

MATHESIS

세계 수학과 / 내용 중심 개정판

# 인도관

기록에서 출발해 직접 계산하는 수학의 역사

역사 / 도해 / 탐구

REVISED EDITION / 2026

# 차례

본문의 흐름에 따라 편집한 실제 PDF 쪽번호다.

|                  |     |
|------------------|-----|
| 그림으로 다시 읽는 보충 탐구 | 4   |
| 길을 옮기고 수를 이어 가다  | 5   |
| 줄과 넓이의 기하학       | 6   |
| 자리값과 아리아바타       | 18  |
| 빈자리에서 수 0으로      | 26  |
| 재산과 빛의 산술        | 34  |
| 방정식이 묻는 조건       | 42  |
| 쿠타카와 정수의 길       | 52  |
| 순환으로 찾는 큰 해      | 61  |
| 운율에서 조합으로        | 70  |
| 수열로 읽는 변화        | 79  |
| 케랄라의 무한급수        | 89  |
| 사인표와 하늘의 계산      | 99  |
| 라마누잔과 남겨진 노트     | 109 |
| 참고 자료와 자료 읽기     | 118 |

## READING THE WORLD

# 이 책을 여는 질문

이 책은 같은 분량으로 잘라 놓은 전시실이 아니라 서로 다른 질문을 지닌 여덟 권의 책에서 출발한다. 계산을 남긴 재료와 해결해야 했던 문제를 함께 읽으면 비슷한 수식 뒤에 있는 차이가 드러난다. 한 지역을 오늘의 국가 경계에 가두거나 다른 지역을 한 줄의 발전 순서에 놓지 않는다.

읽는 순서는 자유롭다. 수를 기록하는 방법이 궁금하다면 산가지와 자리값 및 키푸를 오가면 된다. 도형의 이유를 묻고 싶다면 넓이의 보존과 완전제곱 및 증명을 이어 읽을 수 있다. 서로 닮은 계산을 발견했을 때에는 구조의 공통점과 역사적 전파의 증거를 따로 살핀다.

이번 개정에서는 원고 단위마다 페이지를 끝내던 방식을 없앴다. 문장과 그림이 차지하는 실제 길이에 따라 다음 페이지로 이어지며 짧은 해설만 남는 쪽을 줄이도록 장 사이의 흐름도 연결했다. 빈 공간을 만들기 위해 본문을 늘리거나 일정한 쪽수를 맞추기 위해 설명을 나누지 않았다.

탐구 문제의 수치와 문자식은 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 재구성이다. 먼저 조건을 읽고 직접 계산한 뒤 풀이를 비교한다. 역사적 사실을 판단할 때에는 본문의 출처와 유물 설명을 함께 확인한다.

인도관 / 보충

## 그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이 장은 개정판에 새로 붙인 보충 탐구다. 본문의 각 장이 계산의 결과나 조건을 말로 설명하고 지나간 자리에서 그림을 하나 더 그려 그 이유를 눈으로 확인하도록 구성했다. 단원마다 이어 읽을 본문의 장을 표시했으므로 해당 장을 읽은 뒤 펼치면 흐름이 자연스럽다.

여기에 실은 도해와 수치는 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 현대 재구성이다. 옛 자료가 실제로 이런 그림을 남겼다는 뜻은 아니며 자료가 말하는 범위는 각 단원 끝의 출처에서 따로 확인할 수 있다. 이번 개정에서는 본문에서 표로만 보여 주던 일부 도해도 실제 그림으로 다시 그렸다.

인도관 / 01

# 길이를 옮기고 수를 이어 가다



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

줄로 길이를 옮기는 일과 자릿값으로 수를 기록하는 일은 서로 다른 활동이지만 기준을 보존한다는 질문을 함께 던진다. 같은 줄을 사용했다고 넓이가 저절로 같아지는 것은 아니다. 같은 숫자를 썼다고 같은 값이 되는 것도 아니다. 무엇이 그대로 남아야 하는지 분명히 해야 도형의 변환과 수의 계산을 설명할 수 있다.

이 관의 탐구는 유한한 손의 조작에서 끝없이 이어지는 계산으로 넓어진다. 정수해를 찾는 반복은 이전 결과를 다음 단계의 재료로 삼는다. 무한급수는 어디에서 계산을 멈추더라도 남은 오차를 묻는다. 서로 다른 시대의 성과를 한 번의 도약으로 묶기보다 각 절차가 어떤 문제를 해결하고 어떤 조건에서 성립하는지 따라간다.

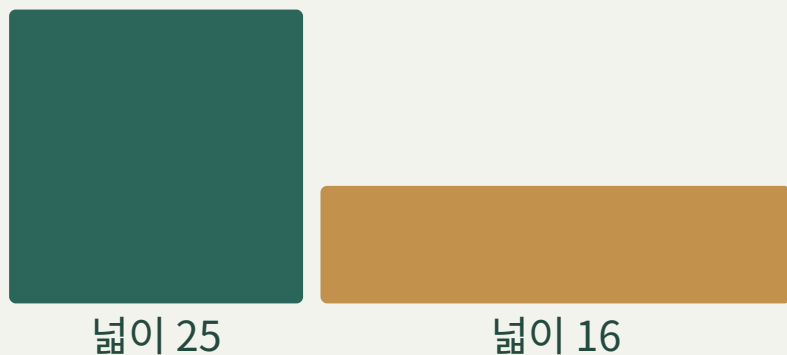
# 줄과 넓이의 기하학

## 도형을 만드는 지식

술바수트라의 기하학은 선을 바라보는 데서 그치지 않고 정해진 크기의 도형을 실제로 만드는 문제를 다룬다. 술바수트라는 제단을 만드는 절차와 관련된 문헌군이다. 여러 저자와 전승이 있으므로 하나의 책이나 한 사람의 발명으로 묶기 어렵다. 여기서는 그 배경을 바탕으로 길이와 넓이를 보존하는 현대의 탐구 문제를 구성한다. 뒤에 나오는 수치 예제는 옛 문헌을 그대로 번역한 문제가 아니다.

평평한 줄은 두 점 사이의 선분을 나타낼 수 있다. 같은 길이를 다른 자리에 옮기거나 한 점에서 일정한 거리에 있는 위치를 찾는 데도 쓰인다. 줄의 길이가 일정하다는 조건을 유지하면 도형을 다시 그려도 비교할 기준이 남는다.

그러나 실제 줄은 늘어나고 매듭은 굵기를 갖는다. 기하학적 설명에서는 이런 물리적 오차를 잠시 제외한다. 먼저 이상적인 조건에서 성립하는 관계를 밝힌 뒤 실제 제작에서 생기는 차이를 따로 살피는 것이 측정과 증명의 차이를 이해하는 출발점이다.



둘레가 모두 20인 정사각형과 직사각형. 넓이는 다르다

### 탐구

같은 길이의 줄로 만든 도형은 언제나 넓이가 같을까?

### 풀이와 확인

그렇지 않다. 둘레가 20인 정사각형의 넓이는 25이다. 가로 8과 세로 2인 직사각형은 둘레가 같지만 넓이는 16이다.

[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review

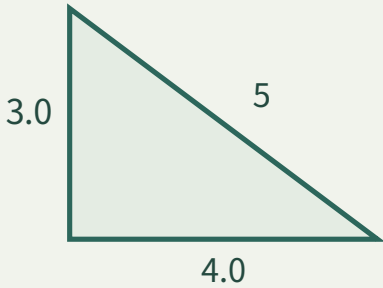
# 세 길이가 직각을 정한다

길이가 3과 4와 5인 세 변을 연결하면 직각삼각형을 만들 수 있다.

직각을 눈으로 가늠하는 것과 길이 관계로 확인하는 것은 다르다. 세 변의 길이가 정확히 3과 4와 5라면  $3^2+4^2=5^2$ 이 성립한다. 피타고라스 정리의 역을 적용하면 길이 5인 변의 맞은편 각이 직각임을 알 수 있다.

한 변에 대응하는 단위를 모두 두 배로 바꾸어도 관계는 유지된다.  $6^2+8^2=10^2$ 에서는 양변이 원래 식의 네 배가 된다. 변의 비가 같은 삼각형은 모양이 같으며 길이만 일정한 비율로 커진다. 매듭 사이의 간격이 일정해야 하는 까닭도 여기에 있다.

역의 방향을 혼동해서는 안 된다. 직각삼각형이면 제곱의 합 관계가 성립한다는 명제와 그 관계가 성립하면 직각삼각형이라는 명제는 논리적으로 다른 주장이다. 이 예에서는 두 방향 모두 참이지만 모든 명제가 그런 것은 아니다.



직각을 확인하는 세 변 3과 4와 5

| 변      | 길이 | 제곱 |
|--------|----|----|
| 첫째 변   | 3  | 9  |
| 둘째 변   | 4  | 16 |
| 가장 긴 변 | 5  | 25 |

## 탐구

길이가 9와 12와 15인 삼각형도 직각삼각형인가?

## 풀이와 확인

$81+144=225$ 이므로 직각삼각형이다. 세 변은 3과 4와 5를 각각 세 배 한 값이다.

이러 읽기 / 줄과 넓이의 기하학

## 두 정사각형을 하나로 합치는 그림

넓이가  $a^2$ 과  $b^2$ 인 두 정사각형을 넓이를 잃지 않고 하나의 정사각형으로 바꾸는 방법을 조각 옮기기로 확인한다.

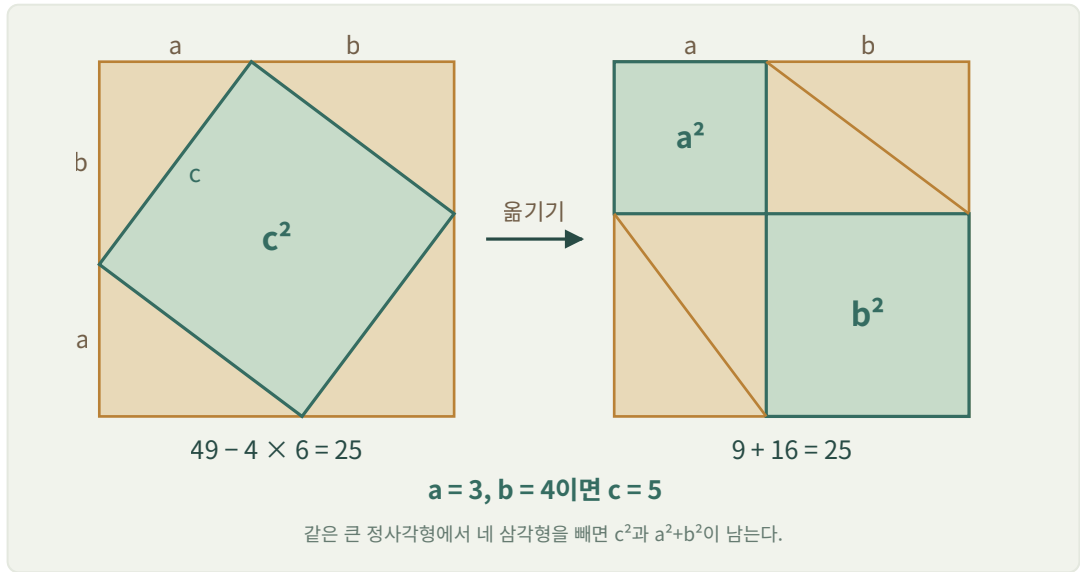
1장에서는 한 변이 1인 정사각형의 대각선으로 넓이가 2인 정사각형을 만들었다. 이것은 크기가 같은 두 정사각형을 하나로 합친 특수한 경우이다. 크기가 다른 두 정사각형을 합치려면 어떤 길이를 새 변으로 삼아야 할까? 술바수트라를 다룬 연구는 이런 넓이 보존 작도를 제단 제작 지식의 중요한 부분으로 소개한다.

한 변이  $a+b$ 인 큰 정사각형을 두 번 그려 보자. 왼쪽 그림에서는 네 모서리에 두 변이  $a$ 와  $b$ 인 직각삼각형을 하나씩 두고 가운데에 기울어진 정사각형을 남긴다. 오른쪽 그림에서는 같은 네 삼각형을 두 직사각형으로 모아 한쪽 구석에  $a^2$ 을, 다른 구석에  $b^2$ 을 남긴다. 두 큰 정사각형의 넓이가 같고 빼낸 네 삼각형도 같으므로 남은 부분의 넓이도 같다.

따라서 가운데 정사각형의 넓이  $c^2$ 은  $a^2+b^2$ 과 같다. 식으로는  $(a+b)^2 - 4 \times (ab/2) = a^2+b^2$ 이다.  $a=3$ 과  $b=4$ 를 넣으면  $49-24=25$ 이고  $9+16=25$ 이므로 새 정사각형의 한 변은 5이다. 결국 두 정사각형을 합친 정사각형의 변은 두 변을 직각으로 놓은 삼각형의 빗변이다.

이 그림은 두 변을 직각으로 놓으면 빗변의 제곱이 두 정사각형의 합이 된다는 것을 넓이의 언어로 보여 준다. 1장의 3과 4와 5로 직각을 확인하는 방법은 이 관계의 역을 쓰는 것이다. 다만 여기 그린 조각 배치는 현대 재구성이며 특정 문헌의 그림을 옮긴 것이 아니다. 실제 줄

로 작도할 때는 두 변을 직각으로 놓는 단계가 먼저 정확해야 하므로 앞에서 다룬 3과 4와 5의 매듭 확인이 다시 필요하다.



#### 탐구

한 변이 5와 12인 두 정사각형을 하나로 합치면 새 정사각형의 한 변은 얼마인가?

#### 풀이와 확인

큰 정사각형의 넓이는  $17^2 = 289$ 이고 네 삼각형의 넓이는  $4 \times 30 = 120$ 이다. 남은 넓이는 169이므로 한 변은 13이다.  $25 + 144 = 169$ 로도 같은 값을 확인할 수 있다.

[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review

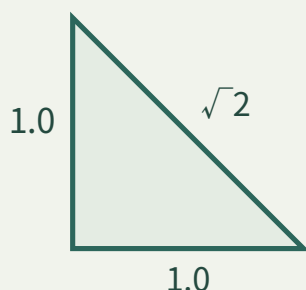
## 대각선으로 넓이를 두 배로

한 변이 1인 정사각형의 대각선은 넓이가 2인 새 정사각형의 한 변이 된다.

한 변이 1인 정사각형을 대각선으로 자르면 넓이가  $1/2$ 인 직각이등변삼각형 두 개가 생긴다. 같은 삼각형 네 개를 모아 대각선이 바깥 변이 되도록 배치하면 넓이가 2인 정사각형을 얻는다. 도형의 넓이를 세는 방법으로 새로운 길이를 설명한 셈이다.

이 대각선의 길이를  $d$ 라고 쓰면  $d^2=2$ 이다. 따라서  $d=\sqrt{2}$ 이며 길이 2와는 다르다. 넓이를 두 배로 만드는 일과 한 변을 두 배로 만드는 일을 구별해야 한다. 한 변이 두 배가 되면 넓이는 네 배가 된다.

종이를 잘라 옮기는 활동은 넓이가 보존된다는 생각을 눈에 보이게 한다. 조각이 겹치거나 틈이 생기면 논증이 완성되지 않는다. 각 조각이 어디로 이동했는지 표시하고 바깥 경계가 실제로 정사각형인지 확인해야 한다.



정사각형의 절반과 대각선

### 탐구

넓이가 18인 정사각형의 한 변은 넓이가 9인 정사각형의 몇 배인가?

### 풀이와 확인

한 변은 각각  $3\sqrt{2}$ 와 3이다. 따라서 길이의 비는  $\sqrt{2}$ 이다. 넓이의 비 2를 길이의 비로 그대로 쓰면 안 된다.

## $\sqrt{2}$ 에 가까이 다가가기

분수로 표현한 근삿값의 품질은 소수 모양보다 제공했을 때의 차이로 살필 수 있다.

술바 전통에서 알려진  $\sqrt{2}$ 의 근사 규칙 가운데 하나를 현대 기호로 쓰면  $1+1/3+1/12-1/408$ 이다. 통분하면  $577/408$ 이 된다. 이 값이 왜 유용한지는 정사각형의 넓이를 계산하면 드러난다.  $577^2$ 은 332929이며  $2 \times 408^2$ 은 332928이다.

따라서  $(577/408)^2 - 2 = 1/166464$ 이다. 제공한 값이 2보다 아주 조금 크므로 이 분수는  $\sqrt{2}$ 보다 크다. 근삿값이 어느 쪽으로 치우쳤는지를 소수 계산 없이도 판단할 수 있다. 이 관계의 계산은 이 책에서 직접 확인한 것이다.

정확한 값과 가까운 값은 역할이 다르다. 실제 제단이나 종이를 만들 때는 허용 오차 안의 근삿값이면 충분할 수 있다. 그러나 대각선의 일반적 성질을 증명할 때는  $\sqrt{2}$ 라는 정확한 표현이 필요하다. 목적을 먼저 정해야 필요한 정밀도도 정해진다.

$$\begin{aligned} 577^2 &= 332929 \\ 2 \times 408^2 &= 332928 \\ (577/408)^2 - 2 &= 1/166464 \end{aligned}$$

제공의 차 1로 확인하는  $\sqrt{2}$  근삿값의 정확도

### 탐구

$577/408$ 을 한 번으로 하는 정사각형의 넓이는 2보다 큰가?

### 풀이와 확인

그렇다. 넓이 차가 정확히  $1/166464$ 이므로 부호가 양수이다. 길이의 오차와 넓이의 오차는 서로 다르다.

[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review

# 제공의 오차에서 길이의 오차로

제단의 한 변을 얼마나 정확히 얻는지는 넓이 차이만으로 끝나지 않는다.

앞서 얻은  $577/408$ 을  $a$ 라고 하자.  $a^2-2=1/166464$ 라는 정확한 관계를 알고 있다. 우리가 실제 길이를 정할 때 필요한 값은  $a-\sqrt{2}$ 이다. 제공의 차를 인수분해하면  $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=1/166464$ 이므로 길이 오차는 이 작은 분수를  $a+\sqrt{2}$ 로 나눈 값이다.

$a$ 와  $\sqrt{2}$ 는 모두 1.4보다 크므로  $a+\sqrt{2}>2.8$ 이다. 따라서 길이 오차는  $1/466099.2$ 보다 작으며 약 0.000002146보다 작다. 마지막 소수는 위쪽으로 잡은 안전한 경계이다. 정확한  $\sqrt{2}$ 의 긴 소수 전개를 먼저 알아야만 오차를 설명할 수 있는 것은 아니다.

한 변 1미터인 정사각형의 대각선을 이 비율로 제작한다면 근사 공식 때문에 생기는 길이 차는 약 0.002146밀리미터보다 작다. 이 계산에서는 처음 1미터가 정확하다고 가정했다. 줄의 신축이나 표시선의 두께는 이론적 근사 오차와 별도로 더해지는 제작 문제이다.

그러므로 좋은 보고서는 근사 공식의 오차와 실제 측정의 오차를 나누어 적는다. 역사적 근사 규칙이 매우 정밀하다는 사실과 모든 실제 제작물이 그 정밀도를 달성했다는 주장은 다르다. 이 구분을 통해 옛 계산의 정교함을 인정하면서도 남아 있지 않은 제작 성과를 꾸며 내지 않을 수 있다.

| 구분       | 직접 비교하는 양     |
|----------|---------------|
| 제공 오차    | $a^2-2$       |
| 길이 오차    | $a-\sqrt{2}$  |
| 실제 제작 오차 | 측정과 재료의 영향 포함 |

## 탐구

처음 변의 길이가 정확히 2미터이면 이 근사에 따른 대각선 오차의 상한은 어떻게 되는가?

## 풀이와 확인

길이 비율의 오차가 같으므로 상한도 두 배가 된다. 약 0.004292밀리미터보다 작다. 넓이 오차의 배율과 혼동하지 않는다.

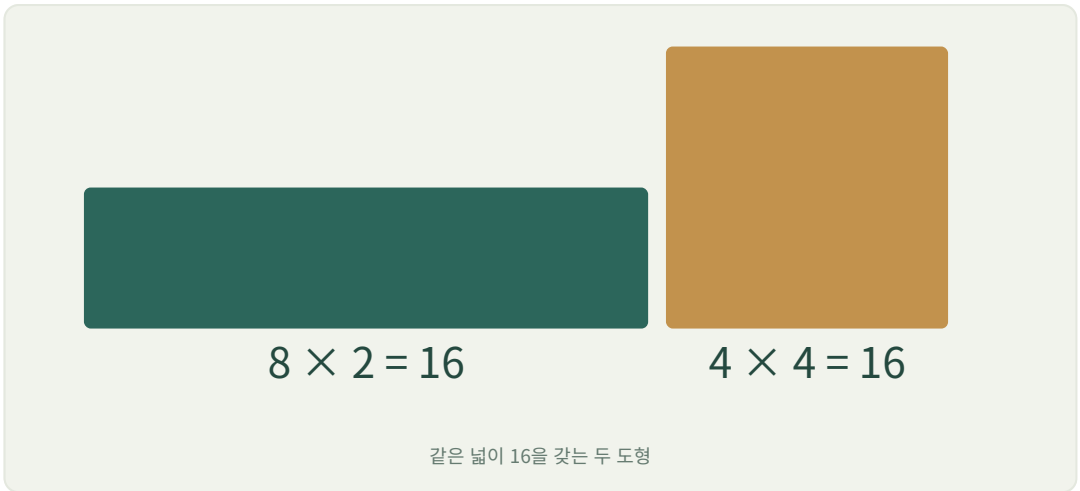
# 같은 넓이와 다른 모양

변형 과정에서 보존할 양을 먼저 정하면 도형을 바꾸는 문제가 명확해진다.

가로 8과 세로 2인 직사각형을 가운데서 잘라 가로 4와 세로 2인 조각 두 개로 나누자. 두 조각을 위아래로 놓으면 한 번이 4인 정사각형이 된다. 두 도형의 넓이는 모두 16이며 조각을 움직이는 동안 종이의 총량은 변하지 않았다.

둘레는 보존되지 않는다. 처음 직사각형의 둘레는 20이지만 새 정사각형의 둘레는 16이다. 서로 맞닿은 변은 바깥 경계에서 사라지므로 조각의 모든 변 길이를 더한 값과 완성된 도형의 둘레도 구별해야 한다.

이 예는 넓이 보존을 설명하는 현대의 재구성이다. 역사적 작도 절차를 평가할 때도 무엇을 같게 만들려 했는지부터 확인한다. 길이와 넓이와 모양을 모두 보존한다고 막연히 생각하면 옳은 변형도 틀린 것으로 판단할 수 있다.



| 도형        | 넓이 | 둘레 |
|-----------|----|----|
| 8×2 직사각형  | 16 | 20 |
| 4×4 정사각형  | 16 | 16 |
| 16×1 직사각형 | 16 | 34 |

## 탐구

넓이가 16인 모든 직사각형의 둘레는 16인가?

## 풀이와 확인

아니다. 가로 16과 세로 1인 직사각형의 둘레는 34이다. 같은 넓이라는 조건만으로 둘레를 결정할 수 없다.

## 작도 문장을 읽는 순서

짧은 지시문을 읽을 때는 도구와 대상과 보존 조건을 나누어 표시한다.

어떤 선분을 옮겨 놓으라는 문장은 길이를 옮기라는 뜻인지 방향까지 유지하라는 뜻인지 확인해야 한다. 두 조건은 다르다. 같은 길이의 줄로 원을 그릴 수 있지만 그 원 위의 여러 선분은 방향이 서로 다르다. 번역된 문장만으로 판단하기 어려우면 앞뒤 절차가 단서가 된다.

작도 그림은 설명의 일부이며 원문을 대신하지 않는다. 후대의 편집자가 덧붙인 그림이라면 당시 저자가 같은 그림을 보았다고 단정할 수 없다. 이 책의 도해 역시 관계를 이해하기 위해 새로 만든 것으로 실제 필사본의 복제도가 아니다.

읽기 기록에는 주어진 길이와 수행한 조작과 확인할 성질을 각각 적는다. 마지막에 길이 계산이나 넓이 계산을 붙이면 절차가 목표를 달성했는지 검사할 수 있다. 이 방식은 고전 문헌뿐 아니라 현대의 도형 문제를 읽을 때도 유용하다.

| 확인할 항목  | 기록 예        |
|---------|-------------|
| 주어진 길이  | 줄의 길이 4     |
| 수행한 조작  | 같은 길이 옮기기   |
| 보존할 성질  | 옮긴 선분의 길이 4 |
| 완성 뒤 검사 |             |

작도 지시를 조건과 조작과 검사로 나누는 읽기 기록 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

### 탐구

그림에 직각 표시가 없으면 직각 여부를 무엇으로 확인할 수 있을까?

### 풀이와 확인

문장의 조건이나 증명된 길이 관계를 사용한다. 보기 좋게 그려진 모양만으로 직각이라고 정하지 않는다.

[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review

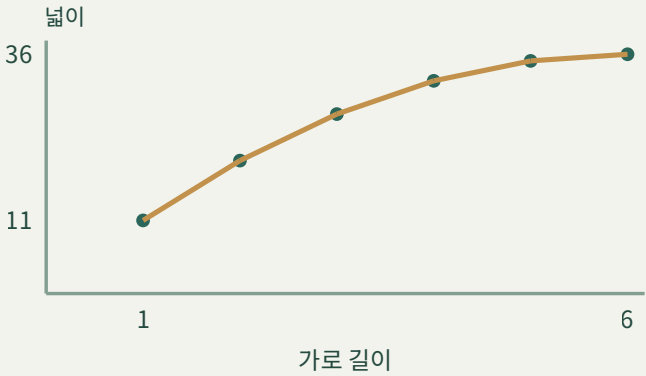
## 줄 격자로 만드는 실험

같은 둘레를 가진 직사각형을 여러 개 만들어 넓이의 변화를 관찰한다.

길이가 24인 줄을 준비했다고 가정하자. 직사각형의 가로를  $a$ 라고 정하면 세로는  $12-a$ 가 된다. 자연수 길이만 사용하면 가로를 1부터 6까지 바꾸어 중복되지 않는 모양을 조사할 수 있다. 가로 7인 경우는 가로 5인 경우를 회전한 모양과 같다.

각 도형을 격자에 그리고 넓이를 칸 수로 센다. 넓이의 목록은 11과 20과 27과 32와 35와 36이다. 증가량은 9에서 시작해 7과 5와 3과 1로 작아진다. 변 하나를 늘릴 때 다른 변을 줄여야 한다는 조건이 변화의 모양을 만든다.

실제 줄로 측정할 때는 매듭 위치와 장력을 일정하게 한다. 계산값과 측정값의 차이는 반올림 때문인지 줄의 변형 때문인지 기록한다. 실험 결과는 정사각형에서 최대가 된다는 추측을 돕지만 모든 실수 길이에 대한 증명은 이어지는 설명의 식이 맞는다.



둘레가 24인 직사각형의 넓이

| 가로 | 세로 | 넓이 |
|----|----|----|
| 2  | 10 | 20 |
| 4  | 8  | 32 |
| 5  | 7  | 35 |
| 6  | 6  | 36 |

탐구

가로가 5.5이면 세로와 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

세로는 6.5이다. 넓이는 35.75이므로 한 변이 6인 정사각형의 넓이 36보다 작다.

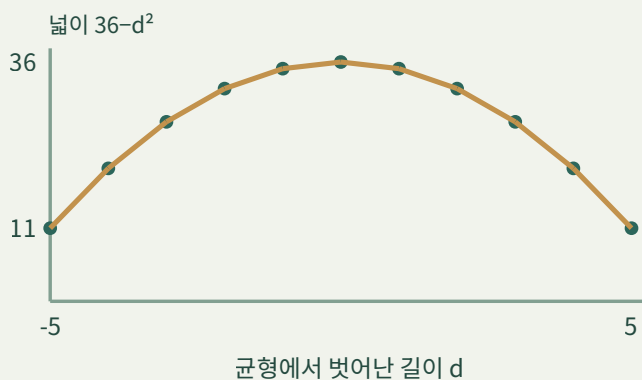
## 최대 넓이를 설명하는 식

관찰한 규칙을 모든 가능한 길이에 적용하려면 차이를 하나의 식으로 나타낸다.

둘레가 24인 직사각형의 두 변을  $6+d$ 와  $6-d$ 로 나타내자. 길이는 양수여야 하므로  $-6 < d < 6$ 이다. 넓이를 전개하면  $(6+d)(6-d)=36-d^2$ 이 된다.  $d^2$ 은 언제나 0 이상이므로 넓이는 36보다 클 수 없다.

