의 짧은 문장은 원론의 직접 인용이 아니라 편집자가 만든 예제다. 원자료에 관한 사실과 논리 연습의 문장을 구분하며 읽어 보자.

명제의 문장 비교

증명의 단계 비교

도형의 이름 비교

같은 제목의 책도 명제와 증명과 도형을 각각 비교해야 한다.

탐구

두 책에 같은 명제 문장이 있으면 증명도 반드시 같다고 할 수 있는가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 명제는 유지하면서 증명을 요약하거나 다른 논증으로 바꿀 수 있다. 문장과 증명과 도형을 별도로 비교해야 한다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

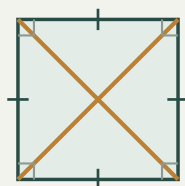
한 단어가 조건을 바꿀 때

도형의 이름을 바꾸는 일은 적용 가능한 대상을 바꾸는 일이기도 하다.

모든 정사각형의 두 대각선 길이는 같다는 문장을 생각하자. 정사각형을 사각형으로 바꾸면 문장은 일반적으로 참이 아니다. 이름 하나가 네 변과 네 각에 관한 조건을 함께 담고 있기 때문이다. 쉬운 단어로 고친다는 이유로 조건을 지워서는 안 된다.

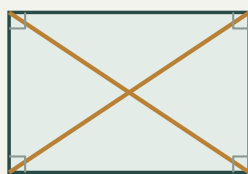
마름모의 두 대각선은 일반적으로 길이가 다를 수 있다. 따라서 네 변이 같다는 조건만으로 대각선 길이가 같다는 결론은 나오지 않는다. 반면 직사각형에서는 대각선 길이가 같다. 여러 도형을 비교하면 결론을 지탱하는 조건이 무엇인지 살필 수 있다.

번역 용어를 정할 때에는 현대 단어와 원문의 정의가 같은 범위를 가리키는지 확인한다. 익숙한 번역어가 오히려 독자에게 추가 조건을 떠올리게 할 수도 있다. 용어표에 정의와 예와 반례를 함께 넣으면 의미의 차이를 더 분명히 전달할 수 있다.



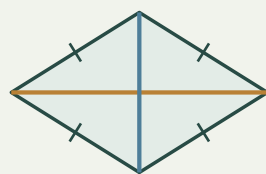
정사각형

네 각 직각, 네 변 같음
대각선 길이 같음



3×2 직사각형

네 각 직각
대각선 길이 같음



마름모

네 변 같음
대각선 길이 다름

네 각이 직각이면 대각선이 같고 마름모는 다를 수 있다.

탐구

모든 직사각형은 정사각형이라는 문장을 반례 하나로 검토하자.

풀이와 확인

가로 3과 세로 2인 직사각형이 반례다. 네 각은 직각이지만 네 변의 길이가 같지 않으므로 정사각형은 아니다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

만약이라는 말의 방향

조건에서 결론으로 가는 문장은 그 반대 방향까지 자동으로 보장하지 않는다.

어떤 자연수가 4의 배수이면 짝수라는 말은 참이다. $4k$ 는 $2 \times 2k$ 이므로 2의 배수이기 때문이다. 그러나 짝수이면 4의 배수라는 역방향 문장은 거짓이다. 6은 짝수이지만 4의 배수가 아니다. 두 문장에 같은 단어가 있어도 논리의 방향은 다르다.

번역 과정에서 조건과 결론의 순서가 뒤바뀌면 새로운 주장이 된다. 문장을 짧게 고치는 편집에서도 만약과 그러면의 연결을 지켜야 한다. 양쪽 방향이 모두 성립할 때에만 서로 동치인 조건이라고 말할 수 있다.

증명과 반례의 역할도 다르다. 앞의 문장은 모든 4의 배수에 대한 식으로 설명했다. 뒤의 문장은 한 반례 6만으로 거짓임을 보였다. 모든 경우의 주장을 확인하는 방법과 부정하는 방법이 서로 다르다는 점을 이해하자.

4의 배수 → 짝수

역방향의 반례: 6

6은 짝수지만 4의 배수는 아니다

조건과 결론의 방향을 바꾸면 별도의 주장이 된다.

탐구

자연수가 10의 배수이면 5의 배수라는 문장의 역은 참인가?

풀이와 확인

아니다. 15는 5의 배수이지만 10의 배수가 아니다. 원래 문장은 참이지만 역방향은 별도의 검토가 필요하다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

모두와 하나를 구별하기

수학 문장의 범위는 짧은 말 하나에 담길 수 있다.

모든 자연수 n 에 대해 $n^2 \geq n$ 이라는 문장은 각 자연수마다 부등식이 성립한다는 뜻이다. 반면 어떤 자연수 n 에 대해 $n^2 = n$ 이라는 문장은 한 값 이상만 찾으면 된다. $n=1$ 을 넣으면 두 번째 문장을 확인할 수 있다. 문장의 범위가 다르면 증명의 부담도 달라진다.

모든이라는 말을 어떤으로 바꾸면 주장이 약해지고 어떤을 모든으로 바꾸면 훨씬 강해진다. 번역에서 이런 표현이 생략되면 독자는 원래 주장보다 넓거나 좁은 내용을 읽게 된다. 수학적 정확성은 전문 용어뿐 아니라 평범한 말에도 달려 있다.

첫 문장은 $n^2 - n = n(n-1)$ 을 보면 설명할 수 있다. $n \geq 1$ 이면 두 인수가 음수가 아니므로 곱도 음수가 아니다. 자연수에 0을 포함하는 약속에서는 $n=0$ 도 별도로 넣어 성립함을 확인할 수 있다. 몇 가지 예를 계산하는 것과 모든 경우를 설명하는 일반 논증을 구분하면서 읽어 보자.

문장 범위	확인 방식
모든 n	일반 논증 필요
어떤 n	사례 하나로 가능
모든 주장 반례 하나면 충분	

모두와 하나라는 표현의 논리적 차이.

탐구

모든 자연수의 제곱은 짝수라는 문장을 어떻게 반박할 수 있는가?

풀이와 확인

$n=1$ 을 고르면 제곱도 1로 홀수다. 한 반례로 모든이라는 주장이 거짓임을 확인할 수 있다. 여러 홀수 사례를 모두 나열할 필요는 없다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

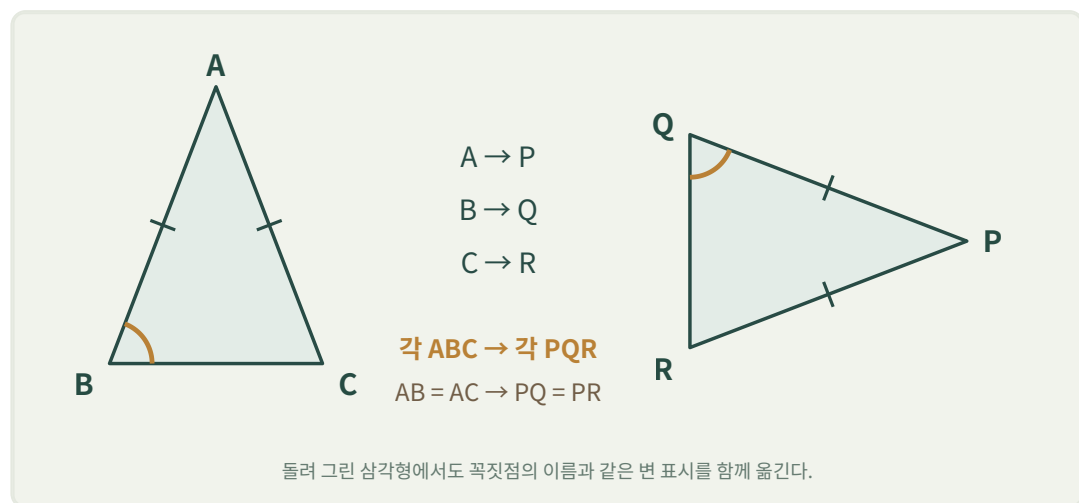
그림의 글자가 이어 주는 증명

도형을 다시 그릴 때에는 모양뿐 아니라 이름의 대응도 보존해야 한다.

삼각형 ABC에서 AB와 AC의 길이가 같다고 하자. 같은 길이인 두 변이 만나는 꼭짓점은 A다. 그림을 회전해도 이 관계는 바뀌지 않지만 새 그림에서 A와 B의 이름을 바꾸고 본문을 그대로 두면 다른 조건을 읽게 된다. 글자와 선의 대응이 증명의 일부다.

재작도에서는 대응표를 먼저 만들 수 있다. 원래 A를 새 P로 바꾸었다면 원래 B와 C가 각각 어느 점이 되는지 기록한다. 본문 속 선분 AB와 각 BAC도 같은 규칙으로 옮긴다. 글자를 하나씩 임의로 고치지 않고 하나의 일관된 변환을 적용한다.

그림이 예뻐졌다는 이유만으로 검수가 끝나지 않는다. 주어진 평행과 수직과 같은 길이 표시가 모두 유지되는지 살핀다. 보기에는 같은 삼각형이어도 대응이 바뀌면 증명에서 지칭하는 대상이 달라질 수 있다. 그림의 가독성과 논리적 충실성을 함께 확인한다.



탐구

A→P와 B→Q와 C→R로 바꾸면 선분 AC와 각 ABC는 어떻게 옮기는가?

풀이와 확인

선분 AC는 PR이다. 각 ABC는 가운데 점 B가 꼭짓점이므로 각 PQR로 옮긴다. 글자의 순서도 함께 보존해야 한다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

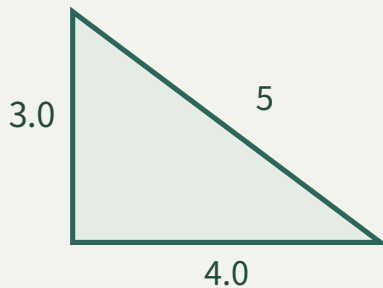
보기 좋은 그림이 증명은 아니다

그려진 한 사례의 모양과 모든 허용 사례의 관계를 나누어 본다.

어떤 삼각형의 꼭짓점을 적당히 배치하면 두 변이 비슷한 길이로 보일 수 있다. 그러나 조건에 같은 길이라는 말이나 표시가 없다면 등변이라고 가정할 수 없다. 그림의 외관은 정보를 읽는 도움이며 주어지지 않은 조건을 추가하는 근거가 아니다.

학습 예제로 가로 4와 세로 3인 직각삼각형을 그리면 빗변은 5다. 축척이 찌그러진 이미지에서는 빗변이 5처럼 보이지 않을 수 있다. 반대로 그림을 보고 눈대중으로 5라고 맞혔다고 관계를 증명한 것은 아니다. 제곱 관계나 다른 논증으로 확인해야 한다.

번역본의 도형이 원본과 다르게 그려졌을 때에는 수학적 관계가 유지되는지 먼저 살핀다. 비례를 정확히 지키지 않은 개념도라도 논리적 정보는 보존될 수 있다. 축척 그림인지 개념도인지 캡션에 적으면 독자의 잘못된 측정을 줄일 수 있다.



$3^2 + 4^2 = 5^2$ 을 만족하는 현대 학습 예제. 그림의 외관과 증명을 구별한다.

탐구

개념도에서 선분 두 개의 화면 길이가 같다면 수학적으로도 같다고 결론 내릴 수 있는가?

풀이와 확인

그릴 수 없다. 같은 길이라는 조건이나 논증이 필요하다. 화면 길이는 그림을 배치하거나 확대하는 과정에서 달라질 수 있다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

증명의 빠진 다리를 찾기

앞 문장의 결과가 다음 문장의 근거로 어떻게 쓰였는지 살핀다.

$a=b$ 이고 $b=c$ 이면 $a=c$ 라는 연결은 등식의 추이성을 사용한다. 그런데 번역문에 가운데 조건 $b=c$ 가 빠지면 $a=c$ 라는 결론은 앞 문장만으로 따라오지 않는다. 읽기 쉬운 요약이 되었다고 해도 논증의 필수 연결이 사라진 셈이다.

증명을 검토할 때에는 각 단계 옆에 사용한 조건을 짧게 적어 보자. 주어진 조건을 썼는지 앞에서 증명한 결과를 썼는지 새로운 가정을 도입했는지 나눈다. 순서가 바뀌어 아직 증명하지 않은 결과를 미리 사용하지 않았는지도 확인한다.

모든 설명을 길게 늘여야 한다는 뜻은 아니다. 독자가 이해할 수 있는 수준에서는 여러 자명한 단계를 묶을 수 있다. 그러나 묶은 단계가 왜 성립하는지 풀어서 설명할 수 있어야 한다. 간결한 표현과 논리의 생략은 같은 것이 아니다.

$$\begin{aligned} a &= b \\ b &= c \\ \text{따라서 } a &= c \end{aligned}$$

가운데 조건이 다음 결론으로 이어지는 논리의 다리다.

탐구

$x+3=10$ 에서 $x=7$ 로 가는 단계는 어떤 성질을 사용하는가?

풀이와 확인

등식 양변에서 같은 수 3을 빼도 등식이 유지된다는 성질을 사용한다. 한쪽에서만 3을 빼는 것은 같은 변환이 아니다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

번역 검수표를 직접 만들기

뜻과 기호와 그림을 차례로 대조하면 오류의 종류를 나눌 수 있다.

새 학습 문장으로 양의 수 x 가 2보다 크면 x^2 은 4보다 크다고 적자. 검수에서는 양의 수라는 범위와 크다는 엄격한 부등호와 제곱 대상 x 를 확인한다. $x>2$ 라는 조건만으로 양수임이 따라오지만 설명의 범위를 드러내는 역할도 있다.

이 문장을 x 가 -2보다 크면 x^2 은 4보다 크다고 잘못 옮기면 $x=0$ 에서 곧바로 틀린다. 기호의 작은 차이가 결론을 무너뜨릴 수 있다. 검수에는 문법 읽기뿐 아니라 간단한 수를 넣는 반례 탐색도 포함해야 한다.

마지막에는 원문에 없는 친절한 해설을 별도로 표시한다. 예시를 추가하는 것은 유용하지만 새 예시의 결론까지 원저자의 말처럼 보이면 안 된다. 좋은 번역본은 독자의 이해를 돕는 동시에 자료의 경계를 투명하게 보여 준다.

구분	조건	결론
원래 문장	$x>2$	$x^2>4$
잘못 옮긴 문장	$x>-2$	$x^2>4$
오역의 반례	$x=0$	$0^2<4$

부호를 바꾼 문장에는 $x=0$ 이라는 반례가 생긴다

탐구

$x>2$ 를 $x\geq 2$ 로 고쳤다면 결론 $x^2>4$ 는 여전히 항상 참인가?

풀이와 확인

아니다. $x=2$ 에서는 $x^2=4$ 다. 조건을 $\geq$ 로 바꾸려면 결론도 $x^2\geq 4$ 로 조정하거나 경계값을 별도로 제외해야 한다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

지식의 길 / 06

상인의 장부와 계산의 이동

피보나치의 책을 수열 너머로 읽기

수의 이름보다 책이 다룬 계산과 교류의 환경을 함께 살핀다.

피사의 레오나르도는 오늘날 피보나치라는 이름으로 널리 알려져 있다. 취리히 연방공과대학교 도서관의 설명에 따르면 그는 북아프리카 부자야에서 인도 아라비아 수 체계를 접했다. 산반서로 불리는 리베르 아바키는 1202년에 완성되었으며 1228년에 개정되었다.

이 책의 의미를 유명한 수열 하나로만 줄이면 자리값 계산과 교역 문제의 폭넓은 내용을 놓친다. 새로운 표기법이 쓰이려면 기호를 소개하는 데 더해 계산법을 가르치고 실제 문제에서 쓸 수 있게 해야 한다. 책과 교사와 거래 관행이 함께 지식의 이동을 이끈다.

이 장의 가격과 화폐와 거래량은 모두 원리를 설명하기 위해 만든 가상 예제다. 중세의 실제 가격을 복원하거나 특정 원문 문제를 번역한 것은 아니다. 역사적 책의 범위를 소개한 뒤 오늘날의 독자가 직접 계산할 수 있는 계산으로 이어 간다.

베르 아바키 완성

1202



1228

개정

취리히 연방공과대학교 도서관이 구분한 완성과 개정 시점.

탐구

1202년과 1228년은 같은 사건을 가리키는 두 날짜인가?

풀이와 확인

아니다. 앞의 해는 리베르 아바키의 완성 시점이고 뒤의 해는 개정 시점이다. 초고나 초판과 개정본을 구별해 기록해야 한다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

한 묶음의 값부터 찾기

물건 수와 총액이 비례한다면 한 단위의 값을 거쳐 다른 수량으로 옮길 수 있다.

가상의 시장에서 같은 품질의 천 7필이 84은화라고 하자. 한 필의 값은 $84 \div 7 = 12$ 은화다. 같은 조건에서 11필을 사면 $12 \times 11 = 132$ 은화다. 물건 수에서 금액으로 가는 비율이 일정하다는 가정 아래 계산한다.

7필에서 11필로 곧장 11/7배를 적용해도 결과는 같다. 다만 포장비나 대량 할인처럼 수량과 단순히 비례하지 않는 항목이 있다면 한 단가만으로 전체 거래를 설명할 수 없다. 문제에서 무엇을 일정하게 두었는지 확인해야 한다.

장부에는 수량과 단가와 총액을 별도 열로 쓰면 좋다. 세 열 중 둘을 알면 나머지를 구할 수 있고 모두 있을 때는 곱셈으로 검산할 수 있다. 단가를 적지 않고 총액만 나열한 기록은 품질 차이나 수량 차이를 비교하기 어렵다.

수량	단가	총액
7	12	84
11	12	132

같은 품질과 일정한 단가를 가정한 가상 거래.

탐구

같은 물건 9개가 117단위 화폐라면 14개의 값은 얼마인가?

풀이와 확인

단가는 $117 \div 9 = 13$ 이다. 따라서 14개는 182단위 화폐다. 수량에 따른 추가 비용이 없다는 모형의 조건을 사용했다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

교환 비율의 방향을 읽기

어느 화폐 한 단위가 다른 화폐 몇 단위인지 먼저 문장으로 쓴다.

가상의 교환 규칙을 은화 1개=동화 12개로 정하자. 은화 8개는 동화 96개다. 반대로 동화 90개는 은화 7.5개에 해당한다. 같은 비율을 썼지만 변환 방향에 따라 곱셈과 나눗셈이 바뀐다. 이 값은 실제 역사적 환율이 아니다.

종이에 12동화/1은화라고 비율을 적으면 단위의 소거를 볼 수 있다. 8은화에 이를 곱하면 은화 단위가 사라지고 동화만 남는다. 동화에서 은화로 바꿀 때에는 역수 비율을 쓴다. 계산의 방향을 단위가 안내하는 셈이다.

