

MATHESIS

세계 수학과 / 내용 중심 개정판

이슬람 아랍관

기록에서 출발해 직접 계산하는 수학의 역사

역사 / 도해 / 탐구

REVISED EDITION / 2026

차례

본문의 흐름에 따라 편집한 실제 PDF 쪽번호다.

그림으로 다시 읽는 보충 탐구	4
관계를 옮기는 언어와 정밀한 눈금	5
여러 언어가 만나는 수학	6
자리값과 계산의 질서	14
말로 쓴 관계에서 방정식으로	22
여섯 형식과 완전제곱	30
타비트와 수의 관계	40
빛과 기하학의 만남	51
하이얌과 곡선의 해	59
투시와 삼각형의 언어	68
알카시와 정밀한 계산	78
하늘을 읽는 원판	88
문양을 움직이는 규칙	99
책과 증명이 건너간 길	108
참고 자료와 자료 읽기	116

READING THE WORLD

이 책을 여는 질문

이 책은 같은 분량으로 잘라 놓은 전시실이 아니라 서로 다른 질문을 지닌 여덟 권의 책에서 출발한다. 계산을 남긴 재료와 해결해야 했던 문제를 함께 읽으면 비슷한 수식 뒤에 있는 차이가 드러난다. 한 지역을 오늘의 국가 경계에 가두거나 다른 지역을 한 줄의 발전 순서에 놓지 않는다.

읽는 순서는 자유롭다. 수를 기록하는 방법이 궁금하다면 산가지와 자리값 및 키푸를 오가면 된다. 도형의 이유를 묻고 싶다면 넓이의 보존과 완전제곱 및 증명을 이어 읽을 수 있다. 서로 닮은 계산을 발견했을 때에는 구조의 공통점과 역사적 전파의 증거를 따로 살핀다.

이번 개정에서는 원고 단위마다 페이지를 끝내던 방식을 없앴다. 문장과 그림이 차지하는 실제 길이에 따라 다음 페이지로 이어지며 짧은 해설만 남는 쪽을 줄이도록 장 사이의 흐름도 연결했다. 빈 공간을 만들기 위해 본문을 늘리거나 일정한 쪽수를 맞추기 위해 설명을 나누지 않았다.

탐구 문제의 수치와 문자식은 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 재구성이다. 먼저 조건을 읽고 직접 계산한 뒤 풀이를 비교한다. 역사적 사실을 판단할 때에는 본문의 출처와 유물 설명을 함께 확인한다.

이슬람 아랍관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이 장은 개정판에 새로 붙인 보충 탐구다. 본문의 각 장이 계산의 결과나 조건을 말로 설명하고 지나간 자리에서 그림을 하나 더 그려 그 이유를 눈으로 확인하도록 구성했다. 단원마다 이어 읽을 본문의 장을 표시했으므로 해당 장을 읽은 뒤 펼치면 흐름이 자연스럽다.

여기에 실은 도해와 수치는 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 현대 재구성이다. 옛 자료가 실제로 이런 그림을 남겼다는 뜻은 아니며 자료가 말하는 범위는 각 단원 끝의 출처에서 따로 확인할 수 있다. 이번 개정에서는 본문에서 표로만 보여 주던 일부 도해도 실제 그림으로 다시 그렸다.

이슬람 아랍관 / 01

관계를 옮기는 언어와 정밀한 눈금



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

책의 문장을 식으로 옮길 때에는 말의 순서보다 수량 사이의 관계를 보존해야 한다. 도형을 잘라 옮기는 설명도 넓이의 보존을 확인할 때 방정식과 연결된다. 이 관에서는 대수와 기하를 따로 외우기보다 같은 조건을 다른 표현으로 읽는 연습을 한다. 그림의 아름다움은 출발점이며 각 선이 뜻하는 양을 설명하는 일이 그다음이다.

아랍어로 쓰인 학술 자료를 하나의 민족이나 하나의 도시의 업적으로 좁히지 않는다. 원판의 눈금과 관측표 및 책의 계산은 여러 활동 속에서 읽혀야 한다. 근삿값의 자릿수가 많다는 사실만으로 관측까지 정확했다고 단정할 수도 없다. 계산의 정밀도와 측정의 오차를 나누어 살피면 역사와 수학을 함께 이해할 수 있다.

여러 언어가 만나는 수학

관의 이름을 읽는 세 가지 좌표

언어와 신앙과 활동 지역은 서로 다른 정보다.

이슬람 아랍관은 특정 민족 한 집단의 수학만을 모은 공간이 아니다. 아랍어가 학술 소통에 쓰인 여러 지역과 이슬람 문화권의 지적 활동을 함께 살핀다. 학자가 아랍어로 책을 썼다는 사실만으로 그의 모어와 민족적 배경과 신앙을 모두 결정할 수는 없다. 인물을 소개할 때에는 이름 옆에 활동 지역과 집필 언어와 확인된 종교적 배경을 나누어 기록하는 편이 정확하다.

이 구별은 자료를 분류하는 수학적 활동과도 닮았다. 같은 사람을 언어에 따라 묶으면 한 모임에 속하지만 지역에 따라 묶으면 다른 모임에 속할 수 있다. 분류 기준이 달라지면 결과도 달라진다. 따라서 지도에서 같은 색으로 표시된 사람들을 단일한 집단으로 받아들이기 전에 그 색이 무엇을 뜻하는지 확인해야 한다. 이 관의 문제와 수식은 특별한 표시가 없는 한 이해를 돕기 위한 현대적 재구성이다.

구분	확인할 내용
언어	어떤 언어로 지식을 기록했는가
지역	어디에서 활동했는가
신앙	어떤 근거로 알려져 있는가

탐구

아랍어 집필이라는 정보만으로 확인할 수 없는 사항은 무엇인가?

풀이와 확인

출생 지역과 모어와 신앙은 별도 자료가 필요하다. 집필 언어는 책이 어떤 독자와 만났는지 알려 주지만 저자의 모든 정체성을 대신하지 않는다. 여러 기준을 한 칸에 합치면 분류가 편리해지는 대신 중요한 차이가 사라진다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

도시 하나로 설명할 수 없는 연결망

학술 활동은 여러 장소와 사람을 통해 이어진다.

학문의 지도를 그릴 때 모든 선을 하나의 도시로 모으면 풍부한 교류가 보이지 않을 수 있다. 여기서는 실제 이동 경로를 단정하지 않는 가상의 연결망을 먼저 만든다. 도시 A에서 B로 책이 옮겨지고 B에서 C로 번역이 전달된다고 하자. 이때 A와 C가 직접 연결되지 않아도 두 단계의 경로가 있다. 책의 이동과 사람의 여행과 서신 교환은 서로 다른 종류의 선으로 표시해야 한다.

여섯 도시가 있을 때 가능한 두 도시의 짝은 $6 \times 5 \div 2 = 15$ 개다. 그러나 가능한 짝이 곧 확인된 교류는 아니다. 기록으로 확인된 선이 네 개뿐이라면 나머지 열한 개를 상상으로 채우지 않는다. 연결망은 빈칸을 감추는 장식이 아니라 알려진 관계의 범위와 아직 확인되지 않은 관계를 함께 보여 주는 도구다. 선의 굵기로 교류의 규모를 표현하려면 그 규모를 센 방법도 설명해야 한다.

관계	선의 의미
책의 이동	필사본이 다른 장소에서 확인됨
번역	다른 언어의 판본이 만들어짐
서신	편지의 발신과 수신이 확인됨

탐구

도시 다섯 곳의 모든 짝은 몇 개인가? 직접 연결이 없으면 교류가 불가능한가?

풀이와 확인

서로 다른 짝은 $5 \times 4 \div 2 = 10$ 개다. A에서 B를 거쳐 C로 갈 수 있으므로 직접 연결이 없어도 간접 경로는 가능하다. 다만 이 계산은 가상 모형의 성질이며 실제 역사적 교류가 있었다는 증거는 아니다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

번역은 단어를 바꾸는 일만이 아니다

길이와 수와 증명의 조건까지 함께 옮겨야 한다.

같은 문제를 두 언어로 옮겼는데 한쪽에는 길이라는 말이 있고 다른 쪽에는 넓이라는 말이 들어갔다고 하자. 숫자가 모두 같아도 두 문제는 다른 문제다. 한 변이 세 단위인 정사각형의 넓이는 아홉 제곱단위다. 세 단위라는 표현을 세 제곱단위로 잘못 옮기면 그림의 변과 면을 혼동하게 된다. 번역을 검토할 때에는 명사뿐 아니라 그 명사가 가리키는 수학적 대상도 살펴야 한다.

증명 속의 모든 것이라는 말과 어떤 것이라는 말도 바꾸어 쓸 수 없다. 모든 직사각형이 정사각형이라는 문장은 거짓이지만 어떤 직사각형은 정사각형이라는 문장은 참이다. 수학 번역은 이러한 범위의 차이를 보존해야 한다. 읽는 사람은 원문을 알지 못하더라도 번역된 주장에 반례를 대입하여 문장의 뜻을 점검할 수 있다. 번역과 검산이 만나는 지점이 바로 여기다.



$$3 \times 3 = 9$$



$$4 \times 2 = 8$$

왼쪽은 정사각형이며 오른쪽은 직사각형이지만 정사각형은 아니다

탐구

모든 정사각형은 직사각형이라는 문장의 역도 항상 참인가?

풀이와 확인

역은 모든 직사각형은 정사각형이라는 문장이다. 가로가 4이고 세로가 2인 직사각형은 네 각이 직각이지만 네 변의 길이가 같지 않으므로 반례가 된다. 한 사례만으로 모든 경우를 다루는 주장을 반박할 수 있다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

필사본의 두 수치를 비교하기

다른 숫자를 발견했을 때 먼저 계산 구조를 살핀다.

가상의 필사본 두 장에 같은 나눗셈의 답이 각각 24와 42로 적혀 있다고 하자. 어느 쪽이 오래되었는지만므로 정답을 결정하지 않는다. 문제가 168을 7로 나누는 것이라면 $7 \times 24 = 168$ 이므로 24가 계산과 맞는다. 반면 $7 \times 42 = 294$ 이므로 42는 맞지 않는다. 이러한 내부 검산은 숫자의 뒤바뀔을 찾는 데 유용하지만 실제 필사 과정에서 어떤 일이 일어났는지까지 증명해 주지는 않는다.

다른 가능성도 열어 두어야 한다. 답이 아니라 문제의 168이 잘못 옮겨졌을 수 있으며 서로 다른 문제의 해설이 섞였을 수도 있다. 자료를 고칠 때에는 원래 읽힌 숫자와 수정 제안과 수정 이유를 구별해 적는다. 오류를 조용히 지워 버리면 다음 독자가 판단할 근거가 사라진다. 계산으로 확인할 수 있는 것과 문헌 비교가 필요한 것을 나누는 태도가 좋은 교정의 출발점이다.

문제의 수	후보 답	검산	판정
168	24	$7 \times 24 = 168$	일치
168	42	$7 \times 42 = 294$	불일치
294	42	$7 \times 42 = 294$	

답의 숫자만 떼지 않고 문제와 검산을 함께 비교한다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

문제의 수치가 294였다면 어느 답이 맞으며 판단은 어떻게 달라지는가?

풀이와 확인

$294 \div 7 = 42$ 이므로 42가 맞는다. 이 결과는 답만 떼어 놓고 어느 판본이 옳다고 결정하면 위험하다는 사실을 보여 준다. 문제와 풀이와 검산을 한 묶음으로 비교해야 숫자가 맡은 역할을 확인할 수 있다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

단위가 다른 장부를 맞추기

비교하려면 먼저 무엇을 한 단위로 삼았는지 정한다.

현대적 재구성 장부에서 한 상자는 작은 꾸러미 여덟 개이고 한 꾸러미는 물건 열두 개라고 정하자. 상자 세 개와 꾸러미 다섯 개를 합치면 꾸러미는 $3 \times 8 + 5 = 29$ 개다. 물건 낱개로 바꾸면 $29 \times 12 = 348$ 개가 된다. 여기서 여덟과 열둘은 실제 역사적 단위를 복원한 값이 아니라 단위 환산의 구조를 살피기 위해 설정한 값이다.

서로 다른 시장에서 꾸러미라는 이름을 똑같이 쓰더라도 한 꾸러미의 양이 같다는 보장은 없다. 이름이 같은 단위와 크기가 같은 단위를 구별해야 한다. 장부를 비교할 때 단위가 확인되지 않으면 합계가 정확해 보여도 의미가 흔들린다. 환산표에는 기준 시점과 지역을 적는 것이 좋다. 수학적 계산은 정해진 약속 아래에서 정확하며 그 약속 자체의 확인은 자료 해석의 몫이다.

수준	관계	이번 예의 양
상자	1상자=8꾸러미	3상자
꾸러미	1꾸러미=12낱개	추가 5꾸러미
전체	29×12	348낱개

탐구

한 꾸러미가 열 개라면 같은 상자 세 개와 꾸러미 다섯 개는 낱개 몇 개인가?

풀이와 확인

상자당 꾸러미 수가 여전히 여덟이면 꾸러미는 29개다. 낱개는 $29 \times 10 = 290$ 개가 된다. 꾸러미 수는 변하지 않았지만 낱개의 합계는 58개 줄었다. 같은 숫자 기록도 환산 기준에 따라 다른 양을 가리킨다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

지혜의 집을 읽는 신중한 시선

유명한 이름이 모든 활동을 설명해 주지는 않는다.

바그다드의 지혜의 집이라는 이름은 중세 학술을 소개할 때 자주 등장한다. 그러나 여러 세기에 걸친 번역과 연구를 모두 한 건물에서 동시에 이루어진 일처럼 그리면 복잡한 역사가 단순해진다. 특정 학자가 특정 기관에서 어떤 일을 했다고 말하려면 그 연결을 뒷받침하는 근거가 필요하다. 기관의 이름과 후원자의 역할과 실제 저술 활동을 구분해 읽는 편이 안전하다.

이를 논리 문제로 바꾸어 보자. 어떤 도시에서 활동한 학자라는 조건을 A라고 하고 특정 기관에 소속된 학자라는 조건을 B라고 하자. B에 속하면 A에 속할 수 있지만 A에 속한다는 이유만으로 B에도 속한다고 결론 내릴 수는 없다. 넓은 범주와 좁은 범주를 혼동하는 오류다. 유명한 장소의 그림을 사용할 때도 그림 설명에 그 장소와 인물의 관계가 확인된 사실인지 상징적 연출인지 밝혀야 한다.

도시 활동 기록을 확인

기관 소속의 별도 근거를 찾음

근거가 있을 때 소속을 판단

도시에서 활동했다는 정보만으로 특정 기관 소속을 확정하지 않는다

탐구

어떤 도시의 학자라는 정보가 특정 기관의 소속을 증명하지 못하는 까닭은 무엇인가?

풀이와 확인

같은 도시에는 다양한 후원자와 공부 모임과 개인 작업 공간이 있을 수 있다. 도시라는 넓은 범주의 구성원이라는 사실만으로 더 좁은 기관 범주의 구성원임을 알 수 없다. 포함 관계의 방향을 거꾸로 적용해서는 안 된다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

사실과 해석과 재구성 구별하기

자료 읽기는 문장의 성격을 표시하는 데서 시작된다.

전시 설명의 문장을 세 칸으로 나누어 보자. 보존된 책에 어떤 문제가 실려 있다는 문장은 자료에서 확인하는 사실이다. 그 문제가 당시 교육에서 중요했을 것이라는 문장은 근거에 기초한 해석이다. 이해를 돕기 위해 숫자를 바꾸어 새 문제를 만든 것은 현대적 재구성이다. 세 종류가 한 문단에 함께 등장할 수 있지만 독자는 어느 부분이 어떤 성격인지 알아야 한다.

재구성은 역사적 사실보다 열등한 활동이 아니다. 어려운 논증을 작은 수로 바꾸거나 그림에 색을 넣으면 구조를 더 잘 볼 수 있다. 다만 재구성한 숫자를 원문에 있던 숫자처럼 소개하면 안 된다. 이 관에서는 현대 기호와 계산표와 좌표 그림을 적극적으로 사용한다. 그것들은 옛 수학자의 사고를 오늘의 독자가 살펴보는 보조 수단이며 원문과 완전히 동일한 표현은 아니다.

문장 유형	판단 질문
사실	어떤 자료에서 확인되는가
해석	어떤 근거로 추론했는가
재구성	무엇을 새롭게 설정했는가

탐구

현대 좌표축으로 그린 중세 방정식의 그림에는 어떤 설명이 필요한가?

풀이와 확인

현대 좌표와 기호로 관계를 재구성한 그림이라고 밝혀야 한다. 해당 수학자가 오늘날과 같은 좌표평면을 사용했다는 뜻이 아님을 구분하면 도해의 교육적 장점을 살리면서 역사적 오해도 줄일 수 있다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

연결망 읽기 활동의 해설

빠진 선을 채우는 대신 질문을 정확히 만든다.

가상의 자료 카드에 A도시의 책이 B도시에서 번역되었다는 기록과 B도시의 학자가 C도시의 학자에게 편지를 보냈다는 기록이 있다고 하자. 이 두 기록을 하나의 선으로 합치면 번역과 서신의 차이가 사라진다. 선을 두 종류로 나누면 A에서 C까지 지식이 전달되었을 가능성을 질문할 수 있지만 실제 전달이 확인되었다고 단정할 수는 없다.

활동의 좋은 결과는 선이 가장 많은 지도가 아니라 증거와 표시가 가장 잘 대응하는 지도다. 확인된 관계는 실선으로 그린다. 앞으로 살펴볼 관계는 점선 대신 별도의 질문 목록에 적어 실제 교류와 혼동하지 않게 한다. 지도 아래에는 도시를 고른 기준과 다루는 시기를 적는다. 서로 수백 년 떨어진 사람들을 동시에 만난 것처럼 배치하지 않으려면 시간도 관계의 중요한 조건으로 다루어야 한다.

확인한 기록 관계의 종류

A의 책을 B에서 번역	책의 번역
B의 학자가 C에 편지 보냈	학자 사이의 서신
C가 그 책을 읽었는?	

번역과 서신을 구분하면 확인된 관계와 남은 질문이 보인다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

두 기록만으로 A도시의 책을 C도시의 학자가 읽었다고 결론 내릴 수 있는가?

풀이와 확인

결론 내릴 수 없다. B도시에서 번역이 이루어졌고 B와 C 사이에 편지가 오갔다는 것까지만 확인된다. 그 편지에 해당 책이 언급되는지 또는 C에서 그 책의 필사본이 발견되는지와 같은 추가 근거가 필요하다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

자리값과 계산의 질서

숫자의 모양보다 자리의 역할

같은 기호도 놓인 위치에 따라 다른 양을 나타낸다.

알과리즈미의 이름은 대수뿐 아니라 인도식 수 계산의 전승과도 연결된다. 여기서는 특정 필사본의 글자 모양을 복원하지 않고 십진 자리값의 원리를 살핀다. 507에서 5는 백이 다섯 개라는 뜻이며 7은 낱개 일곱 개라는 뜻이다. 가운데 0은 십의 자리에 해당하는 묶음이 없음을 나타낸다. 따라서 507과 57의 차이는 숫자를 하나 더 적었다는 데 그치지 않는다.

자리값 표현은 묶음의 크기를 열 배씩 바꾸는 약속이다. $507 = 5 \times 100 + 0 \times 10 + 7$ 이라고 풀어 쓰면 각 기호의 역할이 드러난다. 숫자 표기가 짧아지는 대신 위치를 정확히 보존해야 하는 이유도 알 수 있다. 손으로 적은 자료를 읽을 때에는 흐릿한 0 하나가 수 전체를 바꿀 수 있음을 기억해야 한다. 빈자리를 표시하는 기능과 수로서 0을 다루는 문제는 관련되지만 완전히 같은 문제는 아니다.

표기	백의 자리	십의 자리	일의 자리
507	5	0	7
570	5	7	0
57	0	5	7

탐구

70과 7의 차이를 자리값으로 설명하라.

풀이와 확인

70은 십이 일곱 개이고 낱개가 없는 수다. 7은 낱개 일곱 개다. 같은 7이라는 기호를 쓰지만 왼쪽으로 한 자리 옮기면 말하는 값이 열 배가 된다. 오른쪽 0은 이 자리 배치를 유지하는 역할을 한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

묶음을 넘기는 덧셈

받아올림은 열 개를 한 묶음으로 바꾸는 과정이다.

248과 376을 더하는 현대 재구성 계산을 해 보자. 일의 자리에서는 $8+6=14$ 이므로 낱개 열 개를 십 하나로 바꾸고 낱개 넷을 남긴다. 십의 자리는 원래의 4와 7에 새로 생긴 1을 더해 12가 된다. 다시 십 열 개를 백 하나로 바꾸면 십 둘이 남는다. 백의 자리는 $2+3+1=6$ 이므로 전체 합은 624다.

받아올림의 작은 1은 언제나 같은 양을 뜻하지 않는다. 일의 자리에서 올라간 1은 십 하나이며 십의 자리에서 올라간 1은 백 하나다. 절차만 외우면 이 차이가 가려진다. 묶음 그림으로 생각하면 각각의 1이 어떤 단위인지 분명해진다. 검산은 합에서 한 수를 빼거나 두 수를 먼저 대략 250과 380으로 보고 결과가 630 근처인지 살피는 방식으로 할 수 있다.

자리	계산	남는 값
일	$8+6=14$	4
십	$4+7+1=12$	2
백	$2+3+1=6$	6

탐구

624-376을 계산해 덧셈을 검산하라.

풀이와 확인

낱개가 부족하므로 십 하나를 풀어 $14-6=8$ 을 얻는다. 십은 하나만 남아 백 하나를 다시 풀면 $11-7=4$ 가 된다. 백은 $5-3=2$ 이므로 248이다. 묶음을 만드는 덧셈과 묶음을 푸는 뺄셈이 서로 대응한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

곱셈표를 분해해서 읽기

긴 곱셈은 분배법칙을 배열한 계산이다.

23×14 를 계산할 때 14를 $10+4$ 로 나누면 23×10 과 23×4 가 생긴다. 두 부분은 각각 230과 92이므로 합은 322다. 이번에는 23도 $20+3$ 으로 나누어 보자. 20×10 과 20×4 와 3×10 과 3×4 를 모두 더하면 $200+80+30+12=322$ 가 된다. 같은 곱셈을 두 가지 크기의 부분으로 나누어도 전체가 같은 이유는 넓이를 빠짐없이 분할했기 때문이다.

직사각형 그림은 계산의 각 항이 어디에서 나왔는지 보여 준다. 가로를 20과 3으로 나누고 세로를 10과 4로 나누면 네 칸이 생긴다. 네 칸의 넓이를 합치는 과정에서 겹침이나 빈틈이 없어야 한다. 세로의 10을 단순한 1로 읽으면 200과 30이 각각 20과 3으로 줄어들어 틀린 답이 된다. 긴 곱셈의 줄을 한 칸 옮기는 규칙은 이런 자리값을 표시하는 방법이다.

×	10	4
20	200	80
3	30	

현대 재구성: 23×14 를 네 부분의 넓이로 나눈다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

곱셈	10	4
20	200	80
3	30	12

탐구

32×15 를 같은 방식으로 네 부분으로 나누어 계산하라.

풀이와 확인

$32=30+2$ 이고 $15=10+5$ 다. 네 부분은 300과 150과 20과 10이다. 이를 더하면 480이다.

$32 \times 10+32 \times 5=320+160$ 으로 계산해도 같은 결과를 얻는다. 분할 방식이 달라도 전체 직사각형의 넓이는 변하지 않는다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

나머지가 말해 주는 조건

나눗셈은 몫과 남은 양을 함께 설명해야 끝난다.

물건 347개를 일곱 명에게 같은 수씩 나누면 한 명당 49개를 주고 네 개가 남는다. 이 결과는 $347 = 7 \times 49 + 4$ 로 확인한다. 나머지는 나누는 수보다 작아야 한다. 나머지가 11이라고 썼다면 아직 한 명당 한 개씩 더 줄 수 있으므로 나눗셈을 끝낸 것이 아니다. 몫과 나머지의 조건을 함께 적어야 계산이 완성된다.

물건을 잘라 나눌 수 있다면 각자 49와 $4/7$ 개를 받는다고 나타낼 수도 있다. 하지만 의자처럼 쪼갤 수 없는 물건을 실제로 나누는 상황에서는 같은 표현을 그대로 실행할 수 없다. 수학적으로 같은 양을 표현하더라도 문제의 대상에 따라 적절한 답의 형태가 달라진다. 계산 결과를 해석할 때에는 정수만 허용하는지와 분할이 가능한지와 남은 물건을 어떻게 처리할지를 먼저 확인해야 한다.

$$347 = 7 \times 49 + 4$$

49상자에는 343개
남은 4개를 담으면 총 50상자

몫 49와 필요한 상자 수 50은 문제의 조건에 따라 구별한다

탐구

347개를 담는 상자에 최대 일곱 개씩 넣는다면 상자는 몇 개 필요한가?

풀이와 확인

49상자에 일곱 개씩 담으면 343개를 담고 네 개가 남는다. 남은 네 개를 담을 상자가 하나 더 필요하므로 모두 50상자다. 사람에게 나누는 문제의 몫 49를 그대로 상자 수의 답으로 쓰면 마지막 네 개가 빠진다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

서로 다른 분수의 기준 맞추기

분모는 조각의 크기를 정하는 약속이다.

전체의 $\frac{1}{3}$ 과 $\frac{1}{4}$ 을 더할 때 조각 수만 더해 $\frac{2}{7}$ 로 만들 수 없다. 세 등분한 조각과 네 등분한 조각의 크기가 다르기 때문이다. 전체를 열두 등분하면 $\frac{1}{3}$ 은 네 조각이고 $\frac{1}{4}$ 은 세 조각이 된다. 따라서 합은 일곱 조각에 해당하는 $\frac{7}{12}$ 다. 공통 분모를 정하는 일은 서로 다른 단위를 같은 크기의 조각으로 환산하는 과정이다.