등호가 성립하는 경우도 확인해야 한다.  $36-d^2=36$ 이라면  $d=0$ 이어야 한다. 이때 두 변은 모두 6이므로 정사각형이다. 최대값뿐 아니라 그 최대값을 만드는 도형이 무엇인지까지 설명했다. 넓이 손실  $d^2$ 은 두 변이 균형에서 얼마나 벗어났는지도 보여 준다.

이 식은 현대 기호를 사용한 풀이이며 옛 저자의 문장을 그대로 옮긴 것이 아니다. 고전의 문제를 오늘의 언어로 탐구할 때는 이런 구분을 밝혀야 한다. 역사적 맥락을 존중하면서도 새로운 증명을 덧붙일 수 있는 방법이다.



두 변이  $6+d$ 와  $6-d$ 일 때 넓이는  $d=0$ 에서 최대이다

### 탐구

가로와 세로의 차이가 4라면 정사각형보다 넓이가 얼마나 작을까?

### 풀이와 확인

두 변은 8과 4이며  $d=2$ 이다. 넓이는 32이므로 최대 넓이 36보다 4만큼 작다.

# 자리값과 아리아바타

## 짧은 시구와 긴 계산

아리아바타의 저술은 계산 규칙과 천문학적 문제를 가까이 놓았다.

아리아바타의 아리아바티야는 499년에 작성된 저술로 알려져 있다. 짧은 운문에 계산과 시간과 천체의 움직임을 압축했다. 출생지와 일부 전기 사항에는 불확실성이 있으므로 숫자 하나로 완성된 인물 연표처럼 다루지 않는 편이 정확하다.

규칙이 짧게 적혀 있다는 사실은 계산 과정도 짧았다는 뜻이 아니다. 예를 들어 제곱근을 구하라는 한 문장에는 자리값을 나누고 중간값을 기록하고 오차를 확인하는 여러 단계가 들어 있다. 독자는 주석과 예제를 통해 압축된 지식을 다시 펼쳤을 것이다.

이 장에서는 고대의 모든 계산법을 복원하려 하지 않는다. 자리값과 반복 계산의 원리를 현대의 작은 수로 실험한다. 본문에 쓴 아라비아 숫자와 등호는 읽기 편의를 위한 표기이며 당시의 문자 수표기와 동일한 모습이라고 생각해서는 안 된다.

### 압축된 표현 펼쳐 읽을 내용

|        |              |
|--------|--------------|
| 계산 규칙  | 어떤 입력에 적용하는가 |
| 중간 과정  | 자리값과 연산 순서   |
| 예제의 결과 | 오차와 검산       |
| 주석     |              |

짧은 규칙을 실행 가능한 설명으로 읽는 네 가지 질문 / 움직임을 표의 행을 차례로 강조합니다.

### 탐구

운문으로 된 계산 규칙을 읽을 때 예제가 필요한 까닭은 무엇인가?

### 풀이와 확인

문장에 생략된 중간 연산과 적용 조건을 확인할 수 있기 때문이다. 한 예제의 성공만으로 일반적인 정당성이 증명되는 것은 아니다.

[S2] University of St Andrews: Aryabhata I

# 같은 숫자의 다른 크기

자리값 표기에서는 숫자의 모양과 그 숫자가 놓인 자리가 함께 값을 결정한다.

507은  $5 \times 100 + 0 \times 10 + 7$ 로 풀어 쓸 수 있다. 5라는 숫자는 백의 자리에 있으므로 500을 뜻한다. 같은 5를 일의 자리에 쓰면 값은 5이다. 숫자 기호만 읽고 자리를 무시하면 전체 수의 크기를 판단할 수 없다.

50과 500에서 0은 빈 자리를 표시한다. 이 기능 덕분에 어떤 자리에서 수량이 없다는 사실을 다른 자리와 혼동하지 않는다. 빈 자리를 표시하는 기호가 있다는 것과 0에 대한 모든 연산 규칙을 갖추었다는 것은 서로 다른 문제이다.

자리값을 이해하는 좋은 방법은 분해한 식을 다시 합치는 것이다.  $4 \times 1000 + 2 \times 10 + 9$ 를 쓰면 4029이다. 백의 자리가 비었다는 이유로 429라고 쓰면 수 자체가 달라진다. 계산 알고리즘의 정확성도 이런 자리 정렬에서 시작한다.

| 백   | 십 | 일 |
|-----|---|---|
| 5   | 0 | 7 |
| 500 | 0 |   |

507에서 각 자리의 값 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

| 자리 | 숫자 | 나타내는 값 |
|----|----|--------|
| 백  | 5  | 500    |
| 십  | 0  | 0      |
| 일  | 7  | 7      |

## 탐구

7030에서 두 개의 0은 각각 어떤 자리를 지키는가?

## 풀이와 확인

백의 자리와 일의 자리를 지킨다. 이 수는  $7 \times 1000 + 3 \times 10$ 이며 값이 703이나 730인 수와 다르다.

## 받아올림의 의미

받아올림은 숫자를 옮기는 요령이 아니라 같은 양을 다른 단위로 다시 묶는 과정이다.

287+156을 계산할 때 일의 자리에서는  $7+6=13$ 이 된다. 13개의 낱개를 1개의 열 묶음과 3개의 낱개로 바꾼다. 십의 자리에는 이 새 묶음까지 더해  $8+5+1=14$ 가 된다. 다시 1개의 백 묶음과 4개의 열 묶음으로 바꾸면 답은 443이다.

모든 단계에서 수량은 보존된다. 10개의 낱개와 1개의 열 묶음이 같은 양이라는 사실이 받아올림의 근거이다. 작은 1을 위에 적는 표기는 이 교환을 기억하기 위한 장치일 뿐이다. 그 1이 어떤 단위를 나타내는지 설명할 수 있어야 한다.

다른 진법에서도 묶음의 크기만 달라질 뿐 같은 생각을 쓴다. 다섯 개를 한 묶음으로 삼는다면 낱개 다섯 개가 다음 자리의 하나가 된다. 이 비교는 십진법이 익숙한 규칙인 동시에 선택된 표기 체계라는 점을 드러낸다.

| 단계       | 일        | 십          | 백         |
|----------|----------|------------|-----------|
| 각 자리 합   | $7+6=13$ | $8+5+1=14$ | $2+1+1=4$ |
| 아래 자리 결과 | 3        | 4          | 4         |
| 다음 자리 전달 | 십 1개     | 백 1개       |           |

287+156에서 낱개를 열 묶음과 백 묶음으로 바꾸는 과정 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

### 탐구

99+1에서 두 번의 받아올림이 일어나는 까닭을 설명해 보자.

### 풀이와 확인

낱개 열 개가 십의 자리 하나로 바뀐다. 기존 아홉 묶음과 합쳐 열 묶음이 되므로 다시 백의 자리 하나로 바뀐다.

## 곱셈을 분해해서 읽기

큰 곱을 작은 곱의 합으로 바꾸면 자리 정렬이 필요한 이유가 드러난다.

$34 \times 27$ 은  $34 \times (20+7)$ 이다. 분배법칙에 따라  $34 \times 20$ 과  $34 \times 7$ 을 계산한 뒤 더하면 된다. 두 값은 680과 238이므로 전체는 918이다. 세로셈의 둘째 줄을 한 자리 옮기는 까닭은 2가 단순한 2가 아니라 20을 나타내기 때문이다.

넓이 모형으로도 같은 관계를 볼 수 있다. 가로 34인 직사각형의 높이 27을 20과 7로 나누면 두 부분의 넓이를 더하게 된다. 가로도 30과 4로 나누면 600과 80과 210과 28의 네 부분이 생긴다. 합은 여전히 918이다.

계산 순서는 달라져도 같은 분해 원리를 지키면 답이 같다. 이 사실은 여러 곱셈법을 비교할 때 유용하다. 겉모양이 낯설다는 이유로 다른 원리라고 판단하지 말고 각 중간값이 어떤 부분곱에 대응하는지 찾아보자.

|    |     |     |
|----|-----|-----|
| ×  | 20  | 7   |
| 30 | 600 | 210 |
| 4  | 80  |     |

네 부분곱의 합은 918이다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

| 부분곱            | 값   |
|----------------|-----|
| $30 \times 20$ | 600 |
| $4 \times 20$  | 80  |
| $30 \times 7$  | 210 |
| $4 \times 7$   | 28  |

**탐구**

$34 \times 27$ 을  $34 \times 30 - 34 \times 3$ 으로 계산해도 되는가?

**풀이와 확인**

된다.  $27 = 30 - 3$ 이므로  $1020 - 102 = 918$ 이다. 뺄셈을 포함한 분배법칙을 사용한 것이다.

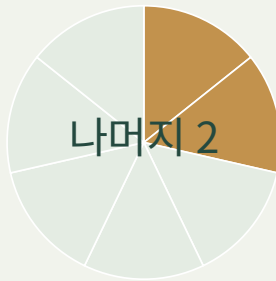
## 큰 주기를 작은 나머지로

천체의 반복 운동을 계산할 때는 지난 전체 횟수보다 현재 주기 안의 위치가 중요할 수 있다.

한 현상이 7일마다 반복된다고 가정하자. 시작 후 100일이 지났다면  $100=7 \times 14+2$ 로 나눌 수 있다. 완전한 주기 14번을 제외하면 현재 위치는 시작점에서 2일 지난 곳이다. 이런 나머지 계산은 긴 시간의 수를 작게 줄여 준다.

실제 천체의 운동을 모두 정확한 정수 주기로 설명할 수 있다는 뜻은 아니다. 여기서는 반복을 계산하는 구조만 보기 위해 단순한 주기를 설정했다. 관측값과 이론적 주기의 차이는 장기간에 걸쳐 누적될 수 있으므로 따로 보정해야 한다.

시작 시각도 반드시 기록해야 한다. 같은 100일이라도 기준이 다르면 주기 안의 위치가 달라진다. 달력과 천문표를 읽을 때 단위와 기준 시점과 적용한 주기를 함께 확인하는 습관이 필요한 이유이다.



7칸을 한 주기로 삼을 때 100일의 위치

### 탐구

주기가 9인 현상에서 시작 후 250일의 위치는 얼마인가?

### 풀이와 확인

$250=9 \times 27+7$ 이므로 나머지는 7이다. 시작점을 0으로 삼았을 때 일곱 칸 진행한 위치에 해당한다.

## 원주율 근사의 뜻

3.1416이라는 값은 원의 비율을 계산하는 데 유용하지만 원주율 자체와 같지는 않다.

아리아바타의 원주율 근사로 알려진 3.1416을 이용해 지름이 20인 원의 둘레를 계산해 보자. 곱셈 결과는 62.832이다. 여기서 정확한 둘레는  $20\pi$ 이며 62.832는 그 근삿값이다. 등호와 근사 기호를 구별하면 무엇을 알고 무엇을 어림했는지 분명해진다.

지름이 커지면 같은 원주율 오차가 더 큰 길이 오차를 만든다. 사용한 근삿값과  $\pi$ 의 차이를  $e$ 라고 하면 둘레의 차이는 지름  $d$ 에 대해  $de$ 이다. 원주율을 더 많은 자리까지 아는 일이 필요한지는 물체의 크기와 허용 오차에 달려 있다.

이 근삿값이 제시되었다는 사실만으로 원주율의 무리수성이 엄밀하게 증명되었다고 말할 수는 없다. 근사 계산과 수의 성질에 대한 증명은 다른 성취이다. 역사적 설명에서도 어떤 주장이 문헌으로 확인되는지 범위를 좁혀 적어야 한다.

$$\begin{aligned} &\text{둘레의 정확한 값 } d\pi \\ &\text{근삿값 } d \times 3.1416 \\ &\text{둘레 오차 } d(3.1416 - \pi) \end{aligned}$$

같은 원주율 근삿값을 쓸 때 둘레의 오차는 지름에 비례한다

### 탐구

지름을 10배로 키우면 같은 근삿값에서 생기는 둘레의 오차는 어떻게 되는가?

### 풀이와 확인

10배가 된다. 오차가  $d \times e$ 이므로 지름에 비례한다. 상대적인 오차의 비율은 그대로이다.

[S2] University of St Andrews: Aryabhata I

## 자리를 바꿔 보는 활동

세 자리 수와 거꾸로 쓴 수의 차이를 자리값으로 설명한다.

백의 자리 숫자를  $a$ 로 놓고 십의 자리 숫자를  $b$ 로 놓고 일의 자리 숫자를  $c$ 로 놓자. 원래 수는  $100a+10b+c$ 이다. 거꾸로 쓴 수를  $100c+10b+a$ 로 표현한 뒤 두 수를 빼면  $99a-99c$ 만 남는다.

따라서 차이는  $99(a-c)$ 이다. 가운데 숫자는 차이에 영향을 주지 않는다. 예를 들어  $742-247=495$ 이며 이는  $99 \times 5$ 와 같다. 숫자를 여러 번 바꾸어 보는 실험에서 얻은 규칙을 자리값 식으로 설명한 것이다.

맨 앞에 0이 오는 경우에는 표기에 주의한다. 520을 거꾸로 놓은 025는 정수로 25이다. 자리 배열로 보면 세 칸을 유지하지만 수를 읽을 때 앞의 0은 값을 더하지 않는다. 서로 다른 표현 관습을 명확하게 정하면 계산에 혼란이 없다.

| 자리  | 백   | 십  | 일 |
|-----|-----|----|---|
| 742 | 700 | 40 | 2 |
| 247 | 200 | 40 | 7 |
| 차이  | 500 | 0  |   |

십의 자리는 사라지고 전체 차이는  $500-5=495$ 이다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

### 탐구

863과 368의 차이를 긴 뿔셈 없이 구해 보자.

### 풀이와 확인

$99 \times (8-3)=495$ 이다. 십의 자리 6은 양쪽에서 없어지므로 결과에 영향을 주지 않는다.

# 자리값이 만드는 검산

9로 나눈 나머지를 이용하면 어떤 계산 오류를 빠르게 찾을 수 있다.

10은 9로 나누면 나머지가 1이다. 따라서 100과 1000도 나머지가 1이 된다. 세 자리 수  $100a+10b+c$ 는 9로 나눈 나머지가  $a+b+c$ 와 같다. 자리 숫자의 합을 이용하는 검산이 가능한 까닭이다.

앞에서 계산한  $34 \times 27 = 918$ 을 확인하자. 34의 숫자 합은 7이며 27의 숫자 합은 9이므로 곱의 나머지는 0이어야 한다. 918의 숫자 합은 18이므로 역시 나머지가 0이다. 이 검사는 결과와 모순되지 않는다.

하지만 나머지가 같다고 계산이 반드시 맞지는 않는다. 틀린 답 927도 숫자 합이 18이다. 검산은 일부 오류를 걸러 내는 장치이며 원래 계산을 증명하는 만능 도구가 아니다. 무엇을 찾아낼 수 있고 무엇을 놓치는지까지 이해해야 잘 활용할 수 있다.

| 수   | 숫자 합 | 9의 나머지 |
|-----|------|--------|
| 34  | 7    | 7      |
| 27  | 9    | 0      |
| 918 | 18   | 0      |
| 927 | 18   | 0      |

918과 잘못된 후보 927은 같은 나머지를 가져 이 검사로 구별되지 않는다

## 탐구

$34 \times 27$ 의 답을 919라고 썼다면 9의 나머지 검사에서 잡히는가?

## 풀이와 확인

잡힌다. 919의 숫자 합은 19이며 나머지가 1이다. 곱의 나머지 0과 일치하지 않는다.

# 빈자리에서 수 0으로

## 0의 여러 역할

수량이 없다는 말과 빈 자리를 표시하는 기호와 연산의 대상인 수는 구별해서 살펴야 한다.

사과가 하나도 없다는 상황을 말로 표현할 수 있다고 해서 자리값 표기법까지 갖춘 것은 아니다. 반대로 304에서 비어 있는 십의 자리를 표시한다고 해서 0으로 나누는 문제에 올바른 답을 알고 있는 것도 아니다. 비슷해 보이는 기능을 나누면 0의 역사가 한 번의 발명으로 끝나지 않는 이유를 이해할 수 있다.

현대 수학에서 0은 덧셈의 기준 역할을 한다. 어떤 수  $a$ 에 0을 더해도  $a$ 이며 같은 수를 빼면 0이 된다. 수직선에서는 양수와 음수를 나누는 기준점이기도 하다. 각각의 역할은 연결되지만 설명하는 질문이 다르다.

역사 자료를 읽을 때는 기호의 모양만 보고 오늘의 모든 개념을 적용하지 않는다. 해당 문헌에서 실제로 어떤 계산을 수행했는지 확인한다. 흔적이 남은 기호와 그 기호를 사용하는 규칙을 함께 읽어야 지식의 범위를 신중하게 파악할 수 있다.

없음을 표현하는 말

빈자리를 지키는 기호

연산의 대상인 수 0

0의 역사에서 구별할 세 가지 역할

### 탐구

빈 컵을 그린 그림만으로 덧셈의 항등원 개념을 사용했다고 말할 수 있을까?

### 풀이와 확인

말할 수 없다. 없음의 표현과  $a+0=a$ 라는 일반적인 연산 규칙은 서로 다른 증거를 요구한다.

## 필사본의 나이를 읽기

재료의 연대와 글을 쓴 시기와 지식이 생겨난 시기는 같은 날짜가 아닐 수 있다.

바크샬리 필사본은 수학사에서 중요한 자료이지만 연대에 관한 보도를 읽을 때 주의가 필요하다. 옥스퍼드 연구진은 2024년에 방사성탄소 연대측정에 관한 새 보고서를 공개했다. 따라서 2017년의 초기 보도만으로 0의 최초 연대를 확정하는 설명은 피해야 한다.

방사성탄소 측정은 유기물 재료에 대한 정보를 제공한다. 그것만으로 모든 글자가 같은 때 쓰였거나 모든 계산법이 그때 처음 만들어졌다는 결론이 나오지는 않는다. 글씨체와 언어와 문헌 내용도 함께 검토해야 한다.

이 사례의 교육적 가치는 가장 오래된 기록을 경쟁적으로 찾는 데만 있지 않다. 새로운 측정이나 해석이 나오면 이전 설명을 수정하는 과정 자체가 중요하다. 자료에 적힌 주장과 측정으로 직접 확인한 사실을 따로 기록하는 습관을 길러 보자.

### 검토 대상 직접 묻는 질문

**재료** 나무껍질은 언제 형성되었는가

**글씨와 언어** 글은 언제 작성되었는가

**계산 내용** 이 방법은 언제부터 알려졌는가

재료의 연대와 작성 시기와 지식의 역사는 서로 다른 질문이다

### 탐구

오래된 종이에 오늘 쓴 글의 내용은 종이의 연대와 같은 나이일까?

### 풀이와 확인

아니다. 재료의 연대는 글을 쓴 시기의 단서가 될 수 있지만 그 자체가 작성 연대를 보장하지 않는다.

[S4] Oxford University: Radiocarbon dating of the Bakhshālī manuscript. 2024

# 0을 더하는 규칙

변하지 않는 연산도 수의 체계를 정리하는 데 중요한 역할을 한다.

$a+0=a$ 라는 식은 아무 일도 하지 않는 것처럼 보인다. 그러나 덧셈의 출발점과 빈 합과 뺄셈의 결과를 통일해서 다루게 해 준다. 물건 다섯 개에 아무것도 보태지 않으면 다섯 개가 남는다는 경험을 모든 수에 대한 규칙으로 확장한 것이다.

0과 곱셈의 항등원 1을 혼동하지 말자.  $a \times 1=a$ 이지만  $a \times 0=0$ 이다. 같은 수를 유지하는 값이 연산에 따라 달라진다. 어떤 수를 특별하다고 말할 때는 어느 연산에서 어떤 성질을 갖는지 함께 밝혀야 한다.

덧셈표의 한 행을 0부터 시작해 만들어 보면 기준점의 역할이 보인다. -2와 -1과 0과 1과 2에 각각 0을 더해도 결과는 그대로이다. 음수까지 포함해도 규칙이 일관되게 유지된다는 사실이 중요하다.

| 연산           | 기준값   | 결과 |
|--------------|-------|----|
| $7+0$        | 덧셈의 0 | 7  |
| $7 \times 1$ | 곱셈의 1 | 7  |
| $7 \times 0$ | 곱셈의 0 | 0  |

## 탐구

모든 수  $a$ 에 대해  $a+x=a$ 가 되게 하는  $x$ 는 무엇인가?

## 풀이와 확인

$x=0$ 이다. 특히  $a=0$ 을 넣으면  $0+x=0$ 이므로  $x$ 가 0임을 바로 확인할 수 있다.

## 0을 곱하면 왜 0일까

분배법칙과 덧셈의 규칙을 유지하려면 0과의 곱도 결정된다.

어떤 수  $a$ 에 대해  $a \times 0$ 을  $b$ 라고 놓자.  $0+0=0$ 이므로  $a \times (0+0)=b$ 이다. 분배법칙을 적용하면 왼쪽은  $a \times 0 + a \times 0 = b+b$ 가 된다. 따라서  $b+b=b$ 이며 양변에서  $b$ 를 빼면  $b=0$ 이다.

이 설명은 물건이 없는 묶음을 세는 직관보다 적용 범위가 넓다.  $a$ 가 음수이거나 분수여도 같은 연산 법칙을 지키면 결과는 0이다. 익숙한 규칙들이 서로 연결되어 있다는 점을 보여주는 작은 증명이다.

다만 아무 체계에서나 모든 조작을 할 수 있는 것은 아니다. 여기서는 덧셈에 대한 역원이 있어서 양변에서  $b$ 를 뺄 수 있는 보통의 수 체계를 생각한다. 증명에 사용한 조건을 밝히는 습관은 더 복잡한 대수 구조를 배울 때도 이어진다.

$$\begin{aligned} b &= a \times 0 \\ b &= a(0 + 0) = b + b \\ b + b &= b \rightarrow b = 0 \end{aligned}$$

분배법칙과 뺄셈으로 확인하는 0의 곱셈 규칙

### 탐구

$a \times 0=1$ 이라고 정하면 분배법칙과 어떤 충돌이 생기는가?

### 풀이와 확인

$a \times (0+0)$ 은 1이어야 하지만 분배하면  $1+1=2$ 가 된다. 같은 값을 1과 2로 만들므로 보통의 수 체계에서 일관되지 않는다.

## 0으로 나누기의 경계

역사적 시도와 오늘의 올바른 연산 규칙을 나란히 보되 섞어서는 안 된다.

브라마굽타는 0과 양수와 음수에 관한 규칙을 제시했지만 0으로 나누는 모든 경우를 현대적으로 옳게 처리하지는 못했다. 특히  $0/0$ 을 0으로 둔 설명은 오늘의 실수 연산 규칙과 다르다. 성취를 인정하는 일과 오류를 정확히 표시하는 일은 함께 할 수 있다.

나눗셈  $a/b$ 는  $b \times x = a$ 를 만족하는 유일한 수  $x$ 를 찾는 것으로 이해할 수 있다.  $5/0$ 이라면  $0 \times x = 5$ 가 되어 해가 없다.  $0/0$ 이라면  $0 \times x = 0$ 이 되어 모든 실수  $x$ 가 맞는다. 하나는 해가 없고 다른 하나는 답을 하나로 정할 수 없다.

따라서 두 경우 모두 보통의 실수 나눗셈에서는 정의하지 않는다. 단순히 어렵기 때문에 금지한 것이 아니라 기존 곱셈과 맞물리는 유일한 값을 얻을 수 없기 때문이다. 이 차이를 식으로 설명하면 외운 금지 규칙보다 오래 기억할 수 있다.

| 나눗셈   | 곱셈으로 바꾼 조건 | 실수 해  |
|-------|------------|-------|
| $0/7$ | $7x=0$     | 0 하나  |
| $7/0$ | $0x=7$     | 없음    |
| $0/0$ | $0x=0$     | 모든 실수 |

나눗셈은 곱셈 조건의 유일한 해를 요구한다

탐구

$0/7$ 과  $7/0$ 은 같은가?

### 풀이와 확인

다르다.  $7 \times x = 0$ 의 유일한 해는 0이므로  $0/7=0$ 이다.  $0 \times x = 7$ 은 해가 없으므로  $7/0$ 은 정의되지 않는다.

[S3] University of St Andrews: Brahmagupta

## 계산 오류의 숨은 나눗셈

틀린 증명은 한 줄의 무심한 약분에서 시작되기도 한다.

$a=b=1$ 로 놓고  $a^2=ab$ 에서 양변에  $b^2$ 을 빼면  $a^2-b^2=ab-b^2$ 이다. 인수분해하면  $(a-b)(a+b)=b(a-b)$ 가 된다. 여기까지는 모두 맞다. 하지만 양변을  $a-b$ 로 나누어  $a+b=b$ 라고 쓰는 순간 문제가 생긴다.

$a$ 와  $b$ 가 같으므로  $a-b$ 는 0이다. 0인 인수를 약분한 줄은 허용되지 않는다. 앞의 식은 단지  $0=0$ 을 말할 뿐이며  $a+b$ 와  $b$ 가 같다는 정보를 주지 않는다. 어떤 수에 0을 곱해도 결과가 같아진다는 점을 떠올리면 오류가 분명해진다.

긴 계산에서 결과만 살피면 이런 문제가 숨어들기 쉽다. 나누기나 약분을 하는 줄마다 분모가 0이 아닌지 적어 보자. 조건을 표시하는 짧은 습관이 계산의 논리적 빈틈을 막아 준다.

$$a = b = 1 \rightarrow a - b = 0$$

$$(a-b)(a+b) = b(a-b)$$

양변의  $a-b$ 를 나누면 0으로 나누게 된다

같은 인수가 보여도 그 값이 0이면 약분할 수 없다

### 탐구

$0 \times 3 = 0 \times 8$ 에서 양쪽 0을 지워  $3=8$ 이라 할 수 없는 이유는 무엇인가?

### 풀이와 확인

0을 곱하는 연산은 서로 다른 수를 같은 0으로 보낸다. 결과가 같다는 사실로 원래 수의 같음을 되찾을 수 없다.

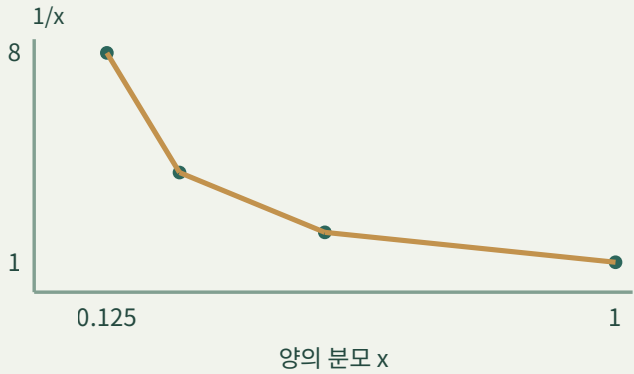
## 작은 분모와 0인 분모

0에 가까워지는 과정과 0을 직접 넣는 연산은 구별해야 한다.

1을 1과 0.1과 0.01로 나누면 값은 1과 10과 100으로 커진다. 양의 분모가 0에 가까워질 때 몫이 커지는 현상을 볼 수 있다. 그러나 이 목록의 어디에도 분모가 0인 항은 없다. 경향을 관찰했다고 마지막에  $1/0$ 이라는 실수 값이 생기지는 않는다.

음의 분모로 접근하면 결과는 -1과 -10과 -100으로 작아진다. 접근하는 방향에 따라 부호가 달라진다. 무조건  $1/0$ =무한대라고 적으면 이런 차이를 지워 버리고 보통의 실수 연산과 극한을 혼동하게 된다.

무한대를 다루는 별도의 수학적 체계는 있지만 그 체계의 정의와 연산 규칙을 먼저 정해야 한다. 이 책의 계산에서는 실수와 유한한 분수를 기준으로 삼는다. 역사적 표현을 읽을 때도 당시 문맥과 현대적 해석의 범위를 구분한다.



분모가 작아질 때의 값. 0 자체는 대입하지 않는다

| 분모    | 1을 나눈 값 |
|-------|---------|
| 1     | 1       |
| 0.1   | 10      |
| 0.01  | 100     |
| 0.001 | 1000    |

탐구

1/0.001은 얼마이며 이것이 1/0의 값을 결정하는가?

풀이와 확인

값은 1000이다. 유한한 분모에 대한 한 계산이며 1/0의 실수 값을 결정하지는 않는다.

## 세 문장을 구분하는 활동

기호의 역사와 계산 규칙과 현대적 설명을 다른 색으로 기록해 보자.

