

MATHESIS

세계 수학과 / 내용 중심 개정판

아프리카관

기록에서 출발해 직접 계산하는 수학의 역사

역사 / 도해 / 탐구

REVISED EDITION / 2026

차례

본문의 흐름에 따라 편집한 실제 PDF 쪽번호다.

그림으로 다시 읽는 보충 탐구	4
하나의 장면에 담기지 않는 지식	5
하나의 대륙에서 여러 수학을 읽다	6
알렉산드리아에서 증명을 읽다	15
그림자에서 지구의 크기까지	27
방정식과 주석의 전통	41
이상고의 자국과 해석의 경계	53
팀북투의 필사본과 계산	63
요루바 수 이름과 기준량	72
소나의 선과 연결	83
만칼라에서 상태와 전략을 읽다	95
직조의 격자와 무늬	105
반복과 자기닮음의 모형	115
오늘의 수학과 열린 탐구	124
참고 자료와 자료 읽기	133

READING THE WORLD

이 책을 여는 질문

이 책은 같은 분량으로 잘라 놓은 전시실이 아니라 서로 다른 질문을 지닌 여덟 권의 책에서 출발한다. 계산을 남긴 재료와 해결해야 했던 문제를 함께 읽으면 비슷한 수식 뒤에 있는 차이가 드러난다. 한 지역을 오늘의 국가 경계에 가두거나 다른 지역을 한 줄의 발전 순서에 놓지 않는다.

읽는 순서는 자유롭다. 수를 기록하는 방법이 궁금하다면 산가지와 자리값 및 키푸를 오가면 된다. 도형의 이유를 묻고 싶다면 넓이의 보존과 완전제곱 및 증명을 이어 읽을 수 있다. 서로 닮은 계산을 발견했을 때에는 구조의 공통점과 역사적 전파의 증거를 따로 살핀다.

이번 개정에서는 원고 단위마다 페이지를 끝내던 방식을 없앴다. 문장과 그림이 차지하는 실제 길이에 따라 다음 페이지로 이어지며 짧은 해설만 남는 쪽을 줄이도록 장 사이의 흐름도 연결했다. 빈 공간을 만들기 위해 본문을 늘리거나 일정한 쪽수를 맞추기 위해 설명을 나누지 않았다.

탐구 문제의 수치와 문자식은 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 재구성이다. 먼저 조건을 읽고 직접 계산한 뒤 풀이를 비교한다. 역사적 사실을 판단할 때에는 본문의 출처와 유물 설명을 함께 확인한다.

아프리카관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이 장은 개정판에 새로 붙인 보충 탐구다. 본문의 각 장이 계산의 결과나 조건을 말로 설명하고 지나간 자리에서 그림을 하나 더 그려 그 이유를 눈으로 확인하도록 구성했다. 단원마다 이어 읽을 본문의 장을 표시했으므로 해당 장을 읽은 뒤 펼치면 흐름이 자연스럽다.

여기에 실은 도해와 수치는 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 현대 재구성이다. 옛 자료가 실제로 이런 그림을 남겼다는 뜻은 아니며 자료가 말하는 범위는 각 단원 끝의 출처에서 따로 확인할 수 있다. 이번 개정에서는 본문에서 표로만 보여 주던 일부 도해도 실제 그림으로 다시 그렸다.

아프리카관 / 01

하나의 장면에 담기지 않는 지식



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

이 삽화에 나란히 놓인 책과 선 그림과 직물 및 놀이판은 같은 지역과 같은 시대의 한 체계를 뜻하지 않는다. 재료가 다르면 남는 정보도 달라진다. 필사본은 문장의 순서를 보존할 수 있고 선을 그리는 활동은 수행의 순서가 중요한 단서가 될 수 있다. 자료의 형태에 맞는 질문을 골라야 서로 다른 지식을 공정하게 비교할 수 있다.

본문에서는 기하학적 증명과 수 이름의 구조 및 연결과 상태의 변화를 각각 살핀다. 눈에 보이는 규칙이 있다고 제작자가 현대의 정리를 알고 있었다고 결론짓지 않는다. 반대로 문헌이 부족하다는 이유만으로 실제 활동에 구조가 없었다고 판단하지도 않는다. 확인된 관찰을 먼저 적고 그 위에서 가능한 수학적 탐구를 분명히 밝힌다.