이 계산을 그림으로 옮길 때에는 두 분수가 같은 전체를 기준으로 한다는 조건이 중요하다. 작은 빵의 $\frac{1}{3}$ 과 큰 빵의 $\frac{1}{4}$ 은 단순히 하나의 빵의 $\frac{7}{12}$ 라고 합칠 수 없다. 전체의 크기가 다르면 먼저 실제 무게나 넓이를 기준으로 바꾸어야 한다. 분수 계산이 정확해도 기준 전체를 잘못 잡으면 생활 속 해석은 틀릴 수 있다. 수학적 표현에 숨어 있는 전체를 항상 함께 읽자.

원래 분수	열두 등분한 표현
$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$
합	$\frac{7}{12}$

탐구

같은 전체의 $\frac{2}{5}$ 와 $\frac{1}{6}$ 을 더하면 얼마인가?

풀이와 확인

전체를 서른 등분하면 $\frac{2}{5}$ 는 $\frac{12}{30}$ 이고 $\frac{1}{6}$ 은 $\frac{5}{30}$ 이다. 합은 $\frac{17}{30}$ 이다. 두 분모의 곱 30을 공통 분모로 사용할 수 있다. 이 경우에는 5와 6이 서로소이므로 30이 가장 작은 공통 분모이기도 하다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

어림으로 오류 찾기

정확한 계산 전에 결과의 범위를 예상한다.

198×51 의 답을 10098이라고 적었다면 먼저 $200 \times 50 = 10000$ 과 비교해 보자. 답이 만 근처에 있으므로 크기의 수준은 자연스럽다. 정확히는 $198 \times 50 + 198 = 9900 + 198 = 10098$ 이다. 만약 100980이라고 적었다면 자리 하나가 늘어난 오류를 어림으로 쉽게 발견할 수 있다. 어림은 정확한 계산을 대신하는 것이 아니라 이상한 결과를 빠르게 걸러 내는 장치다.

어림값과 참값의 차이를 확인하면 더 좋은 판단을 할 수 있다. 198을 200으로 바꾼 것은 늘리는 변화이며 51을 50으로 바꾼 것은 줄이는 변화다. 두 변화가 반대 방향이므로 어림값이 반드시 참값보다 크거나 작다고 단정할 수 없다. 실제 계산에서는 참값이 98만큼 크다. 단순히 반올림했다는 이유로 오차의 방향까지 안다고 생각하면 안 된다.

계산	결과	어림과 비교
200×50	10000	기준 어림
198×51	10098	차이 +98
잘못 쓴 결과	100980	

어림은 자릿수 오류를 찾지만 정확한 계산을 대신하지 않는다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

399×21 의 크기를 먼저 예상한 뒤 정확히 계산하라.

풀이와 확인

$400 \times 20 = 8000$ 으로 어림할 수 있다. 정확한 값은 $399 \times 20 + 399 = 7980 + 399 = 8379$ 다. 어림값과의 차이는 379다. 83790은 어림한 크기보다 열 배가량 크므로 자리값을 다시 확인해야 한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

검산은 다른 길로 돌아오는 일

같은 절차를 반복하는 것보다 독립된 관계가 도움이 된다.

곱셈 37×24 의 결과가 888이라고 나왔다고 하자. 같은 곱셈을 똑같은 순서로 다시 하면 같은 실수를 되풀이할 수 있다. $888 \div 24 = 37$ 인지 확인하거나 $37 \times 6 = 222$ 를 구한 뒤 네 배 하여 888인지 살펴보면 다른 경로의 검산이 된다. 계산의 모양을 바꾸는 것은 단순한 반복보다 오류를 발견할 기회를 넓혀 준다.

자리 숫자의 합을 이용한 아홉의 나머지 검산도 생각해 볼 수 있다. 37은 아홉으로 나눈 나머지가 1이고 24는 나머지가 6이므로 곱의 나머지는 6이어야 한다. 888의 숫자 합은 24이고 나머지는 6이어서 이 조건을 통과한다. 그러나 897도 숫자 합이 24이므로 통과한다. 간단한 검산은 오류를 찾는 데 도움이 되지만 조건을 통과했다고 정답이 보장되는 것은 아니다.

$$37 \times 24 = 888$$

$$37 \times 6 = 222 \rightarrow 222 \times 4 = 888$$

$$888 \div 24 = 37$$

부분곱과 역연산이라는 다른 경로로 같은 결과를 검사한다

탐구

아홉의 나머지 검산이 888과 897을 구별하지 못하는 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

두 수의 차이가 9이므로 아홉으로 나눈 나머지가 같다. 나머지 정보만 남기면 아홉의 배수만큼 차이는 수들이 구별되지 않는다. 검산 방법이 어떤 정보를 보존하고 어떤 정보를 버리는지 이해해야 결과를 과신하지 않는다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

계산 장부 완성하기

단위와 어림과 정확한 값을 한 표에서 비교한다.

현대 재구성 시장에서 천 한 묶음의 길이를 12m로 정하고 묶음 17개를 준비했다고 하자. 전체 길이는 204m다. 그 가운데 $\frac{3}{8}$ 을 판매했다면 $204 \times \frac{3}{8} = 76.5\text{m}$ 를 판 셈이다. 남은 길이는 127.5m다. 여기서 0.5m는 반 미터라는 뜻이므로 분수의 표현과 소수의 표현이 같은 양을 가리키는지 확인할 수 있다.

결과를 검산하는 길은 여러 가지다. 팔린 76.5m와 남은 127.5m를 더하면 원래 길이 204m가 되어야 한다. 남은 비율 $\frac{5}{8}$ 을 전체에 곱해도 127.5m가 나와야 한다. 전체를 약 200m로 보면 팔린 길이는 약 75m이고 남은 길이는 약 125m일 것으로 예상할 수 있다. 단위가 달라지거나 소수점 위치가 잘못되었을 때 이 세 관점이 서로 맞지 않게 된다.

항목	계산	길이
전체	17×12	204m
판매	$204 \times \frac{3}{8}$	76.5m
남음	$204 \times \frac{5}{8}$	127.5m

탐구

묶음 수가 18개로 바뀌고 판매 비율이 같다면 남은 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

전체는 $18 \times 12 = 216\text{m}$ 다. 남은 비율은 $\frac{5}{8}$ 이므로 $216 \times \frac{5}{8} = 135\text{m}$ 다. 팔린 길이 81m와 더하면 216m가 되어 검산된다. 묶음 한 개가 추가되면서 남은 길이는 $12 \times \frac{5}{8} = 7.5\text{m}$ 만큼 늘었다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

말로 쓴 관계에서 방정식으로

알자브르가 가리키는 움직임

등식의 양쪽을 같은 방식으로 바꾸어 관계를 보존한다.

알과리즈미의 대수서를 읽을 때 오늘날의 x 와 등호가 원문에도 그대로 있었다고 생각하면 안 된다. 문제와 절차는 말로 설명되었으며 이 책의 기호식은 현대 독자를 위한 번역이다. 알자브르와 알무카발라라는 말은 식을 정리하는 활동과 연결된다. 여기서는 역사적 어휘를 한 가지 현대 연산과 완전히 동일시하기보다 부족한 항을 복원하고 같은 종류의 항을 정리하는 생각에 주목한다.

현대식 $x-4=9$ 에서 양쪽에 4를 더하면 $x=13$ 이 된다. 왼쪽에서 없어진 네 단위를 다시 채우는 동시에 오른쪽도 네 단위 늘린 것이다. 등식은 저울처럼 두 양이 같다는 관계를 나타내므로 한쪽만 바꾸면 관계가 깨진다. 식을 옮겨 적을 때 부호가 저절로 바뀐다고 외우기보다 어떤 연산을 양쪽에 적용했는지 말로 설명하면 풀이의 이유를 이해할 수 있다.

$$\begin{aligned}x - 4 &= 9 \\x - 4 + 4 &= 9 + 4 \\x &= 13\end{aligned}$$

양쪽에 같은 4를 더해 등식의 관계를 유지한다

탐구

$x-7=18$ 에서 x 를 구하고 양변에 적용한 연산을 설명하라.

풀이와 확인

양쪽에 7을 더하면 $x-7+7=18+7$ 이므로 $x=25$ 다. 왼쪽의 뺄셈이 사라진 까닭은 같은 양을 다시 더했기 때문이다. 처음 식에 25를 넣으면 $25-7=18$ 이 되어 관계가 맞는다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

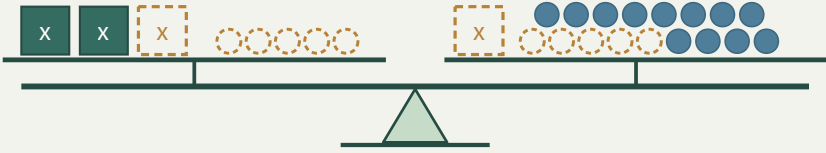
같은 종류의 항을 모으기

개수와 한 개의 크기를 구별하면 항 정리가 보인다.

상자 하나에 같은 수의 구슬이 들어 있다고 하자. 상자 세 개와 낱개 다섯 개가 상자 한 개와 낱개 열일곱 개의 구슬 수와 같다면 $3x+5=x+17$ 로 나타낼 수 있다. 양쪽에서 상자 하나를 덜어 내면 $2x+5=17$ 이다. 다시 양쪽에서 낱개 다섯 개를 덜어 내면 $2x=12$ 이므로 한 상자에는 여섯 개가 들어 있다.

$3x$ 와 5 는 같은 종류의 양처럼 보이지만 역할이 다르다. $3x$ 는 아직 모르는 한 상자의 구슬 수를 세 배 한 양이고 5 는 이미 알려진 낱개 수다. 따라서 $3x+5$ 를 $8x$ 로 합칠 수 없다. x 가 6일 때 $3x+5$ 는 23이지만 $8x$ 는 48이다. 특정한 값을 넣어 비교하는 간단한 검사는 잘못된 항 정리를 발견하는 데 유용하다.

$3x+5 = x+17$



x 점선: 양쪽에서 똑같이 덜어 낸 상자 1개와 낱개 5개
 남은 관계 $2x=12$ 이므로 한 상자에는 $x=6$ 개
 상자 하나와 낱개 다섯을 양쪽에서 덜어 내도 저울은 평형이다.

탐구

$4x+3=2x+19$ 를 풀고 원래 식으로 검산하라.

풀이와 확인

양쪽에서 $2x$ 와 3 을 차례로 빼면 $2x=16$ 이므로 $x=8$ 이다. 원래 식의 왼쪽은 $4 \times 8 + 3 = 35$ 이고 오른쪽은 $2 \times 8 + 19 = 35$ 다. 양쪽 값이 같으므로 구한 수가 조건을 만족한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

한 문장을 식으로 번역하기

무엇을 미지수로 정했는지가 식의 출발점이다.

어떤 수의 세 배에 다섯을 더하면 스물여덟이라는 문장을 읽어 보자. 어떤 수를 x 로 정하면 세 배는 $3x$ 이고 다섯을 더한 양은 $3x+5$ 다. 따라서 식은 $3x+5=28$ 이다. 반면 어떤 수에 다섯을 더한 뒤 세 배 하면 스물여덟이라는 문장은 $3(x+5)=28$ 이다. 낱말이 비슷해도 연산의 순서가 다르므로 두 식은 같지 않다.

괄호는 계산 순서를 분명히 기록하는 도구다. 첫 번째 식의 답은 $x=23/3$ 이고 두 번째 식의 답은 $x=13/3$ 이다. 문제를 풀기 전에 식이 상황을 제대로 담았는지 확인하지 않으면 계산을 정확히 해도 다른 문제의 답을 얻는다. 문장을 그림으로 먼저 나타내거나 연산의 순서를 화살표로 적어 보면 괄호가 필요한 위치를 찾기 쉽다.

문장	현대 기호식
세 배 한 뒤 다섯 더하기	$3x+5$
다섯 더한 뒤 세 배	$3(x+5)$
네 뺀 뒤 두 배	$2(x-4)$

탐구

어떤 수에서 4를 뺀 값을 두 배 하면 18이라는 문장을 식으로 쓰고 풀어라.

풀이와 확인

어떤 수를 x 로 두면 $2(x-4)=18$ 이다. 양쪽을 2로 나누어 $x-4=9$ 를 얻고 4를 더하면 $x=13$ 이다. 13에서 4를 뺀 9를 두 배 하면 18이므로 문장과 계산이 모두 맞는다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

비례배분을 방정식으로 읽기

비는 실제 양이 아니라 양 사이의 관계를 나타낸다.

현대 재구성 배분 문제에서 84개의 물건을 2:5의 비로 나눈다고 하자. 한 몫을 x 개라고 정하면 두 사람은 각각 $2x$ 개와 $5x$ 개를 받는다. 전체가 84개이므로 $7x=84$ 이고 $x=12$ 다. 따라서 각자의 몫은 24개와 60개다. 비의 두 수를 바로 물건 수로 읽지 않고 공통 단위의 배수로 해석하는 것이 핵심이다.

비를 4:10으로 바꾸어 써도 같은 배분을 뜻한다. 이때 한 몫의 크기는 여섯 개로 달라지지만 4×6 과 10×6 은 여전히 24와 60이다. 비를 구성하는 숫자와 실제 양은 서로 구별해야 한다. 합이 정해지면 비를 이용해 실제 양을 찾을 수 있고 차가 정해져도 같은 원리를 적용할 수 있다. 무엇이 알려져 있는지에 따라 세우는 식만 달라진다.

첫 몫



24

둘째 몫



60

현대 재구성: 2:5로 나눈 84개

탐구

두 몫의 비가 2:5이고 차가 36개라면 두 몫은 각각 몇 개인가?

풀이와 확인

두 몫을 $2x$ 와 $5x$ 로 두면 차는 $3x$ 다. $3x=36$ 이므로 $x=12$ 다. 따라서 24개와 60개다. 합이 아니라 차를 조건으로 주어도 공통 단위를 먼저 구하면 각자의 양을 찾을 수 있다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

역산의 순서를 설계하기

마지막에 한 연산부터 거꾸로 되돌린다.

어떤 수에 3을 더한 뒤 네 배 하고 다시 6을 빼서 38을 얻었다고 하자. 처음 수를 찾으려면 마지막에 뺀 6을 먼저 더해 44를 얻는다. 이어 네 배를 되돌리기 위해 4로 나누면 11이다. 마지막으로 처음에 더한 3을 빼면 8이 남는다. 식으로 쓰면 $4(x+3)-6=38$ 이며 역산의 각 단계가 양변에 같은 연산을 적용하는 풀이와 일치한다.

역산을 할 때 연산의 종류뿐 아니라 순서도 뒤집어야 한다. 처음에 3을 더했으므로 답 38에서 곧바로 3을 빼는 방식은 맞지 않는다. 여러 층으로 포장된 물건을 풀 때 가장 바깥 포장부터 벗기는 것과 같다. 다만 모든 연산이 언제나 하나의 역을 갖는 것은 아니다. 제곱은 양수와 음수에서 같은 값을 만들 수 있으므로 나중에 다룰 방정식에서는 해의 범위를 더 신중히 살펴야 한다.

38에 6을 더한다

44를 4로 나눈다

11에서 3을 뺀다

처음 수 8

현대 재구성: 합성된 연산을 역순으로 풀기

탐구

어떤 수를 다섯 배 한 뒤 7을 더해 42를 얻었다. 처음 수는 무엇인가?

풀이와 확인

42에서 7을 빼면 35다. 그다음 5로 나누면 7이다. 순방향으로 확인하면 $7 \times 5 + 7 = 42$ 다. 덧셈의 역은 뺄셈이고 0이 아닌 수를 곱하는 연산의 역은 그 수로 나누는 연산이다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

해가 없거나 하나로 정해지지 않을 때

식의 모양만으로 답이 하나라고 가정하지 않는다.

$3x+5=3x+8$ 에서 양쪽의 $3x$ 를 빼면 $5=8$ 이 남는다. 이 관계는 어떤 x 를 선택해도 참이 될 수 없으므로 해가 없다. 반대로 $3x+5=3x+5$ 는 양쪽에서 같은 항을 빼면 $5=5$ 가 남는다. 이 관계는 x 가 어떤 값이든 성립하므로 별도의 제한이 없다면 모든 실수가 해다. 미지수가 등장한다고 언제나 한 개의 답이 생기는 것은 아니다.

두 경우를 구별하려면 계산 마지막에 무엇이 남는지 읽어야 한다. $0x=0$ 은 x 가 0이라는 뜻이 아니다. 어떤 x 에 0을 곱해도 0이므로 모든 값이 가능하다는 뜻이다. $0x=3$ 은 왼쪽이 언제나 0이어서 불가능하다. 여기의 표현은 현대 대수의 관점이며 옛 문헌의 해 개념과 그대로 같다고 가정하지 않는다. 오늘날의 확장된 수 체계로 옛 절차의 조건을 다시 살펴보는 활동이다.

정리한 관계	현대 실수 범위의 해
$x=4$	4 하나
$0x=0$	모든 실수
$0x=3$	없음

탐구

$2(x+4)=2x+8$ 과 $2(x+4)=2x+9$ 의 해를 비교하라.

풀이와 확인

첫 식은 전개하면 $2x+8=2x+8$ 이므로 모든 실수가 해다. 둘째 식은 $8=9$ 가 남으므로 해가 없다. 괄호를 정확히 풀고 같은 항을 정리하면 두 관계가 근본적으로 다르다는 사실을 확인할 수 있다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

식을 바꾸어도 보존되어야 하는 것

등가 변형은 해의 집합을 그대로 유지하는 변화다.

$x=3$ 의 양쪽에 2를 더하면 $x+2=5$ 가 된다. 두 식을 만족하는 x 는 같으므로 등가인 식이다. 양쪽을 0이 아닌 같은 수로 곱하거나 나누는 변형도 해를 보존한다. 그러나 양쪽에 x 를 곱할 때에는 주의해야 한다. $x=3$ 에서 $x^2=3x$ 를 얻으면 원래 없던 $x=0$ 도 새 식을 만족한다. 적용한 연산을 되돌릴 수 없는 경우가 생겼기 때문이다.

이런 예는 계산 규칙을 기계적으로 확장하면 안 된다는 점을 보여 준다. $x^2=3x$ 를 x 로 나누어 $x=3$ 만 적으면 이번에는 $x=0$ 이라는 해를 놓친다. 나누는 수가 0이 될 가능성이 있는지 먼저 확인해야 한다. 식을 정리한 뒤 원래 조건에 대입하는 검산은 이와 같은 해의 추가나 누락을 찾는 데 도움이 된다. 풀이의 각 줄은 답을 향한 이동이면서 조건을 관리하는 기록이기도 하다.

식	실수 해
$x=3$	3
$x+2=5$	3
$x^2=3x$	

x 를 곱하면 0이라는 해가 추가될 수 있으므로 역연산 조건을 살핀다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

$x^2=5x$ 를 현대 실수 범위에서 풀 때 x 로 바로 나누면 무엇을 놓치는가?

풀이와 확인

$x=0$ 을 놓친다. $x^2-5x=x(x-5)=0$ 으로 나타내면 $x=0$ 또는 $x=5$ 다. 두 값을 원래 식에 넣으면 모두 성립한다. x 로 나눌 수 있는 경우는 x 가 0이 아니라고 따로 가정했을 때뿐이다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

배분 문제의 완전한 해설

변수의 뜻과 계산과 상황 검증을 연결한다.

현대 재구성 작업장에서 두 팀이 같은 종류의 조각을 만든다. 첫 팀은 둘째 팀의 두 배보다 여섯 개를 더 만들었고 두 팀의 합은 아흔 개이다. 둘째 팀의 양을 x 개로 정하고 두 팀의 관계를 식으로 나타내자. 첫 팀은 $2x+6$ 개이므로 $x+(2x+6)=90$ 이다. 따라서 $3x=84$ 이고 $x=28$ 이다.

첫 팀은 $2 \times 28 + 6 = 62$ 개다. 두 팀의 합은 $62 + 28 = 90$ 이며 첫 팀의 양에서 둘째 팀의 두 배를 빼면 $62 - 56 = 6$ 이다. 합과 차의 조건을 각각 확인해야 한다. 변수에 팀 이름을 붙이지 않으면 28이 어느 팀의 답인지 혼동할 수 있다. 풀이의 마지막 문장은 숫자 두 개만 나열하지 말고 첫 팀과 둘째 팀의 양을 단위와 함께 서술하는 편이 좋다.

둘째 팀



28

첫째 팀



62

두 팀의 합은 90개이며 첫 팀은 둘째 팀의 두 배보다 6개 많다

탐구

합이 102개로 바뀌고 나머지 조건이 같으면 두 팀의 양은 어떻게 되는가?

풀이와 확인

둘째 팀을 x 개로 두면 $3x+6=102$ 이므로 $x=32$ 다. 첫 팀은 70개다. 합은 102이고 $70 - 2 \times 32 = 6$ 이다. 전체가 12개 늘었을 때 둘째 팀은 4개 늘고 첫 팀은 8개 늘어 두 배 관계의 증가분도 보존된다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

여섯 형식과 완전제곱

여섯 형식이 필요한 까닭

양의 크기를 다루는 체계에서는 항의 위치가 중요하다.

알카리즈미의 대수에서는 제곱과 근과 수의 관계를 여러 기본 형식으로 나누었다. 현대적으로 쓰면 $x^2=bx$ 와 $x^2=c$ 와 $bx=c$ 와 $x^2+bx=c$ 와 $x^2+c=bx$ 와 $x^2=bx+c$ 의 여섯 형식이다. 여기서 b 와 c 는 양수로 생각한다. 음수 계수를 허용하여 모든 항을 한쪽에 모으는 오늘날의 표현을 사용하면 여러 형식을 하나로 묶을 수 있지만 당시의 분류는 다른 개념적 조건에서 이해해야 한다.

역사적 분류를 낡은 표기라며 지나치면 양과 도형을 어떻게 다루었는지 보이지 않는다. 길이와 넓이는 양의 크기로 제시되며 어느 항을 어느 쪽에 놓았는지가 문제의 성격을 구별한다. 이 장의 기호식은 그 관계를 설명하는 현대적 재구성이다. 현대 실수 범위의 모든 근을 찾는 활동과 역사적 문맥에서 허용하는 양의 해를 찾는 활동을 분리하여 읽자.

형식	현대적 예
제곱=근	$x^2=5x$
제곱=수	$x^2=25$
근=수	$5x=25$
제곱+근=수	$x^2+6x=16$
제곱+수=근	$x^2+8=6x$
제곱=근+수	$x^2=6x+16$

탐구

현대식 $x^2-6x+8=0$ 은 여섯 형식 중 어느 관계로 바꾸어 쓸 수 있는가?

풀이와 확인

$x^2+8=6x$ 로 옮기면 제곱과 수의 합이 근의 배수와 같다는 형식이다. 현대적으로는 $x=2$ 와 $x=4$ 가 해이며 두 값 모두 양수다. 항을 옮겨 쓰는 목적은 양의 항만 사용하는 분류와의 관계를 보기 위해서다.

제곱과 근과 수를 비교하기

같은 수치라도 항의 종류에 따라 풀이가 달라진다.

$x^2=25$ 는 한 변의 제곱이 25인 정사각형을 생각하게 한다. 양의 길이를 찾는다면 $x=5$ 다. 현대 실수 범위에서는 $x=-5$ 도 제곱하면 25가 되므로 두 근이 있다. $5x=25$ 는 같은 크기의 길이를 다섯 번 합친 양이 25라는 관계로 볼 수 있어 $x=5$ 다. 두 식의 양의 답은 같지만 첫 식은 제곱 관계이고 둘째 식은 일차 관계다.

$x^2=5x$ 를 양의 x 에 대해 생각하면 x 로 나누어 $x=5$ 를 얻는다. 하지만 현대 실수 범위에서는 $x=0$ 도 원래 식을 만족한다. 해를 적을 때 어떤 범위를 다루었는지 밝혀야 같은 답과 다른 답을 공정하게 비교할 수 있다. 옛 문헌의 양의 해를 오늘의 전체 실수 해와 비교하면서 빠진 답이라고만 평가하면 당시의 문제 설정을 놓친다.

방정식	양의 길이 해	실수 해
$x^2=25$	5	-5와 5
$5x=25$	5	5
$x^2=5x$	5	

같은 양의 답이 나와도 연산과 해의 범위는 다를 수 있다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

$x^2=36$ 과 $6x=36$ 을 양의 길이 문제와 현대 실수 문제로 나누어 비교하라.

풀이와 확인

양의 길이를 찾는 경우 두 식의 답은 모두 6이다. 현대 실수 범위에서는 첫 식의 근이 6과 -6이며 둘째 식의 근은 6 하나다. 범위와 연산의 종류를 함께 기록해야 같은 숫자가 나오는 이유와 해의 차이를 설명할 수 있다.

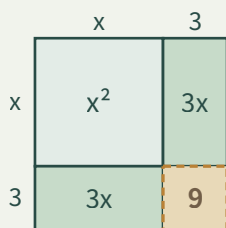
[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

빠진 모서리를 채우는 생각

완전제곱은 식과 넓이 그림을 동시에 정리한다.

$x^2+6x=16$ 을 양의 길이 문제로 살펴보자. 한 변이 x 인 정사각형 옆에 넓이가 $3x$ 인 직사각형을 두 개 붙이면 x^2+6x 를 나타낼 수 있다. 두 직사각형을 서로 이웃한 변에 붙이면 한쪽 모서리에 가로와 세로가 각각 3인 정사각형이 빠진다. 그 넓이 9를 채우면 큰 정사각형의 한 변은 $x+3$ 이 된다.

원래 넓이 16에 9를 더한 25가 큰 정사각형의 넓이이므로 $x+3=5$ 다. 따라서 양의 길이는 $x=2$ 다. 식으로는 $x^2+6x+9=25$ 와 $(x+3)^2=25$ 를 거친다. 넓이 그림에서는 $x+3$ 을 양의 길이로 읽지만 현대 실수 계산에서는 $x+3=-5$ 도 가능하여 $x=-8$ 이 추가된다. 그림이 나타내는 범위와 기호식의 해 범위를 구분하면 두 설명이 충돌하지 않는다.



$$x^2+6x=16$$

$$x^2+6x+9=16+9$$

$$(x+3)^2=25\text{이므로 } x+3=5$$

$$\text{양의 길이 } x=2$$

빠진 3×3 모서리를 채우면 한 변이 $x+3$ 인 정사각형이 된다.