활동지에 세 문장을 적는다. 첫 문장은 어떤 필사본에서 빈 자리를 나타내는 표시가 발견되었다는 내용이다. 둘째 문장은  $a+0=a$ 라는 연산 규칙이다. 셋째 문장은  $0/0$ 이 실수 나눗셈에서 정의되지 않는다는 설명이다. 모두 0을 다루지만 필요한 증거와 논증은 다르다.

첫 문장에는 실물 자료와 판독과 연대 검토가 필요하다. 둘째 문장은 수 체계의 정의와 연산 성질을 확인한다. 셋째 문장은 곱셈의 역연산으로서 나눗셈을 분석한다. 한 종류의 근거만으로 세 문장을 모두 설명하려 하면 빈틈이 생긴다.

마지막에는 읽은 자료의 발표 연도와 수정 여부를 적는다. 오래된 자료가 무조건 틀린 것도 아니며 최신 자료가 모든 문제를 해결한 것도 아니다. 서로 어떤 질문에 답하는지 비교해야 자료를 공정하게 평가할 수 있다.

### 문장의 종류 필요한 근거

빈자리 표시의 발췌 판독과 연대 검토

$$a+0=a$$

수의 정의와 연산 성질

$0/0$ 이 정의되지 않음 역연산의 유일성 분석

0에 관한 세 문장은 서로 다른 증거와 논증을 요구한다

#### 탐구

0의 역사를 한 문장으로 정리할 때 피해야 할 표현은 무엇인가?

#### 풀이와 확인

한 사람이 어느 날 오늘의 0에 관한 모든 개념을 완성했다는 식의 단정이다. 표시와 연산과 전승의 여러 단계를 구분해야 한다.

# 재산과 빚의 산술

## 부호가 필요한 세계

양수와 음수는 수량의 크기에 방향이나 관계를 더해 준다.

브라마굽타의 산술 설명에는 재산과 빚을 이용해 양수와 음수의 관계를 나타내는 방식이 등장한다. 이 비유는 익숙한 상황을 통해 부호 규칙을 생각하게 한다. 다만 오늘의 회계 제도 전체를 옛 문헌에 투영하는 대신 계산 관계를 설명하는 비유로 읽는 편이 좋다.

재산 8과 빚 5를 합쳐 순자산을 계산하면  $+8+(-5)=3$ 이다. 물건의 개수만 세는 자연수와 달리 서로 반대되는 효과를 하나의 수로 정리한다. 빚을 진 상태도 계산의 대상이 되므로 0보다 작은 결과가 자연스럽게 나타난다.

음수는 부족함을 뜻할 때도 있지만 모든 상황에서 나쁜 값은 아니다. 기준보다 낮은 위치나 반대 방향의 이동을 나타낼 수도 있다. 먼저 기준점과 양의 방향을 정한 뒤 부호를 해석해야 같은 수를 서로 다르게 읽는 혼란을 피할 수 있다.



재산 8에서 빚 5의 효과를 빼면 순자산은 3이다

### 탐구

재산 4와 빚 9를 함께 기록하면 순자산은 얼마인가?

### 풀이와 확인

$4-9=-5$ 이다. 값  $-5$ 는 빚이 재산보다 5만큼 크다는 관계를 나타낸다.

[S3] University of St Andrews: Brahmagupta

## 수직선 위의 덧셈

부호 있는 수의 덧셈은 시작점과 이동량을 구분하면 읽기 쉬워진다.

수직선에서  $-3$ 에 서 있다고 생각하자. 여기에  $+5$ 를 더하면 오른쪽으로 다섯 칸 이동해  $2$ 에 도착한다. 시작점이 음수라는 사실과 이동량이 양수라는 사실은 서로 다른 정보이다. 두 부호를 한꺼번에 보고 방향을 정하지 않는다.

이번에는  $2$ 에서  $-5$ 를 더한다. 왼쪽으로 다섯 칸 가므로 결과는  $-3$ 이다. 두 이동은 서로를 되돌린다.  $+5$ 와  $-5$ 를 차례로 더하면 총이동이  $0$ 이 되는 관계가 덧셈의 역원을 보여 준다.

그림을 그릴 때 간격을 일정하게 해야 한다. 숫자의 순서만 맞고 칸의 크기가 제각각이면 이동량을 눈으로 비교하기 어렵다. 수직선은 장식이 아니라 같은 길이가 같은 수의 차이를 나타내도록 약속한 수학적 모형이다.



동일한 간격으로 배치한 부호 있는 수

### 탐구

$-7$ 에서  $+4$ 만큼 이동한 뒤  $-2$ 만큼 이동하면 어디에 도착하는가?

### 풀이와 확인

$-7+4-2=-5$ 이다. 총이동은 오른쪽으로  $2$ 이며 시작점  $-7$ 에서  $-5$ 로 간다.

## 빛을 빼는 계산

음수를 빼는 연산은 반대 효과를 제거하는 일로 이해할 수 있다.

순자산이 -4인 사람이 빛 3만큼을 탕감받았다고 가정하자. 빛이라는 음의 항 -3을 장부에서 없애는 것이므로  $-4 - (-3) = -1$ 이다. 빛을 줄였지만 아직 1만큼의 빛이 남아 있다. 무조건 양수가 되는 것이 아니라 값이 3만큼 커진 것이다.

기호만으로는  $a - b = a + (-b)$ 라는 규칙을 사용한다.  $b$ 가 -3이면 그 반대 수는 +3이므로 빨샘이 덧셈으로 바뀐다. 두 개의 빼기 기호를 기계적으로 지우는 대신 무엇을 빼고 있는지 괄호로 구분하면 오류가 줄어든다.

이 규칙은 수직선에서도 확인할 수 있다. -3만큼의 이동을 취소하면 +3만큼의 이동이 된다. 재산 비유와 이동 비유가 같은 결과를 주는지 비교하면 한 가지 상황에만 기대지 않고 개념을 이해할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{순자산 } -4 \\ &\text{장부에서 빛 } -3\text{을 제거} \\ &-4 - (-3) = -4 + 3 = -1 \end{aligned}$$

빛을 빼는 계산은 음의 효과를 없애는 것이다

### 탐구

5-(-8)과 -5-8을 각각 계산해 보자.

### 풀이와 확인

첫째는  $5+8=13$ 이다. 둘째는 -5에 -8을 더하는 것이므로 -13이다. 괄호와 시작 부호를 구분해야 한다.

## 음수 두 개의 곱

부호 규칙은 분배법칙을 일관되게 유지하려는 요구와 연결된다.

$3 \times (2 + (-2)) = 3 \times 0 = 0$ 이다. 분배하면  $3 \times 2 + 3 \times (-2) = 0$ 이므로  $3 \times (-2) = -6$ 이다. 양수와 음수의 곱이 음수가 되는 규칙을 덧셈과 곱셈의 연결에서 확인했다.

이제  $(3 + (-3)) \times (-2) = 0$ 을 생각한다. 분배하면  $3 \times (-2) + (-3) \times (-2) = 0$ 이다. 앞에서 첫 항이  $-6$ 임을 알았으므로 둘째 항은  $+6$ 이어야 한다. 따라서  $(-3) \times (-2) = 6$ 이다.

이 설명은 음수가 나쁜 것이므로 나쁜 것 두 개가 좋은 것이라는 식의 비유에 기대지 않는다. 이미 정한 연산 법칙을 유지하기 위해 어떤 값이 필요한지 보여 준다. 수학적 규칙이 서로 충돌하지 않게 연결된 체계임을 확인할 수 있다.

$$\begin{aligned}(3 + (-3)) \times (-2) &= 0 \\ -6 + (-3)(-2) &= 0 \\ (-3)(-2) &= 6\end{aligned}$$

분배법칙을 유지하려면 음수 두 개의 곱은 양수여야 한다

### 탐구

$(-4) \times (-5)$ 가  $-20$ 이라고 정하면 어떤 식과 충돌하는가?

### 풀이와 확인

$(4 + (-4)) \times (-5) = 0$ 이어야 한다. 하지만 분배한 두 항이 모두  $-20$ 이면 합이  $-40$ 이 되어 모순이다.

# 절댓값과 순서

0에서 멀리 떨어져 있다는 사실과 수가 크다는 사실은 다르다.

-8은 -3보다 작지만 0에서는 더 멀리 떨어져 있다. 수의 크기 비교는 수직선에서 오른쪽에 있는지를 살피고 절댓값은 0까지의 거리를 살핀다. 따라서  $-8 < -3$ 이지만  $|-8| > |-3|$ 이다. 두 질문을 같은 것으로 생각하면 음수 비교에서 자주 틀린다.

온도가 -8도에서 -3도로 바뀌면 5도 오른 것이다. 그러나 온도의 절댓값은 8에서 3으로 줄었다. 절댓값이 줄었다고 온도가 내려갔다고 말하면 기준이 뒤섞인다. 상황을 해석할 때 무엇이 변화를 묻는지 먼저 확인해야 한다.

거리에는 음의 값이 없으므로 두 수 사이의 거리는 차이의 절댓값으로 나타낸다. -8과 -3 사이의 거리는  $|-8 - (-3)| = 5$ 이다. 어느 쪽에서 빼도 절댓값을 취하면 같은 거리를 얻는다.



| 수  | 절댓값 | 0과의 관계 |
|----|-----|--------|
| -8 | 8   | 왼쪽 8   |
| -3 | 3   | 왼쪽 3   |
| 4  | 4   | 오른쪽 4  |

## 탐구

-6과 4 사이의 거리는 얼마인가?

## 풀이와 확인

$|-6 - 4| = 10$ 이다. 0까지 6만큼 가고 다시 4만큼 가는 두 구간의 합으로도 확인할 수 있다.

## 두 표를 비교하기

덧셈표와 곱셈표는 같은 부호를 서로 다른 방식으로 처리한다.

양수 두 개를 더하면 양수이고 음수 두 개를 더하면 음수이다. 부호가 다른 두 수를 더할 때는 절댓값의 크기를 비교해야 한다.  $+7$ 과  $-2$ 의 합은 양수이지만  $+2$ 와  $-7$ 의 합은 음수이다. 덧셈의 부호를 두 기호만 보고 정할 수 없는 경우이다.

곱셈에서는 두 수가 0이 아닐 때 부호가 같으면 양수이고 다르면 음수이다. 절댓값의 크기는 곱의 크기를 정하지만 부호를 바꾸지는 않는다. 덧셈 규칙을 곱셈에 옮기거나 그 반대로 적용하지 않도록 두 표를 나란히 적어 보자.

0이 포함되면 별도로 확인한다. 덧셈에서는 다른 수가 그대로 남고 곱셈에서는 0이 된다. 규칙을 외우기 전에 연산 이름을 읽는 작은 습관이 부호 계산의 오류를 크게 줄여 준다.

| 두 수         | 덧셈 결과 | 곱셈 결과 |
|-------------|-------|-------|
| $+7$ 과 $-2$ | $+5$  | $-14$ |
| $+2$ 과 $-7$ | $-5$  | $-14$ |
| $-3$ 과 $-2$ | $-5$  | $+6$  |
| $4$ 와 $0$   | $4$   | $0$   |

같은 두 부호도 덧셈과 곱셈에서 다른 규칙으로 처리한다

### 탐구

$-9+4$ 와  $-9\times 4$ 의 부호를 각각 어떻게 결정하는가?

### 풀이와 확인

합은 절댓값 9가 4보다 크므로 음수이며 값은  $-5$ 이다. 곱은 부호가 다르므로 음수이며 값은  $-36$ 이다.

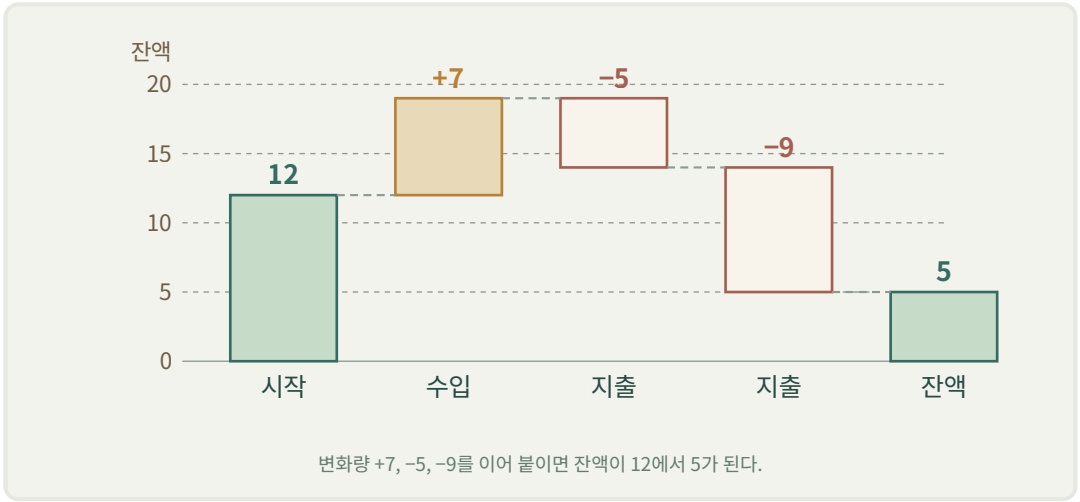
## 가계 모형으로 검산하기

수입과 지출을 부호 있는 수로 기록하되 단위를 일관되게 유지한다.

단위를 천 원으로 정하고 시작 잔액을 12로 놓자. 수입 7과 지출 5와 지출 9가 차례로 생기면  $12+7-5-9=5$ 이다. 장부에는 거래의 부호와 누적 잔액을 나누어 적는다. 지출액 9와 그 뒤의 잔액 5는 서로 다른 열의 정보이다.

순서를 바꾸어도 모든 거래를 빠짐없이 합치면 마지막 잔액은 같다. 하지만 중간 잔액은 달라질 수 있다. 먼저 9를 지출하면 잔액은 3이지만 수입을 먼저 기록하면 19가 된다. 마지막 합과 시간에 따른 상태를 구분해야 한다.

이 활동은 역사적 장부를 복원한 것이 아니라 부호 산술의 원리를 배우기 위한 모형이다. 실제 금융에서는 거래 순서와 조건이 수수료나 이자에 영향을 줄 수 있다. 단순화한 수학 문제의 조건을 분명히 적는 것이 해석의 첫 단계이다.



| 단계 | 변화 | 잔액 |
|----|----|----|
| 시작 | 0  | 12 |
| 수입 | +7 | 19 |
| 지출 | -5 | 14 |
| 지출 | -9 | 5  |

탐구

시작 잔액 3에서 지출 8 뒤 수입 6이 생기면 중간 잔액과 마지막 잔액은 얼마인가?

풀이와 확인

중간 잔액은 -5이며 마지막 잔액은 1이다. 마지막이 양수여도 중간에 음수 상태가 있었음을 기록해야 한다.

## 부호 계산을 설명으로 마무리

답이 맞는지 확인할 때는 수치와 부호와 상황의 뜻을 모두 살핀다.

문제의 식이  $-6 - (-4) + 3 \times (-2)$ 라고 하자. 곱셈을 먼저 계산하면  $-6$ 이 된다. 괄호 속 음수를 빼는 부분은  $+4$ 로 바뀌므로 전체는  $-6 + 4 - 6 = -8$ 이다. 연산 순서를 지키는 것과 부호를 처리하는 것은 별도의 확인 항목이다.

다른 방식으로는 덧셈 항을 모을 수 있다. 음의 항  $-6$ 과  $-6$ 을 합쳐  $-12$ 로 만든 뒤  $+4$ 를 더해도  $-8$ 이다. 두 계산이 같은 답을 주면 중간 실수를 찾는 데 도움이 된다. 다만 같은 잘못된 규칙을 두 번 적용하는 검산은 충분하지 않다.

마지막에는 결과가 왜 음수인지 말로 설명한다. 음의 효과가 모두 12이고 양의 효과가 4이므로 음의 효과가 8만큼 크다. 기호 계산과 양의 비교를 연결하면 답을 다시 읽을 수 있다.

$$\begin{aligned} & -6 - (-4) + 3 \times (-2) \\ & = -6 + 4 - 6 \\ & = -12 + 4 = -8 \end{aligned}$$

곱셈과 괄호를 먼저 처리한 뒤 양과 음의 효과를 모은다

### 탐구

$-2 \times (3-7) + 5$ 의 값을 두 방법으로 구해 보자.

### 풀이와 확인

괄호를 먼저 계산하면  $(-2) \times (-4) + 5 = 13$ 이다. 분배하면  $-6 + 14 + 5 = 13$ 으로 같은 결과를 얻는다.

인도관 / 06

# 방정식이 묻는 조건

## 문장을 식으로 옮기기

미지수의 이름보다 먼저 정할 것은 그 수가 무엇을 나타내는가이다.

어떤 수를 세 배 하고 5를 더했더니 26이 되었다고 하자. 그 수를  $x$ 로 정하면  $3x+5=26$ 이다. 양쪽에서 5를 빼고 3으로 나누면  $x=7$ 을 얻는다. 마지막에 원래 문장으로 돌아가  $3 \times 7 + 5 = 26$ 인지 확인한다. 식을 푸는 과정과 상황에 맞는 답을 찾는 과정이 이어진다.

브라마굽타와 바스카라의 대수 전통에는 미지의 양을 다루는 계산이 포함된다. 여기의 문자 식은 현대 표기로 새로 만든 연습 문제이다. 옛 문헌의 표현은 오늘날의  $x$ 와 등호를 그대로 사용하지 않았으므로 표기와 사고를 구분해서 읽어야 한다.

양쪽에 같은 연산을 하는 이유는 두 값의 같음을 유지하기 위해서이다. 단순히 항을 반대쪽으로 옮기면 부호가 바뀐다고 외우면 나눗셈과 곱셈에서 혼란이 생긴다. 각 줄이 앞줄과 같은 해를 갖는지 설명하면 계산의 근거가 남는다.

$$\begin{aligned} 3x + 5 &= 26 \\ 3x &= 21 \\ x &= 7 \end{aligned}$$

문장을 식으로 옮기기의 계산 관계

### 탐구

어떤 수의 네 배에서 3을 뺀 값이 25라면 그 수는 얼마인가?

### 풀이와 확인

$4x-3=25$ 에서  $4x=28$ 이므로  $x=7$ 이다. 다시 대입하면  $28-3=25$ 가 된다.

[S3] University of St Andrews: Brahmagupta

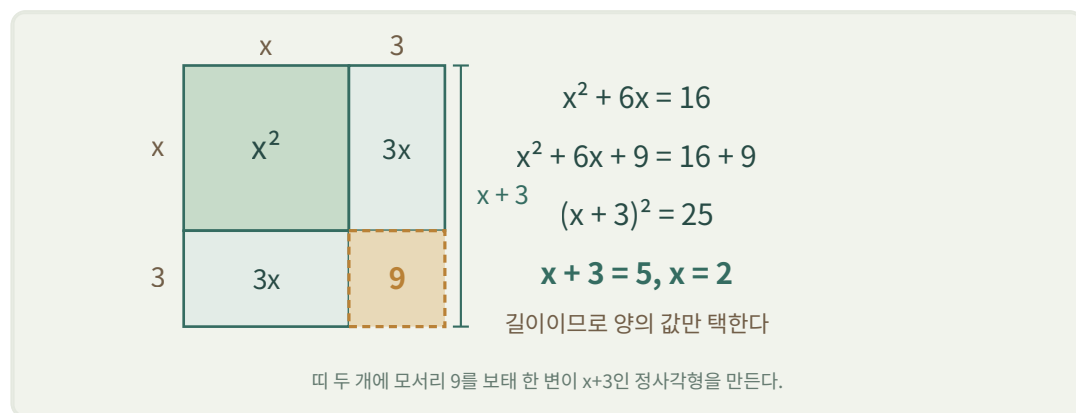
# 제곱을 완성하는 그림

이차식에 알맞은 작은 넓이를 보태면 정사각형을 만들 수 있다.

$x^2+6x=16$ 에서  $x$ 를 양의 길이라고 생각하자. 한 변이  $x$ 인 정사각형 옆에 넓이  $3x$ 인 띠 두 개를 붙인다. 두 띠가 만나는 모서리에 넓이 9인 작은 정사각형을 보태면 한 변이  $x+3$ 인 정사각형이 완성된다.

따라서 양쪽에 9를 더한 식은  $(x+3)^2=25$ 이다. 길이라는 조건 아래에서는  $x+3=5$ 이며  $x=2$ 이다. 처음 식에 대입하면  $4+12=16$ 이다. 덧붙인 넓이 9를 우변에도 더해야 같은 관계를 유지할 수 있다.

순수한 방정식으로 보면  $x+3=-5$ 도 가능해서  $x=-8$ 이라는 해가 하나 더 있다. 그러나 음의 길이는 이 그림의 조건에 맞지 않는다. 대수식의 해와 도형 문제의 답이 달라질 수 있음을 보여 주는 예이다. 그림이 무엇을 가정하는지 적어 두어야 한다.



## 탐구

$x^2+8x=20$ 을 같은 방법으로 풀면 양의 해는 무엇인가?

## 풀이와 확인

16을 더하면  $(x+4)^2=36$ 이다. 양의 길이 조건에서  $x+4=6$ 이므로  $x=2$ 이다.

이어 읽기 / 방정식이 묻는 조건

## 제품 완성 그림을 일반식으로

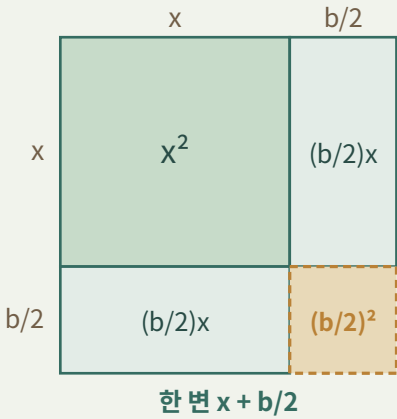
$x^2+6x=16$ 에서 쓴 띠와 모서리의 그림은 계수가 무엇이든 같은 방식으로 작동한다.

5장의 그림은  $x^2+6x=16$ 에서 넓이  $3x$ 인 띠 두 개와 넓이 9인 모서리를 사용했다. 6을 일반적인 양수  $b$ 로 바꾸면 띠의 폭은  $b/2$ 가 되고 두 띠의 넓이는 각각  $(b/2)x$ 이다. 두 띠를 정사각형  $x^2$ 의 오른쪽과 아래쪽에 붙이면 넓이는  $x^2+bx$ 가 되며 모서리에 한 변  $b/2$ 인 빈칸이 남는다.

빈 모서리에 넓이  $(b/2)^2$ 을 보태면 한 변이  $x+b/2$ 인 정사각형이 완성된다. 같음을 유지하려면 우변  $c$ 에도 같은 넓이를 더해야 하므로  $(x+b/2)^2=c+(b/2)^2$ 이다.  $x$ 가 양의 길이라면 양변의 양의 제곱근을 택해  $x=\sqrt{(c+(b/2)^2)}-b/2$ 를 얻는다. 5장의 예에  $b=6$ 과  $c=16$ 을 넣으면  $\sqrt{25}-3=2$ 가 되어 앞의 답과 일치한다.

이 일반식은  $b$ 가 홀수일 때도 그대로 쓸 수 있다. 띠의 폭이 분수가 될 뿐 그림의 구조는 달라지지 않는다. 표의 세 예에서 보듯 보태는 넓이는 언제나  $b$ 의 절반을 제공한 값이며 그 결과 우변  $c+(b/2)^2$ 이 어떤 유리수의 제곱이 되면 답이 근호 없이 나오고, 그렇지 않으면 답은 제곱근을 포함한 길이로 남는다.

그림은  $x$ 가 양수이고  $b$ 와  $c$ 도 양수라는 조건을 전제로 한다. 순수한 방정식으로 보면  $x+b/2$ 가 음수인 경우도 해가 되므로 음의 근이 하나 더 있다. 이 장에서 본 것처럼 도형 문제의 답과 방정식의 해 집합을 구분해 적어야 한다. 여기서 쓴 문자식과 근의 표현은 학습용으로 정리한 현대 재구성이다.



$$x^2 + bx = c$$
$$x^2 + bx + (b/2)^2 = c + (b/2)^2$$
$$(x + b/2)^2 = c + (b/2)^2$$
$$x = \sqrt{c + (b/2)^2} - b/2$$

$x > 0$ 인 길이 조건에서의 답  
예:  $b = 4, c = 21$ 이면  $x = 3$

폭  $b/2$ 인 띠 두 개와 모서리  $(b/2)^2$ 으로 정사각형을 완성한다.

| 식           | 보태는 넓이 | 완성된 제곱       | 양의 해 |
|-------------|--------|--------------|------|
| $x^2+6x=16$ | 9      | $(x+3)^2=25$ | 2    |
| $x^2+4x=21$ | 4      | $(x+2)^2=25$ | 3    |
| $x^2+8x=20$ | 16     | $(x+4)^2=36$ | 2    |

탐구

$x^2+3x=10$ 을 같은 그림으로 풀면 모서리에 보태는 넓이와 양의 해는 무엇인가?

풀이와 확인

띠의 폭은  $3/2$ 이므로 모서리 넓이는  $9/4$ 이다.  $(x+3/2)^2=10+9/4=49/4$ 이므로  $x+3/2=7/2$ 이고  $x=2$ 이다.  $4+6=10$ 으로 확인된다.

[S3] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Brahmagupta

## 두 근이 나타나는 까닭

제곱이 같은 두 수는 부호가 반대일 수 있다.

$x^2=49$ 에는  $x=7$ 과  $x=-7$ 이라는 두 해가 있다. 음수를 제곱해도 양수가 되므로 양의 제곱근만 적으면 방정식의 해를 하나 놓친다.  $\sqrt{49}$ 라는 기호는 비음의 값 7을 가리키지만  $x^2=49$ 의 해 집합에는 두 값이 들어간다.

바스카라 2세를 다룬 역사 자료에는 양과 음의 해를 논의한 사례가 소개된다. 다만 어떤 문제에서 음의 해를 받아들였는지는 그 문제의 뜻과 연결해서 읽어야 한다. 현대의 실수 체계를 과거의 모든 문장에 일괄적으로 덧씌우면 설명이 부정확해진다.

제곱의 그래프를 생각하면 두 해의 관계가 드러난다. 0에서 같은 거리만큼 떨어진 두 수는 같은 제곱값을 가진다. 반면  $x^2=0$ 에서는 두 후보가 모두 0으로 겹친다.  $x^2=-1$ 에는 실수 범위의 해가 없으므로 사용할 수의 범위도 답의 일부이다.



-7과 7은 0에서 같은 거리에 있다

### 탐구

$\sqrt{81}$ 과  $x^2=81$ 의 해를 구분하여 적어 보자.

### 풀이와 확인

$\sqrt{81}$ 은 9이다. 방정식의 실수 해는 9와 -9이다. 제곱근 기호의 약속과 방정식의 해를 구별한다.

[S5] University of St Andrews: Bhaskara II

## 해를 잃어버리는 나눗셈

문자를 나누는 순간 그 문자가 0이 아닌지 확인해야 한다.

$x^2=3x$ 의 양쪽을  $x$ 로 나누면  $x=3$ 이 나온다. 그러나  $x=0$ 도 원래 식을 만족한다. 나눗셈을 하는 동안  $x$ 가 0인 경우를 제외했기 때문에 해 하나를 잃은 것이다. 미지수로 나눌 때는 그 값이 0일 가능성을 별도로 살핀다.

안전한 방법은 모든 항을 한쪽으로 모아  $x^2-3x=0$ 으로 쓰고  $x(x-3)=0$ 으로 인수분해하는 것이다. 두 실수의 곱이 0이면 적어도 하나가 0이므로  $x=0$  또는  $x=3$ 이다. 이 논리는 특정한 값을 임의로 제외하지 않는다.

식의 모양을 간단하게 만드는 것이 언제나 동치 변형은 아니다. 어떤 연산은 해를 지우고 어떤 연산은 새로운 후보를 만든다. 각 줄 옆에 필요한 조건을 적는 습관은 계산 과정을 길게 만드는 대신 마지막의 오류를 줄여 준다. 간결한 식에서도 조건은 생략하지 않는다.

$$\begin{aligned}x^2 &= 3x \\x(x-3) &= 0 \\x = 0 \text{ 또는 } x &= 3\end{aligned}$$

해를 잃어버리는 나눗셈의 계산 관계

### 탐구

$x^2=-2x$ 를 양쪽에서  $x$ 로 나누면 어떤 해를 놓치는가?

### 풀이와 확인

$x=0$ 을 놓친다.  $x(x+2)=0$ 으로 쓰면 해는 0과 -2임을 알 수 있다.

## 제공해서 생긴 가짜 후보

연산의 방향을 되돌릴 수 있는지 확인하면 불필요한 해를 걸러 낼 수 있다.