하나의 대륙에서 여러 수학을 읽다

아프리카는 하나의 수학 문화가 아니다

지역과 시대를 함께 읽어야 서로 다른 지식의 얼굴이 드러난다.

알렉산드리아의 기하학과 팀북투의 필사본은 같은 대륙에 놓이지만 언어와 교육 환경이 서로 다르다. 앙골라 동부의 소나와 요루바어의 수 이름도 하나의 체계로 합쳐 설명할 수 없다. 이 책은 장소를 소개한 뒤 자료의 종류와 수학적 질문을 연결한다.

지도는 출발점이다. 지도 위에서 가까운 곳이라고 같은 방식으로 계산했다고 판단하지 않는다. 반대로 멀리 떨어진 곳이라도 책과 사람이 이동하면 지식이 오갈 수 있다. 연결의 주장은 실제 기록이 있을 때 제시하며 빈 공간은 추측으로 메우지 않는다.

각 장의 계산 예시는 오늘의 독자를 위해 새로 구성했다. 예제가 문화적 소재에서 출발하더라도 그 계산식 전체가 해당 공동체의 역사적 기록에 적혀 있었다는 뜻은 아니다. 이러한 구분은 문화의 가치를 낮추지 않는다. 오히려 실제 전통과 새로 만든 설명을 모두 정확하게 이해하게 한다.

비교표의 행에는 지역 이름을 두고 열에는 자료와 계산 도구 및 탐구 질문을 둔다. 같은 열에서 공통점을 찾되 빈칸을 억지로 채우지 않는다. 알려지지 않은 정보는 차이가 없다는 증거가 아니다.

읽을 대상	확인할 맥락
알렉산드리아	도시와 언어 및 문헌
팀북투	필사본과 교육 전통
소나	

아프리카는 하나의 수학 문화가 아니라는 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

한 가지 수 이름의 구조를 대륙 전체의 특징으로 부를 수 없는 이유는 무엇일까?

풀이와 확인

한 언어에서 확인한 규칙은 그 언어와 조사된 방언에 관한 증거다. 다른 언어와 지역에도 같은 규칙이 있는지는 별도의 자료로 확인해야 한다. 지역 이름을 구체적으로 적으면 성급한 일반화를 줄일 수 있다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand / [LOC] 미국 의회도서관. Ancient Manuscripts from the Desert Libraries of Timbuktu

유물과 문헌은 다른 질문을 요구한다

남아 있는 흔적과 그 흔적에 대한 해석을 나누어 읽는다.

뼈에 새긴 자국은 눈으로 세어 볼 수 있다. 그러나 그 자국이 물건의 수를 뜻했는지 날짜를 뜻했는지는 별개의 문제다. 문헌은 문장과 계산을 함께 보존할 수 있지만 필사 과정의 누락이나 손상을 겪기도 한다. 자료의 종류에 따라 확실하게 말할 수 있는 범위가 달라진다.

관찰 기록에는 자국의 개수와 배열처럼 확인 가능한 내용을 쓴다. 해석 기록에는 묶음 세기나 달력이라는 설명을 쓴다. 두 칸을 분리하면 같은 관찰에서 여러 해석이 나올 수 있다는 점이 보인다. 해석이 매력적이라는 이유만으로 사실 칸으로 옮겨 적지 않는다.

수학 활동에서는 한 배열을 여러 방식으로 묶어 보는 것이 유익하다. 다만 오늘의 묶음 규칙이 옛 제작자의 의도를 입증하지는 않는다. 실험으로 가능한 계산을 보여 주는 일과 역사적 목적을 밝히는 일은 다른 종류의 증거를 필요로 한다.

자료 설명에 붙은 확실하다와 추정된다는 표현도 기록의 일부다. 그림만 복사하면서 이런 표현을 빼면 원래 저자가 남겨 둔 불확실성이 사라진다. 요약할 때에도 주장 강도를 유지해야 한다.