탐구

$x^2+8x=20$ 에서 채워 넣을 모서리의 넓이와 양의 해를 구하라.

풀이와 확인

$8x$ 를 $4x$ 씩 둘로 나누므로 모서리의 한 변은 4이고 넓이는 16이다. $(x+4)^2=36$ 이 되어 양의 길이에서는 $x+4=6$ 이고 $x=2$ 다. 현대 실수 범위의 다른 근은 $x=-10$ 이다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

두 양의 해가 생기는 경우

넓이가 같은 두 직사각형이 서로 다른 길이를 준다.

$x^2+8=6x$ 를 정리하면 $x(6-x)=8$ 이다. 가로가 x 이고 세로가 $6-x$ 인 직사각형의 넓이가 8이라는 뜻으로 읽을 수 있다. 두 변의 합이 6이며 곱이 8이므로 한쪽 길이가 2이면 다른 쪽은 4다. x 가 가로를 가리킨다면 $x=2$ 와 $x=4$ 가 모두 가능하다. 어느 변을 x 로 선택했는지가 두 해로 나타난 것이다.

완전제곱으로도 같은 결과를 얻는다. $x^2-6x+9=1$ 이므로 $(x-3)^2=1$ 이다. 따라서 $x-3$ 은 1 또는 -1이고 x 는 4 또는 2다. 가운데 값 3에서 같은 거리만큼 떨어진 두 수가 해가 되는 구조를 볼 수 있다. 현대 수직선 그림은 이 대칭을 보여 주지만 그 그림을 역사적 원문의 표현이라고 소개해서는 안 된다.



현대 재구성: 해 2와 4는 3을 중심으로 대칭이다.

탐구

$x^2+12=8x$ 에서 두 양의 해를 구하고 직사각형의 두 변으로 해석하라.

풀이와 확인

$(x-4)^2=4$ 이므로 $x=2$ 또는 $x=6$ 이다. 직사각형의 두 변은 2와 6이며 합은 8이고 넓이는 12다. x 를 어느 변으로 정하느냐에 따라 두 해가 생기지만 직사각형의 모양은 서로 회전한 관계다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

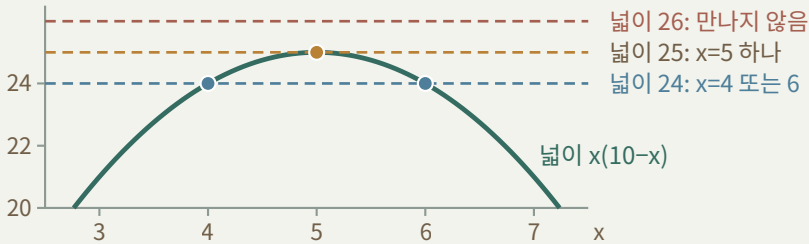
해가 만나는 경계

가운데 값에서 넓이가 가장 커지는 이유를 설명한다.

두 변의 합이 10인 직사각형을 생각하자. 변을 x 와 $10-x$ 로 쓰면 넓이는 $x(10-x)$ 다.

$x=5+d$ 로 놓으면 다른 변은 $5-d$ 가 되고 넓이는 $(5+d)(5-d)=25-d^2$ 이다. d^2 은 음수가 아니므로 넓이는 25보다 커질 수 없다. 같은 합을 가진 직사각형 가운데 정사각형의 넓이가 가장 크다는 사실이 식에서 드러난다.

따라서 $x^2+25=10x$ 는 양의 해 $x=5$ 하나를 갖는다. 넓이 조건을 24로 바꾸면 $25-d^2=24$ 여서 $d=1$ 또는 -1 이며 $x=4$ 와 $x=6$ 이 된다. 넓이를 26으로 요구하면 $d^2=-1$ 이 되어 실수 길이로는 만들 수 없다. 문제의 수치가 조금 바뀌어도 해의 개수가 둘에서 하나를 거쳐 없음으로 바뀔 수 있다.



두 변의 합이 10이면 넓이는 25를 넘지 못해 26은 만들 수 없다.

탐구

두 변의 합이 12인 직사각형에서 넓이 35와 36과 37이 가능한지 판단하라.

풀이와 확인

변을 $6+d$ 와 $6-d$ 로 쓰면 넓이는 $36-d^2$ 이다. 넓이 35는 $d^2=1$ 이므로 변 5와 7로 가능하다. 넓이 36은 변 6과 6일 때 가능하다. 넓이 37은 실수 길이로 불가능하다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

제곱이 근과 수의 합일 때

형식이 달라지면 완전제곱의 배치도 달라진다.

$x^2=6x+16$ 을 현대 기호로 정리하면 $x^2-6x=16$ 이다. 양쪽에 9를 더하면 $(x-3)^2=25$ 가 된다. 따라서 현대 실수 범위에서는 $x-3=5$ 또는 $x-3=-5$ 이고 $x=8$ 또는 $x=-2$ 다. 양의 길이를 구하는 상황에서는 8만 남는다. 앞에서 살핀 $x^2+6x=16$ 과 숫자는 같지만 항이 놓인 위치가 다르므로 양의 해도 2에서 8로 달라진다.

두 식을 비교할 때 $6x$ 의 위치를 눈여겨보자. 한쪽에서는 정사각형에 직사각형을 더한 넓이를 알고 있고 다른 쪽에서는 정사각형에서 해당 넓이를 뺀 나머지를 알고 있다. 현대 기호는 이를 덧셈과 뺄셈의 차이로 표현한다. 역사적 분류에서는 양의 항을 어느 쪽에 놓는지가 이 차이를 드러냈다. 같은 계산법의 원리를 공유하면서도 별도 형식이 필요했던 이유를 읽을 수 있다.

$$\begin{aligned}x^2 &= 6x + 16 \\x^2 - 6x + 9 &= 25 \\(x-3)^2 &= 25 \\ \text{양의 해 } x &= 8\end{aligned}$$

현대 재구성: 같은 양을 더해 제곱을 완성한다.

탐구

$x^2=4x+12$ 의 양의 해와 현대 실수 범위의 다른 근을 구하라.

풀이와 확인

양쪽을 정리하고 4를 더하면 $(x-2)^2=16$ 이다. $x-2=4$ 또는 -4 이므로 $x=6$ 또는 -2 다. 양의 길이는 6이다. 계산하면 $6^2=36$ 이며 $4 \times 6 + 12 = 36$ 이 된다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

이어 읽기 / 여섯 형식과 완전제곱

넓이 그림으로 다시 읽는 $x^2 = 6x + 16$

정사각형에서 띠를 떼어 낸 나머지를 옮겨 붙이면 $x^2=6x+16$ 도 넓이 그림으로 풀 수 있다.

4장에서는 $x^2=6x+16$ 을 현대 기호로 정리하여 $(x-3)^2=25$ 를 얻었다. 그러나 $x^2+6x=16$ 처럼 정사각형 바깥에 띠를 붙이고 모서리를 채우는 그림은 이 형식에 그대로 쓸 수 없다. 이번에는 제곱에서 근의 배수를 떼어 낸 나머지가 16이라는 관계를 넓이로 읽는다. 여기의 그림은 양의 길이만 다루는 학습용 모형이며 특정 원문의 도해를 복원한 것은 아니다.

한 변이 x 인 정사각형에서 폭 6인 띠를 잘라 내면 넓이 $6x$ 가 빠지고 가로 $x-6$ 과 세로 x 인 직사각형이 남는다. 식 $x^2=6x+16$ 에 따르면 이 남은 직사각형의 넓이는 16이다. 남은 직사각형을 위에서 높이 3인 곳에서 가로로 잘라 위 조각을 가, 아래 조각을 나라고 부르자. 가는 가로 $x-6$ 과 세로 3인 조각이고 나 는 가로 $x-6$ 과 세로 $x-3$ 인 조각이다.

나는 그대로 두고 가를 90° 돌려 나의 왼쪽 아래에 붙이면 한 변이 $x-3$ 인 정사각형에서 3×3 모서리가 빠진 모양이 된다. 빠진 모서리의 넓이 9를 채우면 $(x-3)^2=16+9=25$ 가 된다. 양의 길이로 읽으면 $x-3=5$ 이므로 $x=8$ 이다. 그림을 $x=8$ 의 비율로 그리면 처음 정사각형은 8×8 이고 띠의 넓이는 48이며 남은 직사각형은 $2 \times 8=16$ 이어서 모든 조각의 넓이가 맞는다.

6을 반으로 나눈 3이 그림에서 두 번 쓰인다는 점에 주목하자. 한 번은 남은 직사각형을 자르는 높이이고 다른 한 번은 채워 넣는 모서리의 변이다. $x^2+6x=16$ 에서는 정사각형 바깥에 띠를 붙였고 이번에는 정사각형 안에서 띠를 떼어 냈다. 반으로 나누고 제공하는 계산은 같아도 조각의 배치가 다르므로 두 형식을 따로 다룬 이유가 넓이 그림에서도 드러난다.

$x^2=6x+16$

6

$x-6$

x

가

나

떼어 낸 띠 $6x$

$x-3$

가와 나의 넓이 합 $x(x-6)=16$

가를 돌려
옮긴다

3

$x-6$

3

9

가

나

$(x-3)^2=16+9=25$

$x-3=5$ 이므로 $x=8$

떼어 내고 남은 넓이 16을 옮겨 붙이면 모서리 9가 빈다.

단계	넓이 관계
띠를 떼어 냄	$x^2-6x=16$
가를 돌려 붙임	$(x-3)^2-9=16$
모서리를 채움	$(x-3)^2=25$

탐구

$x^2=10x+24$ 를 같은 넓이 그림으로 풀 때 떼어 낸 띠의 폭과 채워 넣을 모서리의 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

폭 10인 띠를 떼어 내면 남은 직사각형의 넓이 $x(x-10)$ 이 24가 된다. 이를 높이 5에서 잘라 옮기면 한 변 $x-5$ 인 정사각형에서 5×5 모서리가 빠진 모양이 되므로 채울 넓이는 25다. $(x-5)^2=49$ 이므로 양의 길이는 $x=12$ 다. 계산하면 $12^2=144$ 이고 $10 \times 12+24=144$ 다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

이슬람아랍관

37

그림의 넓이와 식의 단위

변과 넓이를 더할 때에는 계수의 의미를 확인한다.

x 가 길이라면 x^2 는 넓이다. 따라서 x^2+6x 를 실제 넓이로 해석하려면 6도 길이 단위를 가진 값으로 생각해야 한다. 예를 들어 x 를 미터로 재고 $6m \times x$ 를 직사각형 넓이로 읽으면 두 항을 합칠 수 있다. 단순한 숫자 계산에서는 단위를 생략하기 쉽지만 도형으로 옮길 때에는 서로 다른 차원의 양을 무심코 더하지 않도록 주의해야 한다.

한 변이 x 인 정사각형에 폭이 $3m$ 인 직사각형 두 개를 붙인 그림에서는 각 직사각형 넓이가 $3m \times x$ 다. 빠진 모서리는 $3m \times 3m$ 이므로 $9m^2$ 다. 이 조건을 적으면 완전제곱에서 왜 6을 반으로 나누고 다시 제곱하는지 더 분명해진다. 역사적 기하 대수와 오늘의 추상 기호 대수는 관계를 보여 주는 방식이 다르므로 번역 과정에서 단위가 어떻게 해석되었는지도 살펴야 한다.

부분	가로	세로	넓이
정사각형	x	x	x^2
첫 띠	x	$3m$	$3m \times x$
둘째 띠	$3m$	x	$3m \times x$
모서리	$3m$	$3m$	$9m^2$

각 길이와 넓이의 단위를 맞추어 완전제곱의 네 부분을 읽는다

탐구

x 를 미터로 나타낸 길이라 할 때 $x^2+4x=12$ 를 넓이 관계로 설명하려면 무엇을 밝혀야 하는가?

풀이와 확인

4가 $4m$ 에 해당하며 오른쪽 12는 $12m^2$ 에 해당한다고 밝혀야 한다. 그러면 x^2 와 $4m \times x$ 는 모두 넓이가 된다. 숫자만 적은 식을 도형으로 그릴 때에는 각 항의 단위가 서로 맞도록 해석해야 한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

완전제곱 탐구의 종합 해설

계산 결과와 허용 범위와 그림을 함께 확인한다.

현대 재구성 문제 $x^2+10x=39$ 를 풀어 보자. 10의 반은 5이고 그 제곱은 25다. 양쪽에 25를 더하면 $x^2+10x+25=64$ 이며 $(x+5)^2=64$ 가 된다. 양의 길이로 읽으면 $x+5=8$ 이므로 $x=3$ 이다. 현대 실수 전체에서는 $x+5=-8$ 도 가능하므로 $x=-13$ 이 추가된다. 어떤 범위에서 답을 제시하는지 마지막에 다시 밝혀야 한다.

넓이 그림에서는 x^2 정사각형과 $5x$ 직사각형 두 개와 넓이 25인 모서리를 붙여 한 변이 $x+5$ 인 정사각형을 만든다. $x=3$ 을 넣으면 원래 넓이는 $9+30=39$ 이고 모서리를 더한 넓이는 64다. 풀이를 검토할 때에는 반으로 나눈 값과 채워 넣은 넓이를 혼동하지 않았는지 확인한다. 5는 모서리의 변이며 25는 모서리의 넓이다.

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$\text{양의 길이 } x = 3$$

모서리의 변은 5이고 덧붙이는 넓이는 25이다

탐구

$x^2+12x=28$ 을 같은 방식으로 풀어 양의 해를 제시하라.

풀이와 확인

12의 반은 6이고 채울 넓이는 36이다. $(x+6)^2=64$ 가 되어 양의 길이에서는 $x+6=8$ 이고 $x=2$ 다. 원래 식에 넣으면 $4+24=28$ 이다. 현대 실수 범위의 다른 근은 $x=-14$ 다. 반으로 나누는 단계와 제공하는 단계를 차례로 기록하면 오류가 줄어든다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

타비트와 수의 관계

번역자이자 문제를 만든 사람

전승과 창조는 한 사람의 활동 안에서 만난다.

타비트 이븐 쿠라는 하란 출신의 학자로 바그다드에서 활동했다. 그리스어와 시리아어와 아랍어를 아우른 그의 언어 능력은 수학 저술의 번역과 개정에 중요했다. 그러나 그의 역할을 옛 책을 보존한 사람으로만 한정하면 수론과 기하학과 역학에 관한 독자적인 연구를 놓친다. 서로 다른 전통의 책을 읽고 그 안에서 새로운 질문을 찾아내는 일도 수학의 창작이다.

이 장에서는 그가 연구한 주제에서 출발하여 약수와 비와 평형을 오늘의 기호로 탐구한다. 특정 원문의 문장을 그대로 재현하는 활동은 아니다. 예를 들어 약수를 모두 더하는 작은 계산은 큰 수의 성질을 연구하기 전에 정의가 무엇을 포함하고 제외하는지 익히게 한다. 인물의 업적 목록과 실제로 따라 해 볼 수 있는 수학적 관계를 연결하면 역사 속 이름이 구체적인 문제로 다가온다.

12의 약수	1	2	3	4	6	12
진약수 합	16					

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

12의 양의 약수를 모두 적고 자기 자신을 제외한 합을 구하라.

풀이와 확인

양의 약수는 1과 2와 3과 4와 6과 12다. 자기 자신인 12를 빼면 합은 16이다. 뒤에서 사용할 진약수의 합은 수 자체를 제외한 양의 약수의 합이라는 약속을 따른다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

완전수의 균형

자신의 진약수를 더해 원래 수로 돌아온다.

6의 진약수는 1과 2와 3이다. 합이 6이므로 6을 완전수라고 한다. 28의 진약수는 1과 2와 4와 7과 14이며 합도 28이다. 여기서 완전하다는 말은 수의 성질에 붙인 이름이다. 다른 수보다 더 좋은 수라는 가치 판단을 뜻하지 않는다. 약수 목록을 빠뜨리지 않으려면 곱이 원래 수가 되는 짝을 순서대로 찾는 것이 편리하다.

28은 1×28 과 2×14 와 4×7 로 나타난다. 작은 쪽 인수를 키우다가 두 인수가 교차하면 이미 찾은 짝을 다시 만나므로 멈출 수 있다. 제곱수에서는 가운데 약수가 중복되는 점에 주의해야 한다. 36의 약수 짝 6×6 에서 6은 한 번만 적는다. 정의가 단순해 보여도 목록을 만드는 절차를 정확히 설계해야 합을 믿을 수 있다.

$$6 \rightarrow 1+2+3=6$$

$$28 \rightarrow 1+2+4+7+14=28$$

$$10 \rightarrow 1+2+5=8$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

10은 완전수인가? 약수의 합으로 설명하라.

풀이와 확인

10의 진약수는 1과 2와 5이며 합은 8이다. 원래 수보다 작으므로 완전수가 아니다. 완전수 여부는 약수의 개수가 아니라 진약수의 합과 원래 수의 비교로 판단한다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

서로를 만드는 두 수

친화수는 두 번의 약수 합 계산을 요구한다.

220의 진약수는 1과 2와 4와 5와 10과 11과 20과 22와 44와 55와 110이다. 모두 더하면 284다. 반대로 284의 진약수는 1과 2와 4와 71과 142이며 합은 220이다. 이렇게 서로 다른 두 수가 상대방의 진약수 합이 되는 쌍을 친화수라고 한다. 한쪽 방향만 확인해서는 정의를 만족했다고 말할 수 없다.

이 관계를 화살표로 그리면 220에서 284로 가고 다시 220으로 돌아온다. 완전수는 자기 자신으로 돌아오는 고리다. 진약수 합이라는 하나의 규칙이 서로 다른 길이의 순환을 만들 수 있다는 점이 흥미롭다. 여기서 화살표는 시간의 흐름이나 인과관계를 뜻하지 않고 정해진 계산을 한 번 적용했다는 뜻이다. 그림의 선이 어떤 연산을 나타내는지 명확히 읽자.



220

284

현대 재구성: 두 수의 진약수 합은 서로를 가리킨다.

탐구

284의 진약수 합을 묶어 계산하여 확인하라.

풀이와 확인

$1+2+4=7$ 이고 $71+142=213$ 이다. 두 합을 더하면 220이다. $284=4 \times 71$ 이므로 약수를 1과 2와 4에 각각 1 또는 71을 곱해 빠짐없이 만들 수 있다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

약수의 합을 곱으로 묶기

소인수 분해는 긴 목록을 짧은 식으로 바꾼다.

$20=2^2 \times 5$ 이므로 양의 약수는 2의 지수를 0부터 2까지 고르고 5의 지수를 0 또는 1로 골라 만든다. 약수의 전체 합은 $(1+2+4)(1+5)=7 \times 6=42$ 다. 여기에는 20 자체도 들어 있으므로 진약수 합은 $42-20=22$ 다. 괄호를 전개하면 1과 5와 2와 10과 4와 20이 정확히 한 번씩 나타난다.

이 방법에서 서로 다른 소인수의 지수를 독립적으로 고를 수 있다는 점이 중요하다. 20을 2×10 으로 나누어 $(1+2)(1+10)$ 이라고 계산하면 10 안에 이미 2가 들어 있어 약수 선택의 구조가 맞지 않는다. 편리한 공식도 조건을 확인하지 않고 적용하면 오류를 만든다. 작은 수에서는 약수 목록을 직접 적어 공식과 비교하면 원리를 분명하게 이해할 수 있다.

	×	1	3	9	
세로 $1+2=3$	1	1	3	9	$(1+2) \times (1+3+9)$ $=3 \times 13=39$ $39-18=21$ 진약수 합
	2	2	6	18	
		가로 $1+3+9=13$			

칸 하나가 약수 하나이며 칸의 넓이가 그 약수의 크기다

18의 약수 여섯 개가 넓이 3×13 인 직사각형을 빈틈없이 채운다.

탐구

$18=2 \times 3^2$ 의 양의 약수 합과 진약수 합을 구하라.

풀이와 확인

전체 합은 $(1+2)(1+3+9)=3 \times 13=39$ 다. 여기에 포함된 18을 빼면 진약수 합은 21이다. 실제 진약수 1과 2와 3과 6과 9를 더해도 21이다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

규칙의 가정이 빠지면

친화수를 만드는 공식에는 소수 조건이 붙는다.

타비트의 친화수 정리를 오늘의 기호로 나타내면 다음과 같다. n 이 1보다 큰 정수일 때 $p=3 \times 2^{n-1}-1$ 과 $q=3 \times 2^n-1$ 과 $r=9 \times 2^{2n-1}-1$ 이 모두 소수라면 $2^n p q$ 와 $2^n r$ 은 친화수다. 이 식은 모든 친화수를 만들어 낸다는 뜻이 아니다. 주어진 조건이 성립할 때 특정 쌍을 얻는 충분조건이다.

$n=2$ 를 넣으면 $p=5$ 와 $q=11$ 과 $r=71$ 이 나온다. 세 수가 모두 소수이므로 $4 \times 5 \times 11=220$ 과 $4 \times 71=284$ 를 얻는다. $n=3$ 에서는 $p=11$ 과 $q=23$ 은 소수지만 $r=287=7 \times 41$ 이므로 조건을 만족하지 않는다. 공식의 모양만 보고 아무 n 이나 넣는 것과 정리의 가정을 확인하는 것은 다르다.

$$n=2 \rightarrow 5 \text{와 } 11 \text{과 } 71$$

$$4 \times 5 \times 11=220$$

$$4 \times 71=284$$

$$n=3 \rightarrow 287=7 \times 41$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

$n=3$ 에서 공식이 친화수라고 보장하지 않는 까닭을 설명하라.

풀이와 확인

필요한 세 소수 조건 가운데 r 의 조건이 실패한다. 287은 7×41 로 분해된다. 정리를 적용할 수 없다는 말은 계산식 자체가 금지된다는 뜻이 아니라 그 결과에 대한 결론을 이 정리로 보장할 수 없다는 뜻이다.

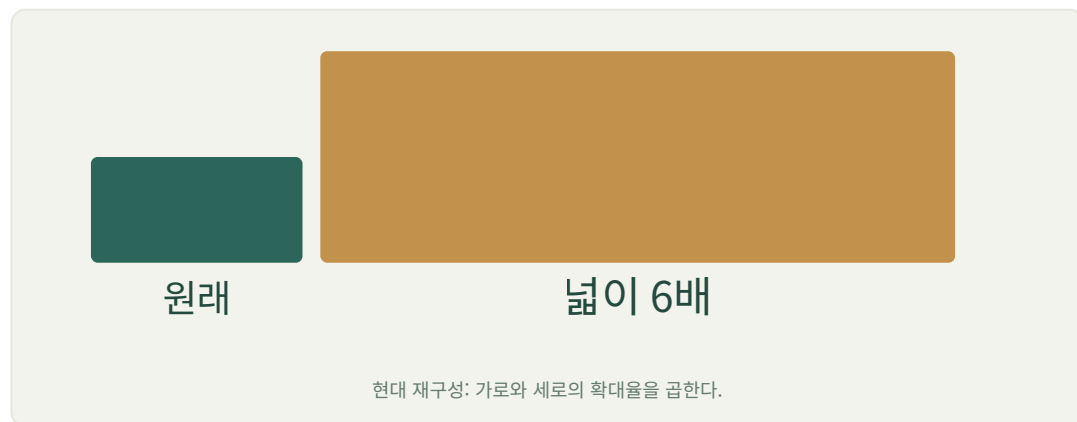
[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

비를 이어 붙이는 계산

두 변화가 겹치면 비의 곱이 나타난다.

도형의 가로를 원래의 $3/2$ 배로 늘린 뒤 다시 $4/3$ 배로 늘리면 최종 길이는 원래의 두 배다. $3/2 \times 4/3 = 2$ 이기 때문이다. 비를 합성하는 계산은 변화의 단계를 하나로 묶는다. 첫 단계가 50퍼센트 증가이고 두 번째가 약 33.3퍼센트 증가라고 해서 두 증가율을 더해 전체 증가율을 구할 수는 없다. 두 번째 변화가 적용되는 기준 길이가 이미 달라졌기 때문이다.

길이와 넓이의 변화도 구별해야 한다. 정사각형의 모든 변을 두 배로 늘리면 넓이는 네 배다. 가로와 세로가 각각 두 배가 되어 두 변화가 곱해진다. 비의 계산을 정확히 사용하려면 무엇이 비인지 먼저 정하고 같은 종류의 양끼리 비교해야 한다. 타비트가 다룬 비의 연구와 연결되는 질문을 현대적인 확대 도형으로 살펴보는 활동이다.



탐구

그림을 가로 3배와 세로 2배로 확대하면 넓이와 모양은 어떻게 달라지는가?

풀이와 확인

넓이는 $3 \times 2 = 6$ 배가 된다. 가로와 세로의 확대율이 서로 다르므로 일반적으로 원래 그림과 닮은 모양은 아니다. 넓이의 배수와 닮음 여부는 서로 다른 판단이다.

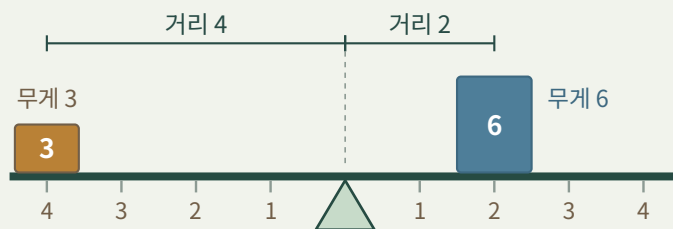
[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

지렛대에서 만나는 곱

평형은 무게만 비교하는 문제가 아니다.

이상적인 가벼운 막대가 한 점을 중심으로 놓여 있다고 하자. 왼쪽에는 무게 3인 물체를 받침점에서 거리 4에 놓고 오른쪽에는 무게 6인 물체를 거리 2에 놓는다. 두 쪽의 무게와 거리의 곱이 모두 12이므로 평형을 이룬다. 이는 막대 자체의 무게와 마찰을 무시한 현대적 모형이다. 타비트의 역학 연구를 읽는 출발점으로 이러한 조건을 분명히 적을 수 있다.