$\sqrt{x+6}=x$ 를 풀어 보자. 왼쪽이 비음수이므로 먼저  $x \geq 0$ 이어야 한다. 양쪽을 제곱하면  $x+6=x^2$ 이다. 인수분해하면  $(x-3)(x+2)=0$ 이어서 후보는 3과 -2이다. 그러나 -2는 처음 정한 조건을 만족하지 않는다.

원래 식에 직접 넣어도 확인된다.  $x=3$ 이면  $\sqrt{9}=3$ 이므로 참이다.  $x=-2$ 이면  $\sqrt{4}=-2$ 라는 거짓 식이 된다. 제공은 두 수의 부호 차이를 지울 수 있으므로 제공한 식을 만족한다고 원래 식까지 만족하는 것은 아니다.

이 문제에서는 가능한 수의 범위와 제공 연산의 성질을 함께 사용했다. 풀이 끝에 검산을 넣는 것은 예의상 하는 절차가 아니라 연산 중 넓어진 후보 집합을 다시 줄이는 논리적 단계이다. 조건을 먼저 적어도 마지막 대입 확인은 유용하다.

$$\sqrt{x+6}=x \rightarrow x \geq 0$$

$$(x-3)(x+2)=0$$

검산을 통과하는 값 3

제공해서 생긴 가짜 후보의 계산 관계

### 탐구

$\sqrt{x+2}=x$ 를 풀면 제공한 식에서 나오는 두 후보 중 어느 것이 답인가?

### 풀이와 확인

후보는 2와 -1이다.  $x \geq 0$ 이어야 하므로 답은 2이다.  $\sqrt{4}=2$ 로 확인된다.

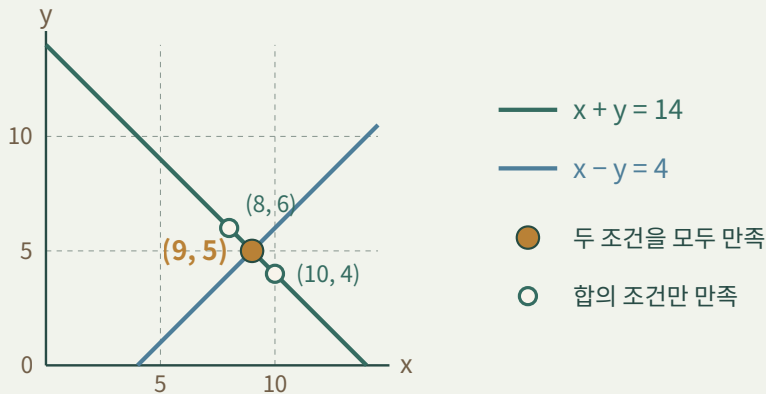
## 두 조건을 한꺼번에 풀기

각 조건을 따로 만족하는 수보다 두 조건을 동시에 만족하는 수가 필요하다.

두 수의 합이 14이고 차가 4라고 하자. 큰 수를  $x$ 로 놓고 작은 수를  $y$ 로 놓으면  $x+y=14$ 와  $x-y=4$ 이다. 두 식을 더하면  $y$ 가 사라지고  $2x=18$ 이 된다. 따라서  $x=9$ 이며 첫 식에서  $y=5$ 이다.

한 식만 보면 해가 많다. 합이 14인 두 수는 8과 6일 수도 있고 10과 4일 수도 있다. 차가 4라는 둘째 조건이 후보를 좁힌다. 연립방정식은 여러 정보를 동시에 만족시키는 대상을 찾는 방법이다.

두 식을 더할 때는 양쪽에 대응하는 항을 모두 더한다. 필요하다면 한 식의 양변에 같은 수를 곱한 뒤 더해 다른 문자를 없앨 수 있다. 그 연산이 두 조건의 공통 해를 보존하는지 이해하면 소거법을 단순한 줄맞춤 계산으로만 기억하지 않게 된다.



두 직선의 교점 (9, 5)만 합과 차의 조건을 함께 만족한다.

### 탐구

두 수의 합이 23이고 차가 7이면 두 수는 무엇인가?

### 풀이와 확인

두 식을 더하면 큰 수의 두 배가 30이다. 큰 수는 15이며 작은 수는 8이다.

## 조건이 모순될 때

방정식에 답이 없다는 결론도 계산으로 증명할 수 있다.

$x+y=10$ 과  $2x+2y=25$ 를 동시에 만족시키는 수가 있을까. 첫 식의 양쪽을 두 배 하면  $2x+2y=20$ 이다. 같은 왼쪽이 20이면서 25일 수는 없으므로 공통 해가 없다. 미지수를 끝까지 구하지 않아도 조건의 충돌이 드러난다.

반대로 둘째 식이  $2x+2y=20$ 이라면 첫 식과 같은 정보이다. 그 경우에는 해가 하나로 정해지지 않는다.  $x$ 를 자유롭게 정하고  $y=10-x$ 로 놓으면 된다. 식이 두 개라는 사실만으로 독립적인 조건이 두 개라고 생각해서는 안 된다.

조건을 검토하는 일은 역사 자료의 계산을 읽을 때도 중요하다. 수치가 맞지 않으면 필사 오류인지 번역의 문제인지 서로 다른 단위를 섞었는지부터 살핀다. 현대의 예제에서는 조건 자체가 모순될 가능성도 열어 둔다. 억지로 숫자 하나를 내는 것이 목표는 아니다.

$$\begin{aligned}x + y &= 10 \\2x + 2y &= 20 \\2x + 2y &= 25 \rightarrow \text{모순}\end{aligned}$$

조건이 모순될 때의 계산 관계

### 탐구

$3x+3y=30$ 은  $x+y=10$ 에 새로운 정보를 더하는가?

### 풀이와 확인

더하지 않는다. 첫 식을 세 배 한 것과 같으므로 두 식은 같은 직선을 나타낸다.

## 풀이의 세 층을 기록하기

계산 과정과 적용 조건과 역사적 맥락을 나란히 적으면 풀이를 다시 읽을 수 있다.

정사각형의 한 변을 2만큼 늘렸더니 넓이가 40만큼 늘었다고 하자. 원래 변을  $x$ 로 놓으면  $(x+2)^2 - x^2 = 40$ 이다. 전개하면  $4x+4=40$ 이어서  $x=9$ 이다. 원래 넓이 81과 새 넓이 121의 차는 실제로 40이다.

풀이 기록의 첫 층에는 전개와 정리 과정을 적는다. 둘째 층에는  $x>0$ 이라는 길이 조건과 단위 제곱이라는 넓이 단위를 표시한다. 셋째 층에는 이 문제가 고전 원문의 번역인지 역사적 주제에서 만든 현대 문제인지를 밝힌다.

세 층을 구분하면 계산이 맞지만 역사적 설명이 틀린 경우와 역사적 설명은 신중하지만 계산이 틀린 경우를 따로 찾아낼 수 있다. 이 책의 예제는 원문 인용으로 표시하지 않은 경우 교육을 위해 새로 구성한 문제이다. 독자도 숫자와 조건을 바꾸어 자신만의 문제를 만들 수 있다.

$$\begin{aligned}(x+2)^2 - x^2 &= 40 \\ 4x + 4 &= 40 \\ x = 9 &\rightarrow 121 - 81 = 40\end{aligned}$$

풀이의 세 층을 기록하기의 계산 관계

### 탐구

한 변을 3만큼 늘려 넓이가 51만큼 증가했다면 원래 변은 얼마인가?

### 풀이와 확인

$(x+3)^2 - x^2 = 6x+9=51$ 이므로  $x=7$ 이다.  $100-49=51$ 로 검산한다.

인도관 / 07

# 쿠타카와 정수의 길

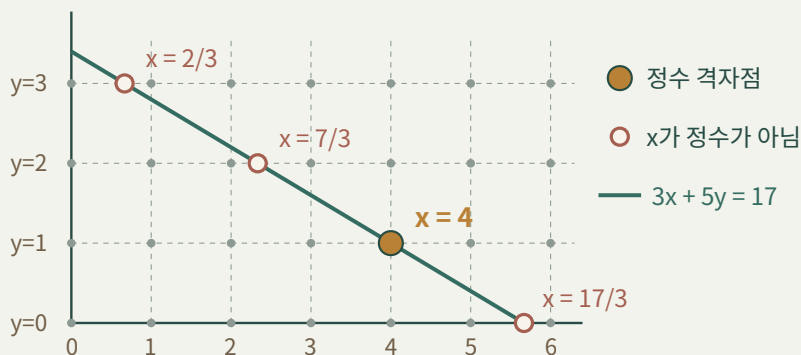
## 정수라는 조건

같은 방정식도 허용하는 수가 달라지면 풀이의 성격이 달라진다.

$3x+5y=17$ 을 실수 범위에서 풀면  $x$ 를 정할 때마다  $y=(17-3x)/5$ 가 따라온다. 그러나  $x$ 와  $y$ 가 물건의 개수라면 음이 아닌 정수여야 할 수 있다. 이때 가능한 값은 훨씬 적어진다. 수의 범위를 식과 함께 적어야 문제를 제대로 읽는다.

인도의 쿠타카 전통은 일차 부정방정식의 정수해를 찾는 방법과 관계가 있다. 이 장에서는 그 주제를 이해하기 위해 작은 수를 쓰고 현대 기호로 과정을 재구성한다. 옛 절차의 모든 세부를 그대로 복원한 것은 아니다.

예제에서  $y$ 는 0부터 3까지 조사하면 충분하다.  $y$ 가 4 이상이면  $5y$ 가 이미 17보다 커진다.  $y=1$ 일 때  $3x=12$ 이므로  $x=4$ 이다. 다른 세 경우에는  $x$ 가 정수가 아니다. 무작정 대입하는 방법도 범위를 논리적으로 줄이면 완전한 풀이가 된다.



직선  $3x+5y=17$ 이 지나는 음이 아닌 격자점은  $(4, 1)$  하나다.

### 탐구

$3x+5y=17$ 에서 음이 아닌 정수해는 몇 개인가?

### 풀이와 확인

$x=4$ 와  $y=1$ 인 한 쌍뿐이다.  $y$ 의 가능한 값 0부터 3을 모두 조사했으므로 빠진 후보가 없다.

[S2] University of St Andrews: Aryabhata I

## 나머지로 후보 줄이기

큰 수를 직접 찾기 전에 나눗셈의 나머지 조건을 사용한다.

$7x+3$ 이 5의 배수가 되게 하는 정수  $x$ 를 찾자. 7은 5로 나누면 나머지가 2이므로  $2x+3$ 이 5의 배수이면 된다.  $x$ 의 나머지를 0부터 4까지 조사하면  $x$ 가 1일 때  $2x+3=5$ 가 된다.

따라서  $x=1+5t$ 로 쓸 수 있다. 여기에 정수  $t$ 를 넣으면  $7x+3=10+35t=5(2+7t)$ 이다. 하나의 작은 해를 찾은 뒤 같은 나머지를 가진 모든 수를 표현한 것이다.  $x$ 의 값이 끝없이 많아도 일정한 간격으로 묶을 수 있다.

나머지 조건은 필요조건인지 충분조건인지 확인해야 한다. 이 예에서는 전개한 식으로 모든  $x=1+5t$ 가 실제로 조건을 만족함을 보였다. 거꾸로 가능한 나머지를 다 조사했으므로 다른 형태의 해가 없다는 사실도 확인했다. 두 방향이 합쳐져 일반해가 된다.



해의  $x$ 값은 5씩 증가한다

### 탐구

$7x+3$ 이 5의 배수인 가장 작은 양의  $x$ 와 그다음 값은 무엇인가?

### 풀이와 확인

1과 6이다. 각각 10과 45를 만들며  $x$ 는 5씩 증가한다.

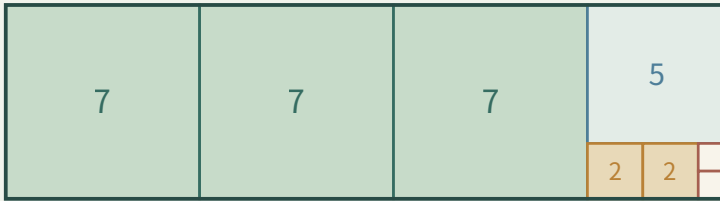
## 나눗셈을 거꾸로 읽기

최대공약수를 구한 기록은 정수해를 만드는 재료가 된다.

26을 7로 나누면  $26=3\times 7+5$ 이다. 다시  $7=1\times 5+2$ 이고  $5=2\times 2+1$ 이다. 마지막 나머지 1이 최대공약수이다. 이제 식을 거꾸로 읽어 1을 26과 7의 정수배 합으로 바꾸어 보자.

$1=5-2\times 2$ 이며  $2=7-5$ 이므로  $1=3\times 5-2\times 7$ 이다. 여기에  $5=26-3\times 7$ 을 넣으면  $1=3\times 26-11\times 7$ 을 얻는다. 실제로  $78-77=1$ 이다. 나눗셈 과정이 두 수 사이의 작은 차이를 만드는 계수를 찾아 주었다.

이 절차에서는 나머지가 점점 작아져 결국 멈춘다. 각 단계가 정수 관계를 유지한다는 점도 중요하다. 소수 근삿값을 사용하지 않으므로 큰 수를 다루어도 원리상 정확한 관계를 얻는다. 계산이 길어질수록 중간 나머지와 계수를 표로 기록하면 실수를 줄일 수 있다.



$$26 = 3 \times 7 + 5$$

$$7 = 1 \times 5 + 2$$

$$5 = 2 \times 2 + 1$$

$$2 = 2 \times 1$$

**최대공약수 1**

가로 26

26×7 직사각형을 정사각형으로 채우면 마지막 한 번 1이 최대공약수다.

**탐구**

$26a+7b=1$ 을 만족하는 정수 한 쌍을 써 보자.

**풀이와 확인**

$a=3$ 과  $b=-11$ 이다.  $26\times 3+7\times (-11)=1$ 로 직접 확인된다.

## 해가 존재하는 조건

공약수로 나누어떨어지지 않는 우변은 정수해를 가질 수 없다.

$6x+10y=7$ 에는 정수해가 없다. 왼쪽의 두 항이 모두 짝수이므로 합도 짝수인데 오른쪽은 홀수이기 때문이다. 더 일반적으로 6과 10의 최대공약수 2는 왼쪽을 언제나 나누어떨어지게 한다. 따라서 우변도 2의 배수여야 한다.

우변이 8이면  $6x+10y=8$ 을 2로 나누어  $3x+5y=4$ 로 만들 수 있다.  $x=3$ 과  $y=-1$ 을 넣으면  $9-5=4$ 가 되어 정수해를 하나 찾는다. 음의 값을 허용하는 정수해와 음이 아닌 정수해는 여기서도 구별해야 한다.

최대공약수가 우변을 나눈다는 조건은 일차 방정식  $ax+by=c$ 의 정수해가 존재하는 기준이다. 두 계수가 모두 0인 특수한 경우는 따로 다룬다. 이 기준은 시행착오를 시작하기 전에 해의 가능성을 판정해 주며 불가능한 문제에 시간을 쓰지 않게 한다.

$$\gcd(6, 10) = 2$$

$$6x + 10y = 7 \rightarrow \text{정수해 없음}$$

$$6 \times 3 + 10 \times (-1) = 8$$

해가 존재하는 조건의 계산 관계

탐구

$12x+18y=15$ 는 정수해를 갖는가?

풀이와 확인

갖지 않는다. 왼쪽은 항상 6의 배수이지만 15는 6의 배수가 아니다.

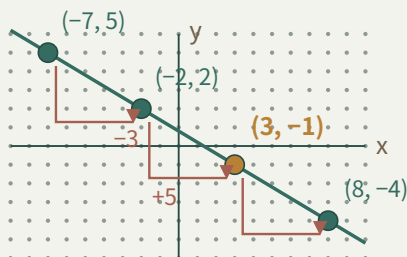
## 하나의 해에서 모든 해로

두 변수를 함께 움직이면 같은 합을 유지할 수 있다.

$3x+5y=4$ 의 해 하나는  $x=3$ 과  $y=-1$ 이다.  $x$ 를 5만큼 늘리면 첫 항은 15만큼 증가한다. 동시에  $y$ 를 3만큼 줄이면 둘째 항이 15만큼 감소한다. 따라서  $x=3+5t$ 와  $y=-1-3t$ 는 모든 정수  $t$ 에 대해 해가 된다.

다른 해가 이 형태에 들어가는지도 확인하자. 두 해의 차이를  $u$ 와  $v$ 로 쓰면  $3u+5v=0$ 이다.  $3u=-5v$ 에서 3과 5가 서로소이므로  $u$ 는 5의 배수이다.  $u=5t$ 를 넣으면  $v=-3t$ 가 된다. 그래서 앞의 표현이 모든 정수해를 포함한다.

일반해를 구한 뒤 실제 상황의 제한을 넣을 수 있다.  $x$ 와  $y$ 가 모두 음이 아니어야 한다면  $t$ 가 만족해야 할 부등식을 각각 얻는다. 두 범위가 겹치는지 확인하면 가능한 물건 개수나 횟수를 빠짐없이 찾아낼 수 있다.



$$3x + 5y = 4$$

$$x = 3 + 5t$$

$$y = -1 - 3t$$

$$3 \times 5t + 5 \times (-3t) = 0$$

해  $(3, -1)$ 에서  $(+5, -3)$ 씩 옮기면 직선 위의 모든 정수해에 닿는다.

### 탐구

$t=-1$ 일 때 해를 구하고 원래 식으로 확인하자.

### 풀이와 확인

$x=-2$ 와  $y=2$ 이다.  $3 \times (-2) + 5 \times 2 = 4$ 이므로 조건을 만족한다.

## 두 주기의 만남

서로 다른 반복이 다시 겹치는 날은 나머지 조건으로 찾을 수 있다.

어떤 신호는 오늘부터 4일마다 켜지고 다른 신호는 오늘보다 하루 늦게 시작해 7일마다 켜진다고 하자. 오늘을 0일로 놓으면 첫 신호의 날은 4의 배수이며 둘째 신호의 날은 7로 나눈 나머지가 1이다. 따라서  $t=4x$ 이고  $4x=7y+1$ 이어야 한다.

4의 배수를 차례로 보면 4와 8 중에서 8이 7로 나누어 나머지 1이다. 첫 만남은 8일 뒤이다. 두 주기가 모두 원래 위치로 돌아오는 간격은 최소공배수 28일이므로 이후에는 36일 뒤와 64일 뒤에도 만난다.

이 문제는 천체 자체의 실제 주기를 복원한 것이 아니라 주기 계산의 구조를 보여 주는 모형이다. 시작일을 포함하는지와 날짜를 0부터 세는지를 밝혀야 한 칸 차이가 나는 오류를 막을 수 있다. 기준점의 선택은 계산 결과를 해석하는 데 필수적이다.



두 주기가 만나는 날은 28일 간격이다

### 탐구

두 신호가 만나는 날을 일반식으로 쓰면 어떻게 되는가?

### 풀이와 확인

$t=8+28k$ 이다. 미래의 만남만 고르면  $k$ 는 0 이상의 정수이다.

이어 읽기 / 쿠타카와 정수의 길

## 두 주기를 한 격자에 펼치기

4일 주기와 7일 주기의 만남을 4행 7열의 격자에 날짜를 채워 넣어 한눈에 본다.

6장의 두 신호 문제에서 첫 신호는 4의 배수인 날에 켜지고 둘째 신호는 7로 나눈 나머지가 1인 날에 켜졌다. 날짜  $t$ 마다 4로 나눈 나머지와 7로 나눈 나머지를 함께 적으면  $t$ 를 4행 7열 격자의 한 칸에 놓을 수 있다. 행은 4로 나눈 나머지고 열은 7로 나눈 나머지이다. 하루가 지나면 두 나머지가 모두 1씩 늘어나므로 한 칸 아래와 한 칸 오른쪽으로 옮겨 가며 끝에 이르면 반대편으로 돌아온다.

0일부터 27일까지 채우면 28칸이 하나도 겹치지 않고 모두 찬다. 4와 7의 최소공배수가 28이므로 28일 전에는 같은 나머지 쌍이 다시 나오지 않기 때문이다. 첫 신호의 날은 맨 윗줄에 모이고 둘째 신호의 날은 나머지 1의 열에 모인다. 그 줄과 열이 만나는 칸은 하나뿐이며 그 칸에 적힌 수가 첫 만남인 8일이다.

28일이 지나면 격자를 처음부터 다시 채우므로 만남은 8과 36과 64처럼 28일 간격으로 되풀이된다. 이것은 본문의 일반식  $t=8+28k$ 를 그림으로 읽은 것이다. 이처럼 서로소인 두 주기에서는 어떤 나머지 쌍을 골라도 한 주기 안에 정확히 한 번 나타난다. 현대에는 이 성질을 중국인의 나머지 정리라는 이름으로 부르지만 여기서는 격자 모형으로만 설명한다.

두 주기가 서로소가 아니면 상황이 달라진다. 주기가 4와 6이면 날짜의 나머지 쌍은 24칸 가운데 12칸에만 나타난다. 4와 6이 모두 짝수이므로 두 나머지의 홀짝이 언제나 같아야 하기 때문이다. 이는 6장에서 최대공약수가 우변을 나누어야 정수해가 있다고 한 조건과 같은 내용이다. 이 격자는 그 조건을 확인하는 학습용 모형이다.



#### 탐구

첫 신호는 4의 배수인 날에, 둘째 신호는 6으로 나눈 나머지가 1인 날에 켜진다면 두 신호는 만날 수 있는가?

#### 풀이와 확인

만날 수 없다. 4의 배수는 짝수이지만 6으로 나눈 나머지가 1인 수는  $6y+1$  꼴이어서 홀수이다.  $4x=6y+1$ 의 좌변은 짝수이고 우변은 홀수이므로 정수해가 없다. 최대공약수 2가 1을 나누지 못한다는 조건과 같은 결론이다.

[S2] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Aryabhata I

## 값을 바꾸어 역으로 설계하기

풀이를 아는 사람이 조건을 만들어 보면 해의 구조가 선명해진다.

정수해가 있는 문제를 직접 만들기 위해 계수 8과 13을 고르고  $x=2$ 와  $y=-1$ 을 정하자. 우변은  $8 \times 2 + 13 \times (-1) = 3$ 이다. 이렇게 만든  $8x + 13y = 3$ 은 적어도 하나의 정수해를 갖는다. 답부터 출발해 문제를 구성한 것이다.

일반해는  $x=2+13t$ 와  $y=-1-8t$ 이다.  $x$ 의 변화가 13이고  $y$ 의 변화가 -8인 까닭은 두 항의 변화량 104t가 서로 상쇄되기 때문이다. 계수와 변화 간격이 교차해서 나타나는 구조를 확인할 수 있다.

이번에는 양의 정수해를 갖게 하고 싶다면 처음부터  $x=2$ 와  $y=1$ 을 골라 우변을 29로 만든다. 문제의 난이도는 숫자의 크기뿐 아니라 허용 범위와 찾으라는 해의 종류에 따라 달라진다. 문제를 설계하는 활동은 계산법의 조건을 능동적으로 점검하게 한다.

$$8 \times 2 + 13 \times (-1) = 3$$

$$x = 2 + 13t$$

$$y = -1 - 8t$$

값을 바꾸어 역으로 설계하기의 계산 관계

### 탐구

$8x + 13y = 29$ 에서  $x=2$ 와  $y=1$  다음에 나오는 정수해 하나를 구하자.

### 풀이와 확인

$t=1$ 을 쓰면  $x=15$ 와  $y=-7$ 이다.  $120 - 91 = 29$ 이다. 이 해는 정수해이지만 양의 정수해는 아니다.

# 정수 풀이의 검사표

존재 여부와 해 하나와 일반해와 범위 제한을 순서대로 확인한다.

$11x+7y=100$ 을 음이 아닌 정수 범위에서 풀어 보자. 11과 7은 서로소이므로 정수해가 존재한다. 7로 나눈 나머지를 보면  $4x \equiv 2 \pmod{7}$  (법 7)이어서  $x \equiv 4 \pmod{7}$ 이다. 따라서  $x=4+7t$ 이며 대입하면  $y=8-11t$ 이다.

두 수가 음이 아니려면  $4+7t \geq 0$ 과  $8-11t \geq 0$ 이어야 한다. 정수  $t$ 에 대해서는 첫 조건이  $t \geq 0$ 을 요구하고 둘째 조건이  $t \leq 0$ 을 요구한다. 따라서  $t=0$ 만 가능하며 답은  $x=4$ 와  $y=8$ 이다.  $44+56=100$ 으로 확인된다.

이 풀이에서는 정수해가 무한히 존재하지만 상황에 맞는 답은 하나였다. 마지막에 범위를 제한하지 않으면 문제를 덜 풀 셈이다. 반대로 처음부터 많은 값을 대입하면 가능한 답을 놓칠 위험이 있다. 네 단계를 분리해 기록하면 어디서 논증이 끝났는지 알 수 있다.

$$\begin{aligned} x &= 4 + 7t \\ y &= 8 - 11t \\ t &\geq 0 \text{ 그리고 } t \leq 0 \rightarrow t = 0 \end{aligned}$$

정수 풀이의 검사표의 계산 관계

## 탐구

정수 제한을 없애고 실수로 풀면 답이 하나인가?

## 풀이와 확인

아니다.  $y=(100-11x)/7$ 이므로 무한히 많다. 두 값이 음이 아니라는 조건을 넣어도 선분 위의 많은 실수해가 남는다.

인도관 / 08

# 순환으로 찾는 큰 해

## 제곱 두 개의 작은 차이

큰 제곱수끼리 빼서 1을 만드는 문제는 근삿값과 정수론을 연결한다.

$x^2 - 2y^2 = 1$ 의 양의 정수해를 찾자.  $y=1$ 이면  $x^2=3$ 이어서 정수  $x$ 가 없다.  $y=2$ 이면  $x^2=9$ 이므로  $x=3$ 이다.  $3^2 - 2 \times 2^2 = 1$ 이라는 관계는  $3/2$ 가  $\sqrt{2}$ 에 가까운 수임을 뜻한다. 양변을  $y^2$ 으로 나누면  $(x/y)^2 - 2 = 1/y^2$ 이 되기 때문이다.

인도 수학의 부정 이차방정식 연구는 브라마굽타와 바스카라 등의 작업에서 중요한 자리를 차지한다. 흔히 펠 방정식이라는 이름으로 소개되지만 그 명칭만으로 역사를 설명할 수는 없다. 이 장의 기호와 예제는 현대적으로 구성했다.

큰 해를 찾을 때 모든  $y$ 를 하나씩 대입하는 방식은 비효율적이다. 이미 아는 해를 결합해 새 해를 만드는 규칙이 있다면 큰 수로 빠르게 이동할 수 있다. 계산의 속도뿐 아니라 왜 새 값도 같은 식을 만족하는지 증명하는 것이 핵심이다.

$$\begin{aligned} 3^2 - 2 \times 2^2 &= 1 \\ 17^2 - 2 \times 12^2 &= 1 \\ (x/y)^2 - 2 &= 1/y^2 \end{aligned}$$

제곱 두 개의 작은 차이의 계산 관계

탐구

$x=17$ 과  $y=12$ 는  $x^2 - 2y^2 = 1$ 을 만족하는가?

### 풀이와 확인

$289 - 2 \times 144 = 1$ 이므로 만족한다.  $17/12$ 의 제곱은 2보다 정확히  $1/144$ 만큼 크다.

[S5] University of St Andrews: Bhaskara II

## 곱셈이 해를 이어 준다

제곱근을 포함한 두 식의 곱에서 정수 계수를 따로 읽는다.

$(3+2\sqrt{2})$ 를 제곱하면  $9+12\sqrt{2}+8=17+12\sqrt{2}$ 이다. 새 계수 17과 12는 앞에서 확인한 해를 만든다. 다시  $3+2\sqrt{2}$ 를 곱하면  $99+70\sqrt{2}$ 가 된다. 실제로  $99^2-2\times 70^2=9801-9800=1$ 이다.

이 규칙의 근거는 짝을 이루는 식에 있다.  $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$ 이다. 같은 수를 여러 번 곱해도 두 짝의 곱은 1로 남는다. 그 결과  $A+B\sqrt{2}$ 와  $A-B\sqrt{2}$ 의 곱  $A^2-2B^2$ 가 1이 된다.