관찰	가능한 해석	추가로 필요한 증거
12개의 자국	물건 수 기록	관련 물건이나 맥락
일정한 간격	시간 기록	

유물과 문헌은 다른 질문을 요구한다는 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

자국이 12개라는 사실만으로 12진법을 사용했다고 말할 수 있을까?

풀이와 확인

그렇게 말할 수 없다. 12개는 단순한 수량일 수 있다. 12진법을 주장하려면 자릿값이나 반복되는 묶음 규칙 같은 추가 증거가 필요하다. 가능한 해석과 입증된 체계를 구별해야 한다.

[ISHANGO] 벨기에 자연과학연구소. The Ishango Bone

연표를 만드는 세 가지 날짜

제작 시기와 복사 시기와 소장 시기는 서로 같지 않다.

오래된 책을 후대 사람이 베껴 썼다면 현재 남은 종이의 연대는 원저술의 연대와 다를 수 있다. 디지털 자료의 공개 날짜는 다시 그 둘과 구별된다. 자료를 연표에 놓을 때 날짜 옆에 무엇이 날짜인지 적어야 시간 관계가 흐려지지 않는다.

학습용 사례로 어떤 글이 1500년에 작성되고 1750년에 복사되었으며 2000년에 디지털화되었다고 하자. 첫 번째 간격은 250년이다. 두 번째 간격도 250년이다. 간격이 같아도 첫 구간은 필사 전승을 다루고 둘째 구간은 보존과 공개를 다룬다.

세 날짜 중 가장 이른 것을 자동으로 모든 내용의 탄생일로 삼지 않는다. 원저자가 더 오래된 자료를 인용했을 수도 있다. 반대로 후기 사본에 추가 설명이 들어갔을 수도 있다. 연표는 사건을 정리하는 도구이며 문헌의 충위를 대신 판정해 주는 장치는 아니다.

연대를 정확한 한 해로 알 수 없다면 범위로 적는다. 1700년대라는 기록을 1700년으로 바꾸면 근거 없이 정밀도를 높인 셈이다. 연표의 막대는 때로 하나의 점보다 자료의 상태를 잘 보여 준다.

학습용 사건	연도	앞 사건과 간격
최초 작성	1500	기준
후대 필사	1750	250년
디지털 공개	2000	

연표를 만드는 세 가지 날짜의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

1750년 사본을 설명할 때 1500년과 2000년을 함께 적는 이유는 무엇일까?

풀이와 확인

서로 다른 사건을 분리해 보여 주기 위해서다. 저술과 필사와 공개의 날짜를 표시하면 독자는 글의 내용이 전해진 과정과 자신이 보는 자료의 형태를 구별할 수 있다.

길과 연결을 나타내는 추상 지도

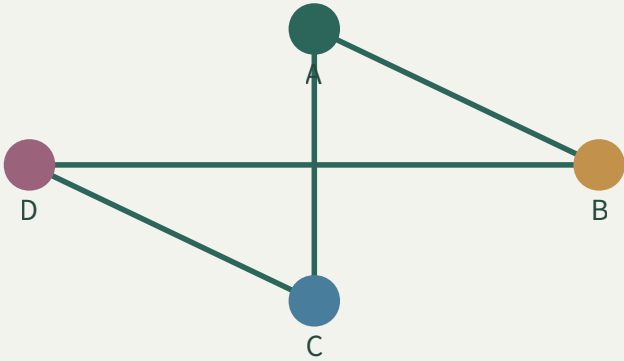
경로도는 실제 거리와 별개로 연결의 구조를 보여 준다.

도시를 점으로 그리고 확인된 이동 관계를 선으로 나타내면 연결망을 만들 수 있다. 선의 길이를 실제 거리로 쓰지 않기로 했다면 그림의 좌우 배치는 단지 읽기 편한 배치다. 가상의 학습망을 역사적 교역로처럼 표시하지 않는 것이 이 활동의 첫 조건이다.

네 지점 A와 B와 C와 D를 두고 A에서 B로 가는 길과 B에서 D로 가는 길을 그린다. 여기에 A에서 C로 가는 길과 C에서 D로 가는 길을 더하면 A에서 D까지 두 개의 두 단계 경로가 생긴다. 어느 경로가 더 짧은지는 선의 개수만으로는 알 수 없다.