무거운 물체를 받침점 가까이 옮기면 가벼운 물체와 균형을 맞출 수 있다. 그러나 거리가 같다면 무게도 같아야 한다. 한쪽 물체를 두 배 멀리 옮기면 그쪽 무게를 절반으로 줄여야 같은 곱을 유지한다. 관찰 결과를 설명하는 식이 어떤 이상화 아래에서 성립하는지 살피면 실제 기구와 수학적 모형을 혼동하지 않게 된다.



왼쪽 $3 \times 4 = 12$ 와 오른쪽 $6 \times 2 = 12$ 가 같아 평형을 이룬다

받침점에서 거리 4의 무게 3과 거리 2의 무게 6이 평형을 이룬다.

탐구

왼쪽 무게 8이 거리 3에 있다. 오른쪽 거리 4에 놓을 무게를 구하라.

풀이와 확인

왼쪽의 곱은 $8 \times 3 = 24$ 다. 오른쪽 무게를 w 라 하면 $4w = 24$ 이므로 $w = 6$ 이다. 막대 자체가 무겁거나 받침점이 비대칭이면 그 영향도 추가로 계산해야 한다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

친화수 정리의 조건이 계산을 만드는 과정

공식을 계산하는 데서 한 걸음 더 나아가 약수 합이 왜 맞물리는지 살핀다.

타비트의 정리에서 $k=2^n$ 으로 놓으면 $p=3k/2-1$ 과 $q=3k-1$ 과 $r=9k^2/2-1$ 이다. $n>1$ 이고 세 수가 모두 소수라는 조건을 유지한다. 그러면 p 와 q 와 r 은 홀수이며 k 와 공통 소인수를 갖지 않는다. 이 성질 때문에 약수 합을 독립적인 곱으로 나눌 수 있다.

k 의 약수 합은 $1+2+4+\dots+k=2k-1$ 이다. $A=kpq$ 의 전체 약수 합은 $(2k-1)(p+1)(q+1)$ 이다. 두 괄호의 곱은 $(3k/2)(3k)=9k^2/2$ 이므로 전체 합은 $(2k-1)9k^2/2$ 로 정리된다.

$B=kr$ 의 전체 약수 합도 $(2k-1)(r+1)$ 이다. $r+1=9k^2/2$ 이므로 두 수의 전체 약수 합이 같다. 한편 $pq+r$ 을 전개하면 $9k^2-9k/2$ 이다. 따라서 $A+B=k(pq+r)=(2k-1)9k^2/2$ 가 되어 공통 약수 합과 일치한다.

전체 약수 합에서 자기 자신 A 를 빼면 B 가 남고 B 를 빼면 A 가 남는다. 이것이 친화수 조건이다. 세 소수 조건은 장식이 아니라 약수 합을 곱으로 쓰는 논증의 핵심이다. 여기의 문자 전개는 역사적 정리를 확인하는 현대 증명이며 원문의 표현을 그대로 옮긴 것은 아니다.

n=2의 계산	값
k와 p와 q와 r	4와 5와 11과 71
두 수 A와 B	220과 284
공통 전체 약수 합	504
진약수 합	$504-220=284$

탐구

$n=1$ 을 허용하면 왜 논증을 그대로 사용할 수 없는가?

풀이와 확인

$n=1$ 이면 $k=2$ 이며 $p=2$ 가 된다. k 와 p 가 서로소가 아니므로 약수 합을 $(1+2)(1+2)$ 로 곱하면 약수 2를 중복해 센다. 정리의 $n>1$ 조건은 이 중복을 막는 역할도 한다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

이어 읽기 / 타비트와 수의 관계

n을 늘려 보는 타비트의 친화수 정리

세 소수 조건을 $n=7$ 까지 점검하면 정리가 실제로 새 친화수를 만드는 경우가 드물게 나타난다.

타비트의 정리는 $p=3 \times 2^{n-1}-1$ 과 $q=3 \times 2^n-1$ 과 $r=9 \times 2^{2n-1}-1$ 이 모두 소수일 때 $2^n pq$ 와 $2^n r$ 이 친화수임을 보장한다. 본문에서는 $n=2$ 에서 220과 284를 얻고 $n=3$ 에서 $r=287=7 \times 41$ 때문에 조건이 실패하는 것을 보았다. 이번에는 n 을 7까지 늘려 세 조건이 동시에 성립하는 경우를 찾는다. 이 단원의 수표는 현대 계산으로 만든 재구성이며 원문에 실린 표를 옮긴 것이 아니다.

$n=4$ 이면 $p=23$ 과 $q=47$ 과 $r=1151$ 이다. 1151은 제곱근이 34보다 작으므로 31 이하의 소수로 나누어 보면 충분하며 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는다. $n=5$ 에서는 $q=95=5 \times 19$ 가 실패하고 $n=6$ 에서는 $p=95$ 와 $r=18431=7 \times 2633$ 이 실패한다. $n=7$ 에서는 $p=191$ 과 $q=383$ 과 $r=73727$ 이 모두 소수여서 조건이 다시 성립한다.

$n=4$ 가 주는 두 수는 $A=2^4 \times 23 \times 47=17296$ 과 $B=2^4 \times 1151=18416$ 이다. 16의 약수 합은 31이므로 A의 전체 약수 합은 $31 \times 24 \times 48=35712$ 이고 B의 전체 약수 합은 $31 \times 1152=35712$ 다. 두 수의 합도 $17296+18416=35712$ 여서 본문의 일반 증명이 말한 대로 공통 약수 합과 일치한다. 같은 방식으로 $n=7$ 에서는 9363584와 9437056이라는 쌍을 얻는다.

표를 보면 공식에 n 을 넣는 일은 쉽지만 세 수가 함께 소수가 되는 경우는 드물다. 또한 이 정리는 충분조건일 뿐이어서 이 형태로 만들 수 없는 친화수도 있다. 예를 들어 $1184=2^5 \times 37$ 과 $1210=2 \times 5 \times 11^2$ 은 서로의 진약수 합이지만 $2^n pq$ 와 $2^n r$ 의 꼴이 아니다. 정리가 보장하는 범위와 친화수 전체를 구별하는 것이 이 탐구의 결론이다.

	n=2	n=3	n=4	n=5	n=6	n=7
p	● 5	● 11	● 23	● 47	○ 95	● 191
q	● 11	● 23	● 47	○ 95	● 191	● 383
r	● 71	○ 287	● 1151	○ 4607	○ 18431	● 73727

● 소수

○ 합성수

□ 세 수가 모두 소수인 n

n=2부터 7까지 p와 q와 r의 소수 여부를 점검한 격자

항목	A=17296	B=18416
소인수분해	$2^4 \times 23 \times 47$	$2^4 \times 1151$
전체 약수 합	$31 \times 24 \times 48 = 35712$	$31 \times 1152 = 35712$
진약수 합	18416	17296

탐구

n=4의 B=18416에서 진약수 합이 17296이 되는지 약수 합을 곱으로 묶어 확인하라.

풀이와 확인

$18416 = 2^4 \times 1151$ 이고 1151은 소수이므로 전체 약수 합은 $(1+2+4+8+16)(1+1151) = 31 \times 1152 = 35712$ 다. 자기 자신을 빼면 $35712 - 18416 = 17296$ 이다. A의 진약수 합도 $35712 - 17296 = 18416$ 이므로 두 방향이 모두 확인된다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

한 수를 세 가지로 분류하기

같은 정의를 적용하여 표를 완성한다.

진약수 합이 원래 수보다 작으면 부족수라고 하고 같으면 완전수라고 하며 크면 과잉수라고 한다. 8의 진약수 합은 $1+2+4=7$ 이어서 부족수다. 6은 완전수이고 12는 진약수 합이 16이어서 과잉수다. 이름의 느낌보다 비교 조건을 먼저 기억하면 새로운 수에도 같은 분류를 일관되게 적용할 수 있다.

분류표를 만들 때에는 수 자체를 약수 합에 넣지 않았는지 확인한다. 자기 자신까지 더하면 모든 1보다 큰 수에서 합이 원래 수보다 커져 구분이 무의미해진다. 또한 홀수와 짝수라는 분류와 이 분류는 기준이 다르다. 두 분류가 관계를 가질 수는 있지만 한쪽 이름만 보고 다른 쪽 결과를 결정하지 않는다. 작은 사례를 모은 뒤 일반적인 명제를 세우고 반례를 찾아보자.

15의 합		9
18의 합		21
28의 합		28

현대 재구성: 세 수의 진약수 합을 비교한다.

탐구

15와 18과 28을 세 종류로 분류하라.

풀이와 확인

15는 진약수 합 $1+3+5=9$ 이므로 부족수다. 18은 합 21이므로 과잉수다. 28은 합 28이므로 완전수다. 각 결과에 약수 목록이나 합 계산을 붙여 다른 사람이 확인할 수 있게 한다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

빛과 기하학의 만남

이븐 알하이삼의 질문

본다는 현상을 기하와 관찰로 함께 살핀다.

이븐 알하이삼은 광학과 기하학과 수론을 연구했다. 그의 광학 연구는 빛이 물체에서 눈으로 들어오는 과정과 반사 등의 현상을 다루었다. 이 장에서는 그의 저술 전체를 요약하기보다 빛의 길을 선으로 나타낼 때 어떤 수학이 필요한지 탐구한다. 현대의 광선 그림은 이해를 돕는 모형이며 실제 빛의 모든 성질을 한꺼번에 나타내지는 않는다.

평면거울 앞의 광선을 그릴 때 먼저 거울과 수직인 기준선을 세운다. 들어오는 선과 이 기준선이 이루는 각이 입사각이다. 거울 표면과 이루는 각과 혼동하면 수치가 달라진다. 같은 그림에서도 기준을 어떻게 정했는지에 따라 각의 이름이 달라지므로 설명과 표시를 함께 확인해야 한다. 물리적 주장과 그것을 표현하는 기하학적 약속을 구별하는 것이 첫 단계다.

거울과 법선: 90°

표면과 광선: 30°

법선과 광선: 60°

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

광선이 거울 표면과 30° 를 이루면 법선과 이루는 각은 얼마인가?

풀이와 확인

거울 표면과 법선은 직각을 이루므로 $90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$ 다. 입사각을 법선 기준으로 정의했다면 입사각은 60° 다. 기준선을 적지 않은 30° 라는 값만으로는 어떤 각인지 알 수 없다.

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

평면거울의 대칭

반사점을 찾는 문제를 직선 문제로 바꾼다.

수평인 거울을 높이 0의 선으로 두자. 점 A는 가로 위치 0과 높이 2에 있고 점 B는 가로 위치 6과 높이 4에 있다. B를 거울 아래로 대칭 이동한 B'는 가로 위치 6과 높이 -4에 있다. A와 B'를 직선으로 이으면 거울과 만나는 점이 반사 경로를 결정한다. 두 높이 2와 4의 비가 1:2이므로 가로 길이 6도 2와 4로 나뉜다.

반사점은 가로 위치 2다. A에서 거울까지의 기울기 크기는 $2/2=1$ 이며 거울에서 B까지도 $4/4=1$ 이다. 따라서 법선을 기준으로 한 두 각이 같다. 거울 아래의 점은 실제 광원이 아니라 계산을 단순하게 만드는 보조점이다. 가상의 점을 도입해도 원래 문제의 조건과 어떻게 대응하는지 설명할 수 있다면 유용한 풀이가 된다.



현대 재구성: 평면거울 위의 두 광선 경로

탐구

A의 높이가 3이고 B의 높이도 3이면 반사점의 가로 위치는 어디인가?

풀이와 확인

두 높이가 같으므로 가로 거리 6을 반씩 나눈 위치 3이다. 양쪽 기울기 크기가 $3/3=1$ 로 같다. 이 결론은 거울이 수평인 직선이라는 설정에 따른다.

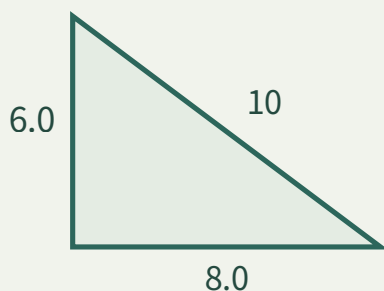
[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

가장 짧은 꺾인 길

대칭 이동은 길이의 비교도 보존한다.

앞의 반사 문제에서 거울 위의 임의의 점 P 를 고르면 A 에서 P 를 거쳐 B 까지의 길이는 $AP+PB$ 다. B 를 대칭 이동한 B' 에 대해서 $PB=PB'$ 이므로 이 합은 $AP+PB'$ 과 같다. 두 점 A 와 B' 사이의 직선이 가장 짧으므로 P 가 그 직선 위에 있을 때 전체 길이가 최소가 된다. 거울 반사와 최단 경로가 같은 그림에서 만난다.

하지만 이 설명을 모든 빛의 현상에 그대로 적용하면 안 된다. 서로 다른 매질을 지나가는 빛에서는 속도가 달라져 거리만 비교해서는 충분하지 않다. 이 페이지의 결론은 같은 매질 안의 평면거울 모형에 관한 것이다. 증명의 범위를 적으면 간결한 도형 풀이가 어디까지 유효한지 분명해진다. 반사점의 위치를 여러 곳으로 움직여 합이 어떻게 변하는지 수치로도 살펴볼 수 있다.



현대 재구성: 대칭점까지의 직선 길이가 반사 경로의 합이다.

탐구

높이가 모두 3인 두 점의 가로 거리가 8일 때 최소 반사 경로의 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

대칭점까지의 가로 차이는 8이고 세로 차이는 6이다. 직선 길이는 $\sqrt{(8^2+6^2)}=10$ 이다. 반사점은 가운데이므로 길이 5인 두 구간으로 나뉜다.

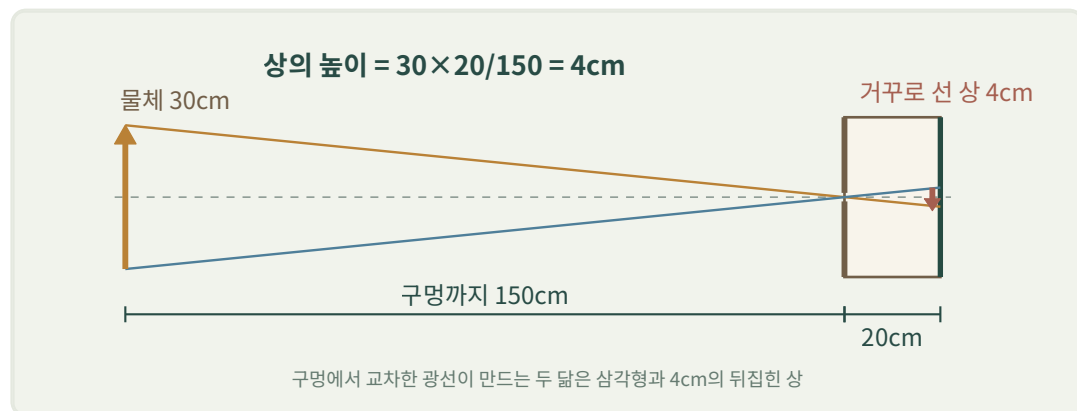
[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

작은 구멍의 뒤집힌 상

얇은 삼각형은 상의 크기를 예측한다.

어두운 상자의 작은 구멍 앞에 높이 30cm인 물체가 구멍에서 150cm 떨어져 있다고 하자. 구멍 뒤쪽 20cm에 스크린을 놓으면 물체 꼭대기에서 온 빛이 아래쪽에 도달한다. 상은 거꾸로 맺힌다. 광선이 곧게 간다는 이상화 아래에서 두 삼각형은 닮았으므로 상의 높이와 물체 높이의 비는 20/150이다. 상의 높이는 4cm다.

구멍을 크게 만들면 더 많은 빛이 들어와 밝아질 수 있지만 같은 물체의 점에서 나온 빛이 넓은 영역에 퍼져 상이 흐려질 수 있다. 구멍을 무조건 작게 만들면 언제나 더 좋다는 결론도 실제 광학에서는 적절하지 않다. 여기서는 기하학적으로 설명할 수 있는 크기와 뒤집힘에 집중한다. 밝기와 선명도에는 이 모형에서 생략한 조건도 작용한다.



탐구

스크린 거리를 40cm로 바꾸면 상의 높이는 어떻게 되는가?

풀이와 확인

물체 거리와 높이가 같다면 상의 높이는 $30 \times 40 / 150 = 8\text{cm}$ 다. 스크린 거리가 두 배가 되면 상의 높이도 두 배가 된다. 물체와 구멍과 스크린의 배치가 유지된다는 조건이 필요하다.

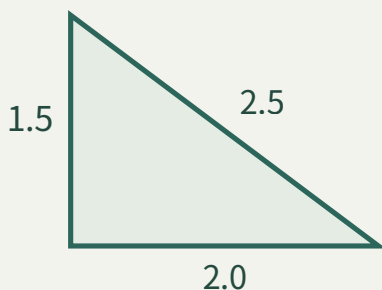
[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

그림자에서 높이 구하기

같은 시각의 햇빛은 닮음의 조건을 제공한다.

수직으로 세운 막대의 높이가 1.5m이고 그림자가 2m라고 하자. 같은 평평한 땅 위의 기둥 그림자가 12m이면 기둥 높이를 h 라 할 때 $h/12=1.5/2$ 다. 따라서 $h=9$ m다. 태양빛을 서로 평행한 선으로 보고 두 물체가 수직이며 지면이 수평이라고 가정했기 때문에 삼각형의 각이 대응한다. 이 문제는 역사적 실측 기록이 아닌 현대 수업용 재구성이다.

막대 그림자는 오전에 재고 기둥 그림자는 오후에 재면 같은 비를 사용할 수 없을 수 있다. 지면이 기울거나 기둥이 비스듬해도 그림이 달라진다. 계산 자체가 쉬울수록 측정 조건을 소홀히 하기 쉽다. 숫자를 식에 넣기 전에 닮음을 보장하는 각이 같은지 확인해야 한다. 비례식은 모형의 조건이 갖추어진 뒤에 쓰는 도구다.



현대 재구성: 기준 막대와 그림자가 만드는 직각삼각형

탐구

막대 그림자를 2.1m로 잘못 읽으면 같은 기둥의 높이는 얼마로 계산되는가?

풀이와 확인

$12 \times 1.5 / 2.1$ 은 약 8.57m다. 참값 9m보다 약 0.43m 작다. 분모로 들어가는 기준 그림자 길이를 크게 읽으면 계산된 높이는 작아진다.

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

곡면거울은 왜 어려운가

표면의 기울기가 반사점에 따라 달라진다.

평면거울에서는 어디에서나 법선의 방향이 같다. 원형 단면을 가진 거울에서는 각 점의 법선이 원의 중심을 향하므로 반사점을 옮기면 법선도 돌아간다. 이븐 알하이삼이 연구한 거울 문제에는 주어진 광원과 관찰자의 위치에 맞는 곡면의 반사점을 찾는 어려움이 있다. 평면거울의 대칭점을 한 번 그리는 방식만으로 모두 해결되지는 않는다.

이를 탐구하려면 원 위에 후보 점을 몇 개 고르고 각 점에서 중심으로 선을 그린다. 광원에서 오는 선과 관찰자로 가는 선이 그 법선을 기준으로 같은 각을 이루는지 비교한다. 그림으로 비슷해 보인다는 것과 정확히 조건을 만족한다는 것은 다르다. 이 페이지는 수치 풀이의 출발점을 보여 주며 역사적 해결법 전체를 재현하지는 않는다.



현대 재구성: 원 위의 위치마다 법선의 방향이 달라진다.

탐구

원의 중심에서 반지름 방향으로 들어온 광선이 표면에 수직으로 닿으면 반사 방향은 어떠한가?

풀이와 확인

입사각이 0° 이므로 반사각도 0° 다. 이상적인 거울 모형에서 광선은 같은 선을 따라 되돌아간다. 중심을 향하는 선이 그 점의 법선이라는 원의 성질을 사용했다.

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

관찰값을 표로 남기는 이유

한 번의 결과보다 반복된 비교가 더 많은 것을 말한다.

반사 실험을 현대적으로 구성하여 입사각을 20° 와 40° 와 60° 로 바꾼다고 하자. 측정한 반사각이 각각 21° 와 39° 와 61° 라면 이론값과의 차이는 1° 와 -1° 와 1° 다. 차이가 작다는 사실만으로 측정이 완벽하다고 말할 수 없다. 각도 눈금의 간격과 광선의 두께와 법선의 위치를 함께 기록해야 결과의 의미를 판단할 수 있다.

반복 측정의 평균은 우연한 흔들림을 줄이는 데 도움이 될 수 있지만 눈금판이 항상 2° 기울어진 문제를 저절로 고쳐 주지는 않는다. 일정한 방향으로 생기는 오차와 들쭉날쭉한 오차를 구별하자. 좋은 표에는 관찰값뿐 아니라 예측값과 차이와 측정 조건이 들어간다. 수학은 관찰을 대체하는 것이 아니라 관찰을 비교 가능한 형태로 정리하는 데 쓰인다.

입사	관찰	차이
20°	21°	$+1^\circ$
40°	39°	-1°
60°	61°	$+1^\circ$

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

40° 입사에서 39° 와 40° 와 41° 를 측정했다면 평균은 얼마인가?

풀이와 확인

합이 120° 이므로 평균은 40° 다. 평균이 이론값과 일치하더라도 개별 측정에는 1° 의 차이가 있었다. 평균과 측정의 퍼짐을 함께 제시해야 결과를 과장하지 않는다.

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

광학 탐구의 해설

각의 기준과 길이의 비를 따로 확인한다.

물체 높이 24cm와 구멍까지 거리 120cm와 스크린 거리 30cm가 주어진 상자 문제를 정리해 보자. 상의 높이는 $24 \times 30 / 120 = 6\text{cm}$ 다. 물체의 꼭대기와 구멍과 상의 아래쪽을 잇는 선을 그리면 상이 뒤집히는 이유도 보인다. 답을 6cm라고만 적기보다 어느 두 길이의 비를 사용했는지 설명해야 풀이가 완성된다.

같은 활동지의 거울 문제에서는 표면 기준 각과 법선 기준 각을 구별한다. 표면과 25° 라면 법선과는 65° 다. 두 문제는 모두 선과 각을 사용하지만 하나는 닮음의 비를 묻고 다른 하나는 반사의 각을 묻는다. 문제의 그림이 비슷해 보인다는 이유로 같은 공식을 넣지 않는다. 먼저 보존되는 관계가 길이의 비인지 각의 크기인지 말로 적어 보자.

물체		24
상자 30cm		6
상자 15cm		3

현대 재구성: 스크린 거리와 상의 높이가 비례한다.

탐구

상자 길이를 절반으로 줄였을 때 상의 높이와 뒤집힘은 어떻게 달라지는가?

풀이와 확인

스크린 거리가 15cm가 되므로 상의 높이는 3cm다. 빛이 구멍에서 교차하는 배치는 유지되므로 상은 여전히 뒤집힌다. 크기의 변화와 방향의 변화는 서로 다른 성질이다.

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

하이얌과 곡선의 해

시인이라는 이름 너머

삼차방정식은 곡선의 만남으로 읽을 수 있다.

오마르 하이얌은 시와 함께 수학과 천문학의 역사에서도 중요한 인물이다. 그는 삼차방정식의 여러 형식을 분류하고 원뿔곡선의 교점을 이용하는 기하학적 풀이를 연구했다. 여기서 오늘의 좌표축과 문자식을 사용해 그 생각의 한 측면을 살펴본다. 현대 기호가 편리하더라도 역사적 원문이 같은 형식으로 쓰였다고 생각해서는 안 된다.

$x^3=8$ 은 한 변을 세 번 곱한 값이 8인 길이를 묻는다. $x=2$ 가 답이라는 사실은 정육면체의 부피로 확인할 수 있다. 그러나 $x^3+x=10$ 처럼 다른 항이 함께 있으면 세제곱근만 구해서 끝낼 수 없다. 방정식의 항을 어떤 도형의 조건으로 나눌지 고민하는 순간 대수와 기하학이 서로 만난다.

$$x^3=8 \rightarrow x=2$$

$$x^3+x=10 \rightarrow x=2$$

같은 해가 같은 문제를 뜻하지는 않는다.

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

$x^3+x=10$ 에 $x=2$ 를 넣어 확인하고 $x^3=10$ 과의 차이를 설명하라.

풀이와 확인

$2^3+2=8+2=10$ 이므로 $x=2$ 는 앞 식의 해다. $x^3=10$ 에는 추가된 x 가 없어서 2를 넣으면 8만 나온다. 항 하나의 차이가 요구하는 길이를 바꾼다.

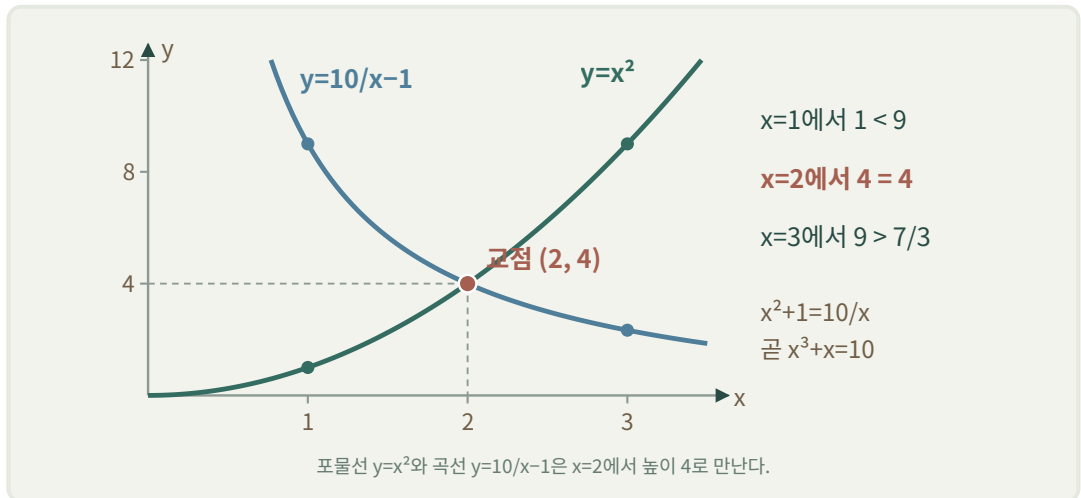
[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

두 곡선으로 나누어 보기

하나의 식을 동시에 만족해야 할 조건으로 바꾼다.