실제 교환에서는 수수료와 매수 매도의 차이가 있을 수 있다. 여기서는 그런 조건을 제외한 순수한 비율 모형을 다룬다. 장부에 사용한 규칙을 적어 두면 나중에 같은 총액을 다른 기준으로 해석하는 혼란을 막을 수 있다.

$$\begin{aligned} 1\text{은화} &= 12\text{동화} \\ 8\text{은화} &= 96\text{동화} \\ 90\text{동화} &= 7.5\text{은화} \end{aligned}$$

실제 역사적 환율이 아닌 가상 교환 규칙.

탐구

가상 규칙이 금화 1개=은화 15개일 때 은화 45개는 금화 몇 개인가?

풀이와 확인

$45 \div 15 = 3$ 개다. 은화에서 금화로 바꾸므로 15를 곱하는 것이 아니라 나눈다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

할인은 어느 값에 붙는가

퍼센트는 기준량을 알아야 실제 차액으로 바뀐다.

가상의 물건 정가가 80이고 15퍼센트를 할인한다고 하자. 할인액은 $80 \times 0.15 = 12$ 이며 판매가는 68이다. 할인을 15퍼센트는 줄어든 12를 원래 가격 80으로 나눈 비율이다. 판매가 68을 기준으로 계산한 비율과는 다르다.

판매가 68에서 다시 15퍼센트를 올리면 78.2가 되어 원래 80으로 돌아오지 않는다. 인상률이 붙는 기준이 68로 바뀌었기 때문이다. 같은 퍼센트를 더하고 뺀다고 효과가 상쇄된다고 생각하면 기준량의 변화를 놓친다.

두 변화를 곱셈으로 묶으면 $0.85 \times 1.15 = 0.9775$ 다. 따라서 원래 가격의 97.75퍼센트가 남는다. 변화를 비교할 때에는 변화량과 기준량 및 적용 순서를 함께 적으면 같은 비율의 감소와 증가가 왜 상쇄되지 않는지 분명해진다.

$$80 \times 0.15 = 12$$

$$80 - 12 = 68$$

$$68 \times 1.15 = 78.2$$

할인과 인상의 기준량이 달라지면 같은 비율도 상쇄되지 않는다.

탐구

100에서 20퍼센트 내린 뒤 그 결과를 20퍼센트 올리면 얼마인가?

풀이와 확인

먼저 80이 된다. 그다음 80의 20퍼센트인 16을 더하면 96이다. 원래 값보다 4 작으며 두 변화는 상쇄되지 않는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

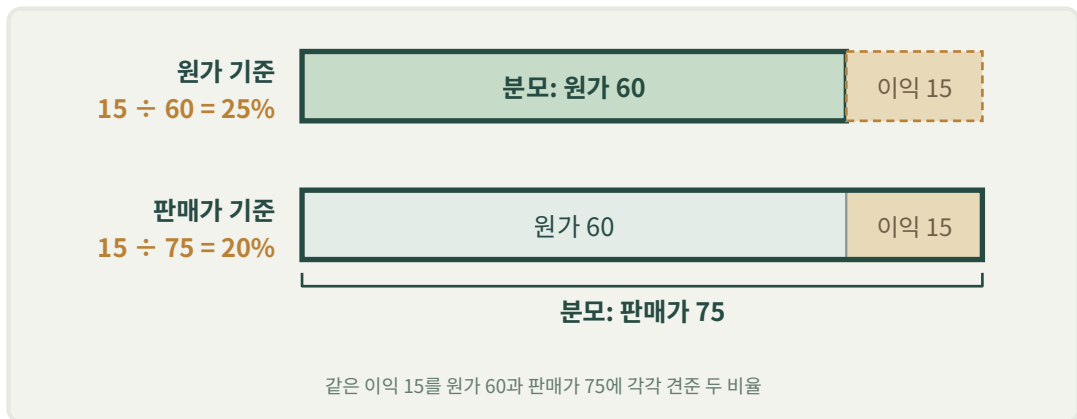
이익률의 두 분모

같은 이익도 원가와 판매가 중 무엇을 기준으로 하느냐에 따라 비율이 달라진다.

가상의 물건을 60에 들여와 75에 팔면 차액은 15다. 이를 원가 60으로 나누면 25퍼센트이고 판매가 75로 나누면 20퍼센트다. 두 비율은 같은 이익을 서로 다른 기준량에 비교한 것이다. 숫자가 다르다고 둘 중 하나가 틀린 것은 아니다.

이익률이라는 말만 적으면 어떤 분모인지 모호하다. 원가 대비 이익률과 판매가 대비 이익비중이라고 풀어 쓰면 의미가 분명해진다. 역사적 상업 문헌을 오늘의 용어로 옮길 때에도 분모를 확인하지 않으면 계산의 뜻을 잘못 전달할 수 있다.

물건을 들여오는 운송비가 별도로 있다면 실제 원가는 더 커진다. 여기서는 원가 60에 모든 비용이 포함되었다고 가정한다. 포함한 비용과 제외한 비용을 밝히는 일은 계산의 정확성만큼 중요하다. 같은 비율을 비교하려면 기준도 같아야 한다.



탐구

원가 40과 판매가 50에서 두 이익 비율을 구하자.

풀이와 확인

이익은 10이다. 원가 대비는 $10/40=25\%$ 퍼센트이며 판매가 대비는 $10/50=20\%$ 퍼센트다. 분모를 함께 적어야 두 수를 혼동하지 않는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

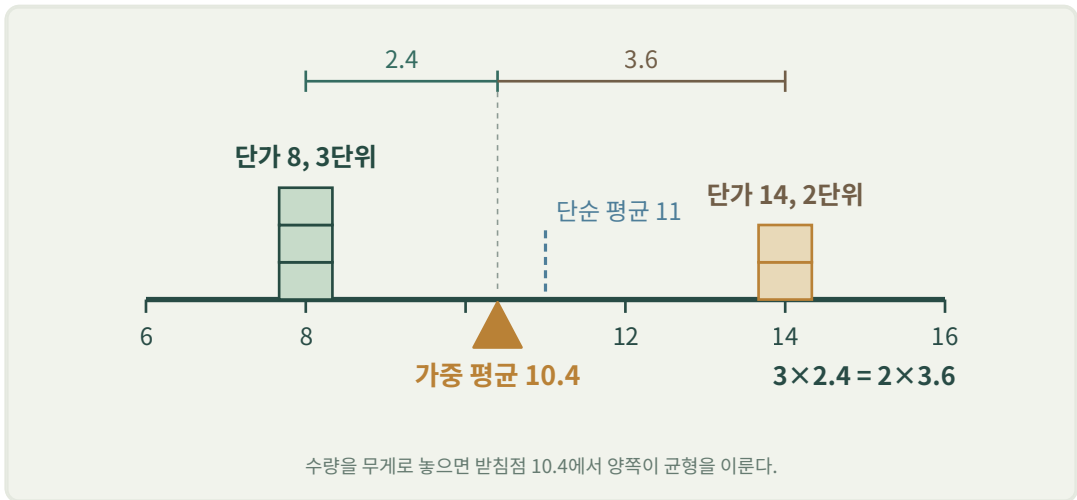
섞인 물건의 평균 단가

단가의 단순 평균보다 각각의 수량을 반영한 평균이 필요하다.

한 단위당 가격 8인 곡식 3단위와 가격 14인 곡식 2단위를 섞는다고 하자. 전체 가치는 $3 \times 8 + 2 \times 14 = 52$ 이며 총량은 5다. 평균 단가는 $52/5 = 10.4$ 다. 두 단가 8과 14의 단순 평균 11과는 다르다.

값이 싼 곡식의 양이 더 많으므로 평균이 8 쪽으로 조금 더 가까워진다. 수량을 가중치로 삼은 평균이라고 이해할 수 있다. 이 모형에서는 섞으면서 양이 늘거나 줄지 않고 품질 가치가 단순히 합쳐진다고 가정한다.

실제 상품의 품질과 가격이 언제나 이런 선형 관계를 따르는 것은 아니다. 계산을 역사적 실제 거래의 완전한 복원으로 받아들이지 않는다. 다만 전체 가치와 전체 양을 각각 보존한다는 조건 아래 평균을 구하는 방법은 명확하게 검산할 수 있다.



탐구

단가 6인 물건 4단위와 단가 16인 물건 1단위의 평균 단가는 얼마인가?

풀이와 확인

전체 가치는 $24 + 16 = 40$ 이며 총량은 5다. 평균 단가는 8이다. 단가만 단순 평균한 11은 수량 차이를 반영하지 않는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

출자와 시간을 함께 셈하기

공동 이익을 나누는 규칙은 미리 정한 기준에 따라 달라진다.

두 사람이 가상의 사업에 자금을 넣었다고 하자. 갑은 100을 6개월 동안 넣고 을은 150을 4개월 동안 넣었다. 자금과 기간의 곱에 비례해 이익을 나누기로 했다면 두 기여량은 모두 600자금개월이다. 따라서 이 규칙 아래에서는 이익을 똑같이 나눈다.

이익이 80이면 각각 40이다. 자금의 크기만 보면 을이 더 많이 받아야 할 것처럼 보이지만 합의한 규칙에는 기간도 들어 있다. 무엇이 공평한가라는 판단과 어떤 규칙을 계산했는가는 질문을 구별해야 한다. 수학은 정해진 규칙의 결과를 보여 준다.

이것은 공동 출자의 산술을 설명하는 학습 모형이며 실제 계약의 기준을 제안하는 것이 아니다. 현실에서는 노동과 위험과 관리 역할도 고려할 수 있다. 장부에는 적용한 분배 규칙을 명시해야 나중에 다른 기준을 섞는 오류를 줄일 수 있다.



자금을 높이로, 기간을 너비로 놓으면 두 기여량의 넓이가 같다.

탐구

갑이 80을 5개월 동안 넣고 을이 100을 6개월 동안 넣었다면 위 규칙의 분배 비율은 얼마인가?

풀이와 확인

기여량은 400과 600이므로 2대 3이다. 이익이 100이면 갑은 40이고 을은 60을 받는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

합계가 맞아도 장부는 틀릴 수 있다

전체의 일치와 개별 항목의 정확성을 별도로 확인한다.

세 거래의 수량이 4와 6과 10이고 단가가 모두 5라면 금액은 20과 30과 50이다. 총액은 100이다. 첫 금액을 25로 잘못 쓰고 둘째를 25로 잘못 써도 합계는 여전히 100이 된다. 서로 반대인 오류가 합계에서 사라진 것이다.

검수에서는 각 행의 수량×단가와 금액을 확인한 뒤 열의 합계를 확인한다. 전체만 보는 검사와 항목별 검사는 서로 다른 오류를 찾는다. 독립된 두 확인을 사용하면 같은 실수를 반복할 가능성을 줄일 수 있다.

옛 장부의 합계가 맞다고 모든 기호가 정확히 전사되었다고 결론 내리지 않는다. 반대로 합계가 안 맞으면 필자의 실수뿐 아니라 손상과 판독과 단위 차이도 검토한다. 계산으로 자료를 시험하되 자료의 물리적 흔적과 맥락을 함께 읽는 태도가 필요하다.

거래	맞는 금액	잘못 쓴 금액
첫째	20	25
둘째	30	25
셋째	50	50
합계	100	100

행별 오류가 서로 상쇄되면 합계 계산만으로는 발견할 수 없다

탐구

20과 30이 25와 25로 잘못 적힌 경우 어떤 검사로 오류를 찾는가?

풀이와 확인

각 거래의 수량에 단가를 곱해 개별 금액과 비교한다. 합계 검사만으로는 +5와 -5의 오류가 상쇄되어 드러나지 않는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

지식의 길 / 07

단위가 바뀌어도 같은 양

변환 사슬의 단위를 지우기

여러 단계를 거치는 환산에서는 각 단계의 비율과 방향을 함께 적는다.

학습용 약속으로 한 상자는 8묶음이고 한 묶음은 12개라고 정하자. 5상자를 낱개로 바꾸면 $5 \times 8 \times 12 = 480$ 개다. 두 단계의 변환을 이어 붙인 것이다. 첫 비율은 묶음/상자이며 둘째 비율은 개/묶음이므로 중간 단위가 차례로 사라진다.

숫자만 적으면 8로 나누어야 하는지 곱해야 하는지 헷갈릴 수 있다. 5상자 $\times$ 8묶음/상자 $\times$ 12개/묶음이라고 단위를 붙이면 최종 단위가 개인지 확인할 수 있다. 계산 결과에 상자와 묶음이 남아 있다면 비율의 방향을 다시 살핀다.

이 단위들은 역사적 도량형의 실제 값이 아니라 원리 설명을 위한 약속이다. 옛 단위를 현대 단위로 바꿀 때에는 시대와 지역별 정의를 먼저 확인해야 한다. 같은 단위 이름이 항상 같은 크기를 뜻한다고 가정하면 정확한 곱셈도 잘못된 결과를 낸다.

5상자

$\times$ 8묶음/상자 $\rightarrow$ 40묶음

$\times$ 12개/묶음 $\rightarrow$ 480개

가상 단위의 변환 사슬에서 중간 단위가 소거된다.

탐구

한 자루가 6봉지이고 한 봉지가 9개라면 7자루는 몇 개인가?

풀이와 확인

$7 \times 6 \times 9 = 378$ 개다. 자루에서 봉지로 바꾼 뒤 봉지에서 낱개로 바꾸는 두 비율을 차례로 적용했다.

왕복 변환이 원래 값으로 돌아오는가

정확한 비율의 역수를 사용하면 같은 양을 되찾을 수 있다.

어떤 가상 길이 단위 A가 B의 5/2배라고 하자. 12A는 30B다. 이를 다시 A로 바꾸려면 2/5를 곱해 12A를 얻는다. 두 비율의 곱은 1이므로 값이 원래대로 돌아온다. 왕복 계산은 방향을 잘못 적용했는지 확인하는 간단한 검사다.

갈 때 5/2를 곱하고 돌아올 때도 5/2를 곱하면 75A라는 틀린 값이 나온다. 단위 이름만 바꾸고 같은 배율을 반복한 것이다. 역방향에는 역수 비율이 필요하다는 점을 식과 문장으로 함께 적어 두면 오류를 줄일 수 있다.

중간에 반올림하면 왕복 결과가 조금 달라질 수 있다. 그런 차이가 생겼을 때 환산 규칙 자체가 틀렸다고 바로 결론 내리지 않는다. 반올림이 어느 단계에서 일어났는지 기록하고 정확한 분수로 다시 계산해 원인을 확인한다.

$$12A \times 5/2 = 30B$$

$$30B \times 2/5 = 12A$$

$$5/2 \times 2/5 = 1$$

정확한 역수 비율을 쓰면 왕복 변환은 원래 양을 보존한다.

탐구

1A=1.5B일 때 10A를 B로 바꾼 뒤 다시 A로 되돌려 보자.

풀이와 확인

10A=15B다. 15B를 1.5로 나누면 10A다. 정확한 비율을 쓰고 중간 반올림이 없다면 왕복 결과는 같다.

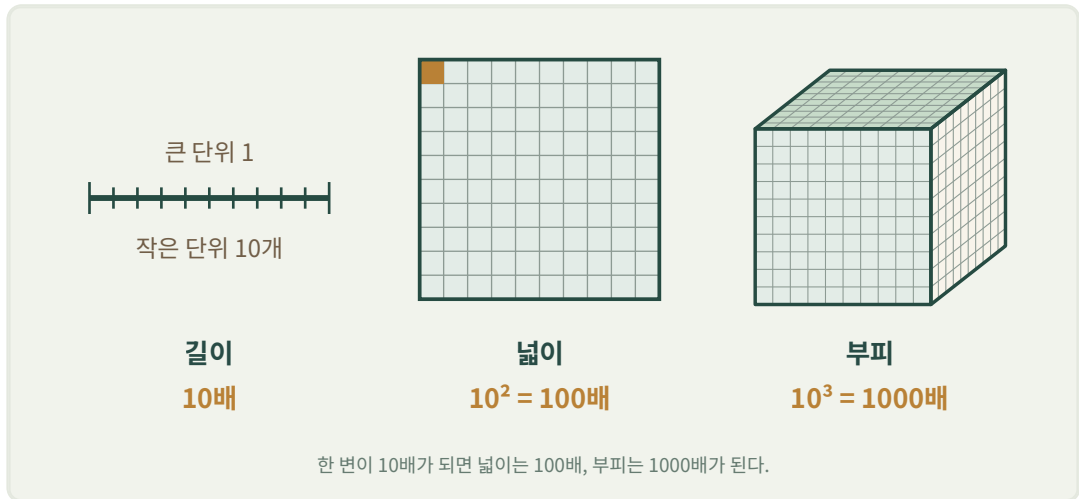
길이 환산을 넓이에 적용하기

단위의 방향이 두 개라면 환산 배율도 두 번 적용해야 한다.

한 큰 길이 단위를 작은 길이 단위 10개로 정하자. 큰 단위 한 변의 정사각형에는 작은 단위 정사각형이 가로 10개와 세로 10개 놓인다. 따라서 큰 넓이 단위 하나는 작은 넓이 단위 100개다. 길이의 변환 배율 10을 넓이에 그대로 쓰면 안 된다.

가로 3큰단위와 세로 2큰단위인 직사각형은 넓이가 6큰넓이단위다. 작은 길이 단위로는 가로 30과 세로 20이므로 넓이는 600이다. 두 경로가 같은 값을 주는지 확인하면 길이와 넓이의 환산 관계가 분명해진다.

도량형 자료를 편집할 때 길이 단위와 넓이 단위가 비슷한 이름을 가졌다고 같은 환산표에 섞지 않는다. 어떤 양을 재는지 제목에 표시하고 제공 단위를 분명히 쓴다. 표기의 작은 구별이 백 배나 만 배의 오류를 막을 수 있다.



탐구

길이 단위의 환산 배율이 4일 때 넓이 단위의 환산 배율은 얼마인가?

풀이와 확인

$4^2=16$ 이다. 두 독립적인 길이 방향에서 각각 네 배가 되기 때문이다. 부피 단위라면 세 방향이므로 $4^3=64$ 다.

속도의 분모까지 바꾸기

복합 단위에서는 분자와 분모의 환산이 반대 방향으로 작용할 수 있다.

초당 2미터를 시간당 킬로미터로 바꾸어 보자. 한 시간은 3600초이므로 시간당 거리는 7200미터다. 이를 1000으로 나누면 시간당 7.2킬로미터가 된다. 길이만 바꾸거나 시간만 바꾸면 최종 단위가 맞지 않는다.