길마다 이동 시간을 붙이면 질문이 달라진다. A에서 B까지 3시간이고 B에서 D까지 5시간이면 첫 경로는 8시간이다. A에서 C까지 4시간이고 C에서 D까지 2시간이면 둘째 경로는 6시간이다. 같은 두 단계라도 비용의 합은 서로 다르다.

경로에 비용을 붙인 표는 지도와 함께 보관한다. 선을 길게 그렸다고 시간이 늘어나는 것이 아니며 그림의 좌우를 바꾸어도 합계는 같다. 이 사례의 최선 경로는 표의 시간으로 결정된다.



역사적 교역로를 재현하지 않은 학습용 연결망

경로	구간 시간	합계
$A \rightarrow B \rightarrow D$	$3 + 5$	8시간
$A \rightarrow C \rightarrow D$	$4 + 2$	6시간

탐구

연결 수가 같으면 이동 시간도 같다고 할 수 있을까?

풀이와 확인

없다. 경로의 단계 수와 각 구간에 붙인 시간은 별도의 정보다. 이 사례에서는 두 경로가 모두 두 단계지만 8시간과 6시간으로 다르다. 역사 지도를 읽을 때도 선의 의미부터 확인해야 한다.

수량과 수 이름과 숫자 표기

같은 양을 말하는 방법과 적는 방법은 달라질 수 있다.

둘 열일곱 개라는 수량은 말소리나 문자와 별개로 비교할 수 있다. 수 이름은 그 양을 언어로 부르는 방식이다. 숫자 표기는 그 양을 기호로 기록하는 방식이다. 이 세 가지를 구별하면 어떤 언어가 덧셈이나 뺄셈을 포함한 수 이름을 쓴다는 말도 더 정확하게 이해된다.

학습용 카드에 17과 $10 + 7$ 과 $20 - 3$ 을 각각 적어 보자. 세 식은 같은 수량을 가리키지만 분해 방식은 서로 다르다. 17이라는 십진 표기는 열의 묶음과 날개를 사용한다. $20 - 3$ 은 가까운 기준량에서 부족한 만큼을 빼는 관점을 보여 준다.

어느 표현이 더 좋은지는 과제에 따라 달라진다. 스무 칸 중 빈칸을 세는 일에는 $20 - 3$ 이 편할 수 있다. 열 개 묶음으로 포장할 때에는 $10 + 7$ 이 편할 수 있다. 표현의 차이를 능력의 우열로 바꾸지 않고 무엇을 쉽게 드러내는지 비교한다.

표현을 비교할 때에는 숫자의 자릿수와 말의 음절 수도 구분한다. 같은 두 자리 숫자라도 언어에 따라 이름의 길이가 다를 수 있다. 글자 수만 세어 계산 체계의 효율을 평가하지 않는다.

수량	더해서 표현	빼서 표현
17	$10 + 7$	$20 - 3$
47	$40 + 7$	$50 - 3$
98	$90 + 8$	

수량과 수 이름과 숫자 표기의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

47을 두 가지 기준량으로 분해하고 각 표현이 편한 상황을 설명해 보자.

풀이와 확인

$40 + 7$ 은 스무 개짜리 두 묶음과 남은 날개를 세기 쉽다. $50 - 3$ 은 십 칸에서 빈칸이 세 개라는 상황에 알맞다. 두 표현의 값은 같지만 먼저 눈에 들어오는 구조가 다르다.

도해가 보여 주는 것과 숨기는 것

그림을 읽을 때에는 축척과 방향과 생략을 확인한다.

책 속의 도해는 복잡한 대상을 이해하기 쉽게 바꾼다. 지구를 원으로 그리거나 직조의 실을 같은 굵기의 선으로 그리는 것은 그런 단순화다. 단순화가 잘못은 아니지만 어떤 성질을 남겼는지는 밝혀야 한다. 실제 크기를 보여 주는 그림과 관계만 보여 주는 그림은 용도가 다르다.

가로 6과 세로 4인 직사각형을 가로 3과 세로 2로 그리면 길이는 모두 절반이 된다. 넓음은 유지되지만 넓이는 24에서 6으로 줄어든다. 길이의 축척이 1/2일 때 넓이의 비가 1/4이 된다. 는 점을 확인하면 도해의 숫자를 더 조심해서 읽게 된다.