$x^3+x=10$ 을 x 가 0보다 큰 범위에서 생각하자. 양쪽을 x 로 나누면 $x^2+1=10/x$ 다. 이제 $y=x^2$ 와 $y=10/x-1$ 이라는 두 곡선을 그리면 같은 x 에서 같은 y 를 갖는 교점이 원래 식의 해를 준다. $x=2$ 일 때 두 y 값은 모두 4다. 한쪽은 포물선이고 다른 쪽은 쌍곡선에서 옮겨진 곡선이다.

이는 하이얌의 특정 도해를 복제한 것이 아니라 교점 풀이의 원리를 보여 주는 현대 재구성이다. 두 식에 보조 문자 y 를 넣어 조건을 분리한 뒤 공통으로 만족하는 점을 찾는다. x 로 나누었기 때문에 $x=0$ 을 따로 확인해야 한다. 원래 식에 0을 넣으면 $0=10$ 이 되어 해가 아니므로 이번에는 해를 잃지 않는다.



탐구

$x=1$ 과 $x=3$ 에서 두 곡선의 높이를 비교하라.

풀이와 확인

$x=1$ 에서는 1과 9가 나와 첫 곡선이 낮다. $x=3$ 에서는 9와 $7/3$ 이 나와 첫 곡선이 높다. 두 곡선의 연속성을 이용하면 그 사이에서 교차함을 예상할 수 있다.

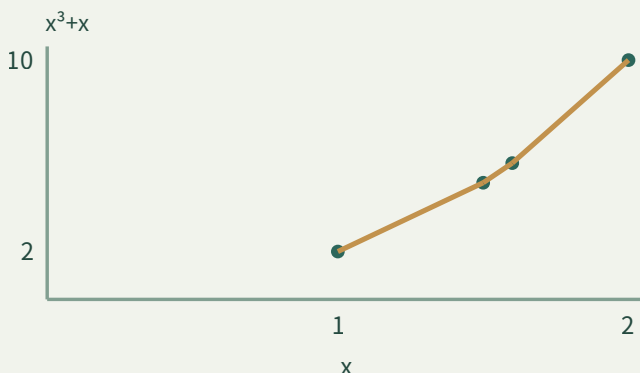
[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

표를 좁히며 근 찾기

정확한 정수가 나오지 않아도 범위를 줄일 수 있다.

$x^3+x=5$ 의 양의 해를 찾아보자. $x=1$ 이면 왼쪽은 2이고 $x=2$ 이면 10이다. 따라서 해는 1과 2 사이에 있다. $x=1.5$ 를 넣으면 $3.375+1.5=4.875$ 로 아직 5보다 작다. $x=1.6$ 에서는 $4.096+1.6=5.696$ 이므로 해는 1.5와 1.6 사이로 좁혀진다. 표의 각 행은 추측을 검산 가능한 범위로 바꾸는 역할을 한다.

양의 x 가 커지면 x^3 도 x 도 커지므로 왼쪽 전체가 증가한다. 따라서 이 구간에 있는 해는 하나뿐이다. 값이 양쪽에서 목표를 끼운다는 사실과 해가 하나라는 사실은 서로 다른 근거를 필요로 한다. 복잡한 방정식에서는 부호가 바뀌는 구간 안에 해가 여러 개 있을 수도 있으므로 증가 여부를 따로 살펴야 한다.



현대 재구성: 점 사이의 선은 표를 읽는 보조선이다.

탐구

$x=1.51$ 에서 왼쪽 값을 구하고 하한을 더 좁혀라.

풀이와 확인

$1.51^3=3.442951$ 이므로 합은 4.952951이다. 아직 5보다 작아 해는 1.51보다 크다. 1.6보다 작다는 상한과 함께 적으면 $1.51 < x < 1.6$ 이다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

식에 남은 차이 읽기

작은 잔차와 정확한 해는 같은 말이 아니다.

$x^3+x=5$ 의 후보로 1.516을 택하면 왼쪽은 약 5.000156이다. 목표값과의 차이는 약 0.000156이다. 이 차이를 잔차라고 부를 수 있다. 잔차가 작으면 좋은 근사일 가능성이 있지만 그 숫자가 정확한 해라는 뜻은 아니다. 반올림한 자릿수와 실제 해의 범위를 구별하여 써야 한다.

또한 잔차의 크기만으로 x 의 오차가 언제나 같은 크기라고 말할 수는 없다. 식이 x 에 따라 빠르게 변하는 곳에서는 작은 x 변화가 큰 잔차를 만들며 완만한 곳에서는 반대 현상이 생긴다. 이번 함수는 양의 범위에서 증가하므로 후보 값의 위아래에서 다시 계산하면 해를 둘러싸는 구간을 얻을 수 있다. 근사값을 제시할 때 검산값까지 남기면 신뢰 범위를 판단하기 쉽다.

$$\begin{aligned} \text{후보 } x &= 1.516 \\ x^3 + x &\approx 5.000156 \\ \text{잔차} &\approx 0.000156 \end{aligned}$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

후보 값의 계산 결과가 4.999라면 후보가 참된 양의 해보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

양의 범위에서 x^3+x 가 증가하므로 목표 5보다 작은 값을 만든 후보는 참된 해보다 작다. 함수가 증가한다는 조건 없이 잔차의 부호만으로 같은 결론을 내릴 수는 없다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

해가 여러 개 생기는 식

세제곱이라는 이름만으로 해의 개수를 정하지 않는다.

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$ 을 전개하면 $x^3-6x^2+11x-6=0$ 이다. 곱이 0이 되려면 적어도 하나의 인수가 0이므로 $x=1$ 과 $x=2$ 와 $x=3$ 이 모두 해다. 이 현대적인 예는 삼차식이 서로 다른 실근 세 개를 가질 수 있음을 보여 준다. 앞의 $x^3+x=5$ 처럼 양의 범위에서 줄곧 증가하는 식과는 형태가 다르다.

역사적 저술을 읽을 때에는 당시 어떤 계수와 어떤 해의 범위를 분류했는지 확인해야 한다. 오늘날의 실수와 복소수 체계를 한꺼번에 소급하면 옛 분류의 목적이 가려질 수 있다. 동시에 현대 예제를 통해 해가 여럿일 수 있다는 구조를 탐구하는 것은 가능하다. 역사적 주장과 수업을 위해 새로 만든 예제의 역할을 분리해서 읽자.

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$

$$x^3-6x^2+11x-6=0$$

해는 1과 2와 3

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

$x=2$ 를 전개된 식에 넣어 검산하라.

풀이와 확인

$8-24+22-6=0$ 이다. 인수 형태에서는 $2-2$ 라는 0인 인수가 있어 바로 확인할 수 있다. 같은 다항식도 어떤 표현을 택하는가에 따라 계산의 편의가 달라진다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

길이에서 부피로 옮길 때

세제곱은 확대율을 세 번 곱한다.

정육면체의 한 변을 두 배로 늘리면 부피는 여덟 배가 된다. 한 변이 3인 상자의 부피는 27이고 한 변이 6인 상자의 부피는 216이다. 부피를 두 배로 만들고 싶다면 변을 두 배로 만드는 것이 아니라 세제곱이 2가 되는 배수를 찾아야 한다. 그 배수는 약 1.26이다. 길이의 변화와 부피의 변화는 다른 비율로 연결된다.

$1.26^3=2.000376$ 이므로 1.26은 정확한 세제곱근이 아니라 가까운 값이다. 작은 오차가 부피 계산에서 어떻게 나타나는지 확인할 수 있다. 포장 상자나 모형을 확대할 때도 이 관계가 중요하다. 이번 예는 삼차방정식이 추상적인 문자 놀이에 머무르지 않고 길이와 공간의 조건에서 생긴다는 점을 보여 준다.

길이 배수		3
넓이 배수		9
부피 배수		27

현대 재구성: 님은 입체의 길이와 넓이와 부피

탐구

부피를 27배로 늘리려면 님은 정육면체의 변을 몇 배로 해야 하는가?

풀이와 확인

$3^3=27$ 이므로 변을 3배로 하면 된다. 겹넓이는 변의 배수를 두 번 곱하므로 9배다. 부피와 겹넓이가 같은 배수로 변하지 않는다는 점도 함께 확인한다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

도형 풀이의 정확성과 그림

그림의 교차점은 계산 조건으로 다시 읽어야 한다.

종이에 그린 두 곡선이 $x=2$ 근처에서 만난다고 보이더라도 연필선의 두께 때문에 정확한 좌표를 읽기 어렵다. 도형 풀이가 수학적 해법이 되려면 그 점이 왜 요구한 관계를 만족하는지 증명해야 한다. 그림은 조건의 구조를 드러내고 식은 그 조건을 확인하는 또 다른 언어가 된다. 눈대중으로 읽은 값과 증명으로 정해진 값을 같은 수준으로 다루지 않는다.

좌표 눈금을 두 배 촘촘하게 그리면 시각적으로 더 자세히 읽을 수 있지만 곡선 자체를 부정확하게 그렸다면 그 오차는 남는다. 계산으로 구한 표의 점도 반올림되어 있을 수 있다. 따라서 그림 아래에는 현대 재구성인지와 사용한 방정식과 근사 여부를 표시하는 것이 좋다. 독자는 도해의 아름다움과 별개로 계산의 근거를 따라갈 수 있어야 한다.

방정식의 조건

두 곡선의 정의

교점의 후보

원래 식에 대입

현대 재구성: 도형에서 계산으로 돌아오는 검산 과정

탐구

교점의 x 좌표를 2.0으로 읽었을 때 원래 식에 대입하는 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

눈금에서 읽은 근삿값이 실제 조건에 얼마나 가까운지 확인하기 위해서다. 대입 결과가 맞지 않으면 그림의 해상도나 읽기 방법을 개선해야 한다. 교차하는 듯한 모양만으로 등식이 증명되지는 않는다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

교점에서 생긴 가짜 후보를 걸러 내기

보조 곡선의 교점이 모두 원래 방정식의 해가 되는 것은 아니다.

양의 해를 구하는 식 $x^3+x=10$ 을 두 곡선으로 나타내는 또 다른 방법을 만든다. 먼저 $y=x^2$ 라는 포물선을 택한다. 여기에 $y^2+x^2=10x$ 라는 원을 함께 사용한다. 두 번째 식은 $(x-5)^2+y^2=25$ 이므로 중심의 가로 위치가 5이고 반지름이 5인 원이다.

포물선의 관계를 원에 넣으면 $x^4+x^2=10x$ 가 된다. 왼쪽과 오른쪽을 한쪽으로 모으면 $x(x^3+x-10)=0$ 이다. 따라서 교점에는 원래 식의 해뿐 아니라 $x=0$ 이라는 새 후보가 들어간다. 실제로 원과 포물선은 원점에서도 만나지만 0^3+0 은 10이 아니다.

$x>0$ 이라는 조건을 유지하면 x 로 나눌 수 있어 원래 식으로 돌아간다. 양의 범위에서는 x^3+x 가 엄격하게 증가하므로 원래 식의 해는 하나다. $x=2$ 를 넣으면 $8+2=10$ 이고 $y=4$ 다. 원에서도 $4^2+2^2=20=10 \times 2$ 가 되어 같은 교점을 확인한다.

이 구성은 하이얌의 특정 원도를 재현한 것이 아니라 원과 포물선으로 대수 조건을 나누는 현대 탐구다. 그림에 교점이 보일 때에는 허용 범위를 확인하고 원래 식에 대입해야 한다. 보조 대상을 도입해 문제를 쉽게 만들수록 그 과정에서 추가된 조건과 후보를 기록한다.

후보	포물선과 원	원래 식
$x=0$ 과 $y=0$	두 식 만족	$0 \neq 10$
$x=2$ 와 $y=4$	두 식 만족	$8+2=10$

탐구

$x^3+4x=20$ 을 $y=x^2$ 와 $y^2+4x^2=20x$ 로 나누면 어떤 후보를 따로 걸러야 하는가?

풀이와 확인

대입하면 $x(x^3+4x-20)=0$ 이다. $x=0$ 이 보조 관계에는 들어가지지만 원래 식의 해가 아니다. 나머지 양의 후보만 원래 식에 대입해 검산한다. 두 번째 곡선은 원이 아니라 타원이다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

삼차방정식 활동의 해설

후보와 범위와 해의 개수를 구분하여 쓴다.

$x^3+2x=12$ 를 양의 범위에서 풀면 $x=2$ 가 정확한 해다. $2^3+2 \times 2=12$ 이기 때문이다. x 가 커질 때 x^3 과 $2x$ 가 모두 커지므로 양의 해는 하나다. $y=x^2$ 와 $y=12/x-2$ 를 비교해도 $x=2$ 에서 $y=4$ 라는 같은 교점을 얻는다. 세 가지 관점이 서로 일치하는지 확인하는 것이 이번 장의 종합 활동이다.

답을 2라고 쓰는 데 그치지 않고 후보를 찾은 방법과 정확한 검산과 다른 양의 해가 없는 이유를 차례로 설명한다. 음수 범위까지 넓히면 왼쪽이 음수가 되어 양수 12와 같아질 수 없다. 따라서 이 식에는 다른 실근도 없다. 모든 삼차식이 같은 성질을 갖는 것은 아니므로 이 결론의 근거가 해당 식의 증가와 부호에 있음을 밝혀야 한다.

식	후보	검산
$x^3+2x=12$	2	$8+4=12$
$x^3+3x=4$	1	$1+3=4$

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

$x^3+3x=4$ 는 어떤 양의 해를 가지며 유일한가?

풀이와 확인

$x=1$ 을 넣으면 $1+3=4$ 다. 양의 범위에서 두 항이 모두 증가하므로 다른 양의 해는 없다. 음수에서는 왼쪽이 음수여서 4가 될 수 없으므로 실근도 1 하나다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

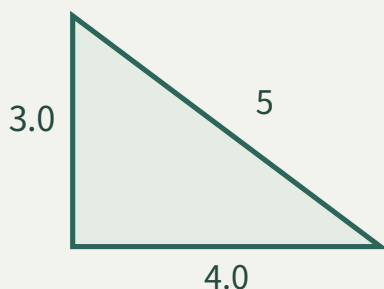
투시와 삼각형의 언어

천문학에서 독립된 관계로

삼각법은 하늘 밖의 삼각형에도 적용된다.

나시르 앳딘 투시는 평면과 구면의 삼각법을 체계적으로 다룬 학자다. 삼각법은 천문 계산에서 중요한 역할을 했지만 삼각형 자체의 관계를 연구하는 주제로도 발전했다. 이 장에서는 오늘날의 사인과 코사인 기호로 간단한 삼각형을 계산한다. 역사적 표의 기호와 오늘날의 함수 기호가 같았다고 생각하지 않도록 현대 표현이라는 점을 먼저 밝힌다.

직각삼각형에서 한 예각을 정하면 그 맞은편 변과 빗변의 비가 사인이다. 같은 각을 가진 닮은 삼각형은 크기가 달라도 이 비가 같다. 따라서 삼각비는 특정 길이 하나에 붙는 값이 아니라 각과 연결되는 관계다. 빗변을 1로 맞추어 생각하면 서로 다른 크기의 삼각형을 같은 기준으로 비교할 수 있다.



현대 재구성: 한 예각에 대한 맞은편 변과 빗변의 비

탐구

맞은편 변이 3이고 빗변이 5일 때 그 각의 사인은 얼마인가?

풀이와 확인

사인은 $3/5=0.6$ 이다. 모든 변을 두 배로 늘리면 맞은편 변은 6이고 빗변은 10이 되어 비는 여전히 0.6이다. 닮은 확대는 각과 삼각비를 보존한다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

같은 삼각형의 두 비

사인과 코사인은 서로 이웃한 정보를 담는다.

변이 3과 4와 5인 직각삼각형에서 길이 3인 변의 맞은편 예각을 A라고 하자. $\sin A=3/5$ 이고 $\cos A=4/5$ 다. 두 비의 제곱을 더하면 $9/25+16/25=1$ 이다. 이는 피타고라스 관계 $3^2+4^2=5^2$ 를 빗변의 제곱으로 나눈 결과다. 새로운 기호의 공식처럼 보이지만 이미 아는 길이 관계를 비로 바꾸어 쓴 것이다.

각 A를 다른 예각 B로 바꾸면 맞은편 변과 이웃한 변이 바뀐다. 따라서 $\sin B=4/5$ 이고 $\cos B=3/5$ 다. 직각삼각형의 두 예각 합이 90° 라는 점과 연결된다. 그림에서 어느 각을 기준으로 삼았는지 표시하지 않으면 같은 세 변으로 서로 다른 답을 쓰게 된다. 삼각비를 읽을 때에는 각의 위치를 먼저 짚어 보자.

$$(3/5)^2+(4/5)^2=1$$

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

예각에서는 두 비가 양수다.

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

$\sin A=5/13$ 인 예각 A의 $\cos A$ 를 구하라.

풀이와 확인

$\cos^2 A=1-25/169=144/169$ 다. A가 예각이므로 코사인은 양수여서 $\cos A=12/13$ 이다. 부호를 정할 때 각의 범위가 필요하다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

사인법칙의 대응

변의 길이는 맞은편 각과 한 쌍을 이룬다.

일반 삼각형에서 변 a 와 b 의 맞은편 각을 각각 A 와 B 라고 하면 $a/\sin A=b/\sin B$ 라는 관계가 성립한다. 높이를 두 가지 방식으로 나타내면 같은 길이가 두 식을 연결한다. 이 관계를 사용할 때에는 인접한 각이 아니라 맞은편 각을 짝지어야 한다. 그림의 문자가 많을수록 대응을 먼저 확인하는 습관이 중요하다.

$A=30^\circ$ 이고 $B=45^\circ$ 이며 $a=10$ 이라면 $b=10 \times \sin 45^\circ / \sin 30^\circ = 10\sqrt{2}$ 다. 큰 각의 맞은편 변이 더 길다는 직관과도 맞는다. 다만 삼각형이 만들어지는 조건을 확인하지 않은 채 식만 사용하면 잘못된 입력을 계산할 수 있다. 세 각의 합과 변의 양수 조건을 함께 확인하자.

$$a/\sin A=b/\sin B$$

$$A=30^\circ \text{와 } B=60^\circ$$

$$a=4 \rightarrow b=4\sqrt{3}$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

$A=30^\circ$ 와 $B=60^\circ$ 에서 $a=4$ 이면 b 는 얼마인가?

풀이와 확인

$b=4 \times (\sqrt{3}/2)/(1/2)=4\sqrt{3}$ 이다. 나머지 각은 90° 이므로 빗변은 8이다. 4 와 $4\sqrt{3}$ 과 8은 제곱 관계 $16+48=64$ 도 만족한다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

이어 읽기 / 투시와 삼각형의 언어

높이 하나로 사인법칙 세우기

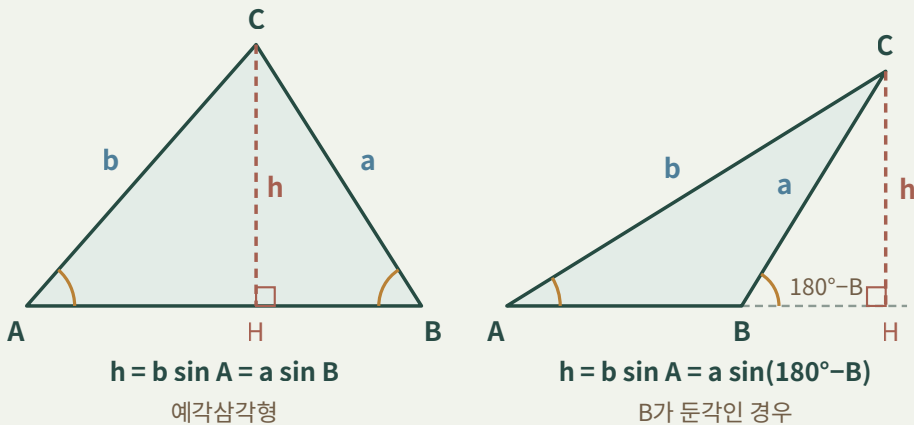
한 꼭짓점에서 내린 높이를 두 직각삼각형에서 각각 표현하면 사인법칙이 나온다.

본문은 높이를 두 가지 방식으로 나타내면 사인법칙이 나온다고 한 문장으로 소개했다. 여기서는 그 과정을 그림으로 따라가고 한 각이 둔각인 경우에도 같은 식이 성립하는지 확인한다. $\sin$ 이라는 기호와 증명의 배열은 오늘의 교과서식 표현이며 투시의 원문 논증을 옮긴 것은 아니다. 삼각형의 변과 맞은편 각을 짝짓는 규칙이 어디에서 오는지 보는 것이 목표다.

예각삼각형 ABC에서 꼭짓점 C에서 변 AB에 수선을 내리고 그 발을 H라고 하자. 직각삼각형 AHC에서 빗변은 b이므로 $CH=b \sin A$ 다. 직각삼각형 BHC에서는 빗변이 a이므로 $CH=a \sin B$ 다. 같은 길이 CH를 두 식으로 나타냈으므로 $a \sin B=b \sin A$ 이고 양변을 $\sin A \times \sin B$ 로 나누면 $a/\sin A=b/\sin B$ 를 얻는다.

B가 둔각이면 수선의 발 H는 변 AB의 연장선 위, B 바깥쪽에 놓인다. 이때 직각삼각형 BHC에서 B에 있는 각은 $180^\circ-B$ 이므로 $CH=a \sin(180^\circ-B)$ 다. 서로 보각인 두 각의 사인값은 같으므로 이 값은 $a \sin B$ 와 같고 결론은 예각의 경우와 같아진다. 앞의 사인법칙이 두 삼각형을 허용하는 단원에서 보각 후보를 검사한 이유도 바로 이 성질에 있다.

수치로 확인해 보자. $A=30^\circ$ 와 $B=45^\circ$ 와 $a=10$ 이면 사인법칙으로 $b=10 \times \sin 45^\circ / \sin 30^\circ=10\sqrt{2}$ 이며 약 14.14다. 높이를 두 방식으로 계산하면 $b \sin A$ 는 약 $14.14 \times 0.5=7.07$ 이고 $a \sin B$ 는 10×0.7071 로 약 7.07이다. 두 값이 일치하므로 높이라는 하나의 길이가 두 변과 두 각을 묶어 준다는 사실을 수치로도 확인할 수 있다.



C에서 내린 높이 h를 두 직각삼각형에서 각각 나타낸다.

탐구

$A=30^\circ$ 와 $B=120^\circ$ 와 $a=6$ 일 때 b와 높이 CH를 구하고 두 방식으로 검산하라.

풀이와 확인

$b=6 \times \sin 120^\circ / \sin 30^\circ=6 \times (\sqrt{3}/2)/(1/2)=6\sqrt{3}$ 이며 약 10.39다. 높이는 $b \sin A=6\sqrt{3} \times 1/2=3\sqrt{3}$ 으로 약 5.20이다. B가 둔각이므로 $a \sin(180^\circ-B)=6 \times \sin 60^\circ=3\sqrt{3}$ 으로 계산해도 같은 값이 나온다. 나머지 각 C는 30° 이므로 이 삼각형은 $a=c=6$ 인 이등변삼각형이다.

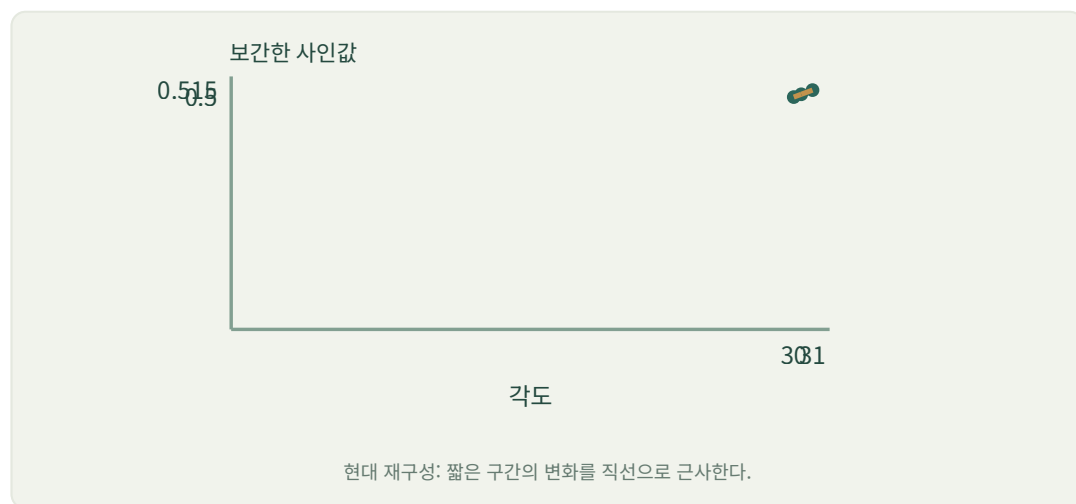
[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

사인표 사이의 값을 읽기

보간은 두 점 사이의 변화를 단순하게 근사한다.

수업용 표에 $\sin 30^\circ = 0.5000$ 과 $\sin 31^\circ \approx 0.5150$ 이 적혀 있다고 하자. 30.4° 는 두 각 사이에서 40퍼센트 지점이므로 차이 0.0150의 0.4배를 더해 약 0.5060으로 추정할 수 있다. 이 방법은 구간 안에서 값이 직선처럼 변한다고 보는 선형 보간이다. 실제 사인 곡선은 직선이 아니므로 결과는 근사다.

표를 촘촘하게 만들면 일반적으로 보간 오차를 줄이는 데 도움이 된다. 그러나 표 자체의 값이 거칠게 반올림되었다면 그 오차도 함께 남는다. 보간값의 자릿수를 많이 적는다고 정보가 새로 생기지는 않는다. 원래 표의 정밀도와 구간의 크기에 맞는 자리수로 결과를 제시해야 계산의 겉모양이 실제 정확성을 과장하지 않는다.



탐구

같은 표로 $\sin 30.8^\circ$ 를 선형 보간하면 얼마인가?