여기서 제곱근은 근사 소수로 바꾸지 않는다. 정확한 기호로 계산해야 작은 차이 1을 보존할 수 있다. 큰 제곱수끼리 뺄 때 반올림한 소수로 계산하면 이 작은 차이가 사라질 수 있다. 정수 관계를 끝까지 유지하는 이유이다.

$$\begin{aligned}(3 + 2\sqrt{2})^2 &= 17 + 12\sqrt{2} \\ (17 + 12\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2}) \\ &= 99 + 70\sqrt{2}\end{aligned}$$

곱셈이 해를 이어 준다는 계산 관계

### 탐구

$(17+12\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$ 의 정수 부분과  $\sqrt{2}$ 의 계수를 구하자.

### 풀이와 확인

정수 부분은  $51+48=99$ 이다.  $\sqrt{2}$ 의 계수는  $34+36=70$ 이다.

## 합성 공식의 구조

서로 다른 두 해를 결합하는 규칙은 전개로 확인할 수 있다.

$a^2 - Db^2 = 1$ 과  $c^2 - Dd^2 = 1$ 이라고 하자. 두 식에 대응하는  $a+b\sqrt{D}$ 와  $c+d\sqrt{D}$ 를 곱하면 정수 부분은  $ac + Dbd$ 이고 제곱근의 계수는  $ad + bc$ 이다. 이 두 값을  $A$ 와  $B$ 로 정하면  $A^2 - DB^2$ 도 1이다.

직접 전개하면 가운데 항들이 사라지고  $(a^2 - Db^2)(c^2 - Dd^2)$ 가 남는다. 따라서 새 관계는  $1 \times 1 = 1$ 이다. 같은 계산은 오른쪽이 1이 아닌 경우에도 적용되어 두 오른쪽 값의 곱을 만든다. 특정 숫자에서 발견한 규칙이 일반 공식으로 확장된다.

$D$ 가 완전제곱수인 경우에는 문제의 성격이 달라지므로 여기서는 양의 비제곱 정수로 둔다. 공식의 조건을 먼저 적으면 어떤 예제가 원리를 잘 보여 주는지 선택할 수 있다. 오늘날의 대수 전개는 역사적 합성법을 이해하는 하나의 다리이며 당시 표기의 복제는 아니다.

$$A = ac + Dbd$$

$$B = ad + bc$$

$$A^2 - DB^2 = (a^2 - Db^2)(c^2 - Dd^2)$$

합성 공식의 구조의 계산 관계

### 탐구

$D=3$ 이며 두 해가 모두  $a=c=2$ 와  $b=d=1$ 이면 새 해는 무엇인가?

### 풀이와 확인

$A=4+3=7$ 이고  $B=2+2=4$ 이다.  $49-3 \times 16=1$ 로 확인된다.

## 작은 나머지를 고르는 발상

중간 관계가 꼭 1이 아니어도 다음 계산의 출발점이 될 수 있다.

$D=13$ 에 대해  $4^2-13\times 1^2=3$ 이다. 이 관계의 오른쪽은 원하는 1이 아니지만 작다. 4와 1에 대응하는 식에  $m+\sqrt{13}$ 을 곱하면 정수 부분은  $4m+13$ 이고 제곱근의 계수는  $4+m$ 이다. 두 계수가 3으로 나누어떨어지도록  $m$ 을 선택해 보자.

$m=2$ 를 고르면 두 계수는 21과 6이다. 3으로 나눈 새 값은 7과 2이며  $7^2-13\times 2^2=-3$ 이다. 오른쪽은  $(2^2-13)/3=-3$ 으로 바뀐다. 나눗셈 뒤에도 정수 계수가 남도록 고르는 조건이 중요하다.

순환법을 소개할 때 작은 오른쪽 값을 얻는 선택과 정수성을 유지하는 조건을 함께 설명해야 한다. 작은 값만 고르면 중간 계수가 분수가 될 수 있다. 여기서는 한 단계를 검산하며 원리를 맞보고 이어지는 설명에서 같은  $D$ 로 이어 간다.

$$\begin{aligned} 4^2 - 13 &= 3 \\ m = 2 &\rightarrow (21 + 6\sqrt{13})/3 \\ 7^2 - 13 \times 2^2 &= -3 \end{aligned}$$

작은 나머지를 고르는 발상의 계산 관계

### 탐구

$4+m$ 이 3의 배수여야 한다면  $m$ 을 3으로 나눈 나머지는 무엇인가?

### 풀이와 확인

2이다.  $m=2$ 와 5와 8 등이 후보이며 그중 계산 목적에 맞는 값을 고른다.

## 같은 문제를 한 걸음 더

중간값의 부호가 달라도 정확한 관계를 유지하면 계산을 이어 갈 수 있다.

앞의  $7^2 - 13 \times 2^2 = -3$ 에서  $m=4$ 를 선택하자.  $7+2m=15$ 이므로 3으로 나누어떨어진다.

$(7+2\sqrt{13})(4+\sqrt{13})=54+15\sqrt{13}$ 이다. 양의 3으로 나누면  $18+5\sqrt{13}$ 을 얻는다.

따라서  $18^2 - 13 \times 5^2 = 324 - 325 = -1$ 이다. 오른쪽이 -1인 해를 제공하면 오른쪽이 +1인 해가 된다.  $(18+5\sqrt{13})^2$ 의 정수 부분은  $324+325=649$ 이고 제곱근 계수는 180이다. 마침내  $649^2 - 13 \times 180^2 = 1$ 을 얻었다.

몇 단계만으로 큰 해에 도달했지만 각 단계의 나눗셈 조건을 생략하면 마술처럼 보인다. 중간값의 3과 -3과 -1이 어떤 관계에서 나왔는지 기록해야 재현할 수 있다. 여기의 전개는 순환적 계산을 설명하는 현대적 예시이며 일반 알고리즘의 모든 선택 규칙을 대신하지 않는다.

$$\begin{aligned} 18^2 - 13 \times 5^2 &= -1 \\ (18 + 5\sqrt{13})^2 &= 649 + 180\sqrt{13} \\ 649^2 - 13 \times 180^2 &= 1 \end{aligned}$$

같은 문제를 한 걸음 더의 계산 관계

### 탐구

마지막 큰 수의 관계를 정수 계산으로 확인하자.

### 풀이와 확인

$649^2=421201$ 이며  $13 \times 180^2=421200$ 이다. 두 값의 차는 정확히 1이다.

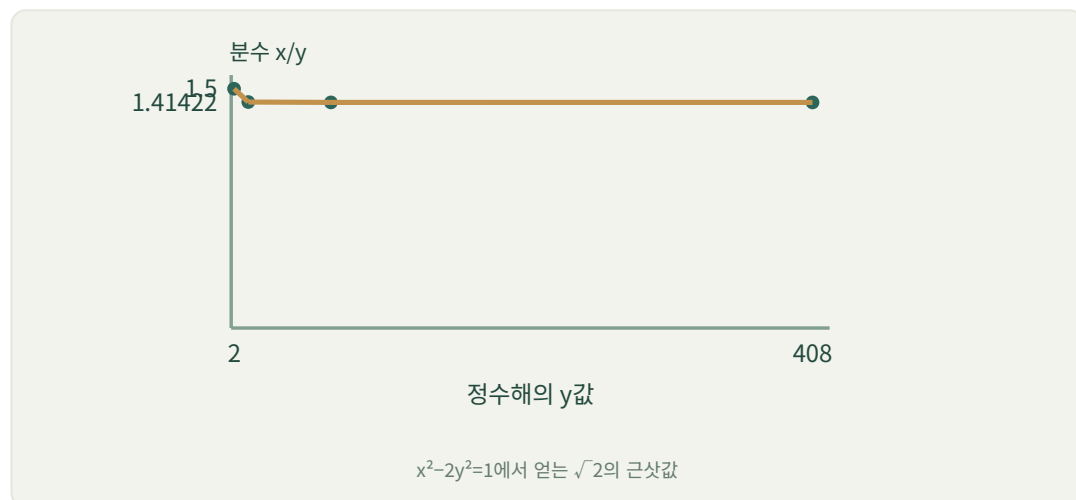
## 분수 근삿값의 오차

좋은 근삿값인지 판단하려면 실제 값과의 차이를 제어해야 한다.

$x^2 - Dy^2 = 1$ 이고  $x$ 와  $y$ 가 양수이면  $x/y$ 는  $\sqrt{D}$ 보다 크다. 제곱의 차를 인수분해하면  $(x/y - \sqrt{D})(x/y + \sqrt{D}) = 1/y^2$ 이다. 따라서 길이의 오차는  $1$ 을  $y^2(x/y + \sqrt{D})$ 로 나눈 값이다.

$D=2$ 와  $x=17$ 과  $y=12$ 를 넣으면 오차는  $1/[144(17/12 + \sqrt{2})]$ 이다. 분모의 괄호가 2보다 크므로 오차는  $1/288$ 보다 작다. 더 나은 하한을 넣으면 오차의 상한도 더 작게 만들 수 있다. 정확한  $\sqrt{2}$ 의 소수를 몰라도 품질을 평가할 수 있다.

제곱의 오차  $1/y^2$ 을 길이의 오차와 같다고 쓰지 않도록 주의한다. 두 오차 사이에는 합  $x/y + \sqrt{D}$ 가 끼어 있다. 도형의 크기나 물리량을 근사할 때도 원래 양과 변환된 양의 오차를 구별해야 한다.



### 탐구

$x^2 - 2y^2 = -1$ 인 양의 해에서는  $x/y$ 가  $\sqrt{2}$ 보다 큰가 작은가?

### 풀이와 확인

작다.  $(x/y)^2$ 이 2보다 작고 두 값이 모두 양수이므로  $x/y < \sqrt{2}$ 이다.

# 부호를 뒤집어도 길은 이어진다

정수해를 만드는 합성은 작은 차이가 음수인 경우에도 작동한다.

$1^2 - 2 \times 1^2 = -1$ 이다. 앞에서 주로 보았던 오른쪽 1과 달리 이번에는 오른쪽이  $-1$ 이다. 이에 대응하는  $1 + \sqrt{2}$ 를 제공하면  $3 + 2\sqrt{2}$ 가 된다. 새 계수는  $3^2 - 2 \times 2^2 = 1$ 을 만족한다. 합성 과정에서 오른쪽 값도 곱해져  $(-1)^2 = 1$ 이 된 것이다.

$1 + \sqrt{2}$ 를 세 번 곱하면  $7 + 5\sqrt{2}$ 이고  $7^2 - 2 \times 5^2 = -1$ 이다. 네 번 곱하면  $17 + 12\sqrt{2}$ 이며 오른쪽이 다시 1이다. 곱하는 횟수의 홀짝에 따라 차이의 부호가 번갈아 바뀐다. 작은 해 하나가 제공근의 위쪽과 아래쪽 근삿값을 함께 만들어 준다.

분수 1과  $7/5$ 는 제공이 2보다 작아  $\sqrt{2}$ 의 아래쪽에 놓인다.  $3/2$ 와  $17/12$ 는 제공이 2보다 커 위쪽에 놓인다. 서로 이웃한 위쪽 값과 아래쪽 값을 함께 적으면 목표 길이를 둘러싼 구간을 얻는다. 단일 근삿값의 소수 자릿수보다 이 구간이 더 직접적인 보증이 된다.

각 분수의 분모가 커진다는 사실만으로 구간이 좁아진다고 단정하지 않는다. 표의 대소관계를 실제 교차곱으로 확인하고 제공의 차를 검산한다. 이 설명은 인도의 합성 연구와 연결되는 현대적 대수 탐구이다. 모든 양의 비제공 정수  $D$ 에서 오른쪽  $-1$ 의 정수해가 존재한다는 주장은 하지 않는다.

| 곱한 횟수 | 정수 계수  | 제공 차 |
|-------|--------|------|
| 1     | 1과 1   | -1   |
| 2     | 3과 2   | 1    |
| 3     | 7과 5   | -1   |
| 4     | 17과 12 | 1    |

## 탐구

$D=3$ 에서  $x^2 - 3y^2 = -1$ 이 불가능함을 3으로 나눈 나머지로 설명하라.

## 풀이와 확인

이 식은  $x^2$ 이 3으로 나누어 2를 남겨야 한다는 뜻이다. 정수의 제곱을 3으로 나누면 0 또는 1만 남으므로 불가능하다.

## 커지는 수를 다루는 기술

큰 수가 나온다는 사실보다 그 수를 어떻게 확인하는지가 중요하다.

$99^2$ 은  $(100-1)^2=10000-200+1=9801$ 로 계산할 수 있다.  $70^2$ 은 4900이므로 두 배가 9800이다. 두 큰 값의 차가 1임을 긴 곱셈 없이 확인했다. 수의 구조를 이용하면 검산이 짧아진다.

다음 해를 만드는 반복식은  $A=3x+4y$ 와  $B=2x+3y$ 이다.  $x=99$ 와  $y=70$ 을 넣으면  $A=577$ 과  $B=408$ 이다. 첫 장에서 본  $\sqrt{2}$ 의 근삿값  $577/408$ 이 여기서 다시 나타난다. 같은 수가 서로 다른 문제의 맥락에서 만나는 이유를 탐구할 수 있다.

다만 수가 같다는 사실만으로 역사적 전달 관계를 증명할 수는 없다. 전파를 주장하려면 문헌과 연대와 접촉의 증거가 더 필요하다. 수학적 연결과 역사적 계보는 다른 종류의 주장이다. 둘을 구분하면 흥미로운 일치를 발견하면서도 성급한 결론을 피할 수 있다.

$$A = 3x + 4y$$

$$B = 2x + 3y$$

$$x = 99 \ y = 70 \rightarrow A = 577 \ B = 408$$

커지는 수를 다루는 기술의 계산 관계

탐구

$577^2 - 2 \times 408^2$ 의 값은 얼마인가?

풀이와 확인

$332929 - 332928 = 1$ 이다. 따라서  $577/408$ 은 이 장의 정수해에서도 나오는  $\sqrt{2}$ 의 근삿값이다.

## 순환 계산의 결과표

작은 해에서 큰 해로 가는 과정을 값과 불변 관계로 함께 기록한다.

$D=2$ 의 양의 해를 차례로 기록하면 3과 2에서 시작해 17과 12가 나오고 99와 70과 577과 408로 이어진다. 각 쌍은 앞의 반복식으로 계산된다. 숫자는 빠르게 커지지만 제곱의 차는 언제나 1로 남는다.

계산표의 마지막 열에  $x^2-2y^2$ 을 적으면 각 행을 독립적으로 검사할 수 있다. 앞 행의 오타가 다음 행으로 전해질 수도 있으므로 반복식만 다시 적용하는 계산에 의존하지 않는다. 불변 관계를 확인하면 다른 종류의 검사 하나가 추가된다.

이 활동의 목표는 가능한 해를 모두 분류하는 완전한 이론을 만드는 것이 아니다. 반복 절차와 증명된 관계를 결합해 큰 결과를 신뢰하는 방법을 배우는 것이다. 알고리즘을 사용할 때 무엇이 보존되는지 찾는 태도는 현대의 계산 프로그램에서도 중요하다.

| x   | y   | $x^2-2y^2$ |
|-----|-----|------------|
| 3   | 2   | 1          |
| 17  | 12  | 1          |
| 99  | 70  | 1          |
| 577 | 408 | 1          |

값은 커져도 제곱의 차는 1로 남는다

### 탐구

처음 쌍을 잘못 적어  $x=3$ 과  $y=1$ 로 시작했다면 불변 관계 검사는 무엇을 보여 주는가?

### 풀이와 확인

$3^2-2 \times 1^2=7$ 이므로 1이 아니다. 반복식이 돌아가더라도 원하는 방정식의 해를 만드는 출발점이 아님을 알 수 있다.

# 운율에서 조합으로

## 두 길이의 리듬

짧음과 김을 구분하는 운율 문제는 배열을 세는 수학과 만난다.

산스크리트 운율을 다룬 전통에서는 음절의 성질을 구분하고 가능한 배열을 살폈다. 핑갈라에 관한 연구는 이러한 절차를 조합론의 역사와 연결한다. 여기서는 짧은 음절을 S로 쓰고 긴 음절을 L로 쓰는 현대적 모형으로 계산한다.

세 자리가 각각 S 또는 L이라면 첫 자리는 두 가지 선택이 있고 둘째와 셋째도 두 가지씩 있다. 따라서 배열은  $2 \times 2 \times 2 = 8$ 개이다. SSS와 SSL처럼 각 자리가 다르면 다른 배열로 센다. 전체를 뒤집은 두 배열도 별개의 것으로 약속한다.

이 수학적 부호화가 고전 시의 실제 발음과 의미를 모두 담는 것은 아니다. 운율의 세부 규칙이나 언어적 조건을 제외한 단순 모형이다. 모형에서 무엇을 남기고 무엇을 제외했는지 밝히면 역사적 주제에서 정확한 수학 문제를 만들 수 있다.

$$\begin{aligned} &S \text{ 또는 } L \\ &\text{세 자리 } 2^3 = 8 \\ &\text{네 자리 } 2^4 = 16 \end{aligned}$$

두 길이의 리듬의 계산 관계

### 탐구

네 자리에 S와 L을 자유롭게 넣는 배열은 몇 개인가?

### 풀이와 확인

각 자리마다 두 선택이 있으므로  $2^4=16$ 개이다. 순서가 다른 배열을 다르게 센다는 조건이 필요하다.

[S6] Jayant Shah: A History of Piṅgala's Combinatorics

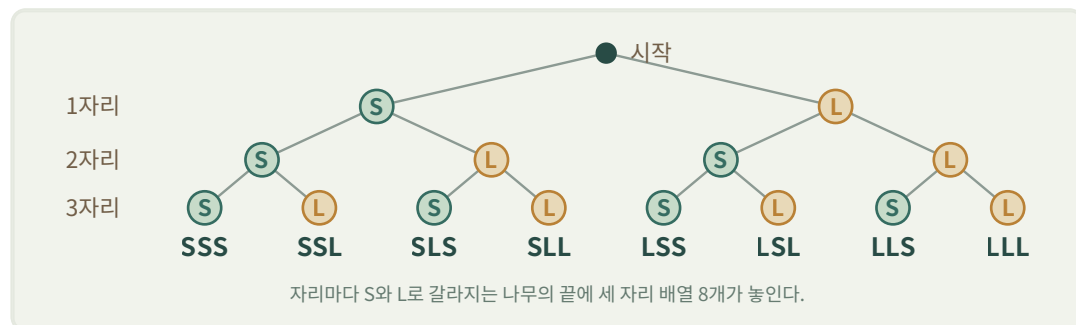
## 빠짐없이 나열하기

일정한 순서를 정하면 중복과 누락을 검사할 수 있다.

세 자리 배열을 첫 글자로 나누면 S로 시작하는 네 개와 L로 시작하는 네 개가 된다. 앞의 묶음은 SSS와 SSL과 SLS와 SLL이다. 뒤의 묶음은 LSS와 LSL과 LLS와 LLL이다. 각 묶음에서 마지막 두 글자의 순서가 같다.

이 방식은 두 자리 배열 앞에 S를 붙인 목록과 L을 붙인 목록을 만드는 재귀적 절차이다. 길이가 하나 늘어날 때 전체 개수가 두 배가 되는 이유도 보인다. 목록이 길어져도 같은 규칙을 적용할 수 있다.

목록의 순서는 우리가 정한 현대적 약속이다. 이를 고대 문헌의 실제 배열 순서와 동일하다고 단정하지 않는다. 역사 자료의 알고리즘을 비교할 때는 어떤 기호가 먼저 오는지와 어느 자리를 먼저 바꾸는지까지 확인해야 한다. 개수가 같아도 나열 방식은 다를 수 있다.



### 탐구

S로 시작하고 마지막이 L인 세 자리 배열은 몇 개인가?

### 풀이와 확인

SSL과 SLL의 두 개이다. 가운데 자리만 자유롭게 선택하므로 2가지이다.

## 숫자로 배열 찾기

두 기호를 0과 1에 대응시키면 배열에 번호를 붙일 수 있다.

S를 0으로 놓고 L을 1로 놓자. 네 자리의 값을 왼쪽부터 8과 4와 2와 1로 정하면 LSSL은  $1 \times 8 + 0 \times 4 + 1 \times 2 + 1 = 11$ 이다. 모든 네 자리 배열은 0부터 15까지의 정수 하나와 대응한다.

번호 6을 배열로 되돌려 보자.  $6 = 4 + 2$ 이므로 이진 표기는 0110이다. 약속한 부호로 바꾸면 SLLS이다. 숫자와 배열 사이의 대응이 일대일이면 전체 목록을 적지 않고도 원하는 항목을 찾을 수 있다.

자리의 방향을 반대로 정하거나 S와 L의 숫자를 바꾸면 번호가 달라진다. 번호 자체보다 대응 규칙이 핵심이다. 고전 운율 알고리즘을 현대 이진법과 비교할 때도 두 체계의 공통 구조와 다른 표기 관습을 함께 적어야 한다. 닮았다는 말만으로 두 문화의 사용 목적까지 같아지지는 않는다.

| 자리값 | 8 | 4 | 2 | 1 |
|-----|---|---|---|---|
| 기호  | L | S | L | L |
| 숫자  | 1 | 0 | 1 | 1 |
| 값   | 8 | 0 | 2 | 1 |

약속한 대응에서 LSSL의 번호는 11이다

### 탐구

이 약속에서 LSSL은 몇 번인가?

### 풀이와 확인

1001에 해당하므로  $8 + 1 = 9$ 이다. 앞의 1과 뒤의 1은 서로 다른 자리값을 갖는다.

## 긴 음절 두 개만 고르기

전체 배열 수와 특정 기호 개수를 고정한 배열 수는 다르다.

네 자리에 L을 정확히 두 개 넣는 방법을 세자. L의 위치 두 곳을 고르면 나머지는 자동으로 S가 된다. 가능한 위치는 앞에서부터 12와 13과 14와 23과 24와 34의 여섯 쌍이다. 여기서 12는 첫째와 둘째 자리를 뜻하는 위치 표시이다.

첫 L의 위치를 네 가지로 고르고 둘째를 세 가지로 고르면 12가 되지만 각 배열을 두 번 센다. 첫째 자리와 셋째 자리를 고르는 두 순서는 같은 최종 배열을 만들기 때문이다. 따라서  $4 \times 3$ 을 2로 나누어 6을 얻는다.

선택 순서가 결과를 바꾸는지 먼저 판단해야 순열과 조합을 구별할 수 있다. 서로 다른 두 역할을 맡길 때는 순서가 중요하지만 같은 L 두 개의 위치를 정할 때는 고르는 순서가 중요하지 않다. 문제의 대상이 계산 공식보다 먼저이다.

|      |      |      |
|------|------|------|
| LLSS | LSLS | LSSL |
| SLLS | SLSL | SSLL |

네 자리 중 L이 두 개인 배열 6개

### 탐구

다섯 자리 중 L이 정확히 두 개인 배열은 몇 개인가?

### 풀이와 확인

$5 \times 4$ 를 2로 나누어 10개이다. 두 위치를 고르는 순서의 중복을 제거한다.

## 앞줄에서 다음 줄로

조합수의 삼각형은 마지막 자리를 기준으로 경우를 나누면 설명된다.

다섯 자리 중 L이 두 개인 배열을 마지막 글자에 따라 나누자. 마지막이 S이면 앞의 네 자리에서 L 두 개를 고른다. 마지막이 L이면 앞의 네 자리에서 L 한 개만 고른다. 따라서 개수는  $6+4=10$ 이다.

이를 일반적으로 쓰면  $n$ 자리에서  $k$ 개를 고르는 수는  $n-1$ 자리에서  $k$ 개를 고르는 수와  $k-1$ 개를 고르는 수의 합이다. 양끝의 값은 1이다. 아무것도 고르지 않거나 모두 고르는 방법은 각각 하나이기 때문이다.

이 규칙으로 1에서 시작해 1과 1을 만들고 다음 줄 1과 2와 1을 만든다. 여러 수학 전통에서 나타나는 삼각형 배열은 한 사람의 이름만으로 전체 역사를 설명하기 어렵다. 여기서는 운율 문제에서 해당 규칙이 왜 자연스럽게 나오는지에 집중한다.

$$\begin{array}{c}
 1 \\
 1\ 2\ 1 \\
 1\ 3\ 3\ 1 \\
 1\ 4\ 6\ 4\ 1
 \end{array}$$

앞줄에서 다음 줄로의 계산 관계

### 탐구

다섯 자리에서 L 두 개인 경우와 세 개인 경우의 수가 같은 까닭은 무엇인가?

### 풀이와 확인

모든 S와 L을 서로 바꾸면 두 L 배열과 세 L 배열이 일대일로 대응한다. 두 경우 모두 10개이다.

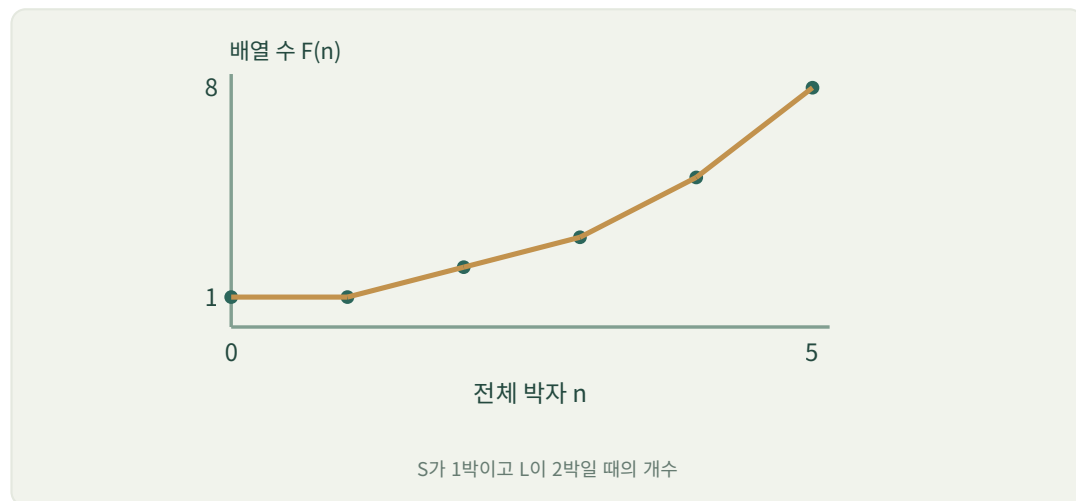
## 박자의 길이를 고정하기

자리 수를 고정할 때와 전체 길이를 고정할 때는 다른 수열이 생긴다.

짧은 음절 S는 1박이고 긴 음절 L은 2박이라고 정하자. 전체 3박을 만드는 배열은 SSS와 SL과 LS의 세 개이다. 자리 수가 서로 달라도 총길이가 같으면 모두 센다. 앞에서 세 자리를 고정해 8개를 얻은 문제와 조건이 다르다.

전체  $n$ 박의 배열은 S로 시작하거나 L로 시작한다. S를 떼면  $n-1$ 박이 남고 L을 떼면  $n-2$ 박이 남는다. 따라서 개수  $F(n)$ 는  $F(n-1)+F(n-2)$ 이다. 빈 배열을 한 가지로 세면  $F(0)=1$ 이고  $F(1)=1$ 이다.

이 규칙으로 2박은 2개이며 3박은 3개이고 4박은 5개가 된다. 빈 배열을 포함하는 약속은 점화식을 끝까지 일관되게 쓰게 해 준다. 수열의 이름을 먼저 외우기보다 어떤 경우 분류에서 같은 덧셈 규칙이 생겼는지 설명해 보자.



### 탐구

전체 5박을 만드는 S와 L의 배열은 몇 개인가?

### 풀이와 확인

$F(5)=F(4)+F(3)=5+3=8$ 개이다. 맨 앞이 S인 다섯 경우와 L인 세 경우로 나뉜다.

# 박자 수와 음절 수를 함께 세기

같은 리듬을 서로 다른 기준으로 분류하면 점화식과 조합식이 만난다.

전체가  $n$ 박인 배열에서 긴 음절  $L$ 을  $k$ 개 사용한다고 하자.  $L$  하나가 2박이므로 짧은 음절  $S$ 는  $n-2k$ 개 필요하다. 따라서 실제 음절의 총개수는  $n-k$ 개이다. 그 자리 가운데  $L$ 이 들어갈  $k$ 곳을 고르면 배열이 하나로 정해진다.

전체 6박을 생각하면  $k$ 는 0부터 3까지 가능하다. 긴 음절이 없으면 여섯  $S$ 만 놓는 한 가지이다.  $L$ 이 하나이면 다섯 자리 중 하나를 고르는 5가지이다.  $L$ 이 둘이면 네 자리 중 둘을 고르는 6가지이다.  $L$ 이 셋이면  $LLL$  하나뿐이다.