반면 연결망에서는 선을 길게 그려도 연결 관계가 같을 수 있다. 그 선에 실제 거리를 부여하지 않았기 때문이다. 그림의 모양이 다르다는 이유로 내용이 다르다고 판단하기 전에 도해가 보존하려는 정보가 길이인지 연결인지 살핀다.

넓이가 네 배인 도형의 길이까지 네 배라고 거꾸로 읽지 않는다. 넓은 평면 도형이라면 길이는 두 배다. 넓이에서 길이의 축척을 찾을 때에는 제공의 관계를 되돌려 생각해야 한다.

정보	그림에서 확인할 점
길이	축척과 단위
각도	방향과 직각 표시
연결	선의 시작점과 끝점
수량	

도해가 보여 주는 것과 숨기는 것의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

길이를 3배로 확대한 평면 도형의 넓이는 몇 배가 될까?

풀이와 확인

서로 수직인 두 방향의 길이가 각각 3배가 되므로 넓이는 9배가 된다. 확대율을 면적에 그대로 적용하면 틀린다. 도해를 확대해 볼 때에도 실제 수량의 단위는 그대로 유지된다.

역사 자료에서 탐구 문제로

출처가 말한 내용과 수업에서 새로 만든 질문을 구분한다.

소나를 소개하는 자료를 읽고 선을 한 번에 그리는 문제를 만들 수 있다. 이때 한붓그리기 정리가 전통의 모든 의미를 설명한다고 주장하지 않는다. 이야기와 전승 상황은 자료를 통해 읽고 그래프 문제는 현대 수학 활동으로 제시한다. 출발점이 같아도 설명의 층위는 다르다.

탐구 기록에는 먼저 자료에서 직접 확인한 사실을 적는다. 다음에는 그림에서 추출한 점과 선을 적는다. 마지막에는 새로 가정한 규칙을 적는다. 예를 들어 선을 다시 지나가지 않는다는 조건은 활동 설계자가 추가한 조건일 수 있으므로 따로 표시해야 한다.

활동을 마치면 원래 대상에서 무엇이 빠졌는지 돌아본다. 목소리와 몸짓과 모래 표면은 그래프에 남지 않을 수 있다. 수학 모형이 유용하다는 사실과 문화 전체를 설명하지 못한다는 사실은 함께 성립한다. 정확한 모델링은 바로 그 범위를 밝히는 데서 시작한다.

자료에서 추출한 그래프를 바꾸어 다른 규칙을 실험할 수도 있다. 그때마다 버전을 나누어 기록하면 어느 결론이 어느 모형에서 나왔는지 추적할 수 있다. 새 실험이 옛 설명을 덮어쓰지 않게 한다.

층위	적어 둘 내용
자료	공동체와 전승 설명
추출	점과 선의 관계
가정	한 번씩만 지나는 규칙
성찰	

역사 자료에서 탐구 문제로의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

현대 수학 활동이라는 표시를 붙이면 독자가 무엇을 구별할 수 있을까?

풀이와 확인

자료에 기록된 전통과 활동을 위해 추가한 규칙을 구별할 수 있다. 그 표시가 있으면 수학적 발견을 즐기면서도 오늘의 기호를 과거 공동체의 말로 오해하지 않게 된다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

알렉산드리아에서 증명을 읽다

도시의 이름과 학문의 언어

알렉산드리아는 아프리카의 도시이자 지중해 지식의 접점이었다.

유클리드의 기하학을 아프리카관에서 다룬다고 해서 그 저술을 오늘의 국민국가에 배타적으로 귀속시키는 것은 아니다. 장소와 언어와 정치적 배경은 서로 다른 축이다. 한 인물의 활동지를 확인하는 일과 현대의 정체성을 거꾸로 부여하는 일은 구분해야 한다.

이 장은 원론의 모든 명제를 요약하기보다 증명의 기본 동작을 살펴본다. 그림에서 같아 보이는 길이를 왜 같다고 말할 수 있는지 묻는다. 원의 정의와 이미 인정한 성질을 사용하면 눈대중을 넘어서는 설명을 만들 수 있다.