식으로는 $2\text{m/s} \times 3600\text{s/h} \times 1\text{km}/1000\text{m} = 7.2\text{km/h}$ 다. 초와 미터가 지워지고 킬로미터/시간만 남는다. 단위 소거는 숫자 계산과 별도로 식의 구조가 맞는지 검사하게 한다. 복잡한 환산일수록 단위를 생략하지 않는 편이 안전하다.

이 예제는 현대 단위를 사용한 학습 활동이다. 고대의 여행 시간을 오늘의 속도로 바꿀 때에는 거리가 실제 측정값인지 추정값인지도 확인해야 한다. 단위를 정확히 바꾸어도 원래 거리와 시간의 불확실성까지 사라지는 것은 아니다.

$$2\text{m/s} \times 3600\text{s/h} \times 1\text{km}/1000\text{m} = 7.2\text{km/h}$$

복합 단위는 분자와 분모의 변환을 함께 적용한다.

탐구

시속 18킬로미터를 초당 미터로 바꾸면 얼마인가?

풀이와 확인

$18 \times 1000 \div 3600 = 5$ 이므로 초당 5미터다. 결과를 다시 3.6배하면 시속 18킬로미터로 돌아온다.

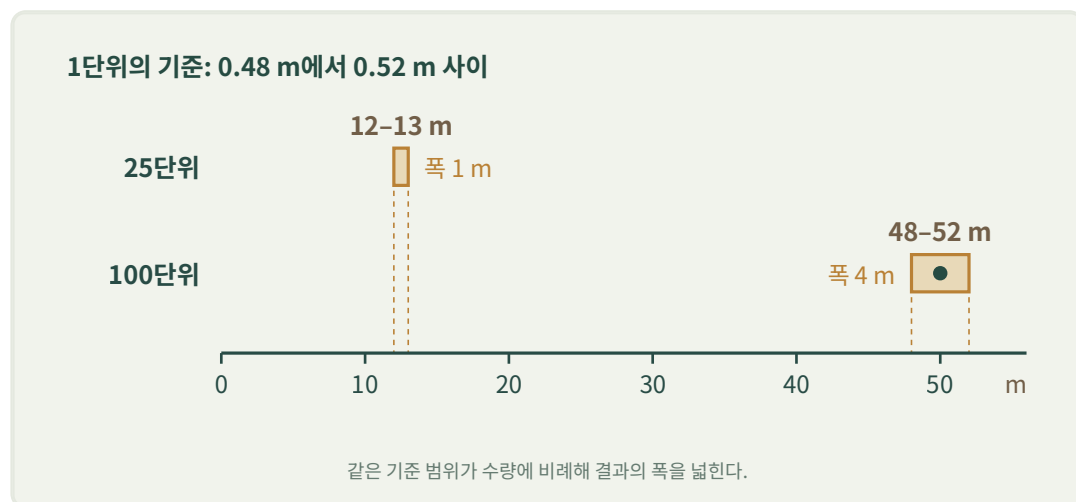
환산 기준이 범위로 주어질 때

단위의 크기가 확실하지 않다면 결과에도 범위를 남겨야 한다.

어떤 기록의 길이 단위 한 개가 현대 길이 0.48미터에서 0.52미터 사이일 수 있다고 가정하자. 기록에 100단위가 적혀 있다면 변환 결과는 48미터에서 52미터 사이이다. 가운데 값 50미터만 쓰면 원래의 불확실성이 보이지 않는다.

이 범위는 역사적 특정 단위의 실제 조사값이 아니라 불확실성을 다루는 학습 예시이다. 가능한 기준의 범위를 곱해 결과 범위를 구한 것이다. 원래 수량 100 자체도 근사치라면 그 불확실성까지 함께 고려해야 한다.

범위를 표시하는 일은 정확한 계산을 포기하는 것이 아니다. 알려진 정보가 허용하는 정확도를 충실히 표현하는 것이다. 소수 자릿수를 많이 쓰는 것보다 근거 있는 범위를 제시하는 편이 독자에게 더 유용할 수 있다. 출처마다 기준이 다르면 차이를 먼저 설명한다.



탐구

같은 기준 아래 25단위는 몇 미터에서 몇 미터 사이인가?

풀이와 확인

$25 \times 0.48 = 12$ 와 $25 \times 0.52 = 13$ 이므로 12미터에서 13미터 사이이다. 단일값을 쓴다면 근사 기준임을 함께 밝혀야 한다.

절대 오차와 상대 오차

같은 차이도 전체 크기에 따라 다른 의미를 가진다.

길이 10을 10.2로 재면 절대 오차는 0.2다. 길이 100을 100.2로 재도 절대 오차는 0.2지만 상대 오차는 각각 2퍼센트와 0.2퍼센트다. 같은 길이 차이를 전체 크기에 대한 비율로 비교하면 정확도의 평가가 달라진다.

단위를 바꾸면 절대 오차의 숫자도 바뀐다. 0.2미터는 20센티미터다. 그러나 상대 오차는 분자와 분모에 같은 변환 배율이 적용되므로 그대로다. 서로 다른 단위로 적힌 측정 결과를 비교할 때 상대 오차가 유용한 이유다.

어떤 계산이 더 정확하다는 말을 할 때에는 비교 기준을 밝혀야 한다. 작은 물건과 큰 물건을 같은 절대 차이로만 평가하면 목적에 맞지 않을 수 있다. 다만 상대 오차도 기준값이 0일 때는 그대로 정의할 수 없으므로 무조건 쓰는 지표는 아니다.

기준값	기록값	절대 차이	상대 차이
10	10.2	0.2	2%
100	100.2	0.2	0.2%

절대 오차가 같아도 전체 크기에 대한 비율은 다르다.

탐구

정확한 값 50을 49로 기록했다면 절대 오차와 상대 오차의 크기는 얼마인가?

풀이와 확인

절대 오차의 크기는 1이다. 상대 오차는 $1/50=2\%$ 퍼센트다. 기록값이 실제 값보다 작다는 방향도 따로 표시할 수 있다.

반올림은 마지막에 하기

중간값을 일찍 줄이면 이후 연산에서 작은 차이가 누적될 수 있다.

1/3단위씩 들어 있는 묶음 30개를 계산하면 정확한 전체는 10단위다. 그러나 한 묶음을 먼저 0.33단위로 반올림하고 30을 곱하면 9.9가 된다. 각 묶음에서 생긴 작은 부족량이 합계에서 0.1로 쌓인 것이다.

계산 중에는 분수나 충분한 자릿수를 유지하고 마지막 결과에서 필요한 정밀도로 정리하는 편이 좋다. 모든 중간값을 무한히 보존할 수는 없으므로 작업 목적에 맞는 오차 범위를 정한다. 반올림한 값에는 정확한 등호 대신 근사 표시를 쓰면 의미가 분명해진다.

옛 계산표의 수를 현대 소수로 바꾸어 편집할 때에도 이런 문제가 생긴다. 원래 표기의 정확한 값을 보존할 열과 읽기 쉬운 근삿값 열을 나누면 좋다. 독자는 계산을 재현할 때 정확한 열을 사용하고 크기를 빠르게 파악할 때 근사 열을 사용할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{정확히: } 30 \times 1/3 &= 10 \\ \text{중간 반올림: } 30 \times 0.33 &= 9.9 \\ \text{합계의 부족량} &= 0.1 \end{aligned}$$

각 항의 작은 반올림 오차가 합계에서 누적된다.

탐구

1/6을 0.17로 먼저 반올림해 60배하면 정확한 값과 얼마나 다른가?

풀이와 확인

근사 계산은 10.2이며 정확한 값은 10이다. 0.2만큼 크다. 한 항의 작은 초과가 60번 더해진 결과다.

변환표에 남겨야 할 정보

숫자와 함께 기준과 시점과 근거를 기록하면 표를 다시 사용할 수 있다.

학습용 변환표를 만들 때 첫 열에는 원래 단위와 둘째 열에는 목표 단위를 적는다. 셋째 열에는 곱할 비율을 적고 넷째 열에는 그 값이 정확한 약속인지 추정치인지 표시한다. 역방향 비율도 함께 적으면 계산자가 방향을 잘못 고를 가능성을 줄일 수 있다.

역사 자료에서는 지역과 시대와 물품 종류를 추가할 수 있다. 같은 이름의 단위라도 무엇을 재는지에 따라 기준이 다를 수 있기 때문이다. 확인되지 않은 항목은 빈칸이나 미상으로 남기고 현대의 익숙한 값으로 임의 보충하지 않는다.

이 표는 단순한 숫자 목록이 아니라 결과를 재현하기 위한 설명서다. 다른 사람이 같은 자료와 같은 규칙으로 계산했을 때 같은 값에 도달할 수 있어야 한다. 지식이 이동하는 길에서 단위와 조건을 함께 옮기는 일은 기호를 번역하는 것만큼 중요하다.

출발 → 목표	곱하는 비율	값의 성격
cm → m	1/100	정의상 정확
m → cm	100	정의상 정확

현대 단위의 교육용 예: 방향과 비율 및 값의 성격을 함께 적는다

탐구

1A=3B라는 학습 약속을 표에 적을 때 정방향과 역방향 곱셈 비율은 무엇인가?

풀이와 확인

A에서 B로는 3을 곱한다. B에서 A로는 1/3을 곱한다. 두 비율의 곱이 1인지 확인하면 왕복 변환을 검산할 수 있다.

지식의 길 / 08

천문표의 줄 사이를 읽기

하늘의 움직임을 표로 옮기기

천문표는 관측과 계산과 사용 지침이 함께 작동하는 지식의 도구였다.

케임브리지대학교의 천문학사 자료는 여러 시대의 천문표와 사용 지침을 소개한다. 표는 매번 긴 계산을 처음부터 반복하지 않고 필요한 값을 찾게 해 준다. 그러나 숫자만 있으면 모든 독자가 곧바로 사용할 수 있는 것은 아니다. 기준 날짜와 장소와 열의 뜻을 알아야 한다.

관측한 값을 그대로 모은 표와 이론적 모형으로 계산한 표도 구별한다. 어떤 표는 두 성격을 함께 가질 수 있다. 관측을 바탕으로 모형의 상수를 정한 뒤 많은 날짜의 위치를 계산하는 식이다. 값의 생성 경로를 알면 오차를 해석하는 방법도 달라진다.

이 장의 천체 위치는 실제 하늘을 예측하는 자료가 아니라 계산 원리를 보이기 위한 가상 값이다. 실제 항해나 관측에 사용할 수 있는 천문력이 아니다. 역사적 표의 역할을 이해한 뒤 보간과 주기와 각도 표기의 기초를 직접 계산해 본다.

관측으로 자료 얻기

모형과 상수 정하기

표의 값을 계산하기

사용법과 함께 전달하기

천문표가 만들어지고 이용되는 한 가지 개념적 흐름.

탐구

숫자가 촘촘한 표라면 모든 값이 직접 관측된 것이라고 볼 수 있는가?

풀이와 확인

그럴 수 없다. 모형으로 계산하거나 관측 사이를 보간한 값일 수 있다. 표의 작성 방법과 사용 지침을 확인해야 한다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

관측과 모형 사이의 차이

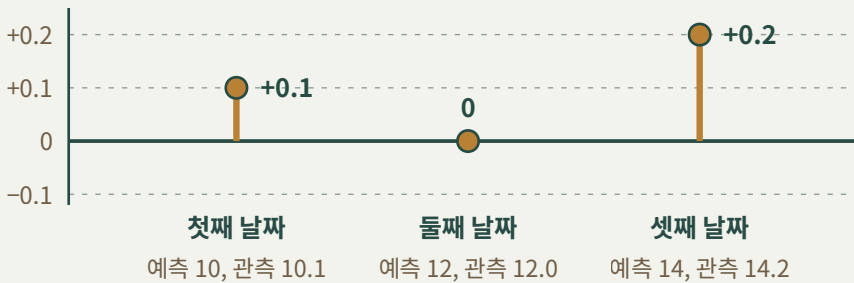
예측값에서 관측값이 얼마나 벗어나는지 기록하면 모형을 점검할 수 있다.

가상 관측에서 세 날짜의 위치가 10.1도와 12.0도와 14.2도라고 하자. 모형은 각각 10도와 12도와 14도를 예측한다. 관측에서 예측을 빼면 잔차는 0.1도와 0도와 0.2도다. 잔차의 방향과 크기를 보면 차이가 어떻게 나타나는지 알릴 수 있다.

한 잔차가 크다고 곧바로 모형 전체가 틀렸다고 결론 내리지는 않는다. 관측 기구와 시간 기록과 계산 과정에도 오차가 있을 수 있다. 여러 시점의 잔차가 일정한 방향으로 커지는지 또는 무작위처럼 흩어지는지 비교해야 원인을 검토할 수 있다.

반대로 몇 값이 잘 맞는다고 모형이 모든 시점에서 정확하다고 보장할 수 없다. 맞추는 데 사용한 자료와 별도 검증 자료를 구분하면 예측력을 더 잘 평가할 수 있다. 이 학습 모형은 역사적 특정 천문가의 실제 관측값을 재현한 것이 아니다.

관측-예측 (도)



세 날짜의 잔차를 0을 기준으로 위아래에 표시한 잔차 그림

탐구

예측 23.4도에 관측 23.1도가 대응한다면 관측-예측 잔차는 얼마인가?

풀이와 확인

-0.3도다. 관측값이 예측값보다 작다는 방향을 음수로 나타낸다. 오차의 크기만 말하면 0.3도다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

도와 분과 초의 자리

각도의 분과 초는 시간의 분과 초와 이름이 같아도 다른 양을 잴다.

각도 1도는 60각분이며 1각분은 60각초다. 12도 30각분은 12.5도다. 여기의 분은 시간 1분이 아니라 각도를 나눈 단위다. 천문 자료에서 같은 기호가 비슷하게 보이므로 표의 열 제목에 각도인지 시간인지 표시해야 한다.

23도 48각분과 2도 35각분을 더하면 각분은 83이 된다. 60각분을 1도로 올려 전체는 26도 23각분이다. 받아올림은 60진 묶음 원리지만 전체 각도는 같은 한 방향의 회전량을 나타낸다. 덧셈 과정에서 단위 이름을 유지한다.

소수 도와 도분초 표기를 섞으면 작은 오류가 생길 수 있다. 12.30도는 12도 30각분이 아니라 12도 18각분이다. 소수 부분 0.30에 60을 곱해야 각분으로 바뀐다. 표기 형태를 먼저 확인한 다음 계산한다.

$$23^{\circ}48' + 2^{\circ}35'$$

$$83' = 1^{\circ}23'$$

$$\text{합계} = 26^{\circ}23'$$

각분 60개를 1도로 올린다. 시간의 분과 구별한다.

탐구

15도 24각분을 소수 도로 바꾸어 보자.

풀이와 확인

$24/60=0.4$ 이므로 15.4도다. 15.24도라고 숫자를 붙여 쓰면 다른 각도가 된다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

표에 없는 날짜의 값을 구하기

두 값 사이의 변화가 일정하다고 가정하면 중간 값을 비례로 구할 수 있다.

가상 표에서 2일의 위치가 14도이고 6일의 위치가 22도라고 하자. 4일 동안 8도 변했으므로 하루 평균 변화량은 2도다. 3일은 시작에서 하루 뒤이므로 위치를 16도로 추정한다. 이 방법을 선형 보간이라고 한다.

4일처럼 정확히 가운데 시점이면 두 값의 평균 18도를 쓰면 된다. 그러나 3일은 가운데가 아니므로 단순 평균을 쓰면 틀린다. 전체 시간 간격 중 어느 비율만큼 이동했는지 먼저 구하고 같은 비율을 위치 변화에 적용한다.

보간값은 두 표 값 사이를 직선으로 연결한다는 가정에 따른 것이다. 실제 천체의 움직임이 그 구간에서 정확히 일정하다는 뜻은 아니다. 표의 간격과 필요한 정밀도에 따라 보간 오차가 달라질 수 있으므로 결과를 근삿값으로 표시한다.



2일과 6일 사이를 일정한 변화율로 연결한 선형 보간.

탐구

2일 14도와 6일 22도 사이에서 5일의 보간값은 얼마인가?

풀이와 확인

시작에서 3일 지났으므로 전체 4일의 $\frac{3}{4}$ 만큼이다. $14 + 8 \times \frac{3}{4} = 20$ 도로 추정한다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

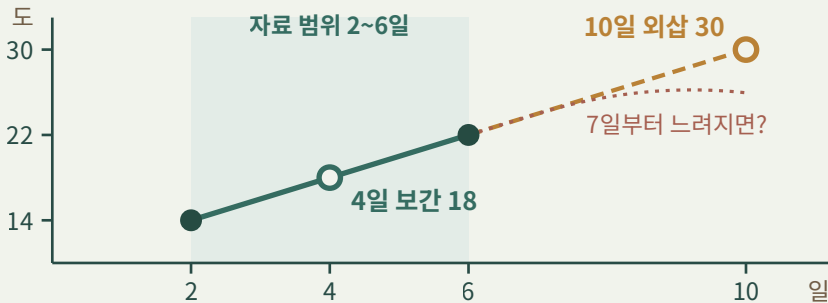
보간과 외삽을 구별하기

주어진 구간 안을 메우는 일과 구간 밖으로 뻗는 일은 다르다.

2일 14도와 6일 22도의 자료로 4일을 구하면 보간이다. 같은 직선 규칙을 10일까지 늘어 30도라고 추정하면 외삽이다. 두 계산은 같은 변화율을 쓰지만 자료가 직접 둘러싸는 범위 안인지 밖인지가 다르다. 표의 이용 범위를 알아야 결과의 성격을 이해할 수 있다.

구간 밖에서는 변화율이 달라질 가능성을 더 주의 깊게 검토해야 한다. 가상 대상이 7일부터 속도를 줄인다면 10일의 실제 값은 30도와 다를 수 있다. 짧은 구간에 잘 맞는 직선이 긴 시간에도 유지된다는 보장은 없다.

역사적 천문표의 사용 지침에는 기준 시점과 적용법이 중요하게 등장한다. 독자는 숫자만 추출하지 말고 어떤 조건 아래 값을 구하도록 했는지 함께 읽어야 한다. 이 장의 선형 예제는 표를 사용하는 기본 원리를 설명하는 현대 학습 모형이다.



2~6일 안의 4일은 보간이고 범위 밖의 10일은 외삽이다.

탐구

0일과 5일의 자료만 있을 때 3일과 8일의 추정은 각각 무엇인가?

풀이와 확인

3일은 주어진 구간 안이므로 보간이다. 8일은 구간 밖이므로 외삽이다. 같은 식을 사용해도 근거가 놓인 범위는 다르다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

이어 읽기 / 천문표의 줄 사이를 읽기

곡선 위에서 직선 보간의 오차 가능하기

표의 간격을 절반으로 줄이면 이차 곡선에서 직선 보간의 최대 오차는 4분의 1로 줄어든다.