네 경우를 합하면  $1+5+6+1=13$ 이다. 앞서 점화식으로 구한 6박의 배열 수와 같다. 첫 음절을 떼는 분류와 긴 음절의 개수를 고정하는 분류가 같은 대상을 빠짐없이 나누었다. 한 결과를 서로 다른 분류로 증명하는 것이 조합론의 중요한 방법이다.

이 수식은 두 길이만 허용한 학습 모형에 대한 정확한 설명이다. 실제 운율 전통의 언어적 조건을 모두 포함하지 않는다. 길이가 정해진 자리 배열과 박자가 정해진 배열을 구분하면 비슷한 이진 부호가 왜 서로 다른 수열을 만드는지도 설명할 수 있다.

| 6박에서 L의 수 | 전체 음절 수 | 배열 수 |
|-----------|---------|------|
| 0         | 6       | 1    |
| 1         | 5       | 5    |
| 2         | 4       | 6    |
| 3         | 3       | 1    |

## 탐구

7박에서 긴 음절이 정확히 두 개인 배열은 몇 개인가?

## 풀이와 확인

짧은 음절은 세 개이며 전체 음절 수는 다섯 개이다. 다섯 자리 중  $L$  두 자리를 고르므로 10개이다.

## 제한 하나가 바뀌는 점화식

지수적으로 늘어나는 목록도 제한 조건 하나로 성장 방식이 바뀐다.

길이가 다섯 자리인 S와 L 배열은 제한이 없으면 32개이다. 이제 L이 이웃하면 안 된다는 조건을 넣자. 마지막이 S인 배열은 앞의 네 자리에서 유효한 배열을 그대로 이어 붙이면 된다. 마지막이 L이면 그 앞은 반드시 S여야 한다.

따라서 마지막 두 글자가 SL인 경우를 따로 세면 앞의 세 자리 유효 배열 수가 남는다. 길이  $n$ 의 개수를  $A(n)$ 이라 할 때  $A(n)=A(n-1)+A(n-2)$ 이다. 초기값  $A(0)=1$ 과  $A(1)=2$ 에서 시작하면 다섯 자리는 13개이다.

앞쪽에서 S나 L의 박자를 나누었던 문제와 같은 점화식이지만 초기값과 대상은 다르다. 식이 같다고 두 문제를 같은 문제라고 할 수 없다. 어떤 대응을 만들 수 있는지 검토하면 서로 다른 상황 사이의 수학적 연결을 발견할 수 있다.

|     |                                                                                      |    |
|-----|--------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 1자리 |     | 2  |
| 2자리 |     | 3  |
| 3자리 |    | 5  |
| 4자리 |   | 8  |
| 5자리 |  | 13 |

L이 이웃하지 않는 배열 수

### 탐구

L이 이웃하지 않는 세 자리 배열은 몇 개인가?

### 풀이와 확인

$A(3)=5$ 이다. SSS와 SSL과 SLS와 LSS와 LSL이 가능하다.

## 운율 문제를 직접 설계하기

기호와 길이와 순서와 제한을 정하면 새로운 조합 문제를 만들 수 있다.

다섯 자리 중 L이 두 개이며 두 L이 이웃하지 않는 배열을 세어 보자. 제한이 없을 때는 10개이다. 이웃하는 두 자리를 고르는 방법은 12와 23과 34와 45의 네 가지이므로 제외하면 6개가 남는다.

다른 풀이로는 두 L 사이에 최소 한 S가 있다고 생각할 수 있다. L의 위치를  $i$ 와  $j$ 로 쓰고  $i < j$ 라 하면  $j \geq i+2$ 이다. 두 번째 위치를 한 칸 당긴  $j-1$ 과 첫 위치  $i$ 를 고르면 네 자리 중 서로 다른 두 자리를 고르는 문제로 바뀐다. 따라서 6개이다.

직접 나열한 목록과 두 계산법이 같은 결과를 주는지 비교하자. 역사적 운율의 구체적 언어 규칙을 모두 옮기지 않아도 조건을 분명히 한 모형은 풍부한 탐구를 제공한다. 자신이 만든 제한을 원래 전통에 있었던 규칙처럼 소개하지 않는 것이 중요하다.

다섯 자리 중 L 두 개 10  
이웃한 두 위치 4  
이웃하지 않는 배열  $10 - 4 = 6$

운율 문제를 직접 설계하기의 계산 관계

### 탐구

여섯 자리 중 L이 두 개이며 이웃하지 않는 배열은 몇 개인가?

### 풀이와 확인

전체 15개에서 이웃한 다섯 쌍을 제외해 10개이다. 다섯 자리 중 두 위치를 고르는 수와도 같다.

인도관 / 10

# 수열로 읽는 변화

## 같은 차이로 늘어나는 양

수열의 규칙은 항의 값과 항 사이의 변화를 함께 보면 드러난다.

첫날에 3단위를 이동하고 날마다 2단위씩 더 이동한다고 가정하자. 이동량은 3과 5와 7과 9로 이어진다.  $n$ 번째 날의 이동량은  $3+2(n-1)=2n+1$ 이다. 첫날에는 증가를 아직 한 번도 적용하지 않았으므로  $n$ 이 아니라  $n-1$ 을 곱한다.

바스카라의 릴라바티는 수열을 포함한 여러 계산 문제를 다룬다. 여기서는 그 주제와 연결되는 새 예제를 사용한다. 실제 이동에는 휴식과 지형의 영향이 있지만 일정한 증가라는 조건만 남기면 규칙을 식으로 설명할 수 있다.

표를 만들 때 날짜와 이동량을 다른 열에 쓴다. 첫 항의 번호를 0부터 정한다면 식도 달라진다. 같은 수열을 서로 다른 번호로 표현할 수 있으므로 식의 모양만 보고 틀렸다고 판단하지 않는다. 번호를 붙이는 약속과 첫 값을 함께 확인해야 한다.



날마다 2씩 늘어나는 이동량

### 탐구

이 규칙에서 열째 날의 이동량은 얼마인가?

### 풀이와 확인

$2 \times 10 + 1 = 21$ 단위이다. 첫날 3에서 아홉 번에 걸쳐 2씩 증가한다.

[S5] University of St Andrews: Bhaskara II

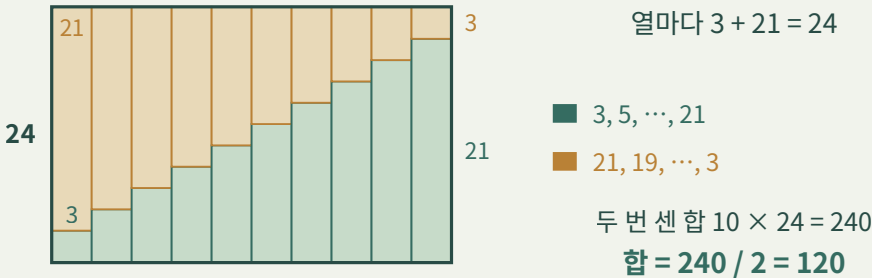
## 앞뒤를 짝지어 더하기

같은 차이로 늘어나는 수열은 양끝의 합이 일정하다.

3부터 21까지 홀수 열 개를 더하자. 첫 항 3과 마지막 항 21의 합은 24이다. 다음 두 항 5와 19도 24이며 이 방식으로 다섯 쌍이 만들어진다. 전체 합은  $24 \times 5 = 120$ 이다. 항의 수가 짝수이면 직접 짝을 지을 수 있다.

항의 수가 홀수일 때도 같은 원리를 쓸 수 있다. 수열을 거꾸로 쓴 목록과 원래 목록을 나란히 더하면 각 열의 합이 첫 항과 마지막 항의 합이 된다. 전체 합을 두 번 센 것이므로 마지막에 2로 나누면 된다.

따라서  $n$ 개 항의 합은  $n \times (\text{첫 항} + \text{마지막 항}) / 2$ 이다. 공식을 사용하는 동안 마지막 항을 잘 못 구하면 합도 틀리므로 항의 수를 따로 확인한다. 간격이 일정하지 않은 목록에는 이 공식을 그대로 적용할 수 없다. 양끝 합이 일정하다는 조건이 증명의 핵심이다.



수열과 뒤집은 수열을 쌓으면 열마다 높이 24인 직사각형이 된다.

### 탐구

2와 5와 8과 11과 14의 합을 양끝 짝으로 계산하자.

### 풀이와 확인

양끝 합은 16이며 다섯 항이 있다. 합은  $5 \times 16 / 2 = 40$ 이다.

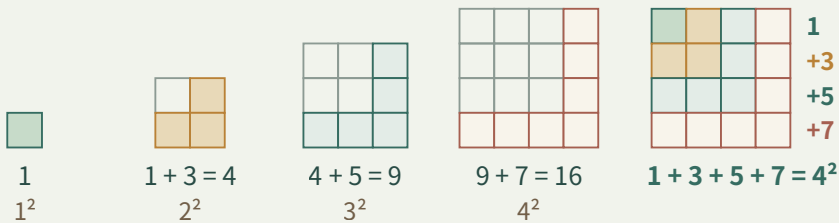
## 홀수의 합이 정사각형인 이유

한 겹씩 덧붙이는 도형은 수열의 합을 넓이로 바꾸어 준다.

한 변이  $n$ 인 정사각형에 바깥쪽 한 줄을 덧붙여 한 변이  $n+1$ 인 정사각형을 만들자. 새 칸의 수는  $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ 이다. 기존 정사각형을 감싸는 ㄱ자 모양의 한 겹은 언제나 홀수 개의 칸으로 이루어진다.

1칸에서 시작해 3칸을 더하면 4칸이 되고 5칸을 더하면 9칸이 된다. 다음에 7칸을 더하면 16칸이다. 따라서 처음  $n$ 개의 양의 홀수 합은  $n^2$ 이다. 그림의 각 겹과 수열의 각 항이 대응한다.

도형 설명을 쓸 때 모서리 칸을 두 번 세지 않도록 주의한다. 새 가로줄  $n+1$ 칸과 새 세로줄  $n$ 칸으로 나누면 총  $2n+1$ 칸이다. 그림에서 보이는 규칙을 식으로 옮기면 모든  $n$ 에 대해 같은 이유가 성립함을 설명할 수 있다.



ㄱ자 모양의 홀수 겹을 덧붙일 때마다 다음 정사각형이 된다.

### 탐구

1부터 19까지 양의 홀수의 합은 얼마인가?

### 풀이와 확인

항이 열 개이므로 합은  $10^2=100$ 이다.  $19=2 \times 10 - 1$ 로 항의 수를 확인한다.

## 일정한 비율의 성장

매번 같은 수를 더하는 변화와 같은 수를 곱하는 변화는 다르다.

첫 항이 2이고 매번 세 배가 되는 수열은 2와 6과 18과 54로 이어진다.  $n$ 번째 항은  $2 \times 3^{(n-1)}$ 이다. 항 사이의 차이는 4와 12와 36으로 바뀌지만 뒤 항을 앞 항으로 나눈 비율은 늘 3이다.

같은 날마다 3을 더하는 수열 2와 5와 8과 11과 비교해 보자. 처음에는 값이 비슷해 보여도 시간이 지나면 곱셈으로 늘어나는 수열이 훨씬 커진다. 증가량이 같다는 말과 증가 비율이 같다는 말을 구분해야 한다.

성장 모형을 실제 현상에 적용할 때에는 비율이 계속 일정한지 확인한다. 자원과 공간이 제한된 상황에서 같은 비율의 성장이 무한히 이어진다고 가정하는 것은 지나친 단순화일 수 있다. 여기서는 수학적 규칙 자체의 결과를 계산하고 현실 적용의 범위는 별도로 판단한다.



매번 세 배가 되는 등비수열

### 탐구

첫 항 5에서 매번 두 배가 된다면 여섯째 항은 얼마인가?

### 풀이와 확인

$5 \times 2^5 = 160$ 이다. 첫 항 이후 다섯 번 두 배가 된다.

## 등비수열의 합을 빼기로 구하기

같은 목록을 비율만큼 곱한 뒤 빼면 가운데 항들이 사라진다.

$S=1+2+4+8+16$ 이라고 하자. 양쪽을 두 배 하면  $2S=2+4+8+16+32$ 이다. 두 식을 빼면 가운데 항들이 없어지고  $S=32-1=31$ 이 남는다. 긴 덧셈을 양끝 두 항의 차이로 바꾼 것이다.

일반적으로 첫 항 1과 공비  $r$ 의  $n$ 개 항을 더하면  $S=1+r+\dots+r^{n-1}$ 이다.  $rS$ 에서  $S$ 를 빼면  $(r-1)S=r^n-1$ 이므로  $r \neq 1$ 일 때  $S=(r^n-1)/(r-1)$ 이다.  $r=1$ 이면 모든 항이 1이므로 합은  $n$ 이다.

특수한 경우를 따로 쓰는 까닭은 분모가 0이 되는 식을 피하기 위해서이다. 공식을 암기할 때 조건을 떼어 내면 실제로 가장 단순한 공비 1에서 오류가 생긴다. 유도 과정을 알면 조건이 어디서 필요한지 이해할 수 있다.

$$\begin{aligned} S &= 1 + 2 + 4 + 8 + 16 \\ 2S &= 2 + 4 + 8 + 16 + 32 \\ S &= 32 - 1 = 31 \end{aligned}$$

등비수열의 합을 빼기로 구하기의 계산 관계

탐구

$1+3+9+27$ 의 합을 이 방법으로 구하자.

풀이와 확인

$3S-S=81-1$ 이므로  $2S=80$ 이다. 따라서  $S=40$ 이다.

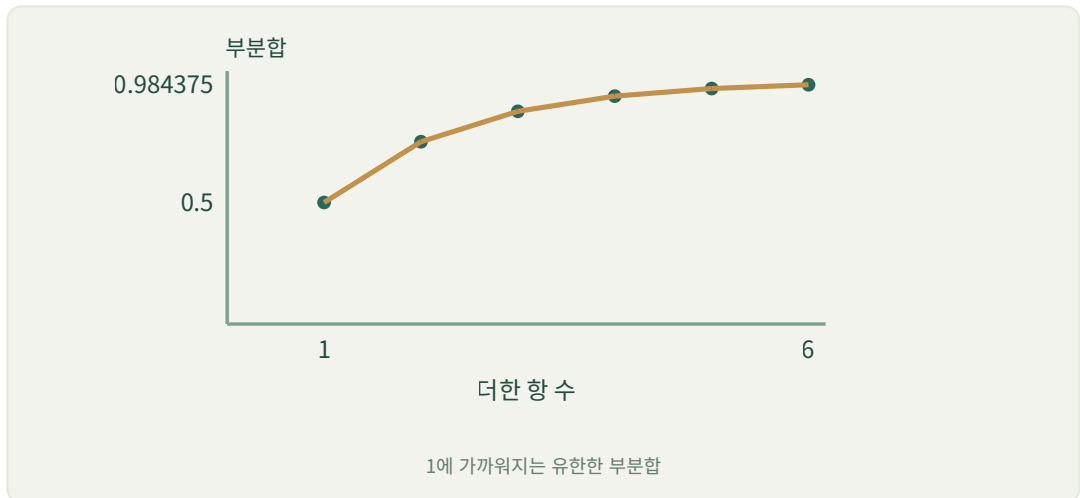
## 유한합과 무한 과정

끝없이 항을 더한다는 말은 매 단계의 부분합이 어디로 향하는지 묻는 말이다.

$1/2+1/4+1/8$ 을 더하면  $7/8$ 이다. 네 항까지 더하면  $15/16$ 이며  $n$ 개 항까지 더한 값은  $1-1/2^n$ 이다. 어떤 유한한 단계에서도 합은 1보다 작지만 남은 차이는 점점 작아진다.

이 경우 무한합이 1이라고 말하는 것은 마지막 항을 실제로 끝까지 더했다는 뜻이 아니다. 원하는 양의 오차보다 차이가 작아지도록 충분히 많은 항을 고를 수 있다는 뜻이다. 예를 들어 차이가  $1/100$ 보다 작게 하려면 일곱 항이면 된다.  $1/128 < 1/100$ 이기 때문이다.

항이 0에 가까워진다는 사실만으로 무한합이 존재하는 것은 아니다. 어떤 수열은 각 항이 작아져도 합이 계속 커진다. 여기서는 부분합의 정확한 식을 구했기 때문에 결론을 낼 수 있다. 무한을 다룰 때는 직관과 함께 오차를 제어하는 근거가 필요하다.



### 탐구

$1/2$ 부터 여덟 항을 더한 부분합과 1 사이의 차는 얼마인가?

### 풀이와 확인

$1/2^8=1/256$ 이다. 부분합은  $255/256$ 이다.

이러 읽기 / 수열로 읽는 변화

## 정사각형을 나누어 읽는 무한합

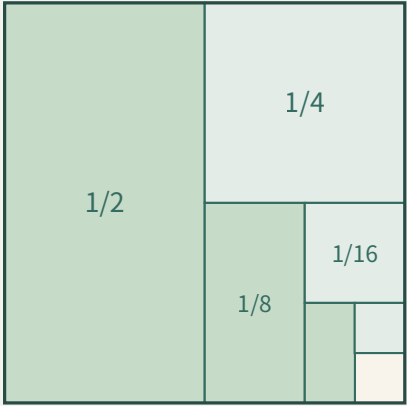
넓이 1인 정사각형을 계속 나누면 등비급수의 부분합과 남은 오차가 함께 보인다.

9장에서는  $1/2 + 1/4 + 1/8 + \dots$ 의 부분합이  $1 - 1/2^n$ 이라는 식을 구했다. 넓이가 1인 정사각형을 반으로 자르고 남은 쪽을 다시 반으로 자르는 일을 되풀이하면 이 식을 그림으로 읽을 수 있다. 여섯 번 자르면 색칠한 조각의 넓이는  $63/64$ 이다. 남은 빈칸의 넓이  $1/64$ 가 바로 부분합과 1의 차이이다.

같은 생각을 공비  $1/4$ 인 급수에 적용해 보자. 정사각형을 네 칸으로 나누어 오른쪽 아래 한 칸을 칠하고 왼쪽 위 칸을 다시 네 칸으로 나누는 일을 되풀이한다. 각 단계에서 칠하지 않은 두 칸과 칠한 한 칸은 넓이가 같으므로 어느 겹에서나 칠한 부분은 그 겹의  $1/3$ 이다. 따라서  $1/4 + 1/16 + 1/64 + \dots$ 은  $1/3$ 에 다가간다.

세 항까지 더하면  $21/64$ 이다.  $1/3$ 과의 차이는  $1/192$ 이며 이는 아직 나누지 않은 왼쪽 위 칸  $1/64$ 의  $1/3$ 과 같다. 일반적으로  $n$ 항 부분합은  $(1 - (1/4)^n)/3$ 이므로 차이는  $(1/4)^n/3$ 이다. 9장의 빼기 방법으로 구한 공식과 그림이 같은 결과를 준다.

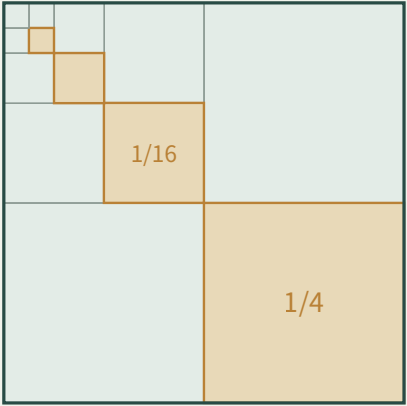
그림은 남은 넓이가 얼마인지 보여 주므로 오차를 제어하는 근거가 된다. 그러나 그림 몇 단계만으로 무한 과정이 끝난다고 말하지는 않는다. 남은 넓이를 원하는 만큼 작게 만들 수 있다는 사실을 식으로 확인할 때 무한합의 값이 정해진다. 여기의 정사각형 분할은 학습용 모형이다.



$1/2 + 1/4 + \cdots + 1/64 = 63/64$

남은 빈칸이 오차 1/64

반씩 나누면 합이 1에, 네 칸 중 한 칸씩 칠하면 1/3에 다가간다.



$1/4 + 1/16 + 1/64 + \cdots = 1/3$

겹마다 세 칸 중 한 칸

| 더한 항 수 | 공비 1/2의 부분합 | 공비 1/4의 부분합 |
|--------|-------------|-------------|
| 1      | 1/2         | 1/4         |
| 2      | 3/4         | 5/16        |
| 3      | 7/8         | 21/64       |

탐구

1/4+1/16+1/64+1/256의 값과 1/3과의 차이는 얼마인가?

풀이와 확인

합은 85/256이다. 1/3과의 차이는 1/768이며 이는 (1/4)^4/3과 같다. 항 하나를 더할 때마다 차이가 4분의 1로 줄어든다.

[S5] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Bhaskara II

## 작아지는 항인데 커지는 합

한 항의 크기와 전체 합의 크기는 다른 질문이다.

$1+1/2+1/3+1/4+\dots$ 을 생각하자. 각 항은 0에 가까워지지만 부분합은 한없이 커진다. 이를 보려면 분모가 2의 거듭제곱 사이에 있는 항들을 묶는다.  $1/3+1/4$ 는  $1/4$  두 개의 합보다 크므로  $1/2$ 보다 크다.

다음 묶음  $1/5$ 부터  $1/8$ 까지는 각 항이  $1/8$  이상이고 네 항이 있으므로 합이  $1/2$  이상이다.  $1/9$ 부터  $1/16$ 까지도 같은 이유로  $1/2$  이상이다. 새로운 묶음이 생길 때마다 적어도  $1/2$ 이 추가되므로 합에는 상한이 없다.

이 예는 무한급수에서 필요한 조건과 충분한 조건을 구분하게 한다. 수렴하려면 항이 0으로 가야 하지만 그것만으로 충분하지는 않다. 느린 발산은 짧은 계산표에서 잘 드러나지 않으므로 몇 개의 소수 결과만 보고 결론을 내리지 않는다.

$$1/3 + 1/4 \geq 2/4$$

$$1/5 + \dots + 1/8 \geq 4/8$$

$$1/17 + \dots + 1/32 \geq 16/32$$

작아지는 항인데 커지는 합의 계산 관계

### 탐구

$1/17$ 부터  $1/32$ 까지의 합은 왜  $1/2$  이상인가?

### 풀이와 확인

16개의 항이 있고 각 항이  $1/32$  이상이므로 전체가  $16/32=1/2$  이상이다.

## 수열의 조건을 비교하기

초기값과 변화 규칙과 합을 구하는 범위를 나누어 읽는다.

수열 A는 첫 항 1에서 매번 2를 더하고 수열 B는 첫 항 1에서 매번 두 배가 된다고 하자. 첫 네 항은 A가 1과 3과 5와 7이며 B가 1과 2와 4와 8이다. 넷째 항에서는 B가 더 크지만 앞의 네 항 합은 A가 16이고 B가 15이다.

한 항이 더 크다고 그때까지의 누적합도 반드시 더 큰 것은 아니다. 이전 항들이 남긴 차이가 있기 때문이다. 다섯 항까지 가면 A의 합은 25이고 B의 합은 31이 되어 순서가 바뀐다. 무엇을 비교하는지 제목에 명확하게 써야 한다.

표나 그래프를 만들 때 항의 값과 누적합을 서로 다른 계열로 표시한다. 두 규칙을 직접 계산한 뒤 식으로 일반화하면 처음의 관찰을 더 넓게 검토할 수 있다. 이 비교는 역사적 수열 문제를 현대의 데이터 읽기와 연결하는 작은 연습이다.

| 항 수 | A의 합 | B의 합 |
|-----|------|------|
| 3   | 9    | 7    |
| 4   | 16   | 15   |
| 5   | 25   | 31   |
| 6   | 36   | 63   |

한 항의 값과 다른 누적합의 비교

### 탐구

두 수열의 여섯 항까지의 합은 각각 얼마인가?

### 풀이와 확인

A는 처음 여섯 홀수의 합이므로 36이다. B는 1부터 32까지 두 배 수열이므로 63이다.

# 케랄라의 무한급수

## 남인도의 계산 전통

케랄라 수학의 성취는 한 인물의 이름과 한 줄의 공식만으로 설명되지 않는다.

마드하바와 뒤를 이은 케랄라의 학자들은 천문 계산과 관련된 급수 및 근사법을 발전시켰다. 오늘날의 역사 연구는 후대 문헌의 기록과 해설을 비교해 이 전통을 재구성한다. 어떤 결과가 누구에게 귀속되는지와 어떤 원문이 남아 있는지는 구분해서 읽어야 한다.

이 장에서는  $\pi/4=1-1/3+1/5-1/7+\dots$ 이라는 교대급수를 현대 기호로 다룬다. 당시의 표현과 현대 해석학의 엄밀한 정의를 같은 것으로 보지는 않는다. 역사적 성취를 인정하는 일과 오늘의 증명 기준으로 다시 분석하는 일은 함께 할 수 있다.

핵심 질문은 무한히 이어지는 식을 어떻게 유한한 계산에 쓸 것인가이다. 몇 항을 더할지와 그때 오차가 어느 정도인지 알아야 실제 값으로 사용할 수 있다. 계산 결과에 소수 자리가 많아도 오차 평가가 없다면 그 자릿수를 모두 믿을 수는 없다.

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \dots$$

유한한 계산 → 부분합  
부분합과 참값 사이 → 오차

남인도의 계산 전통의 계산 관계

### 탐구

무한급수를 실제 계산에 쓰려면 공식 외에 어떤 정보가 필요한가?

### 풀이와 확인

중단할 항의 수와 남은 오차의 크기를 평가하는 방법이 필요하다. 반올림 오차도 별도로 살펴야 한다.

[S7] V. N. Krishnachandran: On Mādhava and his correction terms

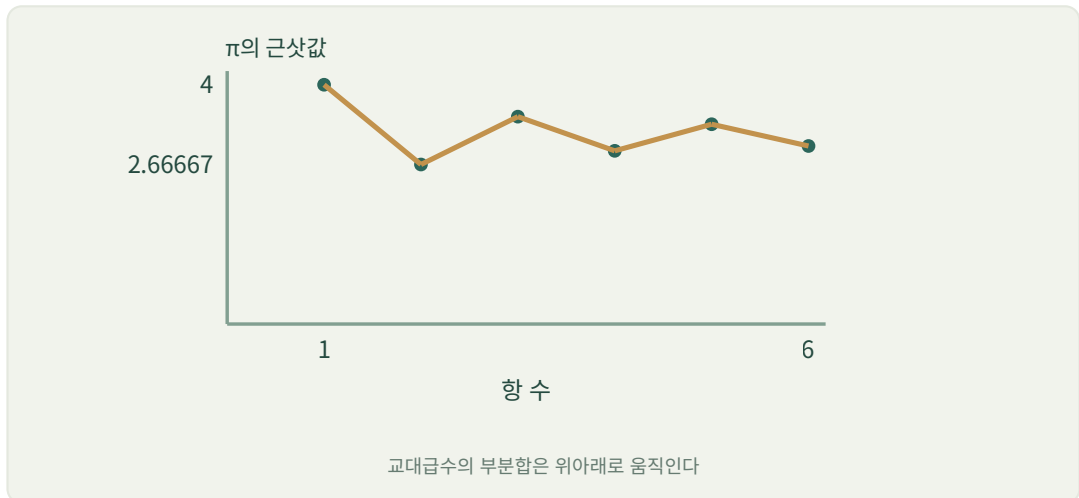
## 위아래로 번갈아 접근하기

교대하는 부호는 부분합이 참값의 양쪽에 놓이게 한다.

첫 항만 쓰면  $\pi$ 의 근삿값은 4이다. 두 항을 쓰면  $4(1-1/3)=8/3$ 이다. 세 항은  $52/15$ 이며 네 항은  $304/105$ 이다. 값이 커졌다 작아졌다 하면서 실제  $\pi$ 를 사이에 두고 움직인다.

항의 크기 1과  $1/3$ 과  $1/5$ 는 감소하며 0으로 간다. 이 조건을 가진 교대급수에서는 홀수 개 항의 부분합과 짝수 개 항의 부분합이 양쪽 경계를 만든다. 단순히 부호가 번갈아 나온다는 사실만으로 이런 결론을 쓰면 안 된다. 항 크기의 조건도 필요하다.

부분합의 그래프를 그릴 때 가로축을 항의 수로 정하고 세로축을  $\pi$ 의 근삿값으로 정한다. 연속된 두 값의 차이는 새로 더한 항의 네 배이다. 이 차이가 줄어드는 모습을 계산과 그림에서 함께 확인할 수 있다.



### 탐구

다섯째 항을 더하면 네 항의 근삿값에서 얼마나 커지는가?

### 풀이와 확인

다섯째 항은  $+1/9$ 이므로  $\pi$ 의 근삿값은  $4/9$ 만큼 커진다.