증명은 결론만 적은 답안과 다르다. 독자가 출발 조건에서 결론까지 따라갈 수 있도록 이유를 연결한 글이다. 어떤 보조선을 그렸는지와 그 선이 왜 필요한지도 설명의 일부다. 같은 도형을 그리더라도 근거를 빠뜨리면 설득의 구조가 달라진다.

원론의 명제는 이전 결과를 다시 사용하며 이어진다. 한 명제를 읽을 때 사용된 정의와 앞선 성질을 작은 목록으로 남기면 논증의 의존 관계가 드러난다. 결론을 이해하는 길은 조건을 찾는 데서 시작한다.

읽는 축

묻는 질문

장소

어디에서 활동했는가

언어

어떤 언어로 전해졌는가

논증

어떤 이유로 결론을 얻는가

도시의 이름과 학문의 언어의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

활동지의 인물 소개에는 출생지와 활동지를 왜 나누어 적는 것이 좋을까?

풀이와 확인

지식은 사람의 이동과 함께 여러 장소에 걸쳐 형성되기 때문이다. 서로 다른 지리 정보를 분리하면 한 도시에서 활동했다는 사실을 현대 국가에 대한 단순한 소유 주장으로 바꾸지 않게 된다.

[EUCLID] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Euclid of Alexandria

같은 반지름이 만드는 정삼각형

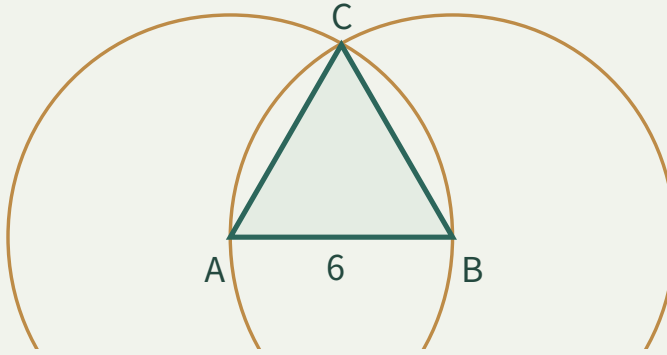
두 원의 교점을 고르면 세 변의 길이를 연결할 수 있다.

선분 AB를 한 변으로 하는 정삼각형을 생각하자. A를 중심으로 하고 반지름이 AB인 원을 그린다. B를 중심으로 하고 반지름이 BA인 원도 그린다. 두 원의 교점 하나를 C로 택하고 A와 C 및 B와 C를 잇는다.

AC는 첫 원의 반지름이므로 AB와 같다. BC는 둘째 원의 반지름이므로 BA와 같다. AB와 BA는 같은 선분의 길이이므로 AC와 BC와 AB가 모두 같다. 그림의 모양이 정삼각형처럼 보인다는 말보다 각 등식의 근거를 차례대로 쓰는 것이 핵심이다.

실제 작도에서는 컴퍼스가 벌어진 정도와 종이의 오차가 영향을 준다. 이상적인 기하학의 결론은 도구의 정밀도와 구별된다. 또한 현대적으로 엄밀하게 다루려면 두 원이 만난다는 존재 조건도 살펴볼 수 있다. 그림이 자연스럽게 보인다는 이유만으로 모든 전제를 생략하지 않는다.

AB의 길이를 두 배로 바꾸어 작도해도 같은 논증이 성립한다. 반지름의 수치가 아니라 서로 같다는 관계가 핵심이기 때문이다. 특정한 길이 6에만 맞는 설명인지 일반적인 이유인지 구별한다.



반지름 AB인 두 원의 교점 C에서 얻는 정삼각형. 원의 일부를 표시했다.

관계	이유
$AC = AB$	A 중심 원의 반지름
$BC = BA$	B 중심 원의 반지름
$AC = BC = AB$	같은 길이의 연결

탐구

교점 C를 선분 아래쪽에서 고르면 정삼각형이라는 결론이 달라질까?

풀이와 확인

달라지지 않는다. 어느 교점을 택해도 C가 두 원 위에 있다는 조건은 같다. 따라서 $AC = AB$ 와 $BC = BA$ 가 그대로 성립한다. 위아래 방향은 바뀌어도 세 변이 같다는 논증은 유지된다.