케임브리지대학교의 천문표 자료가 보여 주듯 표는 긴 계산을 반복하지 않고 필요한 값을 찾게 해 주는 도구다. 7장의 보간은 두 표 값 사이를 직선으로 잇는다는 가정에 기댄다. 실제 움직임이 곡선이라면 보간값과 참값 사이에 차이가 생긴다. 이 차이가 얼마나 커질 수 있는지 미리 가늠하면 표의 간격을 정하거나 결과에 붙일 오차의 범위를 정할 수 있다.

학습용 모형으로 가상 위치가 $y=14+(t-2)^2 \div 2$ 라는 곡선을 따른다고 하자. 2일에는 14도이고 6일에는 22도이므로 7장의 표와 같은 두 값을 지난다. 직선 보간은 4일에 18도를 주지만 곡선의 값은 16도다. 3일과 5일에서는 차이가 각각 1.5도이고 가운데인 4일에서 2도로 가장 크다.

이차 곡선에서는 이 최대 차이를 간단한 식으로 쓸 수 있다. 구간의 길이를 h 라 하고 곡선이 휘는 정도를 나타내는 이계도함수를 f'' 라 하면 가운데에서의 차이는 $h^2 \times f'' \div 8$ 이다. 이 모형에서는 $h=4$ 이고 $f''=1$ 이므로 $16 \div 8=2$ 가 되어 직접 계산한 값과 같다. 이차식이 아닌 곡선에서도 구간 안에서 f'' 의 크기가 가장 큰 값을 넣으면 오차의 상한으로 쓸 수 있다.

중요한 점은 오차가 h^2 에 비례한다는 사실이다. 표에 4일 값 16도를 추가해 간격을 2일로 줄이면 최대 오차는 $2^2 \times 1 \div 8=0.5$ 도가 된다. 실제로 3일에서 곡선은 14.5도이고 2일과 4일을 잇는 직선은 15도이므로 차이는 0.5도다. 간격을 절반으로 줄이려면 표의 줄 수가 두 배로 늘지만 오차는 4분의 1로 줄어든다.

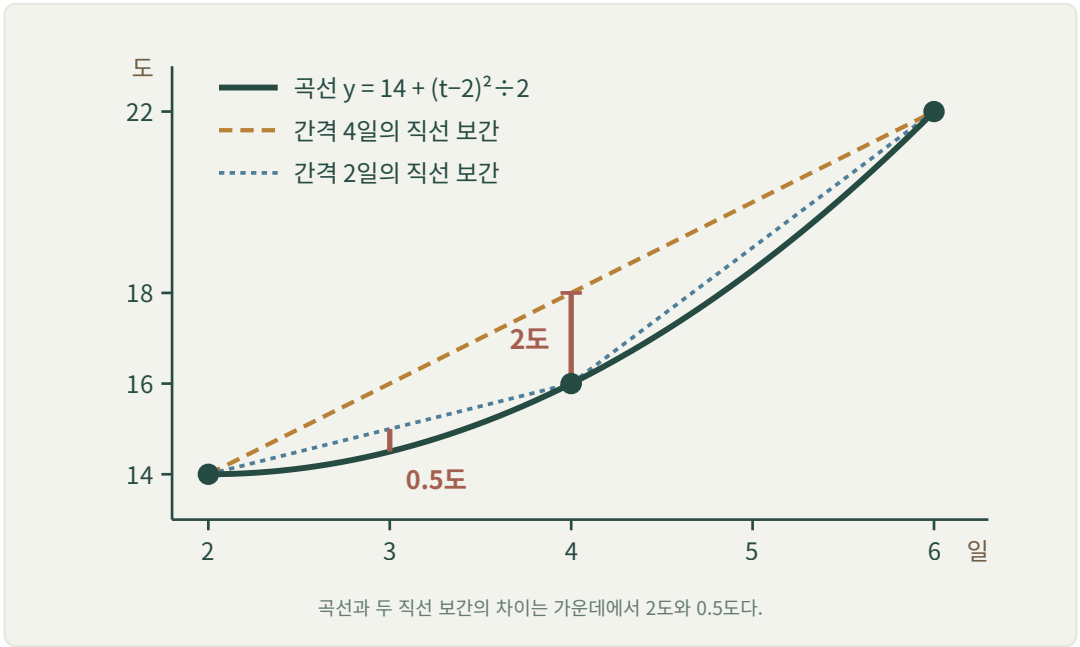


표 간격	최대 오차	확인한 날짜
4일	2도	4일
2일	0.5도	3일과 5일

탐구

같은 곡선에서 표 간격을 1일로 줄이면 직선 보간의 최대 오차는 얼마인가?

풀이와 확인

$h=1$ 이므로 $1^2 \times 1 \div 8 = 0.125$ 도다. 2일과 3일 사이의 가운데인 2.5일에서 곡선은 $14 + 0.25 \div 2 = 14.125$ 도이고 직선은 14와 14.5의 평균인 14.25도이므로 차이는 0.125도다. 간격 2일의 0.5도보다 다시 4분의 1로 줄었다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료

한 바퀴를 넘는 각도

회전 위치를 비교할 때에는 360도마다 같은 방향으로 돌아온다는 점을 반영한다.

가상 표의 연속한 두 위치가 358도와 2도라고 하자. 짧은 방향으로 앞으로 움직였다고 가정하면 변화는 -356 도가 아니라 $+4$ 도다. 두 번째 값을 362도로 풀어 생각한 뒤 차이를 계산하면 회전의 연속성이 드러난다.

중간 위치를 구할 때 두 수를 그대로 평균하면 180도라는 반대 방향을 얻는다. 358과 362의 평균은 360도이며 이를 한 바퀴 안으로 줄이면 0도다. 원형 자료에서는 수직선의 계산을 그대로 적용하기 전에 경계를 어떻게 넘었는지 판단해야 한다.

물론 실제 움직임이 짧은 방향이었다는 가정도 정보다. 오랜 시간 간격이라면 여러 바퀴 돌았을 가능성이 있다. 관측 간격과 운동 모형을 함께 알아야 각도 차이의 올바른 해석을 선택할 수 있다. 이 예제는 한 번의 짧은 전진 이동을 가정한다.

$358^\circ \rightarrow 362^\circ$ 로 풀어 읽기

중간값 = 360°

한 바퀴 안의 방향 = 0°

짧은 전진 이동을 가정하면 358도와 2도의 중간 방향은 0도다.

탐구

359도에서 다음 날 3도로 전진했다고 할 때 하루 변화와 중간 위치는 얼마인가?

풀이와 확인

다음 값을 363도로 보면 변화는 4도다. 중간은 361도이므로 한 바퀴 안에서는 1도다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘폴과학사박물관 계산표

주기의 나머지로 날짜 맞추기

반복되는 상태는 전체 경과량을 주기로 나눈 나머지로 찾을 수 있다.

가상의 천체 모형이 12일마다 같은 상태로 돌아온다고 하자. 시작에서 41일 뒤는 12×3 일과 5일이 지난 상태다. 따라서 한 주기 안의 5일째와 같은 위치에 대응한다. 전체 날짜와 주기 안의 날짜를 구별하면 표를 여러 번 재사용할 수 있다.

두 모형의 주기가 12일과 18일이면 둘이 동시에 처음 상태로 돌아오는 가장 이른 양의 시간은 최소공배수 36일이다. 그러나 실제 천체의 주기는 정확한 정수 날짜가 아닐 수 있다. 이 계산은 반복과 나머지의 원리를 설명하기 위한 이상화된 모형이다.

정수 주기로 근사한 표를 오래 반복하면 작은 주기 오차가 누적될 수 있다. 한 주기마다 0.1일이 어긋난다면 20주기 뒤에는 2일 차이가 난다. 짧은 기간의 편리함과 긴 기간의 정확도를 함께 검토해야 표의 한계를 이해할 수 있다.

$$41 = 12 \times 3 + 5$$

주기 안의 상태 = 5일째

12와 18의 최소공배수 = 36

이상화한 정수 주기 모형에서 나머지와 동시 반복을 구한다.

탐구

주기 8일인 모형에서 59일 뒤는 주기 안의 몇 일째인가?

풀이와 확인

$59 = 8 \times 7 + 3$ 이므로 3일째다. 시작 상태를 0일째로 정했다는 약속을 함께 사용한다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘폴과학사박물관 계산표

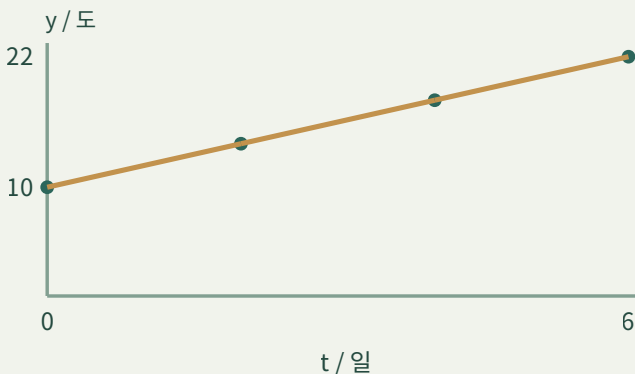
표를 다시 만드는 독자의 실험

입력과 출력과 가정을 적으면 작은 표도 검증 가능한 모형이 된다.

가상 위치를 $y=10+2t$ 로 정하고 t 가 0과 2와 4와 6일일 때의 표를 만들어 보자. 값은 10도와 14도와 18도와 22도다. 이 표는 직접 관측값이 아니라 정의한 직선 모형의 계산값이다. 같은 표라도 생성 방식을 밝히면 독자가 정확히 이해할 수 있다.

이제 표의 한 칸을 18이 아니라 19로 바꾸어 보자. 이웃한 차이가 4와 5와 3으로 바뀌어 일정한 변화율이 깨진다. 계산 규칙을 알고 있다면 오류를 찾기 쉽다. 실제 자료에서는 일정한 변화가 원래 가정인지 먼저 확인해야 하므로 모든 차이를 실수로 고치지 않는다.

완성한 표 아래에는 시간 기준과 각도 단위와 적용 범위와 보간 규칙을 적는다. 표를 다른 언어로 옮길 때에도 이 설명을 함께 전달해야 한다. 숫자와 사용법이 함께 이동할 때 계산 지식은 새로운 독자에게 실제로 작동하는 도구가 된다.



가상 직선 모형 $y=10+2t$ 의 계산값

탐구

위 모형의 3일 위치를 직접 계산한 값과 2일 및 4일 사이 보간값을 비교하자.

풀이와 확인

직접 계산은 $10+2 \times 3=16$ 도다. 14도와 18도의 중간도 16도다. 모형 자체가 직선이므로 이 경우 보간이 정확히 일치한다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

지식의 길 / 09

지도를 읽는 수학

축척은 같은 단위를 비교합니다

지도 위의 짧은 선을 실제 거리로 옮겨 봅니다.

축척 1:50000인 지도에서 1cm는 실제 50000cm에 대응합니다. 미터로 바꾸면 500m입니다. 지도에서 두 점 사이를 3.6cm로 재었다면 실제 평면 거리는 1.8km가 됩니다. 지도 거리와 실제 거리를 비로 비교하기 전에 같은 단위로 맞추어야 합니다. cm와 km를 그대로 나누면 숫자는 작아 보여도 축척의 뜻이 달라집니다.

이 계산은 지도에서 사용한 축척이 해당 구간에 적용된다는 가정 아래 이루어집니다. 넓은 지역을 평면에 나타낸 지도에서는 위치와 방향에 따라 축척이 달라질 수 있습니다. 산길의 실제 이동 거리도 지도에서 두 점을 직선으로 이은 거리보다 길 수 있습니다. 축척 계산으로 얻은 값이 무엇의 거리인지 설명해야 결과를 오해하지 않습니다.

$$1\text{cm} \leftrightarrow 50000\text{cm}=500\text{m}$$

$$3.6\text{cm} \leftrightarrow 1800\text{m}=1.8\text{km}$$

$$7.2\text{cm} \leftrightarrow 3.6\text{km}$$

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

같은 지도에서 7.2cm로 잰 선의 거리는 몇 km인가요?

풀이와 확인

$7.2 \times 500\text{m} = 3600\text{m}$ 이므로 3.6km입니다. 지도 길이가 두 배가 되면 같은 축척 아래 실제 거리도 두 배가 됩니다. 단위 환산을 마지막까지 적어 계산을 확인합니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

확대 인쇄하면 축척도 바뀝니다

지도 그림을 키워도 실제 땅은 커지지 않습니다.

축척 1:50000 지도를 가로와 세로 모두 두 배로 확대 인쇄하면 원래 1cm였던 선이 2cm가 됩니다. 실제 거리는 여전히 500m이므로 새 지도에서 1cm는 250m입니다. 새 축척은 1:25000입니다. 지도 파일에 적힌 숫자 축척이 이미지와 함께 확대되어 보이더라도 그 숫자의 내용은 저절로 바뀌지 않습니다.

반면 그림으로 그린 막대 축척은 지도와 같은 비율로 확대되면 실제 거리 표시와의 대응을 유지할 수 있습니다. 확대 후 길이를 재어야 하는 자료에서는 어떤 종류의 축척이 있는지 살펴보는 것이 좋습니다. 가로와 세로를 서로 다른 비율로 늘렸다면 단일한 축척 하나로 모든 방향을 설명할 수도 없습니다. 이미지 편집의 작은 선택이 지리적 해석을 바꿉니다.

인쇄 크기	축척
원래	1:50000
길이 두 배	1:25000
길이 절반	1:100000

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

1:80000 지도를 길이 기준 80퍼센트로 축소하면 새 축척은 무엇인가요?

풀이와 확인

지도 1cm에 해당하던 실제 거리가 축소 후 0.8cm에 대응합니다. 따라서 새 1cm는 100000cm에 해당하여 축척은 1:100000입니다. 축소할수록 분모가 커집니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

지도 면적의 배수는 다릅니다

길이의 축척을 두 번 곱해야 넓이가 됩니다.

축척 1:10000에서 지도 위 1cm는 실제 100m입니다. 지도에서 가로 3cm와 세로 2cm인 직사각형은 실제 가로 300m와 세로 200m를 나타냅니다. 넓이는 60000m^2 입니다. 지도 넓이 6cm^2 에 길이 배수 10000만 곱하면 잘못된 답을 얻습니다. 가로와 세로가 각각 확대되므로 넓이 배수는 길이 배수의 제곱입니다.

면적 단위까지 함께 환산하면 결과를 점검하기 쉽습니다. 60000m^2 는 6ha입니다. 지도에서 1cm^2 가 실제 10000m^2 에 대응하므로 6cm^2 가 6ha라는 같은 답을 얻습니다. 이 값은 지도에서 영역을 직사각형으로 근사한 결과일 수 있습니다. 경계가 휘어 있거나 투영에 따른 넓이 왜곡이 있으면 별도의 보정이나 더 자세한 측정이 필요합니다.



지도 $3 \times 2\text{cm}$



실제 $300 \times 200\text{m}$

현대 재구성: 크기가 아니라 대응하는 단위를 비교하는 도식

탐구

같은 지도에서 넓이가 2.5cm^2 인 영역은 이 모형에서 몇 ha인가요?

풀이와 확인

1cm^2 가 1ha이므로 2.5ha입니다. 실제 단위로는 25000m^2 입니다. 길이와 넓이에 적용되는 배수를 구분하면 단위가 달라도 같은 결과를 얻습니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

등근 지구를 펼치는 선택

지도 투영은 보존할 성질을 선택합니다.

구면을 평면으로 옮길 때 모든 거리와 넓이와 각을 동시에 완벽하게 유지할 수는 없습니다. 어떤 지도는 작은 영역의 각을 보존하는 데 유리하고 어떤 지도는 넓이의 비를 보존하는 데 목적을 둡니다. 지도의 모양이 낯설다고 잘못된 지도라고 판단하기보다 무엇을 비교하기 위해 만들어졌는지 살펴야 합니다.

미국 의회도서관은 지도 제작자 존 스나이더의 수학 자료와 프로그램을 보존하고 해석한 사례를 소개합니다. 위성 자료를 지도에 옮기는 과정에도 투영의 수학이 들어갑니다. 이 사실은 지도라는 결과물 뒤에 계산 방법과 입력 자료와 도구가 있음을 보여 줍니다. 단순한 그림으로 보이는 지도를 읽을 때에도 제작 조건을 질문할 수 있습니다.

비교할 대상 선택

투영의 보존 성질 확인

위치별 왜곡 고려

지도에서 결과 읽기

현대 재구성: 지도 목적과 투영의 성질을 연결한다.

탐구

두 지역의 넓이를 비교하려는데 지도 한쪽이 크게 늘어나 보인다면 무엇을 확인해야 하나요?

풀이와 확인

사용한 투영이 넓이를 보존하는지 확인해야 합니다. 화면에서 픽셀 면적을 재는 것만으로 실제 땅의 넓이 비를 알 수는 없습니다. 지도 설명과 축척의 적용 범위를 함께 읽습니다.

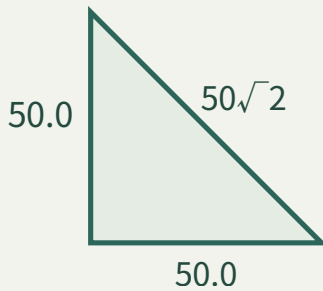
[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

강 건너 점을 재는 삼각형

직접 가지 못해도 각과 기준선으로 거리를 구합니다.

평평한 땅의 두 관측점 A와 B가 100m 떨어져 있다고 합시다. 강 건너 목표점 C를 바라본 두 밑각이 각각 45° 라면 삼각형은 이등변직각삼각형입니다. C에서 기준선 AB로 내린 높이는 밑변을 50m씩 나누며 높이도 50m가 됩니다. 직접 강을 건너지 않고 기준선과 각의 관계로 수직 거리를 구한 현대적 측량 예제입니다.

측량에서는 기준선 길이가 정확해야 하고 두 관측이 같은 목표점을 향해야 합니다. 지면이 수평이 아니면 수평 거리와 경사 거리를 구별해야 합니다. 각을 재었다는 사실만으로 모든 조건이 충족되는 것은 아닙니다. 삼각형 그림에 어떤 값이 측정값이고 어떤 값이 계산값인지 표시하면 오차가 어디서 들어올 수 있는지 이해하기 쉽습니다.



현대 재구성: 기준선을 반으로 나누어 만든 직각삼각형

탐구

기준선이 160m이고 두 밑각이 같은 45° 이면 목표점의 수직 거리는 얼마인가요?