## 다음 항으로 오차 묶기

교대급수에서는 계산하지 않은 첫 항이 오차의 상한을 줄 수 있다.

$\pi/4$ 의 급수를  $n$ 개 항까지 더한 부분합을  $S(n)$ 이라 하자. 다음 항의 크기는  $1/(2n+1)$ 이다. 교대급수 오차 평가를 적용하면  $|\pi - 4S(n)| \leq 4/(2n+1)$ 이다. 부분합 자체를 정확히 계산했다는 조건에서 얻는 경계이다.

오차를 0.01보다 작게 보장하려면  $4/(2n+1) < 0.01$ 이어야 한다. 즉  $2n+1 > 400$ 이므로  $n=200$ 이면 충분하다. 소수 둘째 자리 정도의 작은 오차를 위해서도 많은 항이 필요하다. 이 급수는 이해하기 쉽지만 수렴이 느리다.

오차 상한이 0.01보다 작다는 말과 반올림한 소수 둘째 자리가 반드시 같다는 말은 완전히 동일하지 않다. 참값이 반올림 경계에 얼마나 가까운지도 영향을 준다. 계산의 정확성을 설명할 때는 어떤 기준의 오차인지 명확하게 표현한다.

| 항 수 $n$ | 오차 상한    |
|---------|----------|
| 20      | $4/41$   |
| 200     | $4/401$  |
| 2000    | $4/4001$ |

$\pi$ 의 오차를 다음 항으로 묶는 표

### 탐구

오차를 0.001보다 작게 보장하려면 몇 항이면 충분한가?

### 풀이와 확인

$4/(2n+1) < 0.001$ 에서  $2n+1 > 4000$ 이다. 따라서  $n=2000$ 이면 충분하다.

## 남은 꼬리를 보정하기

부분합 뒤의 영향을 어림해 덧붙이면 적은 계산으로 정확도를 높일 수 있다.

무한급수의 앞부분만 더하면 뒤에 남은 항들의 효과가 오차가 된다. 그 꼬리를 근사하는 별도의 식을 덧붙이는 것이 보정항의 발상이다. 마드하바에게 귀속되는 보정항은 현대 연구에서도 원문과 설명을 비교하며 분석한다.

여기서는 단순한 교육용 보정을 사용한다.  $\pi/4$ 의  $n$ 항 부분합에 다음 항의 절반인  $(-1)^n/[2(2n+1)]$ 을 더한다. 이것은 연속한 두 부분합의 평균과 같다. 참값이 두 부분합 사이에 있으므로 평균을 쓰면 보장되는 최대 오차가 그 간격의 절반으로 줄어든다.

이 간단한 평균을 역사적 마드하바 보정 공식이라고 부르지는 않는다. 보정이라는 생각을 보여 주는 현대의 예시이다. 역사에 알려진 방법을 설명할 때는 실제 전승 공식과 수업을 위해 만든 쉬운 대안을 구분해야 독자가 출처를 오해하지 않는다.

$$\begin{aligned} &\text{참값은 } S(n) \text{과 } S(n+1) \text{ 사이} \\ &\text{평균} = S(n) + (-1)^n/[2(2n+1)] \\ &\text{최대 거리} = \text{구간 길이의 절반} \end{aligned}$$

남은 꼬리를 보정하기의 계산 관계

### 탐구

두 근삿값 3.0과 3.4 사이에 참값이 있다고만 알 때 평균을 쓰면 최대 오차는 얼마인가?

### 풀이와 확인

평균은 3.2이며 최대 오차는 0.2이다. 구간의 절반 길이로 오차를 묶는다.

[S7] V. N. Krishnachandran: On Mādhava and his correction terms

## 전승된 보정항을 직접 계산하다

남은 항들의 효과를 추정하는 공식은 적은 계산으로도 큰 차이를 만든다.

케랄라 문헌의 보정항을 검토한 연구는  $n$ 항 부분합 뒤에 붙이는 근사량  $n/(4n^2+1)$ 을 소개한다. 현대 기호로  $S(n)=1-1/3+\dots+(-1)^{(n-1)}/(2n-1)$ 이라 적으면  $\pi/4$ 를  $S(n)+(-1)^n n/(4n^2+1)$ 로 근사한다. 여기서는 전승 공식과 우리가 하는 수치 검산을 구분한다.

$n=2$ 이면  $S(2)=2/3$ 이다. 보정량은  $2/17$ 이며 부호가 양수이므로 합은  $40/51$ 이다. 네 배 하면  $\pi$ 의 근삿값  $160/51$ 을 얻는다. 소수로 약  $3.1372549$ 이다. 보정 전의  $8/3$ 보다 원주율에 훨씬 가까워졌다.

$n=4$ 에서는  $S(4)=76/105$ 이고 보정량은  $4/65$ 이다. 두 분수를 더한 뒤 네 배 하면  $4288/1365$ 이며 약  $3.1413919$ 이다. 기준값  $\pi \approx 3.1415926536$ 과 비교한 절대오차는 약  $0.0002007$ 이다. 네 항만 사용했을 때의 성능을 직접 확인한 결과이다.

두 사례의 성공이 모든  $n$ 에 대한 오차 보증을 대신하지는 않는다. 일반적인 정확도를 말하려면 남은 차이를 평가하는 별도 논증이 필요하다. 또한 앞의 두 부분합을 평균하는 학습용 보정과 이 전승 공식은 다르다. 님은 목적을 가진 절차라도 실제 식과 출처를 함께 적어야 한다.

| 사용한 항 수 | 보정 뒤 $\pi$ 근삿값 | 대략적인 절대오차 |
|---------|----------------|-----------|
| 2       | $160/51$       | 0.0043378 |
| 4       | $4288/1365$    | 0.0002007 |

### 탐구

$n=3$ 일 때 보정량을 더해야 하는가 빼야 하는가?

### 풀이와 확인

$(-1)^3=-1$ 이므로  $3/37$ 을 뺀다. 세 항의 부분합은  $\pi/4$ 보다 크다. 보정의 부호를 빠뜨리면 오히려 그 차이를 키운다.

[S7] V. N. Krishnachandran: On Mādhava and his correction terms

## 변수를 넣은 급수

같은 구조의 급수도 입력값에 따라 수렴 속도가 달라진다.

아크탄젠트의 급수를 현대 기호로 쓰면  $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \dots$ 이다.  $|x| \leq 1$ 에서 적절한 수렴 해석으로 사용할 수 있으며  $x=1$ 을 넣으면  $\pi/4$ 의 급수가 된다. 여기서 각도는 라디안으로 측정한다.

$x=1/2$ 이면 항의 크기가  $1/2$ 와  $1/24$ 와  $1/160$ 으로 빠르게 작아진다. 첫 두 항의 합은  $11/24$ 이다. 다음 항의 크기  $1/160$ 이 오차의 상한을 준다.  $x=1$ 일 때보다 거듭제곱이 작아지는 효과가 추가되어 계산이 빨라진다.

입력값을 작게 만든 뒤 각도의 덧셈 관계로 원하는 값을 복원할 수 있다면 효율이 좋아진다. 다만 그런 변환을 쓸 때는 각도가 속한 범위를 확인해야 한다. 삼각함수의 주기 때문에 같은 탄젠트값이 곧 같은 각도를 뜻하지 않을 수 있기 때문이다.

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \dots$$

$$x = 1/2$$

$$1/2 - 1/24 + 1/160 - \dots$$

변수를 넣은 급수의 계산 관계

### 탐구

$x=1/2$ 에서 첫 세 항의 부호와 분모를 적어 보자.

### 풀이와 확인

$+1/2$ 와  $-1/24$ 와  $+1/160$ 이다. 각 항은  $x$ 의 홀수 거듭제곱을 그 홀수로 나눈 값이다.

## 기하급수에서 출발하는 설명

적분을 이용하면 아크탄젠트 급수의 형태가 어디서 나오는지 볼 수 있다.

$|t| < 1$ 에서  $1/(1+t^2) = 1 - t^2 + t^4 - t^6 + \dots$ 이다. 이는 공비가  $-t^2$ 인 기하급수이다. 0부터  $x$ 까지 적분하면 각 거듭제곱의 차수가 하나 늘고 새 지수로 나누어져  $x - x^3/3 + x^5/5 - \dots$ 이 나타난다.

왼쪽 적분은  $\arctan x$ 이다. 다만 무한합을 항별로 적분하는 데에는 정당화가 필요하다.  $|x| < 1$ 인 닫힌 구간에서 수렴을 제어한 뒤 진행하고 끝점  $x=1$ 은 추가 논증으로 다룬다. 계산 모양이 자연스럽다고 모든 무한 연산을 자유롭게 바꿀 수 있는 것은 아니다.

이 쪽의 유도는 현대 미적분을 이용한 설명이다. 이를 케탈라 원문의 증명 문장과 동일하다고 소개하지 않는다. 같은 공식을 여러 방식으로 이해할 수 있지만 각 설명이 쓰는 개념과 시대적 배경은 분명히 밝혀야 한다.

$$1/(1+t^2) = 1 - t^2 + t^4 - \dots$$

0부터  $x$ 까지 적분

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \dots$$

기하급수에서 출발하는 설명의 계산 관계

탐구

$-t^2$ 을 0부터  $x$ 까지 적분하면 왜  $-x^3/3$ 이 되는가?

풀이와 확인

$t^3/3$ 의 미분이  $t^2$ 이므로 부정적분은  $-t^3/3$ 이다. 0과  $x$ 의 값을 빼면  $-x^3/3$ 이 된다.

## 작은 두 각도로 원주율을 계산하기

급수의 입력을 줄이면 같은 항 수에서도 오차가 빠르게 작아진다.

$\alpha = \arctan(1/2)$ 와  $\beta = \arctan(1/3)$ 이라 하자. 탄젠트 덧셈공식에 넣으면  $\tan(\alpha + \beta) = (1/2 + 1/3) / (1 - 1/6) = 1$ 이다. 두 각은 양수이며 각각  $\pi/4$ 보다 작으므로 합은 0과  $\pi/2$  사이이다. 이 범위에서 탄젠트가 1인 각은  $\pi/4$ 이다.

따라서  $\pi = 4[\arctan(1/2) + \arctan(1/3)]$ 이다. 두 아크탄젠트에 앞서 배운 교대급수를 적용할 수 있다.  $x=1$ 을 바로 넣는 급수와 달리 거듭제곱 항에 각각  $1/4$ 과  $1/9$ 의 감소 비율이 추가된다. 입력을 줄이는 변환이 계산 비용을 낮춘 것이다.

각 급수를 다섯 항까지 더하면 각각의 다음 항 크기는  $(1/2)^{11/11}$ 과  $(1/3)^{11/11}$ 이다. 두 오차를 더한 뒤 4를 곱하면  $\pi$ 에 대한 절대오차는 약 0.0001797보다 작다. 원래  $x=1$  급수의 열항에 적용한 상한  $4/21$ 보다 훨씬 작다.

이 항등식과 오차 비교는 현대의 독자를 위해 제시한 계산 전략이다. 특정 케랄라 학자가 이 두 입력을 사용했다는 역사적 주장은 하지 않는다. 수렴이 빠른 식을 선택하는 일과 그 식의 전송 경로를 입증하는 일을 구분하면서도 같은 수학적 발상을 확장할 수 있다.

| 계산 방식       | 총 사용 항 수 | $\pi$ 오차의 상한   |
|-------------|----------|----------------|
| $x=1$ 급수    | 10       | $4/21$         |
| 두 작은 입력의 급수 | 5+5      | 약 0.0001797 미만 |

### 탐구

탄젠트값이 같다는 사실만으로 두 각이 같다고 해도 되는가?

### 풀이와 확인

안 된다. 탄젠트는 주기가  $\pi$ 이다. 이 예에서는 두 각의 합이 0과  $\pi/2$  사이임을 확인했으므로  $\pi/4$ 로 결정할 수 있다.

## 빠른 계산과 검증

계산기를 이용해도 어떤 수를 더했는지 남기면 결과를 재현할 수 있다.

$\pi$ 의 교대급수를 프로그램이나 표로 계산한다면 항 번호  $k$ 를 0부터 시작해  $4(-1)^k/(2k+1)$ 을 더하면 된다.  $n$ 개 항은  $k=0$ 부터  $n-1$ 까지이다. 시작 번호를 1로 바꾸면서 식을 그대로 두면 첫 항 4를 빠뜨리는 오류가 생긴다.

결과 옆에는 항의 수와 오차 상한  $4/(2n+1)$ 을 함께 기록한다. 계산기가 표시한 소수 열다섯 자리가 실제로 열다섯 자리의 정확도를 보장하지는 않는다. 계산한 부분합의 반올림 정밀도와 무한급수의 절단 오차는 서로 다른 문제이다.

검산에는 처음 두세 항을 손으로 계산한 값과 프로그램의 중간값을 비교하는 방법이 유용하다. 부호가 바뀌는 순서와 분모가 홀수로 증가하는 규칙을 확인한다. 큰 계산을 하기 전에 작은 사례에서 구조를 확인하면 눈에 띄지 않는 반복 오류를 줄일 수 있다.

$$\text{항 } k = 4(-1)^k/(2k + 1)$$

$$k = 0\text{부터 } n-1\text{까지}$$

기록 부분합 / 항 수 / 오차 상한

빠른 계산과 검증의 계산 관계

### 탐구

$k=0$ 부터  $k=9$ 까지 더했다면 항의 수와 오차 상한은 무엇인가?

### 풀이와 확인

열 항을 더했다.  $\pi$ 에 대한 오차 상한은  $4/21$ 이다. 마지막 번호 9를 항의 수로 사용하면 안 된다.

## 발견과 전파를 구분하기

비슷한 공식이 두 곳에 나타났다는 사실만으로 전달 경로가 확정되지는 않는다.

수학사에서 어떤 결과가 먼저 기록되었는지와 그 지식이 다른 지역에 전달되었는지는 다른 질문이다. 전자는 문헌의 연대와 내용을 검토하고 후자는 접촉 경로와 번역과 인용 같은 증거를 찾는다. 공식이 같다는 이유만으로 그 사이의 경로가 자동으로 채워지지는 않는다.

케랄라 급수와 유럽의 후대 결과를 비교할 때에도 각 전통의 문제와 표현과 증명 방식을 함께 살펴야 한다. 발견의 가치를 인정하려고 확인되지 않은 전파 이야기를 보탬 필요는 없다. 불확실한 부분을 남겨 두는 설명이 더 정확할 수 있다.

독서 기록에는 확인된 문헌 사실과 현대적 수학 해석과 전파 가설을 구분해 적어 보자. 어떤 주장이 새 자료로 바뀔 수 있는지도 표시한다. 이 태도는 역사적 공로를 단순한 순위 경쟁으로 줄이지 않고 지식이 자라는 여러 방식을 이해하게 한다.

### 문헌의 내용과 연대 접촉과 번역의 증거 확인된 사실과 가설을 구분

발견과 전파를 구분하기의 계산 관계

#### 탐구

두 책에 같은 급수가 있을 때 전달을 입증하려면 어떤 추가 자료가 도움이 되는가?

#### 풀이와 확인

한 저자가 다른 책을 읽었다는 기록과 번역본 및 구체적 접촉 경로 등이 도움이 된다. 공식의 일치만으로는 충분하지 않다.

인도관 / 12

# 사인표와 하늘의 계산

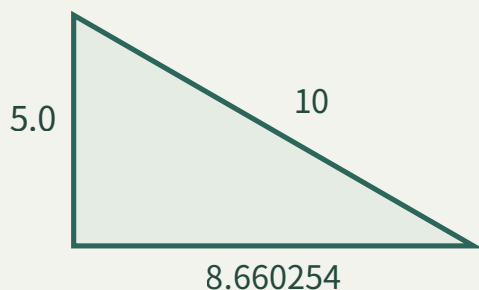
## 각도를 길이로 바꾸기

원의 한 각도에 대응하는 높이를 기록하면 반복되는 천문 계산을 돕는 표가 된다.

반지름이 1인 원에서 중심각  $\theta$ 를 정하고 원 위 점에서 가로축으로 수선을 내리자. 그 높이가 현대의  $\sin \theta$ 이다. 반지름을  $R$ 로 바꾸면 높이는  $R \sin \theta$ 가 된다. 비율인 사인값과 실제 길이를 나타내는 값은 구별해야 한다.

아리아바타의 저술에는 사인 계산과 표가 등장한다. 역사적 표를 오늘의 계산기 출력과 비교할 때는 사용한 반지름과 각도 간격과 반올림 규칙을 확인해야 한다. 숫자의 크기만 보고 오늘의 사인값과 다르다고 판단하면 단위를 놓치게 된다.

이 장의 그림과 표는 현대 정의로 새로 만든 학습 자료이다. 실제 필사본의 수치 배열을 복제한 것은 아니다. 원과 직각삼각형을 오가며 각도에서 길이를 얻는 구조를 이해하면 서로 다른 시대의 표가 수행한 역할을 더 쉽게 읽을 수 있다.



30도에 대응하는 높이 5. 밀변 표시는 근삿값

### 탐구

반지름이 10이고 각도가 30도이면 수직 높이는 얼마인가?

### 풀이와 확인

$\sin 30^\circ = 1/2$ 이므로 높이는  $10 \times 1/2 = 5$ 이다. 사인값 1/2와 길이 5는 다른 양이다.

[S2] University of St Andrews: Aryabhata I

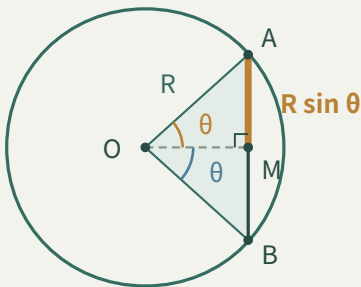
## 현과 반현의 관계

같은 원에서도 어떤 선분을 재는지에 따라 표에 들어가는 값이 달라진다.

중심각이  $2\theta$ 인 현의 양끝을 원의 중심과 이으면 이등변삼각형이 된다. 중심에서 현의 중점으로 수선을 내리면 두 직각삼각형으로 나뉜다. 현의 절반 길이는  $R \sin \theta$ 이므로 전체 현은  $2R \sin \theta$ 이다.

중심각  $60^\circ$ 의 현을 반지름 1인 원에서 구하면  $2\sin 30^\circ = 1$ 이다. 이 경우 중심과 양끝이 만드는 삼각형은 정삼각형이다. 반면  $\sin 60^\circ$ 는  $\sqrt{3}/2$ 이므로 두 값을 그대로 비교하면 서로 다르다. 각도를 절반으로 바꾸는 관계가 끼어 있다.

고전 삼각법의 표를 비교할 때 현과 반현을 같은 이름으로 섞지 않는다. 어느 각도에 어느 선분이 대응하는지 도형에 표시하면 번역된 용어의 차이도 정리할 수 있다. 그림은 단순한 삼화가 아니라 정의를 정확히 읽기 위한 도구이다.



중심각  $AOB = 2\theta$

반현  $AM = R \sin \theta$

현  $AB = 2R \sin \theta$

$2\theta = 60^\circ$ 이면  $AB = 2R \sin 30^\circ = R$

중심에서 내린 수선이 현을 반으로 나누어 반현  $R \sin \theta$ 를 만든다.

### 탐구

반지름 5인 원에서 중심각  $60^\circ$ 인 현의 길이는 얼마인가?

### 풀이와 확인

$2 \times 5 \times \sin 30^\circ = 5$ 이다. 반지름과 같은 길이가 된다.

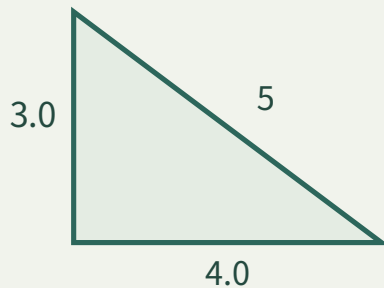
## 직각삼각형의 세 비율

같은 각도를 가진 닮은 삼각형은 변의 비율을 공유한다.

높이가 3이고 밑변이 4이며 빗변이 5인 직각삼각형을 생각하자. 밑변에 붙은 예각을  $\theta$ 로 놓으면  $\sin \theta = 3/5$ 이고  $\cos \theta = 4/5$ 이며  $\tan \theta = 3/4$ 이다. 모두 같은 각도를 기준으로 하지만 분모와 비교 대상이 다르다.

삼각형의 모든 변을 두 배로 늘리면 6과 8과 10이 된다. 각도는 같고 세 비율도 그대로이다. 그래서 사인표 하나를 여러 크기의 삼각형에 적용할 수 있다. 원래 길이를 얻으려면 마지막에 실제 크기를 곱해야 한다.

어느 예각을 기준으로 삼는지도 중요하다. 다른 예각을 택하면 높이와 밑변의 역할이 바뀌어 사인과 코사인이 서로 바뀐다. 도형을 돌려 그렸다고 비율이 바뀌는 것은 아니지만 기준 각도를 바꾸면 이름에 대응하는 변이 바뀐다.



밑변 오른쪽의 예각을 기준으로 읽는 직각삼각형

### 탐구

빗변이 20이며  $\sin \theta = 3/5$ 이면 맞은편 변의 길이는 얼마인가?

### 풀이와 확인

$20 \times 3/5 = 12$ 이다. 원래 3과 4와 5인 삼각형을 네 배 한 경우와 같다.

이어 읽기 / 사인표와 하늘의 계산

## 반현과 호와 접선의 길이 비교

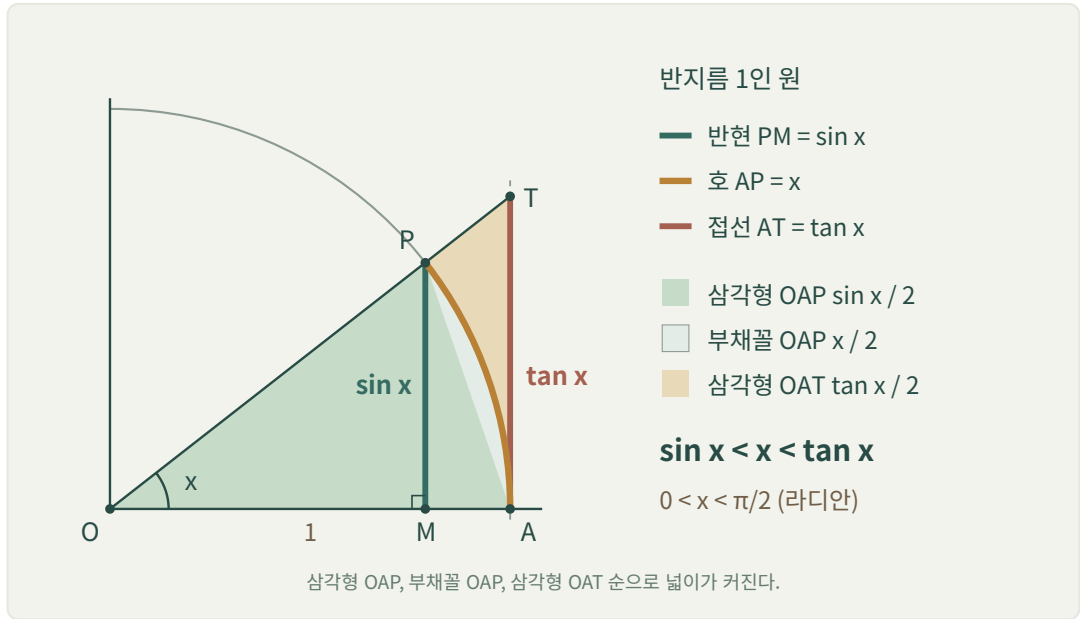
반지름 1인 원에서 세 넓이를 비교하면 작은 각에서 사인값이 라디안 값에 가까운 이유가 드러난다.

11장에서는 반지름 1인 원에서 중심각  $2x$ 인 현의 절반, 곧 각  $x$ 에 대한 반현의 길이가  $\sin x$ 임을 보았고 라디안은 호의 길이라는 점도 확인했다. 그렇다면 같은 각에 대응하는 반현과 호는 얼마나 다를까? 그림에서 점 P에서 내린 수선 PM이 반현  $\sin x$ 이고 A에서 P까지의 호 길이가  $x$ 이다. A에서 그은 접선이 반직선 OP와 만나는 점을 T라 하면 AT의 길이는  $\tan x$ 이다.

세 도형의 넓이를 비교하자. 삼각형 OAP는 밑변 1과 높이  $\sin x$ 를 가지므로 넓이가  $\sin x/2$ 이다. 부채꼴 OAP의 넓이는 원 전체 넓이  $\pi$ 에  $x/(2\pi)$ 를 곱한  $x/2$ 이다. 삼각형 OAT는 밑변 1과 높이  $\tan x$ 를 가지므로 넓이가  $\tan x/2$ 이다. 세 도형이 차례로 앞의 도형을 품으므로  $0 < x < \pi/2$ 에서  $\sin x < x < \tan x$ 가 성립한다.

부등식의 양쪽을  $\sin x$ 로 나누면  $1 < x/\sin x < 1/\cos x$ 이다.  $x$ 가 0에 가까워지면  $\cos x$ 는 1에 가까워지므로  $\sin x/x$ 도 1에 가까워진다. 표에서  $x=0.1$ 이면 비율이 약 0.9983이지만  $x=1$ 이면 약 0.8415로 떨어진다. 작은 각도에서  $\sin x$ 를  $x$ 로 바꾸어 써도 된다는 말은 이런 오차의 크기를 알고 쓸 때에만 의미가 있다.

이 비교는 표를 만들 때도 쓸모가 있다. 각도를 라디안으로 바꾸어 두면 아주 작은 각의 사인값은 라디안 값 자체로 어림하고 그 오차가 어느 쪽으로 치우치는지도 알 수 있다. 여기의 넓이 논증은 현대의 교과서식 설명이며 아리아바타의 사인표가 이 방법으로 만들어졌다고 주장하는 것은 아니다.



| x (라디안) | $\sin x$ | $\tan x$ | $\sin x / x$ |
|---------|----------|----------|--------------|
| 0.1     | 0.0998   | 0.1003   | 0.9983       |
| 0.5     | 0.4794   | 0.5463   | 0.9589       |
| 1.0     | 0.8415   | 1.5574   | 0.8415       |

#### 탐구

$x=0.5$ 일 때  $\sin x$ 와  $x$ 와  $\tan x$ 의 크기 순서를 확인하고 반현과 호의 차이를 구하자.

#### 풀이와 확인

$\sin 0.5 \approx 0.4794$ 이고  $\tan 0.5 \approx 0.5463$ 이므로  $0.4794 < 0.5 < 0.5463$ 이다. 반현과 호의 차이는 약 0.0206이다. 각이 클수록 차이가 커지므로 근사는 작은 각에서만 쓴다.

[S2] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Aryabhata I

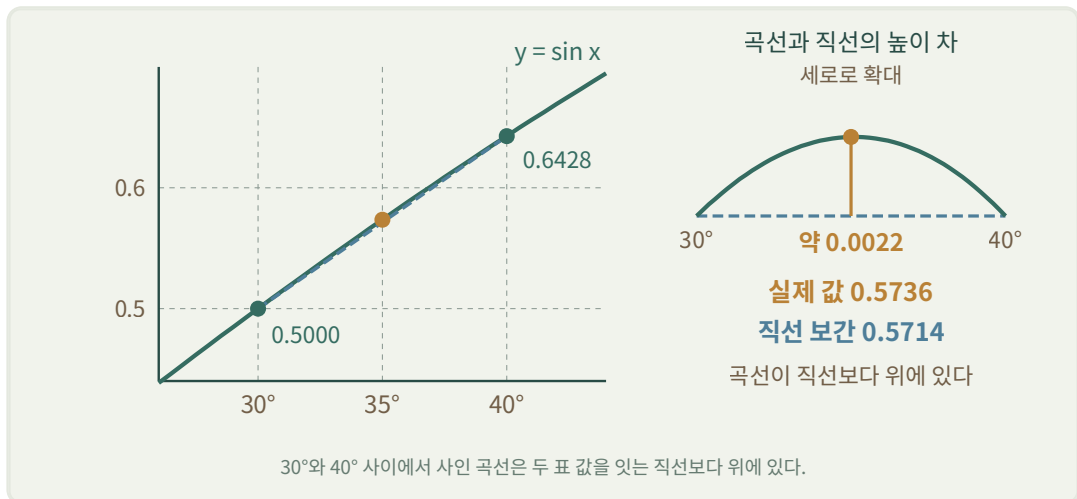
## 표 사이의 값을 읽기

계산표에 없는 각도는 주변 값으로 근사하되 그 방법의 한계를 함께 적는다.