[EUCLID] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Euclid of Alexandria

정의는 그림의 사용 규칙이다

원의 정의를 알면 길이의 같음을 읽을 수 있다.

도형의 정의는 사전식 설명을 외우기 위한 문장만은 아니다. 증명에서 어떤 결론을 사용할 수 있는지 정하는 규칙이다. 원의 중심에서 원 위의 점까지 거리가 일정하다는 조건을 알고 있으면 서로 다른 방향의 반지름을 같은 길이로 다룰 수 있다.

중심 O 를 가진 원 위에 점 P 와 Q 를 놓자. OP 와 OQ 는 모두 반지름이므로 같다. 그러나 원 밖의 점 R 에 대해서는 OR 이 반지름과 같다고 말할 수 없다. 그림에서 선분의 길이가 비슷해 보이더라도 점이 어디에 있는지 먼저 확인해야 한다.

반지름이 5인 원에서 $OP = 5$ 라는 식은 정의와 조건을 함께 사용한 결과다. OQ 도 5가 되지만 PQ 까지 5라고 결론 내릴 수는 없다. 두 원 위의 점을 잇는 선분은 현이며 위치에 따라 길이가 달라진다. 비슷한 이름의 선분을 구별하는 연습이 증명의 오류를 줄인다.

지름은 중심을 지나면서 양 끝이 원 위에 놓인 선분이다. 반지름 두 개가 일직선으로 이어져 있으므로 길이는 반지름의 두 배다. 현이라는 넓은 범주 안에서 지름이 갖는 추가 조건을 찾아본다.

선분	끝점 조건	길이 판단
OP	P 가 원 위 반지름과 같다	
OR	R 이 원 밖 반지름보다 크다	
PQ	P 와 Q 가 원 위 위치에 따라 달라진다	

정의는 그림의 사용 규칙이다의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

원의 중심에서 나온 선분이면 모두 반지름일까?

풀이와 확인

끝점이 원 위에 있어야 반지름이다. 원 내부나 외부에서 끝나는 선분은 중심에서 출발해도 반지름이라고 부를 수 없다. 이름을 붙이기 전에 정의의 모든 조건을 확인한다.

이어 읽기 / 알렉산드리아에서 증명을 읽다

두 교점을 잇는 선과 수직이등분선

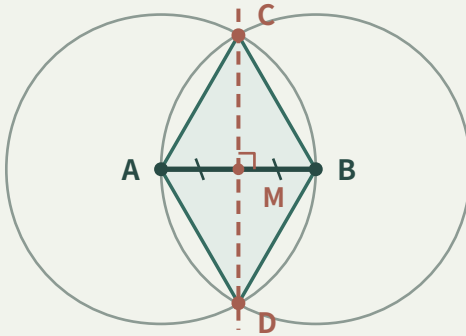
정삼각형 작도에서 쓰지 않은 두 번째 교점까지 이으면 선분의 중점과 수직선을 함께 얻는다.

2장의 정삼각형 작도에서는 A 중심 원과 B 중심 원의 교점 가운데 하나만 C로 택했다. 두 원은 선분 AB의 위쪽과 아래쪽에서 한 번씩 만나므로 아래쪽 교점을 D라고 부를 수 있다. C와 D를 잇는 직선이 AB와 만나는 점을 M이라 하자. 이 단원에서는 CD가 AB를 수직으로 이등분한다는 사실을 2장의 방식대로 근거를 이어 확인한다.

먼저 길이의 같음을 모은다. C와 D는 두 원 위에 모두 있으므로 CA와 CB와 DA와 DB는 모두 반지름이며 AB와 같다. 따라서 사각형 ACBD는 네 변이 같은 마름모다. 삼각형 ACD와 삼각형 BCD는 $CA = CB$ 와 $DA = DB$ 를 가지고 변 CD를 공유하므로 세 변이 각각 같아 합동이다.