풀이와 확인

기준선의 절반이 80m이고 생긴 직각삼각형의 두 예각이 45° 이므로 높이도 80m입니다. 기준선을 늘린 비율만큼 닮은 삼각형의 모든 길이가 늘어납니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

이어 읽기 / 지도를 읽는 수학

밑각이 다른 삼각형으로 강 건너 거리 재기

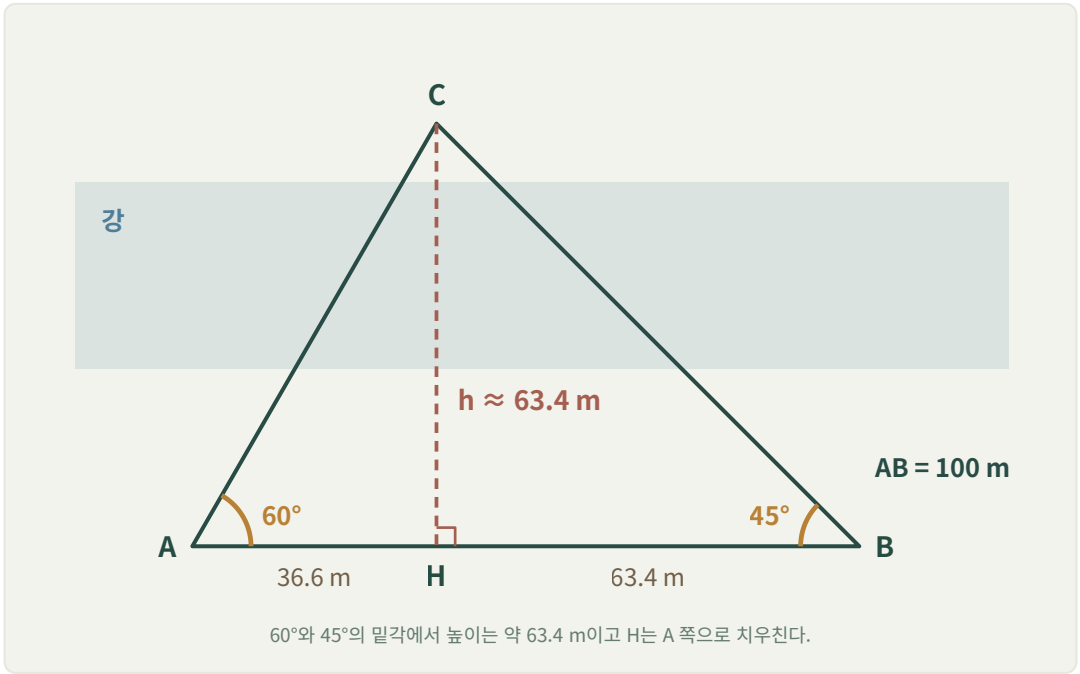
두 밑각이 같지 않아도 높이를 공통의 미지수로 놓으면 기준선과 두 각만으로 거리를 구할 수 있다.

8장의 예제는 두 밑각이 모두 45° 여서 높이가 기준선의 절반인 50 m로 바로 나왔다. 실제 측량에서는 목표점이 기준선 가운데의 맞은편에 놓인다는 보장이 없다. 두 밑각이 다르면 C에서 기준선에 내린 수선의 발 H가 한쪽으로 치우친다. 이때에도 높이를 공통의 미지수로 놓으면 기준선 하나와 두 각만으로 거리를 구할 수 있다.

현대 재구성으로 기준선 AB가 100 m이고 A의 밑각이 60° 이며 B의 밑각이 45° 라고 하자. 높이를 h라 하면 직각삼각형 BHC는 직각이등변삼각형이므로 BH는 h와 같다. 직각삼각형 AHC에서는 $h \div AH = \tan 60^\circ \approx 1.732$ 이므로 $AH = h \div 1.732$ 이다. 두 조각의 합이 100 m라는 조건에서 $h \times (1 + 1 \div 1.732) = 100$ 이라는 식을 얻는다.

이 식을 풀면 $h \approx 63.4$ m이고 $AH \approx 36.6$ m이며 $BH \approx 63.4$ m다. 각이 큰 A 쪽으로 수선의 발이 다가가고 높이는 두 각이 모두 45° 일 때의 50 m보다 커진다. 일반적으로 두 밑각을 α 와 β 라 하면 $h = AB \div (1 \div \tan \alpha + 1 \div \tan \beta)$ 이다. α 와 β 에 모두 45° 를 넣으면 $1 \div \tan 45^\circ = 1$ 이므로 $h = 100 \div 2 = 50$ 이 되어 8장의 결과와 일치한다.

이 계산은 평평한 땅과 정확한 각 측정을 가정한다. A의 각을 61° 로 잘못 읽으면 높이는 약 64.3 m가 되어 1 m 가까이 달라진다. 결과를 적을 때에는 측정한 기준선과 두 각을 계산으로 얻은 높이와 구별하여 표시한다. 그래야 오차가 어느 측정에서 들어왔는지 나중에 되짚어 볼 수 있다.



구분	값	성격
기준선 AB	100 m	측정값
A와 B의 밑각	60°와 45°	측정값
높이 h	약 63.4 m	계산값

탐구

기준선이 100 m이고 두 밑각이 모두 60°라면 목표점까지의 높이는 얼마인가?

풀이와 확인

$1 \div \tan 60^\circ \approx 0.577$ 이므로 $h = 100 \div (0.577 + 0.577) \approx 86.6 \text{ m}$ 다. 두 각이 같으므로 수선의 발은 기준선의 가운데에 오고 $AH = BH = 50 \text{ m}$ 다. $50 \times \tan 60^\circ \approx 50 \times 1.732 = 86.6 \text{ m}$ 로 다시 계산해도 같은 값이 나온다.

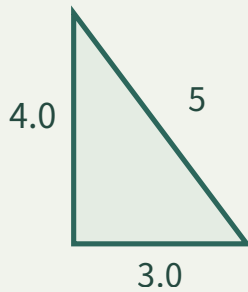
[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

직선 거리와 길의 거리

지도에서 가까워 보여도 돌아가는 길이 필요합니다.

격자형 도로에서 목적지가 동쪽 세 블록과 북쪽 네 블록 떨어져 있다고 합시다. 각 블록의 길이가 같고 대각선 길이 없다면 최단 이동 거리는 일곱 블록입니다. 두 점 사이의 직선 거리는 $\sqrt{(3^2+4^2)}=5$ 블록입니다. 두 값은 서로 틀린 답이 아니라 서로 다른 이동 조건을 나타냅니다.

길의 거리를 계산하려면 통과할 수 있는 도로를 먼저 정해야 합니다. 강이나 폐쇄된 길이 있으면 돌아가야 하고 일방통행이면 방향도 중요합니다. 지도의 선은 거리뿐 아니라 이동 가능성의 조건을 담습니다. 실제 여행 기록의 속도를 비교할 때에도 직선 거리를 이동 시간으로 나눈 값만으로 이동자의 능력을 판단하지 않습니다. 경로의 형태와 정지 시간을 함께 살펴야 합니다.



현대 재구성: 직선 5와 격자 경로 3+4를 비교한다.

탐구

동쪽 여섯 블록과 북쪽 여덟 블록 떨어진 곳의 직선 거리와 격자 최단 거리는 얼마인가요?

풀이와 확인

직선 거리는 $\sqrt{(6^2+8^2)}=10$ 블록이고 격자 최단 거리는 14블록입니다. 두 경우 모두 앞 예제의 두 배입니다. 이동 경로의 허용 조건을 답과 함께 적습니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

지도 설명을 완성하는 활동

숫자의 답과 모형의 한계를 한 장에 기록합니다.

축척 1:25000 지도에서 길을 따라 켜 거리 8cm라면 실제 경로는 약 2km입니다. 직선으로 켜 두 점 사이는 6cm라서 1.5km입니다. 시속 4km로 쉬지 않고 걸으면 길을 따른 이동 시간은 반 시간입니다. 이 세 결과를 한 표에 적으면 지도 거리와 실제 경로와 이동 시간이 어떻게 연결되는지 보입니다.

마지막에는 이 계산의 가정을 적습니다. 지도 확대가 없고 축척이 해당 구간에 적용되며 경로를 따라 켜 길이가 정확하고 속도가 일정하다고 보았습니다. 실제 경사는 별도로 반영하지 않았습니다. 계산을 많이 했다는 사실보다 어떤 질문에 답했고 어떤 조건은 남겨 두었는지 분명히 쓰는 것이 좋은 지도 해설입니다.

양	값
지도 경로	8cm
실제 경로	2km
시속 3km의 시간	40분

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

같은 길을 시속 3km로 걸으면 예상 시간은 몇 분인가요?

풀이와 확인

$2\text{km} \div 3\text{km/h} = 2/3\text{시간}$ 이므로 40분입니다. 직선 거리 1.5km를 사용하면 30분으로 계산되어 실제로 따라갈 길을 빠뜨립니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

인쇄된 숫자를 검산하기

같은 판본도 완전히 같지는 않습니다

인쇄된 부분과 손으로 더한 부분을 구별합니다.

미국 의회도서관의 구텐베르크 성서 해설은 인쇄 뒤에 구매자 측에서 붉은색과 푸른색을 더한 부분을 설명합니다. 책의 제작이 한 번의 인쇄로만 끝나지 않을 수 있음을 보여 주는 사례입니다. 한 판에서 나온 책이라도 채색과 메모와 수정 및 보존 상태에 차이가 생길 수 있습니다. 인쇄본이라는 말이 모든 개체의 완전한 동일성을 뜻하지는 않습니다.

수학 책에서도 본문 숫자와 손으로 고친 숫자를 구별해 읽어야 합니다. 36 위에 63이 덧써 있다면 원래의 활자와 수정 흔적을 모두 기록합니다. 어느 값이 계산에 맞는지는 문제 전체와 검산으로 판단합니다. 수정된 숫자를 아무 설명 없이 전사하면 후대 독자가 판본의 차이를 확인할 근거를 잃게 됩니다.

총위	읽힌 값
인쇄 본문	36
손글씨 수정	63
계산 검산	$9 \times 7 = 63$

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

문제가 9×7 인데 본문은 36이고 손글씨는 63이면 무엇을 기록해야 하나요?

풀이와 확인

인쇄된 값 36과 손으로 고친 값 63을 각각 기록하고 $9 \times 7 = 63$ 이므로 수정값이 계산과 맞는다고 설명합니다. 누가 언제 고쳤는지는 별도의 자료가 없으면 단정하지 않습니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

숫자 두 자리가 바뀌면

전도 오류는 자리값의 차이로 설명할 수 있습니다.

두 자리 수 $10a+b$ 의 숫자 순서를 바꾸면 $10b+a$ 가 됩니다. 두 수의 차이는 $9(a-b)$ 입니다. 따라서 두 자리의 전도는 언제나 9의 배수만큼 수를 바꿉니다. 예를 들어 47과 74의 차이는 27입니다. 눈으로 비슷한 두 숫자가 자리만 바뀌어도 결과의 크기는 상당히 달라질 수 있습니다.

떨어진 두 자리도 같은 방식으로 분석할 수 있습니다. 십의 자리와 일의 자리를 바꾸면 차이에 $10-1=9$ 가 붙고 백의 자리와 일의 자리를 바꾸면 $100-1=99$ 가 붙습니다. 일반적으로 자리값 10의 m 제곱과 10의 n 제곱의 차이에 두 숫자의 차를 곱합니다. 어떤 자리끼리 바뀌었는지에 따라 계산에서 보존되는 정보가 달라집니다. 이 관계는 오류의 크기를 설명하지만 실제 전사 과정에서 실수가 생긴 원인까지 알려 주지는 않습니다.

원래 수 $10a+b$
바뀐 수 $10b+a$
차이 $9(a-b)$

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

58과 85의 차이를 공식으로 계산해 보세요.

풀이와 확인

$9 \times (8-5)=27$ 입니다. 큰 수에서 작은 수를 뺀 차이를 구했으므로 양수로 나타냈습니다. 원래 순서로 $58-85$ 를 계산하면 -27 이며 부호가 방향을 나타냅니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

아홉의 나머지 검사

빠른 검사는 일부 정보를 버린다는 한계가 있습니다.

십진수에서 10은 9로 나누면 나머지가 1입니다. 따라서 어떤 수를 9로 나눈 나머지는 자리 숫자의 합을 9로 나눈 나머지와 같습니다. 347의 숫자 합은 14이므로 나머지는 5입니다.

347을 342와 5로 나누어 보아도 같은 결과가 나옵니다. 큰 수를 작은 나머지로 바꾸면 덧셈과 곱셈의 오류를 빠르게 점검할 수 있습니다.

하지만 347과 374의 숫자 합은 모두 14입니다. 순서를 바꾸는 오류는 이 검사에서 드러나지 않을 수 있습니다. 검사를 통과했다고 정답이 증명된 것은 아닙니다. 무엇을 검사하는지 이해하면 빠른 검산을 유용하게 쓰면서도 과신하지 않을 수 있습니다. 다른 계산 방식이나 원자료 대조가 함께 필요합니다.

기록	숫자 합	9의 나머지
492	15	6
429	15	6

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

123×4의 답을 492 대신 429로 적으면 아홉 검산이 오류를 찾을 수 있나요?

풀이와 확인

123의 나머지 6에 4를 곱하면 24의 나머지 6입니다. 492와 429는 모두 숫자 합이 15여서 나머지가 6입니다. 두 답을 구별하지 못하므로 이 오류는 통과합니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

이어 읽기 / 인쇄된 숫자를 검사하기

아홉 검산이 성립하는 이유를 묶음으로 보기

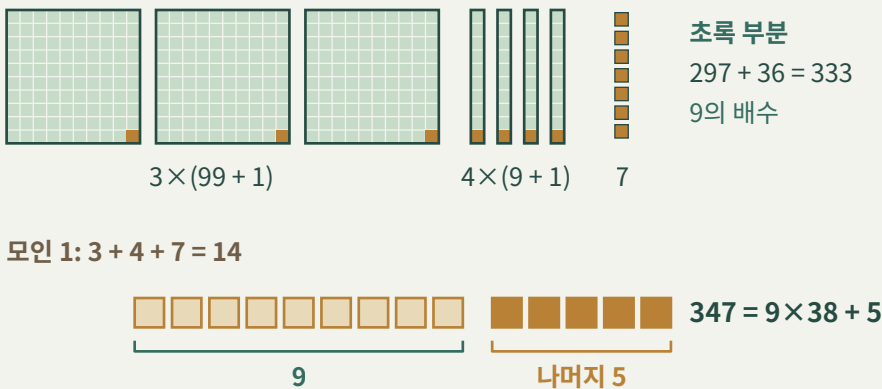
100을 99와 1로, 10을 9와 1로 나누어 보면 자리 숫자의 합이 왜 아홉의 나머지를 주는지 드러난다.

9장은 10을 9로 나눈 나머지가 1이라는 사실에서 숫자 합 검산을 이끌어 냈다. 이 연결을 묶음 그림으로 풀어 보면 규칙이 우연이 아니라는 점을 확인할 수 있다. 347은 백 묶음 3개와 십 묶음 4개 및 날개 7개로 이루어진다. 각 묶음을 9의 배수인 부분과 남는 1로 나누는 것이 핵심이다.

백 묶음 하나는 99와 1로 나누고 십 묶음 하나는 9와 1로 나눌 수 있다. 그러면 $347=3\times 99+4\times 9+(3+4+7)$ 이 된다. 앞의 두 항 297과 36은 모두 9의 배수이므로 9로 나누 나머지에 영향을 주지 않는다. 남는 것은 각 묶음에서 떨어져 나온 1들과 날개를 모은 $3+4+7=14$ 이며 이것이 바로 숫자의 합이다.

14도 같은 방법으로 9와 5로 나누면 나머지는 5다. 따라서 347을 9로 나눈 나머지는 5이며 9장에서 구한 값과 같다. $1000=999+1$ 처럼 모든 자리값이 9의 배수에 1을 더한 꼴이므로 자리 수가 늘어도 같은 논리가 이어진다. 숫자의 순서를 바꾸어도 모이는 1의 개수는 같으므로 그림은 9장의 전도 오류가 이 검사를 통과하는 까닭도 함께 보여 준다.

11의 검사도 같은 틀로 읽을 수 있다. 10은 $11-1$ 이고 100은 $99+1$ 이므로 십의 자리에서는 묶음마다 1이 모자라고 백의 자리에서는 1이 남는다. 그래서 자리마다 더하기와 빼기를 번갈아가게 된다. 347에서는 $7-4+3=6$ 이므로 11로 나눈 나머지는 6이며 $347=11\times 31+6$ 으로 확인된다.



각 묶음에서 떨어진 1을 모으면 숫자의 합 14와 나머지 5가 된다.

탐구

5286을 9로 나눈 나머지를 자리 숫자의 합으로 구하고 묶음의 분해로 설명하라.

풀이와 확인

$5+2+8+6=21$ 이고 21을 9로 나눈 나머지는 3이므로 답은 3이다. $5286=5\times 999+2\times 99+8\times 9+(5+2+8+6)$ 에서 앞의 세 항은 모두 9의 배수이므로 나머지는 숫자의 합이 결정한다. 실제로 $5286=9\times 587+3$ 이다.

열하나의 나머지는 순서를 봅니다

번갈아 더하고 빼면 다른 종류의 검사가 됩니다.

10은 11로 나누었을 때 -1과 같은 나머지 관계를 가지므로 자리값의 거듭제곱은 1과 -1이 번갈아 나타납니다. 오른쪽부터 숫자를 번갈아 더하고 빼면 원래 수의 11에 대한 나머지를 구할 수 있습니다. 492에서는 $2-9+4=-3$ 이므로 나머지는 8입니다. 429에서는 $9-2+4=11$ 이므로 나머지는 0입니다.

이 검사는 앞쪽의 아홉 검산이 구별하지 못한 두 수를 구별합니다. 그러나 모든 오류를 찾아내는 것은 아닙니다. 두 기록의 차이가 11의 배수라면 같은 나머지를 갖습니다. 서로 다른 검산을 결합하면 발견할 수 있는 오류의 범위가 넓어지지만 검사 결과를 정답 자체와 동일시해서는 안 됩니다.

$$123 \equiv 2 \text{ (11 기준)}$$

$$123 \times 4 \equiv 8$$

$$492 \equiv 8$$

$$429 \equiv 0$$

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

123×4 의 올바른 나머지를 11 기준으로 계산해 보세요.

풀이와 확인

123의 나머지는 2입니다. 여기에 4를 곱하면 8이므로 답의 나머지는 8이어야 합니다. 492는 조건을 만족하고 429는 나머지 0이므로 오류로 걸러집니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

두 검사를 통과하는 오류

검사 항목을 늘려도 완전한 보장은 아닙니다.

아홉과 열하나의 나머지를 모두 검사한다고 합시다. 두 수의 차이가 99의 배수이면 두 검사에서 같은 결과를 얻습니다. 올바른 답 492에 99를 더한 591은 9 기준 나머지가 6이고 11 기준 나머지가 8로 모두 같습니다. 두 검사를 통과했지만 123×4 의 정답은 아닙니다.