풀이와 확인

$0.5000 + 0.8 \times 0.0150 = 0.5120$ 이다. 31° 쪽에 더 가까우므로 0.5150에 가까운 값이 되는지 확인할 수 있다. 정확한 함수값을 구한 것은 아니다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

도와 분과 초

각도 계산에도 자리의 묶음이 있다.

각도 1° 를 $60'$ 로 나누고 $1'$ 를 $60''$ 로 나누는 표기에서는 $12^\circ 30'$ 가 12.5° 와 같다. $30'$ 는 $30/60^\circ$ 이기 때문이다. 이를 십진수 12.30° 와 혼동하면 0.2° 의 차이가 생긴다. 각도의 분과 시간의 분은 같은 이름을 쓰지만 비교하는 양이 다르므로 표의 단위를 꼭 확인해야 한다.

$18^\circ 45'$ 와 $7^\circ 30'$ 를 더하면 분의 합이 $75'$ 여서 $1^\circ 15'$ 로 바뀐다. 따라서 합은 $26^\circ 15'$ 다. 받아올림의 묶음 크기가 10이 아니라 60이라는 점만 다르다. 계산 과정을 십진 각도로 바꾸어 $18.75 + 7.5 = 26.25$ 로 계산할 수도 있다. 서로 다른 표기 사이를 오가면 자리와 단위의 실수를 찾기 쉽다.

표기	십진 각도
$12^\circ 30'$	12.5°
$7^\circ 45'$	7.75°
$12^\circ 15'$	12.25°

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

20° 에서 $7^\circ 45'$ 를 빼면 얼마인가?

풀이와 확인

20° 를 $19^\circ 60'$ 로 바꾸면 $19^\circ 60' - 7^\circ 45' = 12^\circ 15'$ 다. 십진 각도로는 $20 - 7.75 = 12.25^\circ$ 이므로 같은 결과다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

구면의 삼각형

동근 표면에서는 평면의 규칙이 바뀐다.

지구를 이상적인 구로 보고 북극과 적도 위의 경도 차이 90° 인 두 점을 연결하자. 각 변을 대원의 짧은 호로 잡으면 세 꼭짓점의 각이 모두 90° 다. 각의 합은 270° 로 평면삼각형의 180° 보다 크다. 이는 그림이 틀렸기 때문이 아니라 변을 구면의 대원 호로 정의했기 때문이다. 어떤 공간에서 어떤 선을 사용하는지가 정리의 조건이다.

구면에서는 곧게 간다는 생각을 평면의 직선과 같은 모양으로 그릴 수 없다. 대원은 구의 중심을 지나는 평면이 구와 만나는 원이다. 지도 위에서 휘어 보이는 경로도 구면에서는 대원을 따를 수 있다. 하늘의 위치와 지구 위의 방향을 다루는 계산에 구면삼각법이 필요한 이유를 이 간단한 예가 보여 준다.



현대 재구성: 분할 비율을 보여 주는 보조 도식이며 평면 삼각형이 아니다.

탐구

세 직각으로 둘러싸인 이 구면삼각형은 구 전체의 몇 분의 일인가?

풀이와 확인

서로 수직인 세 중심 평면은 구를 같은 크기의 여덟 부분으로 나눈다. 그중 하나이므로 구면 넓이의 $1/8$ 이다. 평면에서 세 직각 삼각형이 불가능하다는 사실과 모순되지 않는다.

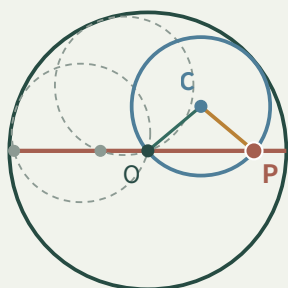
[tusj] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

회전 두 개와 직선 운동

투시의 짝을 오늘의 좌표로 살펴본다.

반지름이 r 인 작은 원이 반지름 $2r$ 인 큰 원 안에서 미끄러짐 없이 굴러가는 모형을 생각하자. 작은 원의 둘레 위 한 점은 큰 원의 지름을 따라 왕복할 수 있다. 투시의 짝으로 알려진 기하학적 장치의 핵심 관계다. 이 페이지에서는 실제 천체 구조에 대한 주장과 분리하여 이상적인 원 운동의 합성만을 살펴본다.

작은 원의 중심 좌표를 가로 $r \cos t$ 와 세로 $r \sin t$ 로 쓰고 점의 상대 위치를 가로 $r \cos t$ 와 세로 $-r \sin t$ 로 쓰면 세로 성분이 상쇄된다. 전체 좌표는 가로 $2r \cos t$ 와 세로 0이 된다. 원 운동의 합이 직선 위의 왕복 운동을 만들 수 있다는 사실을 현대 삼각함수로 확인한 것이다.



큰 원의 반지름 $2r$, 작은 원의 반지름 r

O에서 C: $(r \cos t, r \sin t)$

C에서 P: $(r \cos t, -r \sin t)$

P의 위치: $(2r \cos t, 0)$

흐린 원은 다른 시각의 작은 원이다

큰 원 안을 구르는 작은 원의 점 P는 지름 위에서만 움직인다.

탐구

$r=1$ 일 때 t 가 0° 와 90° 와 180° 이면 점의 가로 좌표는 무엇인가?

풀이와 확인

$2\cos t$ 를 사용하면 각각 2와 0과 -2 다. 세로 좌표는 항상 0이다. 점이 일정한 속도로 직선을 움직이는 것은 아니며 위치만 지름 위에 머문다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

사인법칙이 두 삼각형을 허용할 때

같은 사인값을 가진 서로 다른 각을 함께 살펴야 한다.

평면삼각형에서 $A=30^\circ$ 이고 맞은편 변 $a=5$ 이며 다른 변 $b=8$ 이라고 하자. 사인법칙을 쓰면 $\sin B = b \sin A / a = 8 \times (1/2) / 5 = 0.8$ 이다. 이 값만 보고 B 를 예각 하나로 정하면 가능한 삼각형을 놓친다.

0° 와 180° 사이에서는 서로 보각인 두 각의 사인값이 같다. 따라서 B 는 약 53.13° 또는 126.87° 다. 두 경우 모두 A 와 B 의 합이 180° 보다 작으므로 나머지 각 C 도 양수가 된다. 첫 경우 C 는 약 96.87° 이며 둘째 경우는 약 23.13° 다.

이 차이는 계산기의 오류가 아니다. 알려진 두 변과 그중 한 변의 맞은편 각은 언제나 삼각형을 하나로 결정하지 않는다. 삼각형을 그릴 때 한 변의 끝점이 원과 직선의 서로 다른 두 교점에 놓일 수 있다는 기하 조건이 식에 반영된 것이다.

따라서 역삼각함수로 각 하나를 얻은 다음에는 보각 후보와 세 각의 합을 검사한다. 문제에서 B 가 예각이라고 추가하면 첫 후보만 남는다. 이 페이지는 투시의 저술에 이 수치가 있다는 주장이 아니라 삼각법을 사용할 때 해의 범위를 관리하는 현대 예제다.

경우	B	C
예각 후보	약 53.13°	약 96.87°
둔각 후보	약 126.87°	약 23.13°

탐구

$A=30^\circ$ 와 $a=5$ 에서 $b=12$ 라면 삼각형이 만들어지는가?

풀이와 확인

사인법칙은 $\sin B = 12 \times (1/2) / 5 = 1.2$ 를 요구한다. 실수 각의 사인은 1을 넘을 수 없으므로 이런 삼각형은 없다. 주어진 숫자가 항상 도형을 결정한다는 가정을 버려야 한다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

삼각법 탐구의 종합 해설

공간과 각의 범위를 먼저 기록한다.

높이 6m인 수직 막대의 꼭대기를 수평 거리 8m에서 바라보는 이상적인 삼각형을 생각하자. 눈높이를 0으로 둔 모형에서 시선의 길이는 10m다. 고도각 A에 대해 $\sin A = 6/10$ 이고 $\cos A = 8/10$ 이다. 눈높이가 실제로 1.5m라면 세로 차이는 4.5m가 되어 계산을 다시 해야 한다. 문제에서 생략한 기준 높이를 무시코 실제 높이로 읽지 않는다.

구면 문제에서는 같은 6과 8을 변으로 적더라도 평면의 피타고라스 관계를 그대로 사용할 수 없다. 삼각비의 공식은 기호만 보고 선택하지 않고 공간과 변의 정의와 각의 범위를 살펴 선택한다. 역사 속 천문학자가 표와 도형을 함께 사용했던 이유도 서로 다른 조건을 정리하는 데 있다. 현대 독자는 계산의 편리함과 모형의 한계를 함께 배운다.



현대 재구성: 눈높이를 뺀 높이 차이로 계산한다.

탐구

눈높이 1.5m를 반영하면 꼭대기까지 시선의 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

세로 차이 4.5m와 가로 8m를 사용하여 $\sqrt{(4.5^2 + 8^2)} = \sqrt{84.25} \text{m}$ 로 구한다. 약 9.18m다. 건물 전체 높이를 삼각형의 세로 변으로 넣으면 눈높이를 중복해서 계산하게 된다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

알카시와 정밀한 계산

정확한 숫자를 만드는 기술

소수의 자릿수는 계산과 기록의 약속이다.

잠시드 알카시는 사마르칸트에서 활동하며 계산과 천문학을 연구했다. 그의 산술 저술은 소수와 측량 및 건축 등 여러 문제를 다루었다. 그를 소수의 유일한 발명자로 부르는 것은 앞선 여러 연구의 존재를 지운다. 이 장에서는 그의 정밀 계산을 출발점으로 소수 표기와 오차와 검산의 원리를 현대적인 작은 예제로 익힌다.

3.047에서 소수점 아래 첫 자리는 십분의 일이고 둘째는 백분의 일이며 셋째는 천분의 일이다. 따라서 이 수는 $3+0/10+4/100+7/1000$ 이다. 0은 빈자리를 유지하여 4와 7이 맞는 값을 분명하게 한다. 길이 단위를 미터로 정하면 0.047m는 47mm다. 같은 양도 기준 단위에 따라 정수 또는 소수로 나타낼 수 있다.

자리	일	1/10	1/100	1/1000
3.047	3	0	4	7

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

2.305m를 밀리미터로 바꾸어 자리값을 확인하라.

풀이와 확인

$1\text{m}=1000\text{mm}$ 이므로 $2.305 \times 1000 = 2305\text{mm}$ 다. 소수점이 사라지는 것은 양이 달라져서가 아니라 더 작은 단위로 같은 양을 센 결과다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

십진 소수의 곱셈

정수 계산 뒤에 단위의 크기를 되돌린다.

1.25×0.8 을 정수 곱셈으로 옮기면 $125 \times 8 = 1000$ 이다. 그러나 1.25는 $125/100$ 이고 0.8은 $8/10$ 이므로 곱은 $1000/1000 = 1$ 이다. 소수점 아래 자리수를 세는 규칙은 분모가 10의 거듭제곱이라는 사실을 짧게 표현한 것이다. 규칙을 외웠더라도 결과가 원래 수보다 커야 하는지 작아야 하는지 함께 판단해야 한다.

0.8배는 전체의 80퍼센트를 취하는 것이므로 양수 1.25를 곱한 결과는 1.25보다 작아야 한다. 10이나 100이라는 결과가 나왔다면 자리 배치를 다시 확인한다. 길이 1.25m와 폭 0.8m를 곱한 경우 결과의 단위는 m^2 다. 수치의 소수점과 단위의 제곱은 서로 다른 부분이지만 모두 계산 의미를 결정한다.

$$\begin{aligned} 1.25 &= 125/100 \\ 0.8 &= 8/10 \\ 125 \times 8 / 1000 &= 1 \end{aligned}$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

2.4×0.35 를 계산하고 크기를 검산하라.

풀이와 확인

$24 \times 35 = 840$ 이고 분모는 $10 \times 100 = 1000$ 이므로 0.84다. 0.35는 $1/3$ 보다 조금 크므로 2.4의 약 $1/3$ 인 0.8보다 조금 큰 결과가 자연스럽다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

나눗셈의 소수점 이동

두 수를 같은 비율로 바꾸어 몫을 보존한다.

$7.2 \div 0.3$ 은 나누는 수와 나누어지는 수를 모두 열 배 하여 $72 \div 3 = 24$ 로 계산할 수 있다. 분수 $7.2/0.3$ 의 분자와 분모에 같은 수를 곱했기 때문에 비가 유지된다. 한쪽만 열 배 하면 다른 문제로 바뀐다. 절차를 손으로 따라 쓸 때 두 수에 같은 변화가 적용되었는지 표시하면 실수를 줄일 수 있다.

나눗셈 결과가 7.2보다 커지는 것이 이상하지 않다. 0.3이라는 작은 조각이 7.2 안에 몇 개 들어가는지 묻기 때문이다. $0.3 \times 24 = 7.2$ 로 돌아오면 결과를 확인할 수 있다. 나누면 작아진다는 직관은 1보다 큰 양수로 나누는 경우에만 맞는다. 연산 이름만으로 결과의 방향을 정하지 말고 나누는 수의 범위를 살펴야 한다.

$$\begin{aligned} &4.5/0.15 \\ &=(4.5 \times 100)/(0.15 \times 100) \\ &=450/15=30 \end{aligned}$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

$4.5 \div 0.15$ 를 계산하라.

풀이와 확인

두 수를 100배 하면 $450 \div 15 = 30$ 이다. $0.15 \times 30 = 4.5$ 로 검산할 수 있다. 4.5만 100배 하거나 0.15만 바꾸면 몫은 보존되지 않는다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

반올림한 수의 범위

마지막 숫자는 정확성에 대한 정보를 담는다.

길이를 소수 둘째 자리까지 반올림하여 2.37m라고 적었다면 참값은 보통 2.365m 이상 2.375m 미만의 범위에 있을 수 있다. 여기서는 정확히 중간인 경우 위쪽으로 올리는 규칙을 사용한다. 2.37이라는 기록은 참값이 그 숫자와 완전히 같다는 뜻이 아니다. 단위를 cm로 바꾸면 약 237cm라는 같은 정보를 표현한다.

기록에 소수 자릿수를 더 붙여 2.370000m라고 쓰면 측정하지 않은 정밀도를 암시할 수 있다. 계산기의 표시 자릿수와 측정의 정확성은 구별해야 한다. 여러 번 계산한 결과도 처음 입력값의 불확실성을 벗어나 정확해지지는 않는다. 수치가 무엇을 알고 무엇을 남겨 두는지 범위로 적어 보는 습관은 정밀 계산을 읽는 데 도움이 된다.



현대 재구성: 반올림값 2.37이 대표하는 길이의 범위

탐구

한 자리 소수로 반올림한 값이 8.4라면 가능한 참값의 범위를 쓰라.

풀이와 확인

같은 반올림 규칙에서는 8.35 이상 8.45 미만이다. 정확히 경계에 있는 값을 처리하는 규칙이 달라지면 끝점의 포함 여부도 달라질 수 있다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

원주율을 어느 자리까지 쓸까

필요한 정확성은 문제의 크기와 연결된다.

반지름 10m인 원의 둘레를 $2\pi r$ 로 구할 때 π 를 3.14로 쓰면 62.8m다. 3.1416으로 쓰면 62.832m다. 두 계산의 차이는 0.032m로 3.2cm다. 원주율의 자릿수를 늘리는 효과는 곱하는 반지름에 따라 커진다. 정밀한 상수를 계산하는 작업과 그 정밀도를 실제 문제에 사용하는 작업은 서로 연결된다.

그러나 반지름 자체를 10m쯤이라고만 측정했다면 둘레를 매우 많은 자릿수로 쓰는 것은 적절하지 않을 수 있다. 상수의 오차를 줄여도 입력 길이의 오차가 더 크면 전체 정확성은 그 측정에 제한된다. 알카시의 원주 계산을 읽을 때에는 높은 정밀도의 성취를 인정하면서 어떤 계산 절차와 검산이 그 수치를 지탱했는지도 질문할 수 있다.

반지름 10m



0.032

반지름 100m



0.32

현대 재구성: 두 원주율 근삿값이 만드는 둘레 차이

탐구

반지름을 100m로 바꾸면 두 원주율 값으로 구한 둘레의 차이는 얼마인가?

풀이와 확인

$2 \times 100 \times (3.1416 - 3.14) = 0.32\text{m}$ 다. 반지름이 열 배가 되었으므로 둘레 계산의 차이도 열 배다. 이는 두 근삿값 사이의 차이이며 정확한 원주에 대한 전체 오차와는 구별한다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

이러 읽기 / 알카시와 정밀한 계산

정다각형으로 원주율을 위아래에서 조이기

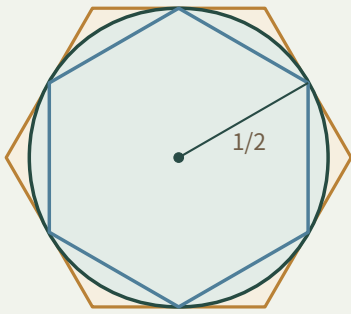
원의 안과 밖에 같은 정다각형을 그리면 원주율이 놓일 구간을 확실하게 정할 수 있다.

앞의 제공근 단원에서는 위아래 경계를 차례로 좁혀 $\sqrt{2}$ 의 범위를 정했다. 원주율도 같은 생각으로 다룰 수 있다. 지름이 1인 원에 내접하는 정다각형의 둘레는 원주보다 짧고 외접하는 정다각형의 둘레는 원주보다 길므로 그 사이에 π 가 놓인다. 이 단원의 그림과 수치는 알카시의 원주 계산을 읽기 위한 학습용 모형이며 그의 계산 절차를 그대로 복원한 것은 아니다.

정육각형에서 시작하면 계산이 쉽다. 내접 정육각형의 한 변은 반지름 $1/2$ 과 같으므로 둘레는 3이다. 외접 정육각형은 중심에서 각 변까지의 거리가 $1/2$ 이므로 한 변이 $1/\sqrt{3}$ 이고 둘레는 $2\sqrt{3}$, 곧 약 3.4641이다. 따라서 $3 < \pi < 3.4641$ 이라는 첫 구간을 얻는다.

변의 수를 두 배씩 늘리면 내접 둘레는 $n \times \sin(180^\circ/n)$ 이고 외접 둘레는 $n \times \tan(180^\circ/n)$ 이다. 12각형에서는 3.1058과 3.2154 사이, 24각형에서는 3.1326과 3.1597 사이, 96각형에서는 3.1410과 3.1427 사이로 좁아진다. 두 경계의 차이는 약 0.4641과 0.1096과 0.0270과 0.0067과 0.0017로 변의 수를 두 배 할 때마다 거의 $1/4$ 로 줄어든다.

$1/4$ 이라는 비율은 우연이 아니다. 라디안으로 켄 작은 각 θ 에서 $\tan \theta$ 와 $\sin \theta$ 의 차이는 대략 $\theta^3/2$ 이다. $\theta = \pi/n$ 을 넣으면 두 경계의 차이 $n(\tan \theta - \sin \theta)$ 는 $\pi^3/(2n^2)$ 에 가깝고 n 을 두 배 하면 이 값은 $1/4$ 이 된다. 따라서 자리 하나를 더 확실하게 얻으려면 변의 수를 약 $\sqrt{10}$, 곧 3.16배쯤 늘려야 한다. 아주 많은 자리의 원주율을 얻으려면 변의 수가 매우 큰 다각형과 정밀한 제공근 계산이 함께 필요하다는 사실을 이 어려움이 보여 준다.



지름 1일 때 $3 < \pi < 3.4641$



원 안팎의 정육각형과 변의 수를 늘릴 때 좁아지는 π 의 구간

정다각형	아래 경계	위 경계	차이
6각형	3	3.4641	약 0.4641
12각형	3.1058	3.2154	약 0.1096
24각형	3.1326	3.1597	약 0.0270
48각형	3.1394	3.1461	약 0.0067
96각형	3.1410	3.1427	약 0.0017

탐구

192각형에서 두 경계의 차이는 대략 얼마일지 96각형의 결과로 어림하라.

풀이와 확인

변의 수를 두 배 하면 차이가 약 1/4로 줄므로 0.0017의 1/4인 약 0.0004를 예상할 수 있다. 실제 계산값은 약 0.00042이며 $\pi^3/(2 \times 192^2)$ 로 어림한 값과도 거의 같다. 이 어림은 근삿값의 크기를 예상하는 데 쓰이며 경계 자체는 sin과 tan을 정확히 계산해야 확정된다.

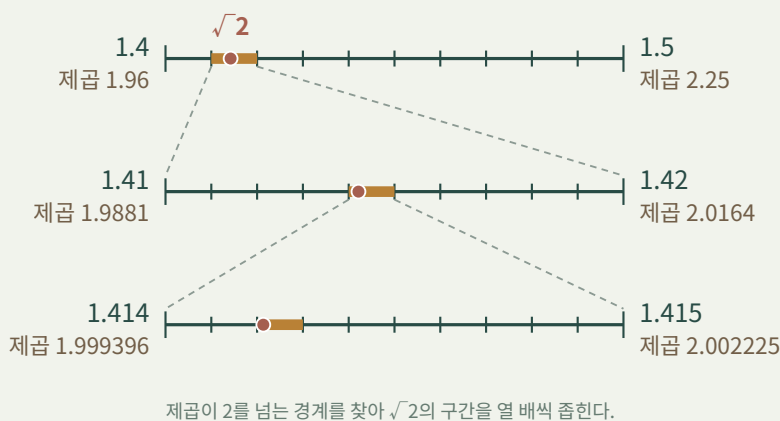
[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

제곱근을 위아래에서 조이기

곱셈으로 근삿값을 검증할 수 있다.

$\sqrt{2}$ 를 구할 때 $1.4^2=1.96$ 이고 $1.5^2=2.25$ 이므로 값은 1.4와 1.5 사이다. 다시 $1.41^2=1.9881$ 과 $1.42^2=2.0164$ 를 비교하면 구간이 더 좁아진다. $1.414^2=1.999396$ 이며 $1.415^2=2.002225$ 이므로 $1.414 < \sqrt{2} < 1.415$ 다. 정답의 모든 자리를 한 번에 아는 대신 확실한 경계를 차례로 만들 수 있다.

소수의 자릿수를 늘리는 과정에는 더 큰 정수의 곱셈과 자리 관리가 필요하다. 계산 결과가 2보다 큰지 작은지 판단하는 작은 비교가 전체 근삿값을 지탱한다. 이 페이지의 절차는 특정 역사적 알고리즘의 복원이 아니라 정밀도를 높이는 기본 생각을 보여 주는 현대 재구성이다. 각 단계의 제곱값을 남기면 다른 독자도 범위를 검산할 수 있다.



탐구

$1.4142^2=1.99996164$ 와 $1.4143^2=2.00024449$ 로 무엇을 알 수 있는가?

풀이와 확인

양의 수에서 제곱은 증가하므로 $1.4142 < \sqrt{2} < 1.4143$ 이다. 이 구간만으로 소수 넷째 자리 반올림값을 확정할 수는 없다. 중간 경계 1.41425의 제곱은 2.0001030625로 2보다 크다. 따라서 $\sqrt{2} < 1.41425$ 이며 반올림값은 1.4142다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor, Al-Kashi

건축 표면을 나누어 계산하기

복잡한 장식도 부분의 합으로 접근할 수 있다.

알카시의 산술 저술에는 건축과 관련된 면적 계산도 포함된다. 여기서는 특정 건축물을 복원하지 않고 여러 평면 조각으로 이루어진 장식 모형을 계산한다. 직사각형 조각 네 개의 넓이가 각각 0.36m^2 이고 삼각형 조각 여덟 개의 넓이가 각각 0.15m^2 라면 전체 드러난 면적은 $4 \times 0.36 + 8 \times 0.15 = 2.64\text{m}^2$ 다.

서로 붙여 가려지는 면까지 더하면 실제 칠할 면적보다 커질 수 있다. 겹면과 접합면을 구별해 목록을 만드는 일이 곱셈보다 먼저다. 곡면을 작은 평면 조각으로 근사하는 경우에는 조각 수와 오차도 함께 고려해야 한다. 분할은 복잡한 형태를 다루기 쉽게 만들지만 무엇을 더하고 무엇을 제외했는지 설명해야 올바른 합이 된다.

조각	개수	한 면적	합
직사각형	4	0.36	1.44
삼각형	8	0.15	1.20

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

면적 2.64m^2 에 10퍼센트의 재료 여유를 더하면 준비 면적은 얼마인가?

풀이와 확인

$2.64 \times 1.1 = 2.904\text{m}^2$ 다. 이는 재료 준비를 위한 가정이며 실제 손실률을 측정한 값은 아니다. 조각 배치와 재료 규격에 따라 필요한 양이 달라질 수 있다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

정밀 계산의 해설

숫자를 늘리기 전에 오차의 근원을 찾는다.

가로 2.4m와 세로 1.8m인 직사각형의 넓이는 4.32m^2 다. 두 길이가 각각 0.01m까지 달라질 수 있다고 정하면 작은 쪽 넓이는 $2.39 \times 1.79 = 4.2781\text{m}^2$ 이고 큰 쪽 넓이는 $2.41 \times 1.81 = 4.3621\text{m}^2$ 다. 4.32라는 계산값과 가능한 넓이의 범위를 함께 적으면 입력 길이의 불확실성을 읽을 수 있다.

여기서 곱셈을 더 많은 소수 자리까지 해도 범위 자체가 사라지지 않는다는 더 정확한 넓이를 알고 싶다면 길이를 더 정확히 측정해야 한다. 정밀한 산술과 정밀한 측정은 서로 다른 노력을 요구한다. 이 장의 핵심은 소수점을 길게 쓰는 기술만이 아니라 수치를 만들고 옮기고 비교하는 각 단계에서 어떤 정보가 보존되는지 확인하는 데 있다.

작은 넓이		4.2781
기준 넓이		4.32
큰 넓이		4.3621

현대 재구성: 입력 길이의 범위가 넓이의 범위로 이어진다.

탐구

가로와 세로를 모두 최대값으로 잡는 것이 최대 넓이를 주는 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

두 길이가 양수일 때 한쪽 길이를 고정하고 다른 길이를 늘리면 곱도 증가한다. 따라서 둘 다 최대인 경우가 최대 넓이다. 부호가 다른 일반 수의 곱에서는 같은 판단을 그대로 적용할 수 없다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

하늘을 읽는 원판

아스트롤라베를 보는 순서

정교한 장식 속에서 눈금과 기준을 찾는다.