학습용 표에서  $\sin 30^\circ = 0.5000$ 과  $\sin 40^\circ \approx 0.6428$ 을 알고 있다고 하자. 35도는 두 각도의 가운데이므로 선형 보간을 하면 두 값의 평균 0.5714를 얻는다. 실제  $\sin 35^\circ$ 는 약 0.5736이므로 차이는 약 0.0022이다.

사인 그래프는 직선이 아니므로 각도의 중간값이 사인값의 정확한 중간값은 아니다. 표의 간격을 줄이면 보간 오차가 줄어들 수 있지만 반올림 오차도 남는다. 보간법 자체의 오차와 표에 저장된 수치의 오차를 구분해서 기록한다.

이 예의 각도와 숫자는 원리를 보이기 위해 새로 구성했다. 역사적 표를 다룰 때에는 실제 문헌이 어떤 차분과 보간 규칙을 사용했는지 별도의 자료로 확인해야 한다. 오늘의 편리한 방법을 과거의 계산법으로 잘못 귀속하지 않는 것이 중요하다.



### 탐구

같은 두 표 값으로 32도를 선형 보간하면 얼마인가?

### 풀이와 확인

30도에서 전체 간격의 2/10만큼이므로  $0.5000 + 0.2 \times 0.1428 = 0.52856$ 이다. 이는 근삿값이다.

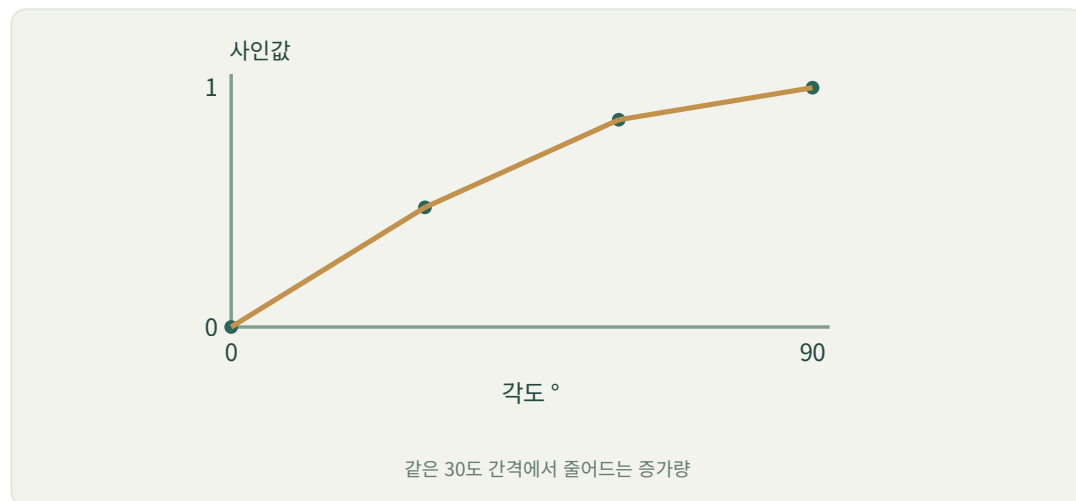
## 차분으로 표의 변화를 보기

값의 차이를 기록하면 증가 속도가 어떻게 바뀌는지 보인다.

$\sin 0^\circ$ 와  $\sin 30^\circ$ 와  $\sin 60^\circ$ 와  $\sin 90^\circ$ 의 값은 각각 0과  $1/2$ 과  $\sqrt{3}/2$ 과 1이다. 소수로 읽으면 0과 0.5000과 약 0.8660과 1.0000이다. 각도 간격은 모두 30도이지만 사인값의 증가량은 약 0.5000과 0.3660과 0.1340으로 작아진다.

따라서 사인이 0도에서 90도까지 증가한다는 말과 일정한 속도로 증가한다는 말은 다르다. 처음에는 같은 각도 변화가 큰 높이 변화를 만들지만 꼭대기에 가까워질수록 높이가 덜 변한다. 원 위 점의 이동을 상상하면 이유를 직관적으로 이해할 수 있다.

차분표는 이러한 변화의 크기를 압축해서 기록한다. 다만 간격을 바꾸면 차분도 달라지므로 서로 다른 표를 비교할 때 간격을 함께 확인한다. 현대의 차분 계산을 연습하면서 역사적 표가 반복 계산에 어떤 도움을 주었을지 생각해 보자.



### 탐구

60도에서 90도 사이의 사인값 증가량은 정확히 무엇인가?

### 풀이와 확인

$1 - \sqrt{3}/2$ 이다. 약 0.1340이며 0도에서 30도까지의 증가량  $1/2$ 보다 작다.

## 라디안이 필요한 급수

삼각함수의 급수에 각도를 넣기 전에는 단위를 확인해야 한다.

현대의 사인 급수는  $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$ 이다. 이 식에서  $x$ 는 라디안이다. 30도를 그대로 30이라고 넣으면 엉뚱한 계산이 된다. 30도는  $\pi/6$ 라디안이므로 먼저 단위를 바꾸어야 한다.

작은 값  $x=0.1$ 라디안에서 두 항을 쓰면  $0.1 - 0.001/6 \approx 0.0998333$ 이다. 다음 항은  $0.00001/120$ 로 약  $0.000000833$ 이다. 작은 각도에서  $\sin x$ 가  $x$ 에 가깝다는 사실과 그 차이를 급수로 확인할 수 있다.

라디안은 호의 길이를 반지름으로 나눈 비율이다. 반지름 1인 원에서는 호 길이가 곧 각도의 라디안 값이 된다. 도와 라디안은 같은 각도를 다른 척도로 나타내므로 숫자만 떼어 비교하지 않는다. 계산기의 각도 설정을 확인하는 습관도 이 정의에서 출발한다.

$$180^\circ = \pi \text{ 라디안}$$

$$\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 - \dots$$

$x$ 는 라디안으로 입력

라디안이 필요한 급수의 계산 관계

### 탐구

90도를 라디안으로 쓰면 무엇인가?

### 풀이와 확인

$\pi/2$ 이다. 한 바퀴 360도가  $2\pi$ 라디안이므로 그 4분의 1이다.

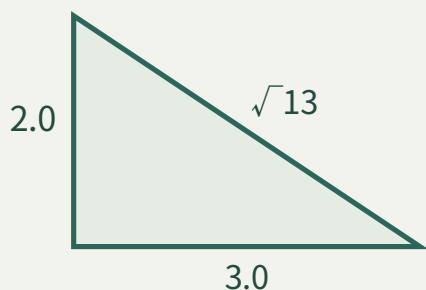
## 그림자로 높이 구하기

같은 태양 아래의 직각삼각형을 닮음으로 연결하면 직접 재기 어려운 길이를 구할 수 있다.

수직 막대의 높이가 2미터이고 그림자 길이가 3미터라고 하자. 같은 시각에 평평한 땅 위 탑의 그림자가 18미터라면 높이와 그림자의 비가 같다고 가정할 수 있다.  $h/18=2/3$ 이므로 탑의 높이는 12미터이다.

이 모형은 태양광선을 평행하게 보고 막대와 탑이 수직이며 땅이 수평이라고 가정한다. 그림자의 끝이 흐리거나 지면이 기울어져 있으면 측정값이 달라진다. 계산식의 정확성과 실제 측정의 정확성을 따로 평가해야 한다.

같은 관계를 탄젠트로 쓰면 태양 고도각  $\theta$ 에 대해  $\tan \theta = \text{높이}/\text{그림자}$ 이다. 먼저 비례로 풀어 본 뒤 삼각비 이름을 붙이면 공식이 왜 성립하는지 이해하기 쉽다. 역사적 측량의 특정 현장을 복원한 예는 아니며 기본 원리를 보여 주는 현대 활동이다.



수직 막대와 그림자가 이루는 직각삼각형

### 탐구

같은 조건에서 그림자가 15미터인 물체의 높이는 얼마인가?

### 풀이와 확인

$15 \times 2/3 = 10$ 미터이다. 모든 길이는 같은 단위로 맞추어야 한다.

## 천문표를 읽는 네 가지 정보

숫자표를 사용할 때는 값보다 먼저 정의와 단위와 기준을 확인한다.

표의 열 제목이 각도이고 행에 30이라는 값이 있어도 그것이 도인지 분인지 라디안인지 알 수 없으면 계산할 수 없다. 사인이라는 이름 옆의 수 역시 비율인지 특정 반지름에 대응하는 길이인지 확인해야 한다. 표의 머리말은 숫자만큼 중요한 정보이다.

시간에 따른 천체 위치표라면 기준 날짜와 시간 척도도 필요하다. 같은 경도값이라도 기준 방향이 다르면 다른 위치를 뜻할 수 있다. 서로 다른 표를 비교하려면 먼저 같은 단위와 같은 기준으로 변환해야 한다.

독자는 작은 사인표를 직접 만들어 이 원칙을 연습할 수 있다. 제목에는 현대 정의에 따른 사인값이라고 쓰고 각도 단위와 반올림 자릿수와 계산 방법을 적는다. 표의 빈칸과 알 수 없는 값을 0으로 채우지 않는 것도 중요하다. 0은 실제 값이며 자료 없음의 표시와 다르다.

정의 어떤 길이 또는 비율인가  
단위와 기준 무엇을 1로 삼는가  
정밀도 어디까지 반올림했는가

천문표를 읽는 네 가지 정보의 계산 관계

### 탐구

사인표의 빈칸을 0으로 채우면 왜 문제가 되는가?

### 풀이와 확인

계산하지 않았다는 뜻을 실제 사인값이 0이라는 주장으로 바꾸기 때문이다. 자료 없음과 수치 0은 다른 정보이다.

# 라마누잔과 남겨진 노트

## 공식이 남은 페이지

짧게 기록된 결과는 독자에게 검증과 설명이라는 긴 작업을 남길 수 있다.

라마누잔의 노트는 수학적 결과가 어떻게 기록되고 다시 연구되는지 보여 주는 중요한 자료이다. 인도 수리과학연구소의 소개 자료와 케임브리지의 소장 기록은 노트와 관련 문헌을 살피는 출발점이 된다. 전기적 일화와 실제 수학 내용을 구분해서 읽는 편이 좋다.

노트에 식 하나가 적혀 있다고 해서 그 식을 둘러싼 모든 계산과 동기가 보존된 것은 아니다. 후대 연구자는 성립 범위를 찾고 증명을 구성하고 다른 결과와의 연결을 조사한다. 발견의 기록과 완성된 교과서의 설명은 서로 다른 목적을 가진다.

이 장에서는 라마누잔의 모든 고급 이론을 요약하려 하지 않는다. 정수의 분할과 수치 실험과 원고 읽기를 통해 결과를 발견하고 확인하는 태도를 연습한다. 수학자의 직관을 신비한 능력으로만 설명하기보다 기록된 식을 실제로 계산하고 질문하는 독자가 되어 보자.

## 기록된 식 성립 범위와 계산 사례 증명과 새로운 연결

공식이 남은 페이지의 계산 관계

### 탐구

노트에 정답만 있으면 무엇을 추가로 조사해야 하는가?

### 풀이와 확인

기호의 뜻과 성립 조건과 증명 및 관련된 다른 결과를 조사한다. 한두 사례의 성공은 일반적인 증명을 대신하지 않는다.

[S9] Institute of Mathematical Sciences: Ramanujan's Notebooks / [S10] Trinity College Cambridge: Ramanujan manuscript catalogue

## 정수를 나누는 방법

정수의 분할에서는 순서를 바꾸어도 같은 합으로 센다.

4를 양의 정수의 합으로 나타내는 방법을 순서와 무관하게 세어 보자. 4 자체와  $3+1$ 과  $2+2$ 와  $2+1+1$ 과  $1+1+1+1$ 의 다섯 가지이다.  $3+1$ 과  $1+3$ 은 같은 분할이므로 두 번 세지 않는다. 분할수  $p(4)$ 는 5이다.

빠짐없이 나열하려면 각 분할의 항을 큰 수부터 적는다. 첫 항이 4인 경우와 3인 경우와 2인 경우와 1인 경우로 나누면 중복을 피할 수 있다. 첫 항이 2이면 남은 합 2를 2 이하의 수로만 분할해야 한다.

순서를 구별하는 문제라면 답이 달라진다. 예를 들어  $1+1+2$ 와  $1+2+1$ 과  $2+1+1$ 은 그 경우 서로 다른 배열이다. 분할 문제의 첫 문장에는 순서를 구별하지 않는다고 명시하는 것이 좋다. 이름보다 세는 규칙이 먼저이다.

$$\begin{array}{c}
 4 \\
 3 + 1 / 2 + 2 \\
 2 + 1 + 1 \\
 1 + 1 + 1 + 1
 \end{array}$$

정수를 나누는 방법의 계산 관계

### 탐구

3의 분할을 모두 적고  $p(3)$ 을 구하자.

### 풀이와 확인

3과  $2+1$ 과  $1+1+1$ 의 세 가지이므로  $p(3)=3$ 이다.

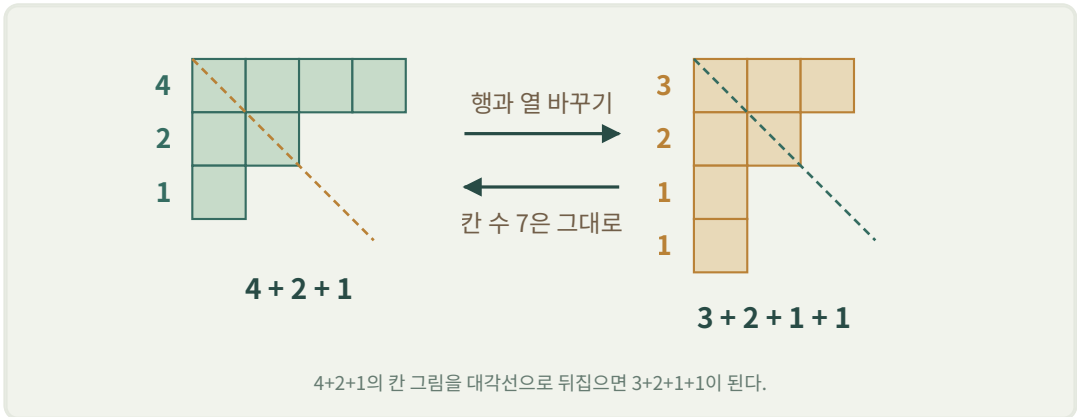
# 분할을 칸으로 그리기

같은 합을 도형으로 옮기면 수의 개수와 크기를 눈으로 비교할 수 있다.

분할  $4+2+1$ 을 왼쪽에 맞춘 세 줄의 칸으로 그리자. 첫 줄에는 네 칸이 있고 둘째 줄에는 두 칸이 있으며 셋째 줄에는 한 칸이 있다. 칸의 총수는 7이다. 이제 그림의 행과 열을 바꾸어 읽으면 열의 높이는 3과 2와 1과 1이다.

따라서  $4+2+1$ 과  $3+2+1+1$ 은 서로 대응한다. 이 변환을 한 번 더 하면 원래 그림으로 돌아간다. 가장 큰 항 4는 변환 뒤 항의 개수 4가 되고 원래 항의 개수 3은 새 가장 큰 항 3이 된다.

이 대응으로  $n$ 의 분할 중 가장 큰 항이  $k$ 인 경우와 항의 개수가  $k$ 인 경우의 수가 같다는 사실을 설명할 수 있다. 직접 두 목록을 세는 대신 뒤집을 수 있는 변환을 만든 것이다. 조합론에서는 이런 일대일 대응이 강력한 증명 도구가 된다.



## 탐구

분할  $3+3+1$ 의 그림을 행과 열을 바꾸어 읽으면 무엇인가?

## 풀이와 확인

열의 높이는 3과 2와 2이므로  $3+2+2$ 가 된다. 전체 칸 수 7은 그대로이다.

## 생성함수의 작은 모형

선택을 곱셈으로 묶으면 합의 종류를 계수로 읽을 수 있다.

1과 2만 사용해 정수를 분할한다고 하자. 1을 사용하는 횟수는 0번부터 가능하므로  $1+x+x^2+x^3+\dots$ 으로 기록한다. 2를 사용하는 횟수는  $1+x^2+x^4+x^6+\dots$ 으로 기록한다. 두 식을 곱할 때 지수는 사용한 수의 합이 된다.

$x^4$ 의 계수는 3이다. 첫 인수의  $x^4$ 와 둘째의 1을 고르는 경우 및  $x^2$ 와  $x^2$ 를 고르는 경우 및 1과  $x^4$ 를 고르는 경우가 있다. 이는  $1+1+1$ 과  $2+1+1$ 과  $2+2$ 에 대응한다.

여기서  $x$ 는 수치를 넣기 위한 변수라기보다 합을 기록하는 표지로 볼 수 있다. 일정한 차수의 계수만 구한다면 그보다 큰 차수의 항은 계산에서 제외해도 된다. 무한한 식의 모양에 놀라기보다 작은 목표 차수부터 전개하면 구조를 이해할 수 있다.

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)$$

$$x^4 \text{의 계수} = 3$$

지수는 합을 기록한다

생성함수의 작은 모형의 계산 관계

### 탐구

1과 2만 사용한 5의 분할은 몇 개인가?

### 풀이와 확인

2를 0개와 1개와 2개 쓰는 세 가지이다. 나머지는 1로 채우므로  $x^5$ 의 계수도 3이다.

## 분할표를 채우는 작은 알고리즘

중복 없는 경우 분류를 사용하면 손으로 세기 어려운 분할수를 계산할 수 있다.

1부터  $k$ 까지의 수만 사용하여  $n$ 을 분할하는 개수를  $P(n$ 과  $k)$ 라고 적자. 순서는 구별하지 않고 같은 수를 여러 번 써도 된다. 분할은  $k$ 를 전혀 쓰지 않는 경우와  $k$ 를 적어도 한 번 쓰는 경우로 나뉜다. 두 경우는 겹치지 않는다.

앞의 개수는  $P(n$ 과  $k-1)$ 이다. 뒤의 분할에서  $k$  하나를 떼면 합이  $n-k$ 인 분할이 남고 여전히  $k$ 까지 사용할 수 있다. 따라서 뒤의 개수는  $P(n-k$ 와  $k)$ 이다.  $n \geq k$ 일 때 두 값을 더하면  $P(n$ 과  $k)$ 가 된다.  $n < k$ 이면  $k$ 를 사용할 수 없어 앞의 값만 남는다.

출발점도 중요하다. 0의 분할은 빈 분할 하나로 세며 양수를 아무 수 없이 만드는 방법은 0개이다. 이 기준에서 표를 채우면  $P(5$ 와  $5)=7$ 을 얻는다. 가장 큰 수를 하나씩 허용하는 순서를 지키면 같은 분할을 항의 순서만 바꾸어 여러 번 세지 않는다.

이 알고리즘은 라마누잔의 원래 계산 과정을 복원한 것이 아니라 분할수의 정의를 현대적으로 구현한 것이다. 직접 목록을 만들 수 있는 작은  $n$ 으로 먼저 계산한 뒤 큰 값에 적용한다. 앞에서 본 합동식을 확인할 자료를 얻을 수 있지만 계산표가 일반적인 합동식의 증명 자체가 되지는 않는다.

| 허용하는 가장 큰 수 | 합 5의 분할 수 |
|-------------|-----------|
| 1           | 1         |
| 2           | 3         |
| 3           | 5         |
| 4           | 6         |
| 5           | 7         |

### 탐구

1과 2와 3만 허용할 때 5의 분할은 몇 개인가?

### 풀이와 확인

다섯 개이다. 1과 2만 사용한 세 경우에  $3+2$ 와  $3+1+1$ 이 추가된다. 표에서도  $P(5$ 와  $3)=P(5$ 와  $2)+P(2$ 와  $3)=3+2=5$ 이다.

[S11] NIST Digital Library of Mathematical Functions: Unrestricted Partitions

## 나머지에서 발견하는 규칙

분할수의 특정 항에 나타나는 나눗셈 규칙은 새로운 질문을 만든다.

라마누잔의 이름과 연결되는 대표적인 분할 합동식 가운데 하나는  $p(5n+4)$ 가 5의 배수라는 것이다.  $n=0$ 이면  $p(4)=5$ 이고  $n=1$ 이면  $p(9)=30$ 이다. 두 예는 규칙에 맞지만 모든  $n$ 에 대한 증명을 대신하지는 않는다.

이 명제는  $p(n)$ 이 항상 5의 배수라는 뜻이 아니다. 입력값이 5로 나누어 나머지 4인 경우를 따로 고른다. 입력의 나머지와 출력의 나머지를 연결하는 주장이다. 식을 읽을 때 어느 부분에 조건이 붙는지 먼저 확인한다.

더 많은 값을 계산하면 오류를 찾거나 추측을 세우는 데 도움이 된다. 그러나 아무리 긴 유한 목록도 자연수 전체의 무한한 경우를 직접 모두 검사한 것은 아니다. 계산 실험과 증명이 서로 다른 역할을 맡는다는 점이 이 사례에서 잘 드러난다.

|         |                                                                                      |     |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| $p(4)$  |     | 5   |
| $p(9)$  |     | 30  |
| $p(14)$ |  | 135 |

입력이 5로 나누어 나머지 4인 세 분할수

### 탐구

$n=2$ 일 때 이 합동식이 말하는 입력값과 결론은 무엇인가?

### 풀이와 확인

입력값은 14이다.  $p(14)$ 가 5의 배수라는 결론이며 실제 값 135가 이를 만족한다.

[S11] NIST Digital Library of Mathematical Functions: Unrestricted Partitions

## 같은 수를 두 방식으로

1729는 계산 자체를 해 보아야 이야기의 수학적 핵심이 드러난다.

1729는  $1^3+12^3$ 이며 동시에  $9^3+10^3$ 이다. 각각 계산하면  $1+1728$ 과  $729+1000$ 이 되어 같은 수를 얻는다. 두 양의 세제곱수의 합으로 서로 다른 두 방식이 있다는 사실을 직접 확인할 수 있다.

라마누잔과 하디에 관한 유명한 일화에서 이 수가 등장한다. 일화를 흥미롭게 읽더라도 두 표현의 존재와 그런 수 가운데 가장 작다는 주장은 다른 수준의 검증을 요구한다. 첫 주장은 네 번의 세제곱 계산으로 충분하지만 둘째는 더 작은 모든 후보를 배제해야 한다.

가장 작음을 확인하는 작은 탐색을 설계한다면  $a \leq b$ 인 양의 정수쌍만 조사해 중복을 줄인다. 합이 1729보다 작으려면  $b$ 는 12 이하이면 충분하다. 합을 표로 모아 같은 값이 반복되는 지 검사하면 최소성에 대한 유한한 확인 방법을 만들 수 있다.

$$1^3 + 12^3 = 1 + 1728$$

$$9^3 + 10^3 = 729 + 1000$$

두 합은 모두 1729

같은 수를 두 방식으로의 계산 관계

### 탐구

양의 정수 대신 0도 허용하면 조사할 후보쌍에 어떤 변화가 생기는가?

### 풀이와 확인

$a=0$ 인 경우가 추가된다. 세는 규칙이 달라지므로 원래 명제와 같은 조건인지 먼저 확인해야 한다.

[S9] Institute of Mathematical Sciences: Ramanujan's Notebooks

## 노트를 검증하는 작은 연구

한 결과를 읽고 시험하고 반례를 찾는 과정을 남기면 독서가 탐구로 바뀐다.

연속한 두 정수의 곱에 1을 더하면 언제나 소수라는 추측을 시험해 보자.  $n=1$ 과 2와 3에서는  $n(n+1)+1$ 이 3과 7과 13이어서 맞는 것처럼 보인다. 그러나  $n=4$ 이면  $21=3 \times 7$ 이므로 추측은 거짓이다.

좋아 보이는 패턴을 발견했을 때 일부러 실패할 사례를 찾는 일이 중요하다. 작은 값 몇 개의 성공은 자신감을 줄 수 있지만 일반 명제를 보장하지 않는다. 반례 하나는 언제나라는 주장을 무너뜨릴 수 있다. 반면 사례 하나가 실패해도 조건을 고치면 새로운 명제를 만들 수 있다.

수학자의 노트를 읽는 독자 역시 모든 줄을 무조건 참으로 받아들이거나 증명이 생략되었다는 이유로 무가치하다고 버리지 않는다. 정확히 무엇을 주장하는지 복원하고 성립 범위를 탐색한다. 존중과 검증은 함께 할 수 있는 태도이다.

$$n(n+1)+1$$

$$n=1\ 2\ 3 \rightarrow 3\ 7\ 13$$

$$n=4 \rightarrow 21=3 \times 7$$

노트를 검증하는 작은 연구의 계산 관계

### 탐구

$n^2+n+41$ 이 모든 음이 아닌 정수  $n$ 에서 소수일까?

### 풀이와 확인

아니다.  $n=41$ 이면  $41^2+41+41=41 \times 43$ 으로 합성수이다. 많은 초기 성공만으로 일반화하면 안 된다.

## 인도관을 다시 엮는 지도

줄의 길이에서 무한급수까지 서로 다른 문제는 표현과 검증이라는 질문으로 이어진다.

첫 장의 줄 기하학은 길이와 넓이를 보존하는 방법을 물었다. 자리값과 0은 수를 표현하고 연산을 조직하는 문제로 이어졌다. 정수 방정식에서는 허용하는 수의 범위가 중요했고 윤율에서는 세는 대상과 순서의 약속이 결과를 바꾸었다.

급수와 사인표는 정확한 관계를 유한한 근삿값으로 사용하는 방법을 보여 주었다. 라마누잔의 노트는 발견된 식을 다시 읽고 증명하는 후대의 작업을 생각하게 한다. 이 주제들은 한 줄의 발전 순서라기보다 서로 연결되면서도 각기 다른 목적을 가진 탐구들이다.

마지막 활동으로 한 문제를 골라 세 가지 표현을 만들어 보자. 문장으로 조건을 쓰고 도형이나 표로 구조를 나타낸 뒤 식으로 검산한다. 역사적 자료에서 온 사실과 자신이 만든 예제를 구별해 표시한다. 수학을 계산하는 독자이면서 자료를 신중히 읽는 독자가 되는 것이 이 관의 여정이다.

### 표현 문장과 그림과 식 조건 범위와 단위와 기준 검증 계산과 증명과 출처

인도관을 다시 엮는 지도의 계산 관계

#### 탐구

가장 기억에 남는 문제를 다시 설명할 때 반드시 남길 세 요소는 무엇인가?

#### 풀이와 확인

무엇을 가정했는지와 어떻게 계산했는지와 왜 답이 맞는지를 남긴다. 역사적 출처가 있는 주장이라면 그 근거도 함께 적는다.

## 참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

**[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review**

[https://doi.org/10.1007/978-3-031-40846-5\\_114](https://doi.org/10.1007/978-3-031-40846-5_114)

**[S2] University of St Andrews: Aryabhata I**

[https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aryabhata\\_I/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aryabhata_I/)

**[S3] University of St Andrews: Brahmagupta**

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brahmagupta/>

**[S4] Oxford University: Radiocarbon dating of the Bakhshālī manuscript. 2024**

<https://ora.ox.ac.uk/objects/uuid%3A5a6d1dd7-f20c-4209-adb6-33849f5b08f4>

**[S5] University of St Andrews: Bhaskara II**

[https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bhaskara\\_II/](https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bhaskara_II/)

**[S6] Jayant Shah: A History of Piṅgala's Combinatorics**

[https://sanskrit.uohyd.ac.in/Algorithms\\_in\\_Ancient\\_India/Material/Pingala.pdf](https://sanskrit.uohyd.ac.in/Algorithms_in_Ancient_India/Material/Pingala.pdf)

**[S7] V. N. Krishnachandran: On Mādhava and his correction terms**

<https://arxiv.org/abs/2405.11134>

**[S9] Institute of Mathematical Sciences: Ramanujan's Notebooks**

<https://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/images/KSRchap3.pdf>

**[S10] Trinity College Cambridge: Ramanujan manuscript catalogue**

[https://archives.trin.cam.ac.uk/index.php/informationobject/browse?](https://archives.trin.cam.ac.uk/index.php/informationobject/browse?levels=233&query=Srinivasa+Ramanujan&sort=startDate&sortDir=asc&sq0=Srinivasa+Ramanujan&topLevel=0)

[levels=233&query=Srinivasa+Ramanujan&sort=startDate&sortDir=asc&sq0=Srinivasa+Ramanujan&topLevel=0](https://archives.trin.cam.ac.uk/index.php/informationobject/browse?levels=233&query=Srinivasa+Ramanujan&sort=startDate&sortDir=asc&sq0=Srinivasa+Ramanujan&topLevel=0)

**[S11] NIST Digital Library of Mathematical Functions: Unrestricted Partitions**

<https://dlmf.nist.gov/27.14>