이 예는 검사 방식의 원리를 알고 반례를 설계하는 활동입니다. 실제 교정에서는 역연산이나 대략적인 크기 비교와 원자료 대조를 추가할 수 있습니다. $591 \div 4$ 는 123이 아니므로 역연산으로 오류가 드러납니다. 검사 도구는 어떤 위험을 줄이는지와 어떤 오류를 남겨 두는지 함께 설명할 때 가장 유용합니다.

수	9의 나머지	11의 나머지
492	6	8
591	6	8
차이 99	0	0

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

492와 591의 차이가 두 나머지 검사를 피하는 까닭을 설명해 보세요.

풀이와 확인

차이 99는 9의 배수이면서 11의 배수입니다. 두 수를 각각 9 또는 11로 나누면 나머지가 같습니다. 검사에서 보존한 정보가 같아도 전체 수는 다를 수 있습니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

교정표에 남길 네 칸

읽힌 값과 제안과 근거를 구분합니다.

계산표의 한 행이 $18 \times 7 = 126$ 이고 다음 판본에는 $18 \times 7 = 162$ 라고 적혀 있다고 합시다. 교정표에는 위치와 원래 읽힌 값과 수정 제안과 이유를 나누어 적습니다. 이유에는 $18 \times 7 = 126$ 이라는 계산과 두 판본의 차이를 함께 남깁니다. 수정 제안이 마음에 든다는 감상보다 독자가 확인할 수 있는 관계를 제시해야 합니다.

숫자 162가 틀렸더라도 그것이 단순한 자리 바꿈인지 다른 행에서 옮겨 온 숫자인지는 별개의 문제입니다. 오류를 바로잡는 판단과 오류의 발생 원인을 추정하는 판단을 섞지 않습니다. 교정된 책에서도 원문을 확인할 길을 남기면 나중에 더 좋은 자료가 발견되었을 때 수정 과정을 다시 검토할 수 있습니다.

위치	읽힌 값	제안	근거
계산표 2행	162	126	18×7
다른 문제	162	유지	18×9

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

문제 자체가 18×9 였다면 교정 판단은 어떻게 달라지나요?

풀이와 확인

$18 \times 9 = 162$ 이므로 162가 맞습니다. 다만 비교해서 어느 판본이 옳다고 결정할 수 없으며 문제의 숫자와 계산 과정까지 함께 대조해야 합니다.

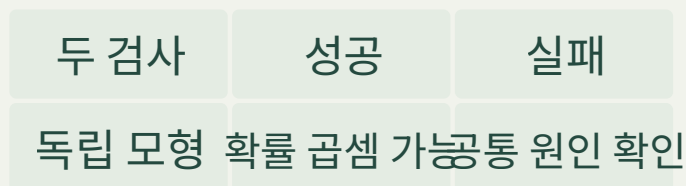
[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

두 사람이 읽어도 같은 실수를 할 수 있습니다

독립된 검토가 무엇인지 생각해 봅니다.

두 교정자가 같은 흐릿한 사진만 보고 숫자를 읽으면 둘 다 3을 8로 오해할 수 있습니다. 검토자가 둘이라는 사실만으로 오류가 완전히 독립적이라고 가정할 수는 없습니다. 첫 사람의 답을 보여 준 뒤 둘째 사람이 확인하는 방식도 같은 판단을 따라가게 만들 수 있습니다. 작업 절차가 어떤 공통 원인을 남기는지 살펴야 합니다.

가상 확률 모형에서 각자의 오류 확률이 0.1이고 오류가 독립이라면 둘 다 틀릴 확률은 0.01입니다. 하지만 같은 자료 결함 때문에 함께 틀리는 경우가 많으면 이 곱셈을 적용할 수 없습니다. 숫자로 품질을 평가할 때에는 독립성이라는 가정이 계산보다 먼저입니다. 별도의 자료나 다른 검산 방법을 활용하면 공통된 실수를 줄일 기회가 생깁니다.



현대 재구성: 독립성은 검토자 수만으로 보장되지 않는다.

탐구

오류 확률 0.2인 두 검사가 독립이라는 가정 아래 둘 다 놓칠 확률은 얼마인가요?

풀이와 확인

$0.2 \times 0.2 = 0.04$ 입니다. 4퍼센트라는 값은 독립성 가정에 따른 모형 결과입니다. 실제 검토의 오류율을 측정하지 않았다면 현실의 정확도처럼 제시해서는 안 됩니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

대수 기호와 번역의 약속

등호도 역사를 가진 기호입니다

익숙한 모양이 처음부터 당연했던 것은 아닙니다.

세인트앤드루스대학교의 수학 기호 자료는 등호를 포함한 관계 기호의 사용과 변화를 살펴볼 수 있게 합니다. 로버트 레코드의 1557년 저술은 등호의 역사에서 자주 언급되지만 하나의 기호가 등장한 뒤 곧바로 모든 독자에게 통용된 것은 아닙니다. 서로 다른 표기가 함께 쓰이는 시기에는 같은 모양의 뜻과 다른 모양의 대응을 확인해야 합니다.

오늘의 등호는 양쪽이 같은 값을 나타낸다는 관계를 표현합니다. $3+4=7$ 은 계산 결과를 보여주지만 $7=3+4$ 도 같은 관계입니다. 등호를 다음에 답이 나온다는 신호로만 읽으면 $3+4=\square+2$ 같은 식에서 혼동하기 쉽습니다. 기호의 역사와 현재의 정의를 함께 살펴보면 익숙한 표기를 다시 정확하게 읽을 수 있습니다.

$$3+4=7$$

$$7=3+4$$

$$3+4=5+2$$

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

$3+4=\square+2$ 의 빈칸에는 어떤 수가 들어가나요?

풀이와 확인

왼쪽이 7이므로 오른쪽도 7이어야 합니다. 빈칸에는 5가 들어갑니다. 등호 양쪽의 값을 비교하면 계산을 왼쪽에서 오른쪽으로만 진행해야 한다는 오해를 피할 수 있습니다.

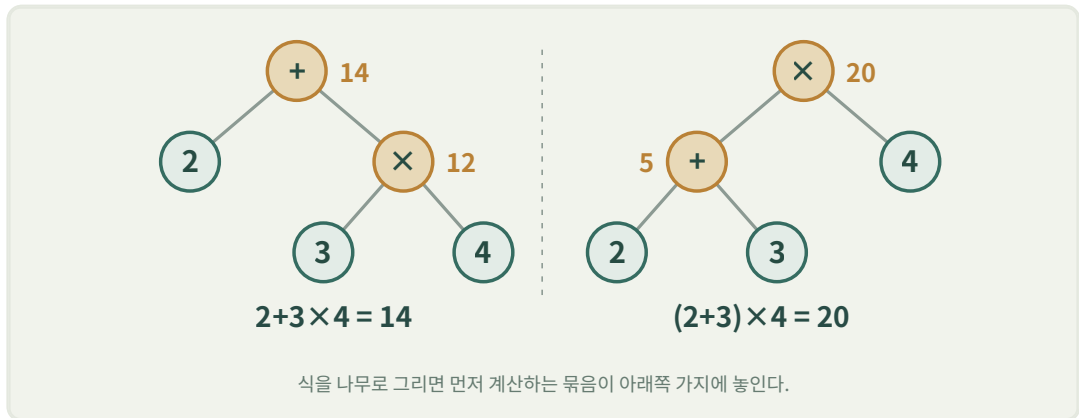
[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

괄호가 문장의 구조를 정합니다

같은 숫자도 묶는 방식에 따라 다른 계산이 됩니다.

$2+3\times 4$ 는 곱셈을 먼저 하여 14가 됩니다. $(2+3)\times 4$ 는 괄호 안을 먼저 계산하여 20이 됩니다. 두 식에는 같은 숫자와 같은 연산이 있지만 구조가 다릅니다. 기호를 번역할 때 글자만 바꾸고 묶음의 관계를 놓치면 원래 문제와 다른 식을 만들 수 있습니다. 문장에서는 무엇을 합을 몇 배 하는지 분명히 적어야 합니다.

긴 분수선도 분자와 분모를 묶는 역할을 합니다. $(a+b)/c$ 를 $a+b/c$ 처럼 적으면 일반적으로 다른 값이 됩니다. 짧게 줄인 표기가 독자에게 같은 묶음을 전달하는지 확인해야 합니다. 문서를 옮기거나 화면에 표시할 때 줄바꿈이 식의 구조를 흐리게 만들 수 있으므로 괄호와 분수선의 범위를 함께 검토합니다.



탐구

$a=6$ 과 $b=2$ 와 $c=4$ 일 때 $(a+b)/c$ 와 $a+b/c$ 를 비교해 보세요.

풀이와 확인

첫 식은 $8/4=2$ 이고 둘째 식은 $6+0.5=6.5$ 입니다. 같은 문자와 연산 기호를 사용했지만 나눗셈이 적용되는 범위가 달라 결과가 다릅니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

문자에는 정의가 먼저 필요합니다

x 가 무엇인지에 따라 같은 식의 뜻이 달라집니다.

식 $2x+3=15$ 에서 x 가 물건 개수인지 길이인지 가격인지 정하지 않으면 계산은 가능해도 답의 해석이 비어 있습니다. 물건 두 묶음에 날개 세 개를 더하여 열다섯 개라면 x 는 한 묶음의 개수로 6개입니다. 길이 문제라면 3과 15도 같은 길이 단위를 가져야 두 항을 합칠 수 있습니다.

문자를 정수로 제한하는지 실수로 허용하는지도 적어야 합니다. $x/2=3.5$ 는 실수 범위에서는 $x=7$ 이며 개수를 뜻하는 정수로도 해석할 수 있습니다. 하지만 $2x=7$ 이면 정수 개수 조건에서는 해가 없습니다. 문자 정의는 단순한 도입 문장이 아니라 어떤 답을 허용할지 정하는 수학적 조건입니다.

문자의 뜻	허용 범위	$2x=7$
실수 값	실수	$x=3.5$
상자 개수	0 이상의 정수	해 없음

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

$2x=7$ 에서 x 가 자를 수 없는 상자의 개수라면 $x=3.5$ 를 답으로 제시해도 되나요?

풀이와 확인

정수 개수만 허용한다면 조건을 만족하는 해가 없다고 해야 합니다. 3.5는 실수식의 해지만 상황에서 허용한 대상은 아닙니다. 계산 결과와 문제의 범위를 다시 연결해야 합니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

양쪽을 나누기 전에

0일 수 있는 식으로 나누면 해가 사라집니다.

$x(x-3)=0$ 에서 양쪽을 x 로 나누어 $x-3=0$ 이라고 쓰면 $x=3$ 만 남습니다. 그러나 원래 식은 $x=0$ 도 만족합니다. x 가 0이 아니라는 조건을 확인하지 않고 나누었기 때문에 해를 잃었습니다. 올바른 풀이는 두 인수 중 하나가 0임을 이용해 $x=0$ 또는 $x=3$ 이라고 쓰는 것입니다.

등가 변형은 허용한 범위 안에서 해의 집합을 보존하는 변화입니다. 식의 모양을 단순하게 만든다고 언제나 등가인 것은 아닙니다. 나누는 식이 0이 될 가능성이 있으면 그 경우를 따로 분리합니다. 역사적 풀이를 현대적으로 정리할 때도 원문이 양의 길이만 다루었는지와 0을 허용했는지 확인해야 같은 해 집합을 비교할 수 있습니다.

$$x(x-3)=0$$

$$\text{해: } x=0 \text{ 또는 } x=3$$

x 로 나누려면 $x \neq 0$ 조건 필요

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

$(x-2)(x+5)=0$ 을 $x-2$ 로 나누면 어떤 해를 놓치나요?

풀이와 확인

$x=2$ 를 놓칩니다. 원래 식의 해는 2와 -5입니다. $x-2$ 가 0이 아닌 경우에만 나누면 -5를 얻고 빠진 경우 $x=2$ 를 따로 확인해야 합니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

제공하면 새 후보가 생길 수 있습니다

식의 변형 뒤에는 원래 조건으로 돌아갑니다.

$\sqrt{x}=-2$ 라는 식은 실수에서 해가 없습니다. 제곱근 기호는 0 이상의 값을 나타내기 때문입니다. 그런데 양쪽을 제곱하면 $x=4$ 가 나옵니다. 4를 원래 식에 넣으면 $2=-2$ 가 되어 맞지 않습니다. 제곱하는 변형은 부호 정보를 잃을 수 있으므로 변형된 식의 해가 모두 원래 식의 해인 것은 아닙니다.

복잡한 식을 풀 때 제곱은 유용하지만 그 뒤에 원래 식과 정의역을 확인해야 합니다. 식을 간단히 만든 결과를 후보 목록으로 보고 검증을 거쳐 최종 해를 정하면 안전합니다. 번역된 해설에서 검산 단계가 생략되어 있다면 어떤 조건이 앞에서 이미 주어졌는지 살펴야 합니다. 생략을 그대로 따라가기보다 논리의 연결을 복원합니다.

원래 식	제공한 후보	검산
$\sqrt{x}=-2$	$x=4$	불성립
$\sqrt{x+1}=3$	$x=8$	성립

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

$\sqrt{x+1}=3$ 을 제곱하여 얻은 $x=8$ 은 원래 식을 만족하나요?

풀이와 확인

$\sqrt{9}=3$ 이므로 만족합니다. $x+1$ 이 0 이상이라는 정의역 조건도 만족합니다. 앞의 예와 달리 양쪽이 같은 양의 값이어서 후보가 실제 해로 남습니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

짧은 기호가 숨긴 긴 덧셈

압축된 표기는 범위와 규칙을 함께 담아야 합니다.

$1+2+3+4+5$ 를 합 기호로 줄여 쓸 수 있지만 어떤 값에서 시작하고 어디에서 끝나는지 정해야 합니다. 이 페이지에서는 합의 항을 먼저 펼쳐 읽는 방식으로 뜻을 확인합니다. 항이 n 이라면 시작점을 1에서 0으로 바꾸어도 0만 더하므로 합은 같습니다. 그러나 항이 $n+1$ 이면 새로 더한 항은 1이어서 합이 달라집니다. 압축은 규칙을 이해한 독자에게 편리한 표현입니다.

등차수열 2와 5와 8과 11의 합은 26입니다. 첫 항 2와 간격 3과 항수 4를 알면 전체를 재현할 수 있습니다. 마지막 항 11만 보고 항수를 추정하면 시작점이나 간격이 달라질 수 있어 답이 정해지지 않습니다. 기호를 짧게 만들수록 빠진 정의를 본문이나 범례에 정확히 남겨야 합니다.

항 번호

1

2

3

4

5

값

3

7

11

15

19

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

첫 항이 3이고 간격이 4이며 항수가 5인 수열을 펼쳐 합을 구해 보세요.

풀이와 확인

3과 7과 11과 15와 19이며 합은 55입니다. 양 끝의 합 22가 두 쌍이고 가운데 11이 남으므로 $44+11=55$ 로 계산할 수 있습니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

번역 검토표를 만들어 봅니다

말과 기호와 조건이 같은 문제를 가리켜야 합니다.

어떤 수에서 4를 뺀 값의 두 배가 18이라는 문장을 번역한다고 합시다. 올바른 식은 $2(x-4)=18$ 입니다. $2x-4=18$ 로 쓰면 두 배 하는 범위가 달라집니다. 첫 식의 해는 13이고 둘째 식의 해는 11입니다. 원래 문장에 각각 넣어 보면 차이가 분명해집니다.

검토표에는 문장의 묶음과 문자 정의와 허용 범위와 검산을 적습니다. 여러 언어 사이의 번역에서도 표의 역할은 같습니다. 번역문이 자연스럽게 읽히는지와 수학적 관계가 유지되는지는 둘 다 필요합니다. 좋은 문장은 정확한 조건을 보존하면서도 독자가 불필요하게 되읽지 않도록 주어와 계산 대상을 분명하게 연결합니다.

문장의 순서	식	해
먼저 4를 뺀 뒤 두 배	$2(x-4)=18$	13
먼저 두 배 한 뒤 4를 뺀	$2x-4=18$	11

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

어떤 수의 두 배에서 4를 빼면 18이라는 문장은 어떤 식이며 답은 무엇인가요?

풀이와 확인

$2x-4=18$ 이므로 $x=11$ 입니다. 11의 두 배 22에서 4를 빼면 18입니다. 원래 수에서 먼저 4를 빼는 앞 문장과 연산 순서가 다릅니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

편지와 학술 교류의 기록

편지 모음은 무엇을 보여 줄까요

정리 목록은 원자료에 다가가는 안내입니다.

미국 의회도서관의 오즈월드 베블런 문서군 안내에는 서신과 일기와 저술 초고 및 강의 노트 등이 포함되어 있습니다. 일반 서신 묶음의 연대는 1902년부터 1960년까지로 제시됩니다. 이러한 자료는 완성된 논문만으로는 보이지 않는 질문과 협력 및 학술 활동의 조건을 살펴볼 출발점입니다. 다만 목록에 이름이 있다는 사실만으로 편지의 구체적인 내용을 읽었다고 말할 수는 없습니다.

이 장의 수치 예제는 그 문서군의 실제 통계를 계산한 결과가 아닙니다. 편지 자료를 정리하는 방법을 익히기 위해 별도의 가상 기록을 사용합니다. 발신자와 수신자와 날짜 및 문서 식별번호를 나누어 적으면 사람 사이의 관계와 개별 편지를 구별할 수 있습니다. 자료 안내와 실제 편지와 분석 결과는 서로 다른 층위입니다.

대상	세는 것	예
관계	발신자와 수신자 쌍	1개
문서	각 편지	5통

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

한 사람이 다른 사람에게 보낸 편지가 다섯 통이면 사람 사이 연결은 몇 개이며 문서는 몇 개인가요?

풀이와 확인

방향을 가진 관계는 한 개이고 문서는 다섯 개입니다. 관계 수와 편지 수를 혼동하지 않아야 교류의 범위와 빈도를 따로 분석할 수 있습니다.