아스트롤라베는 천체의 고도를 재고 하늘의 위치와 시간에 관한 문제를 다루는 데 쓰인 기구다. 메트로폴리탄 박물관에는 1291년의 날짜가 적힌 예도 소장되어 있다. 기구를 감상할 때에는 재료와 장식뿐 아니라 회전하는 부분과 별을 표시하는 부분 및 지역의 하늘을 나타내는 판의 역할을 구별해 보자. 아름다운 표면과 수학적 기능은 함께 존재한다.

이 장의 원판 도해는 실제 유물의 정밀 복제품이 아니다. 360° 로 나눈 원과 회전하는 지시선으로 기본적인 읽기 원리를 살핀다. 눈금의 시작점과 회전 방향을 정하지 않으면 같은 위치에 다른 숫자를 붙일 수 있다. 관찰한 각도와 기구가 계산한 시간 또한 서로 다른 양이므로 결과 옆에 단위를 남겨야 한다.



현대 재구성: 원주를 같은 각도로 나눈 교육용 원판

탐구

원판을 24개의 같은 부분으로 나누면 한 부분의 중심각은 얼마인가?

풀이와 확인

$360^\circ \div 24 = 15^\circ$ 다. 이 분할만으로 실제 태양 고도가 매시간 15° 씩 변한다고 결론 내릴 수는 없다. 원판 분할과 관측 고도의 변화는 다른 관계다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

고도와 방위는 다른 좌표다

하늘의 점 하나에는 두 방향의 정보가 필요하다.

고도는 지평선에서 천체까지 올라간 각이다. 지평선 위는 0° 이고 머리 바로 위인 천정은 90° 다. 방위는 지평선을 따라 어느 방향을 향하는지 나타낸다. 이 책의 모형에서는 북쪽을 0° 로 정하고 동쪽을 90° 로 정한다. 고도 30° 라는 정보만으로는 동쪽 하늘인지 서쪽 하늘인지 알 수 없다.

관측표에는 시각과 장소도 함께 적어야 한다. 같은 별이라도 지구의 자전 때문에 시각에 따라 지평선에 대한 위치가 달라진다. 여기서 고도라는 말은 해발 높이를 뜻하는 길이가 아니라 각도다. 용어가 겹칠 때 단위를 확인하면 혼동을 피할 수 있다. 좌표는 대상의 이름만 적는 것이 아니라 기준면과 기준 방향을 정하는 약속이다.

좌표	기준	단위
고도	지평선에서 위로	도
방위	북쪽에서 동쪽 방향	도

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

방위 180° 와 고도 45° 는 이 모형에서 어디를 가리키는가?

풀이와 확인

남쪽을 향해 지평선과 천정의 중간 높이를 가리킨다. 방위의 증가 방향과 북쪽 기준을 바꾸면 숫자의 해석도 달라지므로 사용한 약속을 먼저 확인한다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

원을 평면에 옮기는 생각

투영은 모양을 바꾸면서 관계를 보존한다.

구면 위의 점을 한 극점에서 반대쪽 기준 평면으로 연결해 옮기는 방식을 생각하자. 이를 정사영과 구별되는 입체사영의 모형으로 살펴볼 수 있다. 평면 아스트롤라베의 이해에는 구면 하늘을 평면에 나타내는 기하학이 중요하다. 여기서는 그림의 모든 길이를 실제 하늘의 길이와 같다고 읽지 않는다. 투영은 정보를 보존하는 동시에 다른 성질을 바꾼다.

입체사영에서는 투영점 자체를 지나는 원이 평면의 직선으로 옮겨질 수 있고 그 점을 지나지 않는 원은 원으로 옮겨진다. 따라서 평면에서 보이는 직선이 원래 구면에서도 직선이었다고 추정하면 안 된다. 지도와 기구의 선은 어떤 변환을 거쳐 그려졌는지 알아야 해석할 수 있다. 길이와 넓이와 각을 모두 동시에 보존하는 지도라고 기대하지 않는 것이 출발점이다.

구면 위의 위치

투영점과 연결

평면과 만나는 점

눈금의 의미를 해석

현대 재구성: 구면 정보를 평면 도식으로 바꾸는 과정

탐구

평면 원판에서 두 별 사이 거리가 두 배라면 실제 하늘의 각거리도 반드시 두 배인가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 투영의 위치에 따라 길이의 확대율이 달라질 수 있다. 평면 거리만 비교하지 말고 기구의 눈금과 투영 관계를 이용해야 각거리를 해석할 수 있다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

이어 읽기 / 하늘을 읽는 원판

입체사영으로 원판의 원 크기 정하기

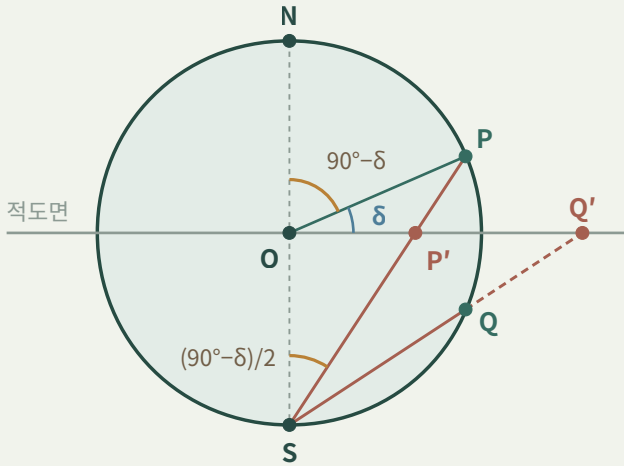
구 위의 원이 평면 위의 원으로 옮겨질 때 그 반지름은 원주각 하나로 계산된다.

본문은 구면의 점을 한 극점에서 평면으로 옮기는 입체사영을 소개하고 투영이 모양을 바꾸면서 관계를 보존한다고 설명했다. 여기서는 천구를 반지름 R 인 구로 보고 남쪽 극 S 에서 적도면으로 투영할 때 천구의 적도에서 각 δ 만큼 떨어진 원이 평면에서 반지름 얼마의 원이 되는지 계산한다. 천극을 축으로 도는 원은 평면에서도 중심 O 를 공유하는 원이 되므로 반지름 하나만 알면 된다. 계산은 이상적인 구를 가정한 학습용 모형이다.

북쪽 극 N 과 남쪽 극 S 와 중심 O 를 지나는 단면을 그리고 원 위의 점 P 가 적도면에서 δ 만큼 올라가 있다고 하자. 중심각 NOP 는 $90^\circ - \delta$ 이다. 원주각은 같은 호에 대한 중심각의 절반이므로 S 에서 본 각 NSP 는 $(90^\circ - \delta)/2$ 다. 직선 SP 가 적도면과 만나는 점을 P' 라 하면 삼각형 SOP' 는 O 에서 직각이므로 $OP' = R \tan((90^\circ - \delta)/2)$ 가 된다.

이 식에 값을 넣어 보자. $\delta = 0^\circ$ 이면 $\tan 45^\circ = 1$ 이므로 적도는 반지름 R 인 원 그대로 남는다. 학습용 값 $\delta = 23.5^\circ$ 이면 반지름은 약 $0.656R$ 이고 $\delta = -23.5^\circ$ 이면 약 $1.525R$ 이다. 원판의 바깥 원을 반지름 12cm 로 정하고 그것이 $\delta = -23.5^\circ$ 의 원이라고 하면 R 은 약 7.87cm 이고 $\delta = 23.5^\circ$ 의 원은 약 5.16cm 가 된다.

흥미로운 검산이 하나 있다. 서로 부호만 다른 두 각의 원에 대해 $\tan(45^\circ - \delta/2) \times \tan(45^\circ + \delta/2) = 1$ 이므로 두 반지름의 곱은 언제나 R^2 이다. 실제로 0.656×1.525 는 약 1 이다. 또한 δ 가 -90° 에 가까워지면 반지름이 한없이 커지므로 남쪽 극 근처는 원판에 담을 수 없고 어딘가에서 원판을 잘라야 한다. 어느 위도용 판인지를 따로 정해야 했던 것처럼 원판의 크기 역시 투영의 성질에서 나온 선택이다.



$$OP' = R \tan((90^\circ - \delta)/2)$$

$$\delta = 90^\circ: 0$$

$$\delta = 23.5^\circ: \text{약 } 0.656R$$

$$\delta = 0^\circ: R$$

$$\delta = -23.5^\circ: \text{약 } 1.525R$$

원주각은 중심각의 절반이다.

남쪽 극 S에서 투영하면 P는 적도면 위의 P'로 옮겨진다.

천구 적도에서의 각 δ	평면 원의 반지름
90°	0
23.5°	약 0.656R
0°	R
-23.5°	약 1.525R

탐구

$\delta = 60^\circ$ 인 별이 그리는 원은 평면 원판에서 반지름이 R의 몇 배인 원으로 옮겨지는가?

풀이와 확인

$(90^\circ - 60^\circ)/2 = 15^\circ$ 이므로 반지름은 $R \tan 15^\circ$ 이며 약 0.268R이다. 천구에 가까운 별일수록 원판의 중심 가까이 작은 원을 그린다. 같은 식으로 $\delta = -60^\circ$ 를 넣으면 $R \tan 75^\circ$ 로 약 3.732R이 되어 두 값의 곱이 R^2 임을 다시 확인할 수 있다.

[astro-model] Dominic Ford. Building a Model Astrolabe. 2012

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

각도 눈금의 해상도

작은 구분이 곧 정확한 측정을 뜻하지는 않는다.

원판의 눈금 간격이 1° 라면 두 눈금 사이의 위치를 눈대중으로 읽을 수는 있어도 그 값이 자동으로 0.01° 까지 정확해지는 것은 아니다. 지시선의 두께와 기구의 흔들림과 기준선의 수평 상태가 결과에 영향을 준다. 기구의 세밀함과 관찰자의 읽기 능력과 측정 조건은 함께 작용한다.

반지름 10cm인 원판에서 1° 에 해당하는 호의 길이는 $2\pi \times 10/360\text{cm}$ 로 약 1.75mm다. 반지름을 20cm로 늘리면 같은 각도 간격의 호 길이는 약 3.49mm가 된다. 큰 기구가 눈금을 더 넓게 배치할 수 있는 이유다. 하지만 크기를 키우는 것만으로 모든 오차가 사라지는 않으며 무게와 제작 정밀도 같은 조건도 달라진다.

$$\begin{aligned} \text{호 길이} &= 2\pi r \times \text{각도} / 360^\circ \\ r=10\text{cm와 } 1^\circ &\rightarrow \text{약 } 1.75\text{mm} \\ r=20\text{cm와 } 1^\circ &\rightarrow \text{약 } 3.49\text{mm} \end{aligned}$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

반지름 15cm 원판에서 2° 간격의 호 길이는 약 얼마인가?

풀이와 확인

$2\pi \times 15 \times 2/360 = \pi/6\text{cm}$ 로 약 0.524cm다. 이는 원주를 따른 길이이며 두 눈금 끝을 직선으로 잰 현의 길이와는 조금 다르다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

시간과 회전의 관계

한 바퀴를 나누는 약속은 여러 단위로 표현된다.

교육용 모형에서 한 바퀴 360° 를 24시간에 대응시키면 한 시간은 15° 다. 따라서 45° 의 회전은 세 시간에 해당한다. 실제 천문 계산에서는 항성일과 태양일의 차이나 태양 운동의 불균일 등을 더 살펴야 하지만 이 페이지에서는 일정한 속도의 회전만 다룬다. 단순한 모형을 쓰는 대신 그 가정을 명시한다.

시간 2시간 20분은 2와 $1/3$ 시간이다. 이를 각도로 바꾸면 35° 다. 2.20시간으로 잘못 읽으면 33° 가 된다. 시간의 분은 한 시간의 $1/60$ 이므로 소수 표기와 구별해야 한다. 도와 분을 다루던 계산과 비슷하지만 이번에는 시간이라는 다른 양을 회전에 대응시키는 과정이다.



한 칸 = $360^\circ \div 24 = 15^\circ = 1\text{시간}$

$35^\circ = 2\text{시간 } 20\text{분}$

$52.5^\circ = 3.5\text{시간} = 3\text{시간 } 30\text{분}$

2.20시간으로 잘못 읽으면 33°

일정한 속도의 회전을 가정한 모형

24칸 원판의 한 칸은 15° 이고 35° 의 회전은 2시간 20분이다.

탐구

회전각 52.5° 는 이 모형에서 몇 시간 몇 분인가?

풀이와 확인

$52.5 \div 15 = 3.5$ 시간이므로 3시간 30분이다. 시간 0.5를 50분으로 바꾸지 않도록 주의한다. 시간의 소수 부분에 60을 곱해 분을 구한다.

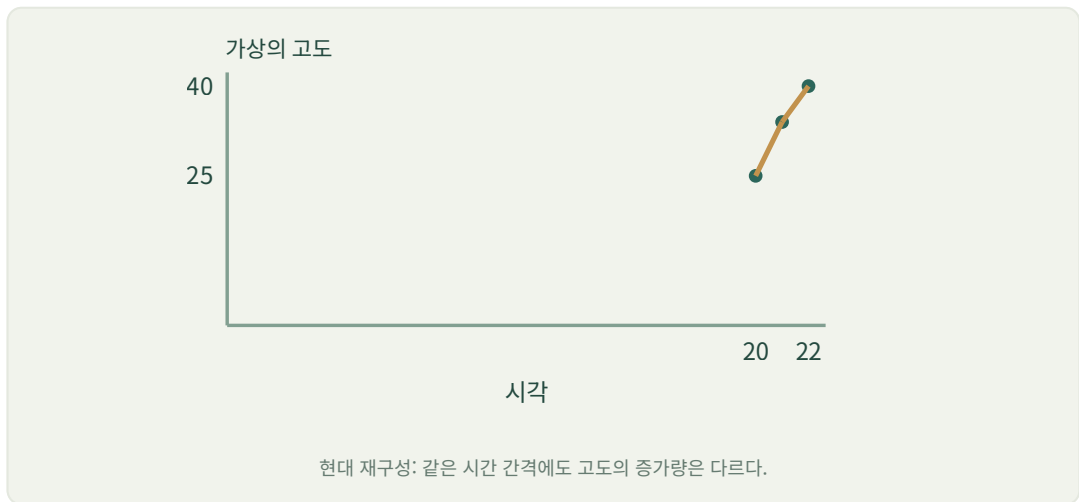
[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

별의 이동을 기록한 표

변화량을 보려면 순서와 간격을 맞춘다.

가상의 관측에서 별의 고도가 저녁 8시에 25° 이고 9시에 34° 이며 10시에 40° 였다고 하자. 한 시간 동안의 변화는 처음 9° 이고 다음 6° 다. 일정한 속도로 원운동을 한다는 모형이 있더라도 지평선에 대한 고도는 일정한 비율로 증가하지 않을 수 있다. 회전각과 관측 고도를 같은 값으로 생각하지 않는 것이 중요하다.

관측 시각 간격이 다르면 변화량을 그대로 비교할 수 없다. 30분 동안 4° 변한 경우와 한 시간 동안 6° 변한 경우를 비교하려면 같은 시간 단위로 환산해야 한다. 다만 짧은 구간의 평균 변화율을 오랜 시간의 예측에 그대로 쓰면 곡선 운동의 특성을 놓칠 수 있다. 표는 자료를 정리하는 출발점이며 모형을 대신하지 않는다.



탐구

8시 30분의 고도를 두 첫 관측 사이에서 선형 보간하면 얼마인가?

풀이와 확인

25° 와 34° 의 중간값인 29.5° 다. 이는 관측한 값이 아니라 두 점 사이의 변화를 직선으로 가정한 추정이다. 표에서 실제 관측과 추정을 별도로 표시한다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

방향 찾기의 수학적 조건

지도에서 곧은 선이 곧바로 답이 되지는 않는다.

먼 장소를 향하는 방향을 구할 때 평면 지도에서 두 점을자로 잇는 방법은 지도 투영에 따라 다른 결과를 낼 수 있다. 구면 위의 두 위치를 잇는 대원의 방향과 평면 그림의 직선 방향이 일반적으로 같지는 않기 때문이다. 중세 이슬람권에서 방향 문제와 천문 계산이 만난 배경도 구면 위 위치의 관계를 살피는 데 있다.

수업에서는 북극과 적도 위 두 점의 모형부터 시작할 수 있다. 북극에서 적도의 어느 경도로 내려가든 자오선을 따라가지만 평면 지도에서는 선의 배치가 투영 방식에 따라 달라진다. 실제 방향을 제시하려면 출발지와 목적지의 좌표와 사용한 지구 모형을 밝혀야 한다. 장식적인 화살표 하나로 정밀한 방향 계산을 대체하지 않는다.

두 장소의 좌표

지구 모형 선택

구면 위 경로 계산

지도 위에 결과 표시

현대 재구성: 방향 계산과 지도 표현을 나누어 생각한다.

탐구

같은 두 도시를 서로 다른 지도 투영에 그렸을 때 직선의 각도가 달라질 수 있는가?

풀이와 확인

달라질 수 있다. 투영이 공간의 관계를 바꾸어 나타내기 때문이다. 실제 지표에서의 방향은 좌표와 구면 또는 타원체 모형을 이용해 구하고 지도에서는 그 결과를 적절히 표현해야 한다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

위도를 바꾸면 원판도 달라진다

하늘의 별과 지역의 지평선을 같은 기준으로 읽어야 한다.

평면 아스트롤라베를 이해하려면 하늘의 별을 표시한 회전 부분과 관측지의 지평선 관계를 담은 판을 나누어 본다. 현대 연구자 도미니크 포드의 제작 안내도 위도에 맞는 모형을 별도로 제공한다. 어느 위도에 맞추어 그린 판인지가 사용 조건의 일부인 것이다.

이를 이상적인 구면 지구의 기하로 확인한다. 북반구에서 북천극의 지평선 위 고도는 관측지의 위도와 같다. 위도 35°에서 북천극의 고도는 35°이며 위도 52°에서는 52°다. 별의 천구상 상대 위치가 같아도 지역의 수평면이 달라져 지평선에 대한 높이가 달라진다.

따라서 위도 52°용 판의 고도선을 위도 35°에서 그대로 읽으면 서로 다른 기준을 섞게 된다. 별 표지를 돌리는 일은 시간에 따른 방향 변화를 나타내지만 관측지 위도를 자동으로 바꾸지는 않는다. 회전 조절과 지역에 맞는 판의 선택은 서로 다른 작업이다.

여기서는 대기 굴절과 실제 북극성의 북천극 이격을 생략한다. 북극성의 고도를 정확히 위도라고 단정하는 대신 이상적인 북천극을 사용한다. 기구를 종이 모형으로 바꾸더라도 관측 대상과 기준면을 분명히 적으면 장식적 원판이 계산 도구로 읽히기 시작한다.

가상의 관측 위도	북천극 고도
북위 35°	35°
북위 52°	52°
북위 70°	70°

탐구

북위 35°에서 북천극이 천정과 이루는 각은 얼마인가?

풀이와 확인

천정 고도는 90°이므로 $90^\circ - 35^\circ = 55^\circ$ 다. 지평선 기준 고도와 천정에서 잰 거리를 혼동하면 서로 보완되는 두 값을 바꾸어 쓰게 된다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World / [astro-model] Dominic Ford. Building a Model Astrolabe. 2012

기구 읽기 활동의 해설

유물의 정보와 교육용 모형을 연결한다.

전시된 기구를 읽는 활동지를 만들면 먼저 제작 시기와 재료 및 확인 가능한 명문 정보를 적는다. 이어서 회전하는 부품과 각도 눈금과 별 표지를 찾아 기능을 구분한다. 마지막으로 교육용 원판에서 24등분이나 각도 변환을 계산한다. 실제 유물의 모든 눈금이 교실 모형과 같다고 가정하지 않는 것이 중요하다.

이번 장의 수치는 대부분 이해를 돕기 위해 새로 정한 값이다. 1° 간격의 호 길이나 시간과 회전의 대응은 원의 기하학을 설명하지만 특정 유물의 제작 오차나 관측 성능을 평가한 결과는 아니다. 수학 활동과 유물 해설의 경계를 표시하면 관람자는 실제 자료를 존중하면서도 손으로 계산하는 즐거움을 누릴 수 있다.



현대 재구성: 반지름 12cm인 교육용 원판의 한 칸

탐구

반지름 12cm인 교육용 원판을 24등분하면 한 칸의 호 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

전체 둘레 $24\pi\text{cm}$ 를 24로 나누면 πcm 다. 중심각은 15° 다. 같은 한 칸을 각도와 길이로 표현했지만 각도는 반지름과 무관하고 호 길이는 반지름에 비례한다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

문양을 움직이는 규칙

장식 속의 수학을 읽기

반복과 대칭은 관찰의 언어가 된다.

이슬람 미술의 기하 문양에는 원과 다각형의 결합 및 반복이 다양하게 나타난다. 메트로폴리탄 박물관의 해설은 기하 문양이 식물 문양과 서예 등과 함께 사용되는 점을 보여 준다. 모든 작품을 하나의 공식으로 설명하거나 수학적 분석이 제작자의 의도를 완전히 복원한다고 말해서는 안 된다. 여기서는 새로 만든 교육용 문양을 대상으로 규칙을 관찰한다.

같은 정사각형을 옆으로 일정한 거리만큼 옮겨 줄을 만들면 평행이동이 된다. 정사각형의 크기와 방향은 유지되며 위치만 달라진다. 모양이 반복된다는 말에 그치지 않고 얼마만큼 어느 방향으로 옮겼는지 적으면 다른 사람도 같은 문양을 만들 수 있다. 시각적 감상을 재현 가능한 규칙으로 바꾸는 첫 단계다.



현대 재구성: 같은 간격으로 평행이동한 정사각형 줄

탐구

한 번 2인 정사각형을 틈 없이 다섯 개 가로로 놓으면 전체 가로 길이와 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

가로 길이는 $2 \times 5 = 10$ 이고 세로는 2다. 전체 넓이는 20이다. 각 정사각형의 넓이 4를 다섯 번 더해도 같은 결과다.

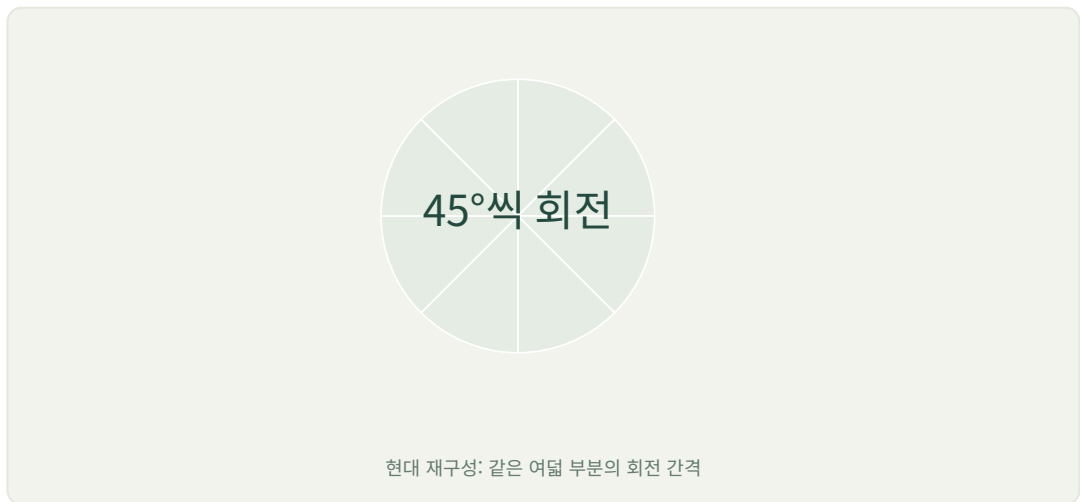
[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

회전하여 겹치는 모양

몇 번 돌아가야 처음과 구별되지 않는가?

정사각형을 중심 주위로 90° 돌리면 원래 자리와 겹친다. 한 바퀴 안에서 0° 와 90° 와 180° 와 270° 의 네 위치가 겹치므로 회전 대칭의 차수는 4다. 정삼각형에서는 120° 씩 돌아가 세 위치가 겹친다. 모양의 꼭짓점 수를 세는 것과 실제 회전 후 겹치는지 확인하는 것은 연결되지만 언제나 같은 작업은 아니다.

정사각형의 한 꼭짓점에만 붉은 점을 표시하면 도형의 외곽은 90° 회전에 겹쳐도 색 표시는 다른 자리로 간다. 문양 전체의 대칭을 판단할 때에는 색과 선의 굵기와 내부 무늬도 포함할지 정해야 한다. 분석 대상의 범위를 분명히 하면 서로 다른 대칭 판단이 왜 나왔는지 설명할 수 있다.



탐구

정팔각형의 최소 양의 회전 대칭각은 얼마인가?

풀이와 확인

$360^\circ \div 8 = 45^\circ$ 다. 다만 각 꼭짓점에 서로 다른 색이나 문자를 넣으면 그 표시까지 포함한 문양의 대칭은 줄어들 수 있다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

거울에 비친 무늬

반사는 거리와 각을 지키면서 방향을 뒤집는다.

수직선을 대칭축으로 정하고 그 왼쪽 3칸에 있는 점을 오른쪽 3칸으로 옮기면 반사된 점이 된다. 두 점의 높이는 같고 대칭축까지의 거리가 같다. 여러 점을 같은 규칙으로 옮기면 도형 전체가 반사된다. 단순히 비슷한 모양을 반대편에 그리는 것이 아니라 모든 점이 같은 조건을 만족해야 한다.

평행이동과 회전은 도형의 좌우 순서를 보존하지만 반사는 그 순서를 뒤집는다. 회전한 글자는 기울기와 향하는 방향이 바뀌어도 거울 글자가 되지는 않는다. 따라서 화살표나 비대칭 문자를 넣으면 변환의 차이가 잘 드러난다. 정사각형처럼 대칭이 많은 외곽만 보면 여러 변환을 구별하기 어려울 수 있다. 분석을 위해 작은 표지를 넣어 변화의 방향을 추적하는 방법을 써 보자.