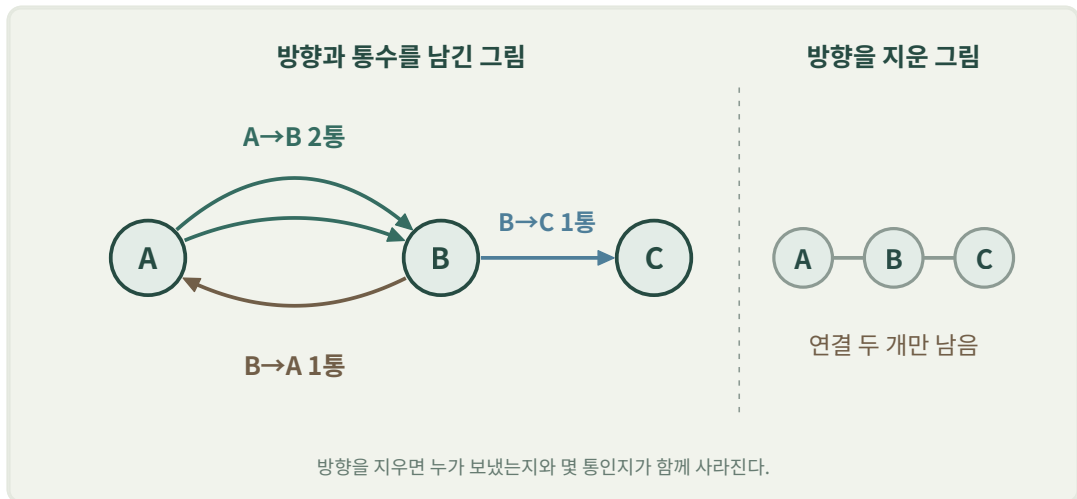
[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

보낸 방향을 남겨야 합니다

편지의 선에는 시작과 도착이 있습니다.

가상의 편지 네 통이 A에서 B로 두 통과 B에서 A로 한 통 및 B에서 C로 한 통이라고 합시다. 방향을 지우면 A와 B가 연결되어 있고 B와 C가 연결되어 있다는 정보만 남습니다. 누가 먼저 질문했고 누가 답했는지 살피려면 방향과 날짜가 필요합니다. 같은 두 사람 사이에서도 발신과 수신의 역할이 바뀔 수 있습니다.

받은 편지만 보존된 문서군에서는 한쪽 방향이 더 많이 남을 수 있습니다. 남은 편지 수를 곧바로 실제 소통의 균형으로 읽으면 보존 방식의 영향을 놓칩니다. 분석 표에 문서군의 수집 범위와 빠진 자료의 가능성을 적어야 합니다. 선의 개수가 많은 그림보다 어떤 선이 어떤 자료에서 왔는지 추적할 수 있는 그림이 더 유용합니다.



탐구

이 가상 기록에서 B가 받은 편지와 보낸 편지는 각각 몇 통인가요?

풀이와 확인

받은 편지는 A가 보낸 두 통입니다. 보낸 편지는 A에게 한 통과 C에게 한 통으로 두 통입니다. 관계의 수와 문서 빈도는 표의 별도 칸에 기록합니다.

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

답장을 날짜로 연결하기

시간 순서는 가능한 해석을 제한합니다.

A가 4월 10일에 보낸 질문과 B가 4월 8일에 보낸 편지가 있다고 합시다. 날짜가 정확하고 같은 달력을 사용했다면 두 번째 편지가 첫 질문을 받고 쓴 답장일 수는 없습니다. 내용이 비슷하더라도 시간의 순서가 맞지 않습니다. 독립적으로 같은 문제를 논의했거나 날짜가 잘못 읽혔거나 다른 앞선 질문이 있었을 가능성을 검토해야 합니다.

날짜에는 발신일과 도착일과 기록자가 정리한 추정일이 섞일 수 있습니다. 달력이 다른 자료라면 환산도 필요합니다. 날짜 두 개를 비교하기 전에 각각 무엇의 날짜인지 확인합니다. 연대 검사는 관계를 완전히 증명하지는 않지만 불가능한 연결을 걸러 내는 강력한 조건이 됩니다. 확실한 정보와 수정이 필요한 정보를 구별해서 남깁니다.

질문 발신
4월 10일

질문 도착
4월 15일

4월 12일
답장 후보

현대 재구성: 같은 달력과 정확한 날짜라는 가정 아래 순서를 검사한다.

탐구

질문 발신일이 4월 10일이고 도착일이 4월 15일이라면 4월 12일의 답장이라는 해석에는 어떤 문제가 있나요?

풀이와 확인

그 편지가 질문을 받은 뒤 쓴 답장이라는 해석과 도착일이 충돌합니다. 날짜 오류나 다른 전달 경로 또는 앞선 편지를 확인해야 하며 관계를 바로 확정하지 않습니다.

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

왕복 시간과 답변 시간을 구별합니다

두 날짜 사이에는 여러 과정이 들어 있습니다.

질문을 5월 1일에 보내 5월 6일에 상대가 받고 5월 9일에 답장을 보내 5월 14일에 되받았다고 합시다. 발신부터 최종 수신까지는 13일입니다. 그 가운데 상대가 받은 뒤 답장을 쓰기까지의 간격은 3일입니다. 전체 왕복 시간을 연구자가 생각한 시간과 같다고 보아서는 안 됩니다.

우편 이동과 휴일과 자료 조회 및 실제 집필 시간이 함께 섞일 수 있습니다. 두 시점만 남아 있다면 어느 부분이 얼마나 걸렸는지 정확히 분해할 수 없습니다. 가상 예제에서는 네 날짜가 모두 주어져 구간별 계산이 가능하지만 실제 자료에서는 빈칸을 인정해야 합니다. 빠른 답장과 느린 답장의 이유를 숫자 하나로 단정하지 않습니다.



현대 재구성: 왕복 기간을 세 구간으로 나눈 가상 기록

탐구

이 예제에서 편지가 이동한 두 구간의 시간 합은 얼마인가요?

풀이와 확인

5월 1일부터 6일까지 5일이며 9일부터 14일까지도 5일이어서 합은 10일입니다. 여기에 상대의 답장 준비 간격 3일을 더하면 전체 13일입니다.

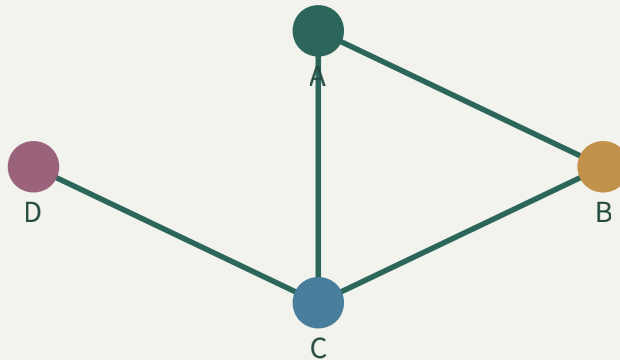
[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

공동 작업의 연결망

한 논문에 함께 참여한 관계와 편지는 다릅니다.

가상의 논문 한 편에 A와 B와 C가 함께 참여하고 다른 논문에는 C와 D가 참여했다고 합시다. 공동 저자 관계를 두 사람의 쌍으로 표시하면 AB와 AC와 BC와 CD의 네 연결이 생깁니다. 첫 논문 한 편이 세 쌍을 만든다는 점에 주의해야 합니다. 논문 수와 사람 수와 연결 수는 각각 다른 양입니다.

공동 저자라는 사실은 연구 기여가 동일하다는 뜻도 아니며 그들 사이의 모든 소통이 편지로 이루어졌다는 뜻도 아닙니다. 어떤 관계를 그리는지 분명히 정의해야 연결망이 자료를 넘어서 추측을 덧붙이지 않습니다. 편지 관계와 공동 저자 관계를 같은 그림에 넣는다면 선의 종류를 구별하고 각 연결의 근거를 남깁니다.



현대 재구성: 두 편의 가상 논문에서 얻은 공동 저자 관계

탐구

저자가 네 명인 논문 한 편은 모든 두 사람의 쌍으로 몇 연결을 만드나요?

풀이와 확인

$4 \times 3 \div 2 = 6$ 개입니다. 각 쌍을 순서 없이 한 번만 세기 위해 2로 나눕니다. 여섯 연결이 여섯 편의 논문을 뜻하는 것은 아닙니다.

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

확실성에 숫자를 붙일 때

가중치는 자료가 아니라 분석자의 가정일 수 있습니다.

확인된 편지를 가중치 1로 두고 간접 언급만 있는 관계를 0.5로 두는 모형을 생각해 봅시다. A에게 확인된 관계 둘과 간접 관계 하나가 있으면 가중치 합은 2.5입니다. 이 숫자는 분석자가 정한 분류 규칙의 결과입니다. A가 실제로 2.5명과 교류했다거나 해당 관계가 50퍼센트의 확률로 존재했다는 뜻은 아닙니다.

간접 관계의 가중치를 0.2로 바꾸면 합은 2.2가 됩니다. 결과 순위가 이 선택에 크게 달라진다면 결론이 가정에 민감하다는 사실을 밝혀야 합니다. 확실성을 세밀하게 표현하고 싶다는 이유만으로 근거 없는 소수점 숫자를 붙이지 않습니다. 확인됨과 가능성 있음과 미확인이라는 범주 자체가 더 적절할 수도 있습니다.

사람	간접 0.5	간접 0.2
A	2.5	2.2
B	3.0	1.8

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

B가 확인된 관계 하나와 간접 관계 네 개를 가진다면 간접 가중치 0.5와 0.2에서 합은 각각 얼마인가요?

풀이와 확인

0.5에서는 $1+4 \times 0.5=3$ 입니다. 0.2에서는 1.8입니다. A의 2.5와 2.2를 비교하면 순위가 뒤바뀌므로 가중치 선택에 민감합니다.

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

서신의 빈칸은 부재의 증거가 아닙니다

남지 않은 편지는 여러 이유로 설명될 수 있습니다.

어떤 문서군에서 특정 두 사람의 편지가 발견되지 않았다고 해서 두 사람이 한 번도 소통하지 않았다고 결론 내릴 수는 없습니다. 대화나 다른 매체를 사용했을 수 있고 편지가 분실되었을 수도 있으며 아직 조사하지 않은 자료에 남아 있을 수도 있습니다. 확인하지 못했다는 진술과 없었다는 진술은 범위가 다릅니다.

가상의 전체 편지 100통 가운데 60통이 남았다고 해도 남은 60통이 모든 시기와 주제를 고르게 대표한다고 보장할 수 없습니다. 특정 상자의 자료만 보존되었다면 같은 주제에 치우칠 수 있습니다. 남은 비율을 안다는 사실과 대표성을 안다는 사실은 다릅니다. 통계적 추정을 하려면 어떤 선택 과정이 자료를 남겼는지 검토해야 합니다.



현대 재구성: 관찰한 부분의 비율과 전체의 비율을 구별한다.

탐구

남은 편지 60통 중 수학 주제가 30통이면 전체 100통 중 수학 편지가 반드시 50통인가요?

풀이와 확인

아닙니다. 남은 자료가 전체를 대표한다는 근거가 없기 때문입니다. $30/60=50$ 퍼센트는 관찰한 자료의 비율이며 전체 비율을 확정하는 값은 아닙니다.

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

작은 서신 목록을 검토합니다

숫자로 세기 전에 기록 단위를 맞춥니다.

가상의 목록에 A에서 B로 보낸 편지 원본과 같은 편지의 사본이 각각 한 항목씩 들어 있다고 합시다. 문서 객체는 두 개지만 역사적 발신 사건은 하나입니다. 편지 수를 계산할 때 어느 단위를 셀지 먼저 정해야 합니다. 초고와 발송본과 수신본을 모두 독립된 소통으로 세면 교류 빈도가 부풀려질 수 있습니다.

정리표에 사건 식별번호와 자료 식별번호를 나누어 넣으면 하나의 사건을 여러 자료가 뒷받침하는 관계를 표현할 수 있습니다. 날짜와 문구가 같다는 이유만으로 바로 중복이라고 결정하지 않고 실제 사본 관계를 확인합니다. 자료의 다양성을 보존하면서도 통계에서 중복을 피하려면 무엇을 세는지 끝까지 일관되게 유지해야 합니다.

사건	원본	사본
E1	D1	D2
E2	D3	D4
E3	D5	D6

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

발신 사건 세 개에 각각 원본과 사본이 남아 있다면 자료 객체 수와 발신 사건 수는 얼마인가요?

풀이와 확인

자료 객체는 6개이고 발신 사건은 3개입니다. 연구 질문이 보존된 물건의 수인지 실제 소통 횟수인지에 따라 사용할 숫자가 달라집니다.

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

지식의 길 / 13

디지털 기록과 새로운 길

파일 이름만으로는 부족합니다

자료를 찾고 이해할 정보가 함께 필요합니다.

디지털 이미지에 page1이라는 이름만 붙이면 어느 책의 어느 판본인지 알기 어렵습니다. 자료 식별번호와 제목과 제작 정보 및 원자료의 쪽 표시와 촬영 정보를 나누어 기록하면 같은 번호의 파일이 여러 개여도 구별할 수 있습니다. 이러한 설명 정보를 메타데이터라고 부릅니다. 파일 자체의 내용과 파일을 설명하는 기록이 함께 있어야 이후의 독자가 맥락을 복원할 수 있습니다.

미국 의회도서관은 디지털 자료의 형식을 지속적으로 이용할 수 있는지 평가하기 위한 정보를 제공합니다. 저장했다는 사실만으로 장기적인 읽기가 보장되지는 않는다는 점을 생각하게 합니다. 이 활동에서는 특정 보존 시스템을 구축하지 않고 작은 자료 목록의 필수 칸을 설계합니다. 빈칸을 추측으로 채우기보다 미확인으로 남겨 확인할 과제를 분명히 합니다.

항목	예시
자료 ID	BOOK-A
판본 ID	ED-02
원자료 쪽	12
이미지 순서	15

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

같은 책의 다른 판본 두 개가 모두 12쪽 이미지를 가진다면 무엇으로 구별할 수 있나요?

풀이와 확인

책의 자료 식별번호와 판본 식별번호 및 원자료 쪽 표시를 함께 사용합니다. 단순한 파일 순서 12와 인쇄된 쪽번호 12가 같은지 여부도 별도로 기록해야 합니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

원본 이미지와 전사는 다른 자료입니다

읽기 쉬운 글자로 옮기는 과정에도 판단이 들어갑니다.

스캔 이미지 속 흐릿한 숫자가 1인지 7인지 분명하지 않다고 합시다. 전사문에 7을 적었다면 그 순간 해석이 들어간 것입니다. 원본 이미지를 보존하고 전사문에는 불확실한 위치를 표시하면 다른 사람이 다시 판단할 수 있습니다. 전사문을 원본처럼 취급하면 처음 읽은 사람의 선택이 자료 자체의 사실로 굳어질 수 있습니다.

자동 문자 인식도 같은 검토가 필요합니다. 수학 문서에서는 0과 O 또는 1과 l의 혼동뿐 아니라 위첨자와 분수선의 위치가 의미를 바꿉니다. x^2 를 $x2$ 로 읽으면 지수와 나란한 문자가 구별되지 않습니다. 오류를 고칠 때에는 이미지의 위치와 수정 전 읽기 및 수정 이유를 남겨 검토의 길을 열어 둡니다.

원본 이미지

자동 인식 결과

사람의 대조와 교정

수정 이유가 있는 전사

현대 재구성: 원본과 해석의 단계를 구별한다.

탐구

원본의 x^2 를 자동 인식이 $x2$ 로 읽었다면 어떤 자료를 함께 남겨야 하나요?

풀이와 확인

원본 이미지와 자동 인식 결과 및 교정된 x^2 를 구분해 보존합니다. 위첨자 위치를 근거로 수정했다는 설명을 붙이면 변화의 이유를 확인할 수 있습니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

버전은 덮어쓰기의 흔적을 남깁니다

무엇이 달라졌는지 알아야 다시 검토할 수 있습니다.

첫 전사에서 248이라고 읽은 수를 새 사진을 보고 243으로 고쳤다고 합시다. 최신 파일만 남기면 언제 무엇을 바꾸었는지 알기 어렵습니다. 버전 기록에는 이전 값과 새 값 및 수정 시점과 근거를 적습니다. 내용이 달라진 수정과 띄어쓰기만 바뀐 수정을 구분하면 검토할 범위를 정하기 쉽습니다.

버전 번호가 크다고 항상 더 옳은 내용이라는 뜻은 아닙니다. 새 수정에도 오류가 들어갈 수 있으므로 이전 자료와 비교하고 필요하면 되돌릴 수 있어야 합니다. 여러 사람이 같은 문서를 편집한다면 같은 위치를 서로 다르게 고칠 수도 있습니다. 최종값을 정하기 전에 두 수정의 근거를 비교하는 과정이 필요합니다. 기록은 판단을 대신하지 않고 판단의 근거를 남깁니다.

버전	읽기	근거
v1	248	첫 이미지
v2	243	더 선명한 사진
검토	재확인	원본 위치 대조

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

한 편집자는 243으로 고치고 다른 편집자는 248을 유지했다면 최신 시간만 보고 결정해도 될까요?

풀이와 확인

그렇게 결정하기보다 원본 이미지와 각자의 근거를 비교해야 합니다. 시간은 수정 순서를 알려 주지만 해석의 정확성을 보장하지는 않습니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

간단한 검사값을 만들어 봅니다

내용이 바뀌었는지 작은 수로 살필 수 있습니다.

숫자열 2와 4와 7과 1을 보낼 때 숫자의 합을 10으로 나눈 나머지 4를 검사값으로 붙이는 모형을 만듭니다. 받는 쪽이 2와 4와 8과 1을 받았다면 합은 15이므로 나머지 5가 됩니다. 원래 검사값 4와 달라져 변화가 있었음을 알 수 있습니다. 이 방식은 실제 파일 보존용 암호학적 해시가 아니라 원리를 익히는 작은 예제입니다.

모든 변화가 드러나는 것은 아닙니다. 2와 5와 6과 1의 합도 14이므로 검사값은 4입니다. 서로 다른 내용이 같은 검사값을 갖는 경우를 충돌이라고 부를 수 있습니다. 작은 검사값에는 담을 수 있는 정보가 제한되어 있으므로 같은 값이 나온다는 사실만으로 전체 내용의 동일성을 증명할 수 없습니다.

숫자열	합	검사값
2 4 7 1	14	4
2 4 8 1	15	5
2 5 6 1	14	4

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

원래 숫자열의 순서를 1과 7과 4와 2로 바꾸면 이 검사가 변화를 찾을 수 있나요?

풀이와 확인

합은 여전히 14이므로 검사값도 4입니다. 순서를 바꾸는 오류를 찾지 못합니다. 이 검사는 값의 합을 보존하고 위치 정보는 버린다는 점을 보여 줍니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

위치의 무게를 넣은 검사

새 정보가 들어가면 발견하는 오류도 달라집니다.

숫자열의 첫 자리에는 1을 곱하고 둘째에는 2를 곱하는 식으로 위치 가중치를 넣어 봅시다. 2와 4와 7과 1의 가중합은 $1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 7 + 4 \times 1 = 35$ 입니다. 이를 11로 나눈 나머지는 2입니다. 가운데 4와 7을 바꾼 2와 7과 4와 1의 가중합은 32로 나머지는 10입니다. 순서 변화가 이번에는 드러납니다.