현대 재구성: 위치 5와 -1은 위치 2의 축에서 같은 거리다.

탐구

대칭축이 가로 위치 2인 수직선일 때 가로 위치 5의 점은 어디로 옮겨지는가?

풀이와 확인

축의 오른쪽 3에 있으므로 반사 후에는 축의 왼쪽 3인 위치 -1이 된다. 원래 위치와 옮긴 위치의 평균이 $(5-1)/2=2$ 인지 확인하면 축과의 관계를 검산할 수 있다.

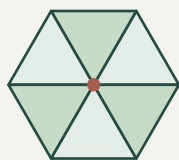
[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

정다각형으로 바닥 채우기

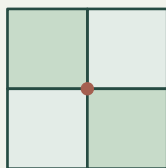
한 꼭짓점에 모인 각이 360° 가 되어야 한다.

정삼각형의 한 내각은 60° 이므로 한 점에 여섯 개를 모으면 360° 를 채운다. 정사각형의 내각은 90° 여서 네 개가 모인다. 정육각형의 내각은 120° 이므로 세 개가 모인다. 이러한 각도 조건은 같은 정다각형만으로 빈틈 없이 평면을 채울 수 있는지 살피는 기본 기준이다.

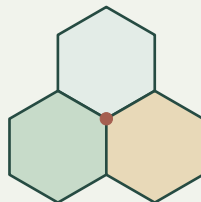
정오각형의 내각은 108° 다. 세 개를 모으면 324° 로 36° 가 남고 네 개를 모으면 432° 로 겹친다. 따라서 정오각형만을 꼭짓점끼리 맞대는 방식은 평면을 채우지 못한다. 이것은 모든 오각형이 타일이 될 수 없다는 말이 아니다. 정다각형이라는 조건과 같은 방식으로 모은다는 조건을 유지해야 정확한 결론이 된다.



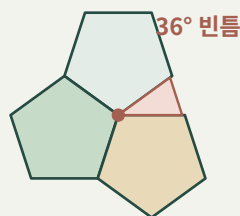
정삼각형
 $60^\circ \times 6 = 360^\circ$



정사각형
 $90^\circ \times 4 = 360^\circ$



정육각형
 $120^\circ \times 3 = 360^\circ$



정오각형
 $108^\circ \times 3 = 324^\circ$
36° 빈틈

한 점에 모인 내각의 합이 360° 일 때만 빈틈없이 채워진다.

탐구

정팔각형 두 개의 내각을 모으면 남는 각은 얼마이며 어떤 정다각형을 넣을 수 있는가?

풀이와 확인

정팔각형의 내각은 135° 이므로 둘의 합은 270° 다. 남는 90° 에는 정사각형 한 개를 넣을 수 있다. 이러한 각 배치는 정팔각형과 정사각형을 섞은 평면 채우기의 출발점이다.

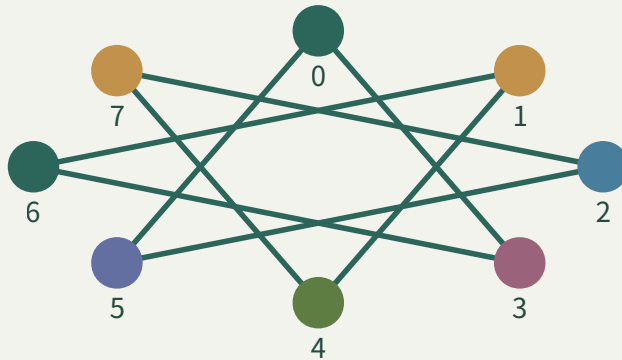
[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

여덟 꼭짓점의 별

연결 순서가 별의 구조를 바꾼다.

원 위에 같은 간격으로 여덟 점을 놓고 순서대로 번호를 붙이자. 한 점씩 건너뛰어 연결하면 짝수 번호 네 점과 홀수 번호 네 점이 각각 정사각형을 만든다. 두 정사각형을 45° 어긋나게 겹친 모양은 여덟 방향의 구조를 보여 준다. 같은 점을 사용해도 어떤 순서로 잇는지에 따라 외곽과 내부 교차가 달라진다.

한 번에 세 칸씩 이동하여 연결하면 여덟 점을 모두 지난 뒤 처음으로 돌아온다. 8과 3이 서로소이기 때문이다. 두 칸씩 이동하면 8과 2의 공약수 때문에 네 점만 지난 뒤 처음으로 돌아오며 나머지 점은 별도의 순환을 만든다. 별 문양의 연결은 정수의 나머지와 공약수 문제로도 읽을 수 있다.



현대 재구성: 세 칸씩 건너뛰어 여덟 점을 잇는다.

탐구

여덟 점에서 세 칸씩 이동하면 0에서 시작한 번호 순서는 어떻게 되는가?

풀이와 확인

0에서 3과 6과 1과 4와 7과 2와 5를 거쳐 0으로 돌아온다. 매번 3을 더한 뒤 8로 나눈 나머지를 취한 결과다. 여덟 점이 모두 한 번씩 등장한다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

대칭이 있는 색칠

색을 넣으면 새로운 조건이 생긴다.

원 둘레의 여덟 칸을 두 색 A와 B로 번갈아 칠하면 45° 회전에서 두 색의 위치가 바뀐다. 90° 회전에서는 각 칸이 같은 색의 자리로 가므로 문양 전체가 겹친다. 색을 무시한 분할은 회전 대칭 차수 8이지만 색을 포함한 문양은 차수 4다. 무엇을 같다고 볼지에 따라 대칭의 결과가 바뀌는 사례다.

색을 서로 바꾸는 변환까지 같은 것으로 인정하면 다른 분류를 만들 수 있다. 그러나 그것은 원래 색을 그대로 보존하는 대칭과 구별해서 정의해야 한다. 수학적 분류는 관찰 대상을 정하는 약속에 의존한다. 작품을 분석할 때에도 색이 바래거나 복원된 부분이 있으면 현재 보이는 대칭과 제작 당시의 대칭을 동일시하지 않도록 자료를 확인한다.



탐구

A와 A와 B와 B의 순서를 두 번 반복한 여덟 칸은 몇 도 회전에서 처음과 겹치는가?

풀이와 확인

네 칸을 옮기는 180° 에서 겹친다. 90° 에서는 A와 B의 묶음이 바뀌므로 같은 색을 보존하지 않는다. 최소 회전각은 180° 이며 회전 대칭 차수는 2다.

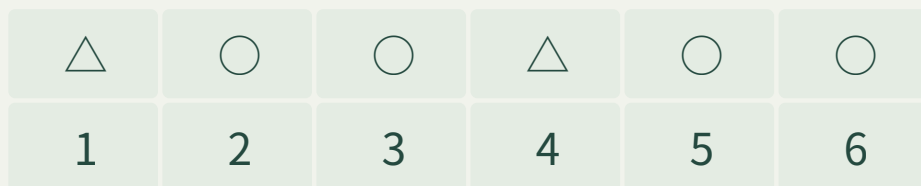
[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

띠 문양의 반복 단위

가장 작은 반복과 눈에 띄는 묶음은 다를 수 있다.

삼각형과 원과 원이 차례로 반복되는 긴 띠를 생각하자. 눈에 보이는 여섯 도형을 한 묶음으로 잡아도 띠를 재현할 수 있지만 최소 반복 단위는 세 도형이다. 반복 단위를 크게 잡으면 설명은 가능해도 구조를 가장 간단하게 표현하지 못한다. 반대로 너무 작게 잡으면 다른 모양이 섞인 위치를 설명할 수 없다.

띠의 길이가 최소 단위의 정수배가 아니면 마지막 부분은 중간에서 끝낼 수 있다. 유물의 파편을 보고 전체 반복을 추정할 때 이 점이 중요하다. 짧은 조각에서 보인 규칙이 전체에 계속되었는지 확인하려면 더 많은 부분이나 비교 자료가 필요하다. 수학적 반복 가능성과 실제 작품의 원형 복원은 서로 다른 수준의 판단이다.



현대 재구성: 세 도형이 최소 반복 단위다.

탐구

삼각형과 원과 원이 반복되는 20개 도형에서 삼각형은 몇 개인가?

풀이와 확인

위치 1과 4와 7과 10과 13과 16과 19에 있어 모두 7개다. 마지막 두 도형까지 포함하므로 20을 3으로 나눈 몫 6만 답으로 쓰면 첫 부분 하나를 빠뜨린다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

회전과 반사의 순서를 바꾸어 보기

같은 두 변환을 사용해도 실행 순서에 따라 문양의 위치가 달라진다.

좌표평면에서 가로 위치가 2이고 세로 위치가 1인 점을 고른다. 첫 변환은 원점을 중심으로 반시계 방향 90° 회전하는 것이다. 가로 x 와 세로 y 는 회전 뒤 가로 $-y$ 와 세로 x 가 된다. 둘째 변환은 가로축에 대한 반사이며 가로 x 와 세로 y 를 가로 x 와 세로 $-y$ 로 바꾼다.

회전을 먼저 하면 점은 가로 -1 과 세로 2 로 간다. 이어 반사하면 가로 -1 과 세로 -2 가 된다. 반대로 반사를 먼저 하면 가로 2 와 세로 -1 로 가고 이를 회전하면 가로 1 과 세로 2 가 된다. 마지막 두 위치는 원점들 사이에 두고 서로 마주한다.

두 과정은 모두 길이와 각을 보존하지만 결과는 같다 말할 수 없다. 변환을 합성할 때에는 어떤 규칙을 썼는지뿐 아니라 순서도 정보다. 타일 문양을 복제하는 작업 지시에서도 먼저 돌리고 뒤집으라는 말과 먼저 뒤집고 돌리라는 말은 구별해야 한다.

외곽이 원처럼 대칭적인 도형만 쓰면 순서 차이가 눈에 잘 드러나지 않는다. 비대칭 점이나 색 표지를 넣어 추적하는 까닭이 여기에 있다. 이번 좌표 실험은 전통 장인의 설계도를 복원한 것이 아니라 문양을 분석하는 현대 변환 언어를 익히는 활동이다.

실행 순서	첫 결과의 가로와 세로	마지막 가로와 세로
회전 후 반사	-1 과 2	-1 과 -2
반사 후 회전	2 와 -1	1 과 2

탐구

원점 자체로 같은 두 과정을 실행하면 결과가 같다는 사실이 두 변환의 순서가 언제나 무관함을 증명하는가?

풀이와 확인

아니다. 원점은 두 변환에서 모두 움직이지 않는 특별한 점이다. 모든 점에서 두 결과가 같아야 같은 변환이라고 할 수 있다. 가로 2 와 세로 1 인 점의 반례가 이미 두 합성이 다름을 보여 준다.

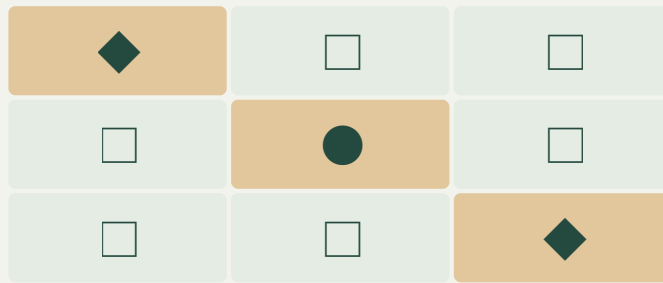
[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

문양 설계 활동의 해설

규칙과 결과를 함께 제시한다.

정사각형 타일 아홉 개를 3행 3열로 놓고 중앙만 진한 색으로 칠해 보자. 외곽과 색 배치는 90° 회전과 가로 및 세로 반사에 모두 겹친다. 대각선 반사도 가능하다. 이제 왼쪽 위 타일을 다른 색으로 바꾸면 여러 대칭이 사라진다. 작은 수정이 전체 구조에 미치는 영향을 직접 확인할 수 있다.

설계 설명에는 타일의 크기와 배열과 색칠 규칙과 인정한 대칭을 적는다. 특정 지역의 전통 문양을 그대로 복원했다고 주장하려면 별도의 작품 자료가 필요하다. 이 활동은 기하 규칙을 새롭게 조합한 교육용 디자인이다. 역사적 미술을 존중하는 감상과 수학적 변환을 실험하는 창작을 연결하되 둘의 근거를 혼동하지 않는 것이 중요하다.



현대 재구성: 색 배치가 180° 회전을 보존한다.

탐구

중앙만 다른 색인 3행 3열 문양에 대각선으로 서로 마주한 두 모서리를 같은 새 색으로 칠하면 180° 회전은 남는가?

풀이와 확인

남는다. 두 모서리가 서로 바뀌고 나머지 같은 색 타일들도 같은 색 자리로 옮겨진다. 그러나 90° 회전에서는 칠하지 않은 다른 두 모서리로 이동하므로 그 대칭은 사라진다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

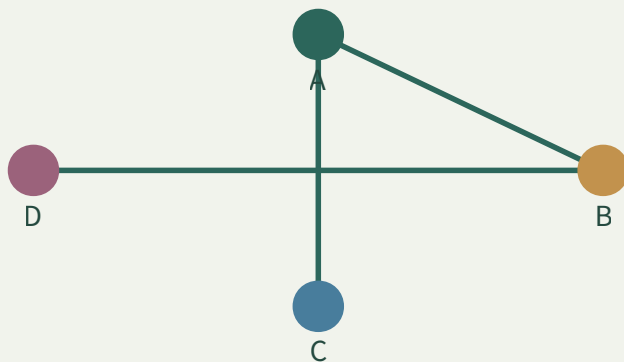
책과 증명이 건너간 길

전달은 한 방향의 선이 아니다

책은 번역과 해설과 새 문제를 만나 달라진다.

아랍어로 이루어진 수학 연구는 앞선 여러 언어의 자료를 받아들이면서 새로운 문제와 풀이를 만들어 냈다. 뒤에는 일부 저술이 라틴어 등으로 번역되어 다른 독자들과 만났다. 이 과정을 단순히 옛 지식을 보관했다가 넘겨준 일로만 설명하면 연구와 비판과 재구성의 역할이 사라진다. 각 책의 이동 경로는 구체적인 필사본과 번역 자료를 바탕으로 확인해야 한다.

가상의 원본 A가 번역 B와 해설 C로 이어지고 B가 다시 개정 D로 이어지는 모형을 그려 보자. D와 C는 공통된 출발점을 갖지만 직접 같은 책을 베낀 관계라고 단정할 수 없다. 연결망의 화살표에 번역과 개정과 인용을 구별해 적으면 책이 변한 방식을 더 정확히 설명할 수 있다. 하나의 선이 모든 종류의 관계를 대신하지 않도록 한다.



현대 재구성: 번역과 해설의 관계를 나타낸 가상 모형

탐구

A에서 B로 번역되고 B에서 D로 개정되었다면 A와 D의 문장이 완전히 같다고 할 수 있는가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 언어와 설명 및 문제 배열이 달라졌을 수 있다. 공통된 계통이라는 사실과 내용이 모두 동일하다는 주장은 다르므로 실제 대응 구절을 비교해야 한다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

문장식과 기호식의 사이

짧아진 표현에는 새로 익힐 약속이 들어 있다.

어떤 수를 세 배 하여 다섯을 더하면 스무넷이 된다는 문장을 $3x+5=24$ 로 옮길 수 있다. 기호식은 짧지만 x 가 무엇을 가리키는지와 곱셈을 어떻게 생략하는지와 등호의 뜻을 알아야 읽을 수 있다. 짧다는 이유만으로 설명이 언제나 더 쉽지는 않다. 문장과 기호는 서로의 부족한 부분을 보완한다.

식을 풀면 $3x=19$ 이므로 $x=19/3$ 이다. 정수만 답으로 생각했다면 문제가 잘못되었다고 느낄 수 있지만 처음 문장은 정수라는 조건을 주지 않았다. 문장을 식으로 옮길 때 해의 범위까지 적으면 숨은 가정을 드러낼 수 있다. 역사적 저술을 현대 기호로 번역할 때도 원문이 다루는 크기와 수의 범위를 확인해야 한다.

$$\text{문장} \rightarrow 3x+5=24$$

$$3x=19$$

$$x=19/3$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

어떤 양에 그 절반을 더하면 9라는 문장을 식으로 쓰고 풀어라.

풀이와 확인

$x+x/2=9$ 로 쓰면 $3x/2=9$ 이므로 $x=6$ 이다. 계산하면 $6+3=9$ 다. 절반이 원래 양의 절반이라는 관계를 식의 $x/2$ 가 표현한다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

풀이의 줄을 줄여도 되는가

생략한 단계는 독자가 복원할 수 있어야 한다.

양의 길이 문제 $x^2+6x=16$ 에서 곧바로 $x=2$ 라고 적으면 정답은 보이지만 방법은 드러나지 않는다. 중간에 9를 더하여 $(x+3)^2=25$ 를 만들었다는 단계를 남기면 왜 2가 나왔는지 설명할 수 있다. 독자에 따라 필요한 중간 단계의 수는 다르지만 핵심 논리까지 생략하면 풀이가 검산 불가능한 선언처럼 보일 수 있다.

반대로 모든 작은 덧셈을 길게 풀어 쓰면 중요한 아이디어가 문장 사이에 묻힌다. 좋은 편집은 결정적인 변형을 드러내고 반복적인 계산은 표나 짧은 식으로 정리한다. 이 책의 문장과 도해도 같은 원칙으로 읽을 수 있다. 설명의 길이보다 독자가 어떤 근거로 다음 단계로 갈 수 있는지를 점검하자.

$$\begin{aligned}x^2+6x&=16 \\x^2+6x+9&=25 \\(x+3)^2&=25 \\ \text{양의 길이 } x&=2\end{aligned}$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

완전제곱 풀이에서 6을 반으로 나눈 3과 더한 9는 각각 무엇을 뜻하는가?

풀이와 확인

3은 모서리에 채울 정사각형의 한 변이고 9는 그 넓이다. 둘을 혼동하면 x^2+6x+3 을 제곱식으로 잘못 읽게 된다. 핵심 단계는 반을 구한 다음 그 값을 제공하는 것이다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

서로 다른 풀이를 비교하기

같은 답에도 보존되는 정보가 다르다.

24를 3:5로 나누는 문제에서 전체 비의 합 8을 구하고 한 몫 3을 얻으면 두 부분은 9와 15다. 다른 방식으로 작은 부분을 x 라 두고 큰 부분을 $5x/3$ 으로 두면 $x+5x/3=24$ 가 된다. 두 풀이가 같은 답에 도달하지만 첫 방식은 단위 비율이 잘 보이고 둘째 방식은 방정식으로 일 반화하기 쉽다.

풀이의 우열을 속도만으로 정하면 설명의 목적을 놓칠 수 있다. 계산을 처음 배우는 사람에게 게는 몫 그림이 도움이 되고 복잡한 조건을 덧붙일 때에는 문자식이 유용할 수 있다. 옛 풀이 와 오늘의 풀이를 비교할 때에도 당시 사용 가능한 표기와 독자의 목적을 고려해야 한다. 동 일한 답이라는 사실은 비교의 끝이 아니라 구조를 살피는 출발점이다.

전체 24의 앞		9
전체 24의 뒤		15
전체 40의 앞		15
전체 40의 뒤		25

현대 재구성: 같은 비율을 서로 다른 전체에 적용한다.

탐구

40을 3:5로 나누고 24의 경우와 공통된 구조를 설명하라.

풀이와 확인

한 몫은 $40 \div 8 = 5$ 이므로 두 부분은 15와 25다. 두 경우 모두 전체를 여덟 몫으로 나눈 뒤 세 몫과 다섯 몫 을 배정한다. 전체 양만 달라지고 비의 구조는 유지된다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

반례를 남기는 편집

틀린 주장을 고치는 데에도 증거가 필요하다.

모든 소수는 홀수라는 문장은 2라는 반례 하나로 거짓임을 알 수 있다. 올바른 문장은 2보다 큰 모든 소수는 홀수다. 2보다 큰 짝수는 2를 약수로 가지므로 소수가 아니기 때문이다. 반례는 비난을 위한 예외 찾기가 아니라 주장의 범위를 정확하게 다듬는 도구다. 조건 하나가 빠지면 참인 내용도 거짓 문장이 될 수 있다.

책을 교정할 때에는 틀린 문장을 지우는 것에 그치지 않고 어떤 조건을 추가했는지 남기는 편이 좋다. 그래야 수정이 단순한 표현 변화인지 수학적 범위의 변경인지 판단할 수 있다. 역사적 문장을 현대적으로 재서술할 때도 같은 원칙이 필요하다. 원문에 없는 일반성을 덧붙이거나 중요한 제한을 생략하지 않는다.

주장	확인
모든 소수는 홀수	2가 반례
2보다 큰 소수는 홀수	짝수의 약수 2로 설명

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

서로 다른 두 소수의 합은 언제나 짝수라는 주장에 반례를 제시하라.

풀이와 확인

2와 3을 더하면 5로 홀수다. 두 소수가 모두 2보다 크다는 조건을 추가하면 둘 다 홀수이므로 합은 짝수가 된다. 반례를 통해 빠진 조건을 찾을 수 있다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

출처 카드 만들기

주장과 근거를 한 줄씩 연결한다.

자료 카드에는 제목과 기관 및 주소와 확인 날짜를 적고 어떤 주장에 사용했는지 기록한다. 한 자료가 학자의 생애를 설명한다고 해서 그 자료가 책 속의 모든 계산 예제까지 제공한 것은 아니다. 원래 자료에서 확인한 역사적 사실과 이 책에서 새로 만든 수학 문제를 분리하면 독자가 어느 부분을 어디에서 확인할지 알 수 있다.

예를 들어 유물 설명은 제작 날짜와 재료를 뒷받침하고 현대 원의 공식은 교육용 원판의 호 길이를 계산한다. 두 종류의 근거가 한 페이지에 함께 있을 수 있다. 주소를 많이 모으는 것보다 각 문장이 실제로 그 자료에 의해 뒷받침되는지 확인하는 일이 중요하다. 인용한 자료의 범위를 넘어서 추측은 추측이라고 밝혀야 한다.

확인할 주장

자료의 해당 내용

사실과 재구성 구별

출처와 가정 표시

현대 재구성: 한 주장에 필요한 근거를 추적한다.

탐구

박물관 자료에 원판의 지름이 없는데 교육용 예제에서 지름 20cm를 사용했다면 어떻게 표시해야 하는가?

풀이와 확인

지름 20cm는 교육을 위해 정한 가정이라고 밝혀야 한다. 실제 유물의 치수처럼 적으면 출처가 뒷받침하지 않는 정보를 만들어 내게 된다. 자료의 빈칸과 계산을 위한 설정을 구별한다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

종합 문제를 한 장에 설계하기

대수와 비와 오차를 하나의 상황에 연결한다.

현대 재구성 작업실에서 직사각형 판의 짧은 변을 x 와 긴 변을 $x+4$ 로 정하고 넓이를 45로 만들려 한다. 식은 $x(x+4)=45$ 다. 완전제곱으로 바꾸면 $(x+2)^2=49$ 이므로 양의 길이는 $x=5$ 다. 두 변은 5와 9이고 둘레는 28이다. 계산이 끝나면 처음 요구한 넓이와 길이의 차이를 다시 확인한다.

이 판을 모든 방향으로 1.2배 확대하면 변은 6과 10.8이 되고 넓이는 64.8이다. 넓이의 배수는 1.44이며 길이의 배수와 다르다. 제작 과정에서 길이를 반올림한다면 실제 넓이는 조금 달라질 수 있다. 하나의 문제에 여러 개념을 억지로 나열하기보다 앞의 결과가 다음 조건의 입력이 되도록 연결하면 종합 탐구가 된다.



$$5 \times 9 = 45$$



$$6 \times 10.8 = 64.8$$

현대 재구성: 짧은 확대에서 넓이는 확대율의 제곱만큼 변한다.

탐구

확대 후 긴 변 10.8을 11로 바꾸면 넓이는 얼마이며 목표와 얼마나 차이 나는가?

풀이와 확인

짧은 변 6을 유지하면 넓이는 66이다. 목표 64.8보다 1.2 크다. 길이를 0.2 늘린 변화가 폭 6 전체에 적용되어 $6 \times 0.2 = 1.2$ 의 넓이 차이를 만든다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

다음 관으로 가져갈 질문

서로 다른 전통을 같은 잣대 하나로 줄이지 않는다.

이 관에서 만난 계산은 자리값과 방정식과 약수 및 삼각형과 원의 관계를 사용했다. 다른 관에서도 비슷한 질문이 나타날 수 있지만 표기와 도구와 문제의 목적은 다를 수 있다. 비슷한 결과를 발견했다고 곧바로 직접 전승을 단정하지 않는다. 전달을 주장하려면 시간과 장소와 문헌의 연결을 보여 주는 별도의 근거가 필요하다.

비교 활동에서는 같은 문제를 두 가지 방식으로 풀고 각 풀이가 무엇을 쉽게 보이게 하는지 기록해 보자. 예를 들어 23×14 를 넓이로 분할한 그림과 자리값을 맞춘 세로셈은 같은 분배 법칙을 다른 모양으로 드러낸다. 수학의 공통 구조를 찾는 즐거움과 역사적 차이를 남기는 태도를 함께 유지하면 다음 관의 자료도 더 세심하게 읽을 수 있다.

분할 방향	부분 합	전체
23을 분할	$280+42$	322
14를 분할	$230+92$	322

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

23×14 를 $20 \times 14 + 3 \times 14$ 와 $23 \times 10 + 23 \times 4$ 로 각각 계산하라.

풀이와 확인

첫 방식은 $280+42=322$ 이고 둘째 방식은 $230+92=322$ 다. 두 방식은 서로 다른 변을 먼저 나누었지만 같은 직사각형의 넓이를 빠짐없이 합한다. 계산의 일치는 역사적 직접 교류의 증거와는 구별해야 한다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_mathematics/

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/>

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thabit/>

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Haytham/>

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Khayyam/>

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Tusi_Nasir/

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Kashi/>

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

<https://www.metmuseum.org/essays/astronomy-and-astrology-in-the-medieval-islamic-world>

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

<https://www.metmuseum.org/essays/geometric-patterns-in-islamic-art>

[astro-model] Dominic Ford. Building a Model Astrolabe. 2012

<https://arxiv.org/abs/1202.2005>