그러나 더 정교해 보이는 이 검사도 충돌을 없애지는 못합니다. 11개의 나머지만 사용하므로 충분히 많은 서로 다른 숫자열 가운데 같은 값을 갖는 것이 반드시 있습니다. 수학적으로 검사값의 종류보다 입력의 종류가 많기 때문입니다. 교실용 검사와 실제 디지털 보존에서 사용하는 강한 무결성 확인 방법의 차이를 구별해야 합니다.

$$1 \times 2 + 2 \times 4 + 3 \times 7 + 4 \times 1 = 35$$

$$35 \text{의 } 11 \text{ 나머지} = 2$$

$$\text{자리 교환 후 가중합} = 32$$

$$32 \text{의 } 11 \text{ 나머지} = 10$$

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

두 숫자열의 가중합 35와 46은 이 검사에서 구별되나요?

풀이와 확인

차이가 11이므로 둘 다 나머지 2여서 구별되지 않습니다. 검사값이 같다는 사실과 데이터가 같다는 사실은 다릅니다. 오류의 종류에 맞는 검토가 필요합니다.

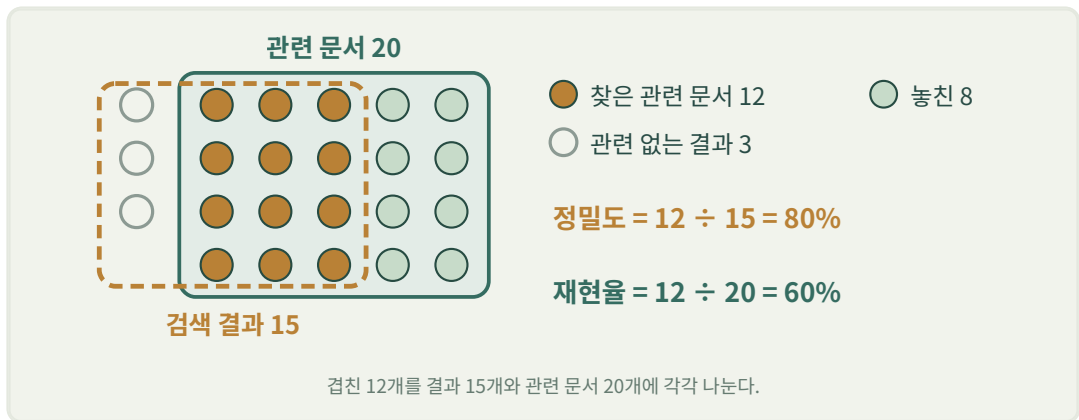
[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

잘 찾은 비율과 놓치지 않은 비율

검색의 성능은 한 숫자로 끝나지 않습니다.

전체 자료에 관련 문서가 20개 있다고 알고 있는 가상 실험에서 검색이 15개를 돌려주고 그 중 12개가 관련 문서라고 합니다. 검색 결과 가운데 관련된 비율인 정밀도는 $12/15=80\%$ 퍼센트입니다. 전체 관련 문서 가운데 찾아낸 비율인 재현율은 $12/20=60\%$ 퍼센트입니다. 두 값은 분모가 다르므로 다른 질문에 답합니다.

결과를 넓게 가져오면 놓치는 문서를 줄일 수 있지만 관련 없는 문서가 늘어날 수 있습니다. 엄격한 검색은 결과가 깔끔해도 중요한 변형 표기를 놓칠 수 있습니다. 실제 역사 자료에서는 전체 관련 문서 수 자체를 모를 때가 많으므로 재현율을 정확히 측정하기 어렵습니다. 모형의 수치와 실제 검색의 한계를 구별하여 결과를 해석합니다.



탐구

결과 25개 중 관련 문서가 18개이며 전체 관련 문서가 20개라면 두 비율은 얼마인가요?

풀이와 확인

정밀도는 $18/25=72\%$ 퍼센트이고 재현율은 $18/20=90\%$ 퍼센트입니다. 첫 검색보다 더 많이 찾았지만 결과 안의 관련 문서 비율은 낮아졌습니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

보존은 다시 열어 보는 일까지 포함합니다

사본이 있어도 읽을 수 없다면 활용이 막힙니다.

파일을 여러 곳에 복사해 두는 일은 손실 위험을 줄이는 데 도움이 되지만 오래된 형식을 해석할 프로그램이 없으면 내용을 읽기 어려울 수 있습니다. 의회도서관이 소개한 스나يدر 자료에는 오래된 계산기 프로그램을 재구성하여 수학적 작업을 이해한 사례가 있습니다. 보존해야 할 것은 화면에 보이는 결과뿐 아니라 계산 방법과 실행 맥락일 수도 있습니다.

교육용 자료 묶음을 만들 때에는 원문 데이터와 읽기 쉬운 설명 및 사용한 단위와 버전 정보를 함께 넣을 수 있습니다. PDF는 고정된 조판을 보여 주고 HTML은 검색과 상호작용을 제공하지만 두 파일이 같은 내용을 담는지 확인해야 합니다. 형식이 다르면 줄바꿈과 수식 표시가 달라질 수 있으므로 변환 뒤 실제로 열어 검토하는 과정이 필요합니다.

원문 데이터

HTML과 PDF 생성

수식과 그림과 쪽수 대조

설명과 버전 정보를 함께 보존

현대 재구성: 여러 형식의 내용 일치를 확인하는 과정

탐구

HTML에는 124쪽이 표시되는데 PDF가 122쪽이라면 무엇을 확인해야 하나요?

풀이와 확인

쪽의 정의와 누락 여부 및 인쇄용 조판을 확인해야 합니다. 화면의 페이지 숫자만으로 PDF의 실제 쪽수가 같다고 가정하지 않습니다. 표지와 목차와 본문의 대응을 차례로 대조합니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats / [SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

새로운 길에도 맥락이 필요합니다

쉽게 복사되는 자료일수록 출처와 설명을 이어 갑니다.

한 장의 문양 이미지를 원래 자료에서 떼어 내면 만든 사람과 장소와 용도 및 해석의 불확실성이 사라질 수 있습니다. 디지털 공개는 접근을 넓히지만 모든 자료를 맥락 없이 재사용해도 된다는 뜻은 아닙니다. 제공 기관의 이용 안내와 자료에 붙은 설명을 확인하고 출처 및 수정 여부를 함께 남기는 태도가 필요합니다.

이 책의 마지막 활동은 스스로 만든 작은 자료 묶음의 설명서를 쓰는 것입니다. 원본과 전사를 구분하고 현대 재구성 예제를 표시하며 계산의 가정을 적습니다. 검색에서 찾지 못한 부분과 아직 확인하지 않은 주장도 남깁니다. 지식의 길은 자료를 멀리 보내는 일뿐 아니라 다음 독자가 그 내용을 검토하고 질문할 수 있는 조건을 마련하는 일이기도 합니다.

남길 정보

역할

출처

원자료로 돌아가는 길

수정 내용 재구성의 범위

불확실성 다음 검토의 질문

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

역사적 문양을 바탕으로 새 색과 배치를 만든 그림에는 무엇을 밝혀야 하나요?

풀이와 확인

참고한 자료의 출처와 새로 바꾼 부분 및 현대 재구성이라는 성격을 밝힙니다. 원래 제작자의 의도나 실제 색을 복원한 것처럼 단정하지 않으며 이용 안내도 확인합니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

자료를 다시 엮는 편집자의 작업실

가장 싼 연결과 가장 빠른 경로

망 전체를 연결하는 문제와 두 점 사이를 이동하는 문제는 다른 답을 요구한다.

현대 재구성으로 네 거점 A와 B와 C와 D를 놓자. 설치 비용은 AB가 2이며 BC가 2이고 CD가 2다. AD는 5이며 AC와 BD는 각각 6이라고 정한다. 모든 거점을 연결하는 통로를 가장 싸게 만들려면 AB와 BC와 CD를 골라 총비용 6으로 연결할 수 있다.

그렇다고 A에서 D까지 이동하는 가장 짧은 경로가 항상 그 세 구간인 것은 아니다. 같은 숫자를 이동 거리로 해석하면 세 구간의 합은 6이고 직접 잇는 AD는 5다. 전체 연결망의 설치 비용을 줄이는 목표와 특정 두 점의 이동 거리를 줄이는 목표가 다르다.

실제 교류망에서는 길의 건설과 유지 및 여행자의 선택을 같은 문제로 합쳐서는 안 된다. 여기의 수치는 역사의 측정값이 아닌 모형이다. 지도에서 최적이라는 말을 쓰기 전에 무엇을 최소화하고 누가 그 결정을 내리는지 밝히면 계산의 뜻이 분명해진다.

구간	비용
AB / BC / CD	각 2
AD	5
AC / BD	각 6

탐구

모든 거점 연결에 직접 AD까지 추가하면 총 설치 비용은 얼마인가?

풀이와 확인

기존 6에 AD의 5를 더하여 11이다. A와 D의 이동은 줄어들지만 전체 설치 비용은 증가한다.

연대의 범위로 계보를 걸러 내기

불확실한 날짜도 불가능한 전승 가설을 배제하는 데 쓰일 수 있다.

가상의 사본 A가 1180년부터 1210년 사이에 만들어졌고 B는 1195년이며 C는 1170년부터 1185년 사이라고 하자. B가 C를 보고 베꼈을 가능성은 연대만으로 배제할 수 없다. C의 가장 늦은 시점도 B보다 이르기 때문이다. 그러나 시기가 맞는다는 사실이 실제 이용을 증명하지는 않는다.

A가 B를 따랐는지는 판단이 더 어렵다. A의 가능한 범위가 B의 연대를 가로지르므로 A가 더 이를 수도 있고 늦을 수도 있다. 가운데 값 하나로 바꾸어 순서를 확정하면 원래의 불확실성을 없애 버린다. 계보 그림에는 확인된 순서와 가능한 순서를 구별하여 표시한다.

자료에 적힌 날짜가 본문 작성일인지 현존 사본의 필사일인지도 확인해야 한다. 번역의 성립 시점과 뒤에 제작된 한 사본의 시점은 서로 다르다. 계산으로 연대를 비교하기 전에 날짜가 가리키는 사건을 통일해야 한다.

자료	가정한 제작 시기
A	1180-1210년
B	1195년
C	1170-1185년

탐구

B가 C보다 먼저 만들어졌다는 주장은 위 범위와 양립하는가?

풀이와 확인

같은 종류의 제작일을 비교한다면 양립하지 않는다. C의 상한 1185년이 B의 1195년보다 이른다.

두 계통을 참고한 사본

같은 오류 두 개가 함께 남았을 때에는 합류한 전승도 검토한다.

현대 재구성의 사본 A에는 문제 한 줄이 빠져 있고 B에는 표의 숫자 하나가 바뀌어 있다. C가 A의 본문과 B의 표를 함께 사용했다면 두 특징을 모두 보일 수 있다. 이때 사본을 한 부 모에서 한 자식으로만 잇는 단순한 나무는 편집 과정을 충분히 표현하지 못한다.

그러나 두 특징이 함께 있다는 이유만으로 C가 A와 B를 직접 보았다고 단정할 수는 없다. 두 특징을 이미 가진 다른 사본을 이용했을 수도 있다. 같은 위치의 오류가 독립적으로 생겼을 가능성도 검토한다. 여러 특징과 연대 및 실제 문장의 대응을 함께 읽어야 계보 가설을 좁힐 수 있다.

의회도서관의 바티칸 수학 문헌 전시는 번역과 주석 및 다양한 언어의 사본을 함께 소개한다. 이런 자료를 읽을 때 결과가 같은 계산과 문장까지 대응하는 전승을 나누어 질문하면 자료의 차이를 더 잘 볼 수 있다. 이 표의 A와 B와 C는 실제 사본 식별번호가 아니다.

사본	줄 결락	숫자 변화
A	있음	없음
B	없음	있음
C	있음	있음

탐구

C가 A의 결락을 고쳤다면 A를 이용하지 않았다고 확정할 수 있는가?

풀이와 확인

그릴 수 없다. 다른 자료와 대조하여 빠진 줄을 보충했을 수 있다. 오류의 부재만으로 이용 관계의 부재를 증명하지 않는다.

[SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

같은 문헌을 세는 두 가지 단위

자료 객체와 내용의 판본을 구별하면 소장 통계를 부풀리지 않을 수 있다.

한 계산서의 원본 한 장과 그것을 찍은 사진 세 장 및 전사 파일 두 개가 있다고 하자. 보존된 파일과 물건을 모두 세면 여섯 객체다. 그러나 계산서의 내용이 서로 같은 계통이라면 여섯 개의 독립된 역사적 증언이라고 부를 수는 없다. 복제와 독립 증거는 다른 관계다.

현대 재구성의 목록에는 객체 식별번호와 원자료 식별번호를 별도 칸에 적는다. 사진 두 장이 같은 면을 다른 조명으로 찍었다면 판독에 새로운 도움을 줄 수 있지만 문헌이 두 개로 늘어난 것은 아니다. 전사 파일의 다른 읽기는 새로운 원본이 아니라 해석의 차이로 기록한다.

검색 결과를 통계로 옮길 때 이러한 묶음을 먼저 확인한다. 같은 사진이 여러 기관 페이지에 나타나면 검색 건수는 늘어도 자료의 독립성이 늘어난 것은 아니다. 많이 찾았다는 말보다 무엇을 몇 개 찾았는지 분명히 쓰는 것이 정확한 조사 보고다.

종류	수	역할
원본	1	역사적 자료
사진	3	원본의 영상
전사	2	판독 결과

탐구

원본 두 장에 각각 사진 네 장이 있으면 객체 수와 원자료 수는 얼마인가?

풀이와 확인

원본 2개와 사진 8개를 합쳐 객체는 10개다. 원자료는 두 장이다. 어떤 단위를 세었는지 결과에 붙인다.

교정 제안을 원문으로 되돌려 보기

숫자가 계산에 맞다는 사실과 실제 글자가 그렇게 쓰였다는 사실을 구별한다.

흐릿한 계산서에 24×13 과 결과 312 또는 372처럼 보이는 숫자가 있다고 하자. 현대 재구성의 곱셈은 $24 \times 10 + 24 \times 3 = 240 + 72 = 312$ 다. 따라서 312라는 읽기가 계산과 잘 맞는다. 하지만 실제 필자가 372를 잘못 적었을 가능성까지 사라진 것은 아니다.

전사에는 보이는 글자를 적고 교정 제안은 별도로 남기는 방법이 있다. 판독이 불확실하면 두 가능성을 표시한 뒤 계산을 근거로 한 해석을 덧붙인다. 수학적으로 자연스러운 답으로 원문을 조용히 바꾸면 과거의 계산 실수나 필사 실수를 연구할 단서가 사라진다.

새 사진에서 분명히 372가 보인다면 계산을 고칠 것이 아니라 원문에 오류가 있다는 설명을 남겨야 한다. 역사 자료를 잘 읽는 일은 모든 숫자를 정답으로 만드는 일이 아니다. 기록된 값과 계산상 기대값이 어긋나는 자리도 자료의 일부로 보존한다.

구분	값	근거
원문 판독	312 또는 372	흐릿한 글자
계산 기대값	312	24×13
교정 판단	별도 기록	이미지와 계산 대조

탐구

원문이 분명히 372일 때 교정판에는 어떤 두 값을 함께 남기는가?

풀이와 확인

원문 기록 372와 계산상 수정 제안 312를 함께 남긴다. $24 \times 13 = 312$ 라는 근거도 붙인다.

독자가 재현할 수 있는 지식의 길

좋은 자료 묶음은 도착점뿐 아니라 따라갈 수 있는 경로를 남긴다.

이 책의 작은 모형들은 실제 여행과 번역의 모든 조건을 담지 않는다. 대신 어떤 질문에 답하기 위해 어떤 정보를 선택했는지 보여 준다. 마지막에는 스스로 만든 연결망이나 계산표 하나를 골라 다른 사람이 같은 답에 도달할 수 있는 설명을 작성해 보자.

출발 자료와 입력값 및 단위를 먼저 적는다. 다음으로 계산 규칙과 중간값을 남기고 원래 조건으로 돌아가 검산한다. 예를 들어 7상자와 상자당 12묶음 및 묶음당 5개라는 약속은 420개를 준다. 이를 5와 12로 차례로 나누어 7상자로 되돌리면 변환 방향을 확인할 수 있다.

마지막에는 실제 자료와 현대 재구성의 경계를 적는다. 확인하지 않은 연대와 지도에서 생략한 거리 및 판독이 불확실한 숫자는 그대로 표시한다. 책을 읽고 얻은 답이 다음 독자의 질문으로 이어지려면 결론을 믿으라는 요청보다 검토할 수 있는 근거를 남기는 편이 유익하다.

단계	값
상자	7
묶음	$7 \times 12 = 84$
날개	$84 \times 5 = 420$
역검산	$420 \div 5 \div 12 = 7$

탐구

중간값을 84묶음으로 남기는 것이 최종값 420개만 쓰는 것보다 어떤 점에서 유용한가?

풀이와 확인

상자에서 묶음으로 바꾸는 단계와 묶음에서 날개로 바꾸는 단계를 각각 확인할 수 있다. 틀렸을 때 어느 비율을 잘못 썼는지 찾기도 쉽다.

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[SR01] UNESCO. Silk Roads: the Routes Network of Chang'an-Tianshan Corridor

<https://whc.unesco.org/en/list/1442>

[SR03] British Library IDP. Buddhist texts: The Diamond Sutra

<https://idp.bl.uk/discover/learning/buddhism-on-the-silk-roads/articles/buddhism-on-the-ground/buddhist-texts-the-diamond-sutra/>

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Adelard_Euclid/

[SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

<https://www.loc.gov/exhibits/vatican/math.html>

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

<https://library.ethz.ch/en/sammlungen-und-archive/platforms/virtual-exhibitions/fibonacci-un-ponte-sul-mediterraneo/biography-of-leonardo-of-pisa.html>

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료

<https://www.sites.hps.cam.ac.uk/starry/tables.html>

[SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

<https://www.whipplemuseum.cam.ac.uk/explore-whipple-collections/calculating-devices/tables>

[SRB06] 중세 천문표 학습에 관한 연구

<https://www.repository.cam.ac.uk/items/4650c3d4-9da0-4bc7-923b-1a263d35b3e3>

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

<https://loc.gov/loc/lcib/0305/cartography.html>

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

<https://www.loc.gov/exhibits/bibles/interactives/gutenberg/text.html>

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/mathsym/relation/>

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

<https://tile.loc.gov/storage-services/service/gdc/gdcfindingaidpdfs/ms011049/ms011049.pdf>

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

<https://www.loc.gov/preservation/digital/formats/intro/intro.shtml>