이 합동에서 각 ACM과 각 BCM이 같다는 결론을 얻는다. 이제 삼각형 ACM과 삼각형 BCM을 비교하면 $CA = CB$ 이고 끼인각이 같으며 변 CM을 공유하므로 두 삼각형도 합동이다. 따라서 $AM = BM$ 이고 각 AMC와 각 BMC가 같다. 두 각의 합은 일직선이 만드는 180° 이므로 각각 90° 가 되고 CD는 AB의 수직이등분선이다.

이 설명은 원론의 문장을 옮긴 것이 아니라 정삼각형 작도의 그림을 넓힌 현대 재구성이다. 작도에 쓴 동작은 원 두 개와 직선 하나뿐이지만 결론에는 중점과 직각이라는 두 가지 정보가 들어 있다. 실제 종이에서는 컴퍼스의 오차 때문에 M이 정확한 중점에서 조금 벗어날 수 있다. 측정으로 확인한 값과 논증으로 얻은 결론을 구별하는 태도는 2장과 같다.



모두 반지름 AB와 같다

$$CA = CB = DA = DB$$

삼각형 ACD와 BCD 합동

삼각형 ACM과 BCM 합동

$$AM = MB$$

$$\angle AMC = 90^\circ$$

두 원의 두 교점 C와 D를 이으면 AB의 수직이등분선이 된다.

관계	근거
$CA = CB = DA = DB = AB$	두 원의 반지름
삼각형 ACD와 BCD 합동	세 변이 각각 같다
삼각형 ACM과 BCM 합동	두 변과 끼인각이 같다
$AM = BM$ 과 $\angle AMC = 90^\circ$	합동인 삼각형의 대응

탐구

AB = 6 cm로 작도했다면 두 교점 사이의 거리 CD는 얼마일까?

풀이와 확인

M은 AB의 중점이므로 $AM = 3$ cm이고 $AC = 6$ cm다. 각 AMC가 직각이므로 $CM^2 = 6^2 - 3^2 = 27$ 이며 CM은 약 5.20 cm다. CD는 그 두 배인 약 10.39 cm이고 정확한 값은 $6\sqrt{3}$ cm다. 실제로 쥘 길이가 이 값과 조금 다르면 작도의 오차를 의심할 수 있다.

[EUCLID] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Euclid of Alexandria

넓이를 잘라 옮기는 논증

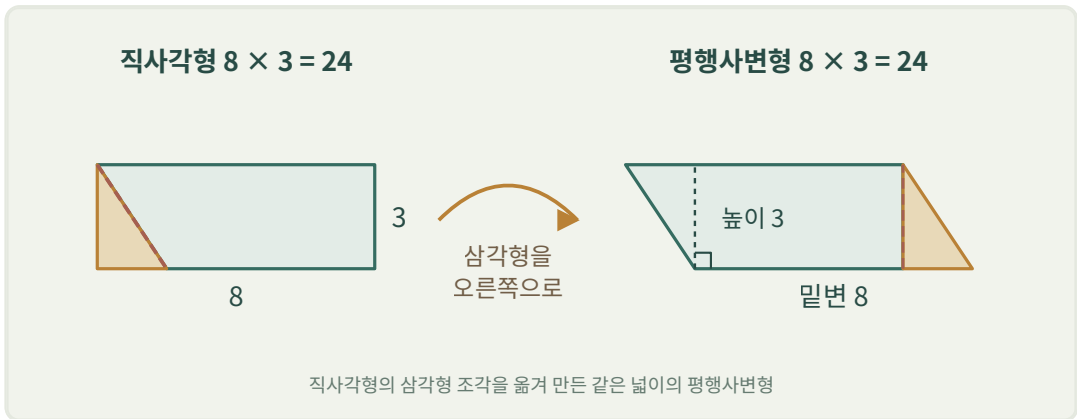
조각을 보존하며 재배치하면 같은 넓이를 설명할 수 있다.

가로 8과 세로 3인 직사각형의 넓이는 24다. 한쪽 끝에서 밑변이 2이고 높이가 3인 직각삼각형을 잘라 반대쪽에 붙이면 같은 높이를 가진 평행사변형을 만들 수 있다. 조각을 겹치거나 잃어버리지 않았다면 전체 넓이는 그대로다.

이 그림은 밑변과 높이가 같은 평행사변형의 넓이가 같다는 생각으로 이어진다. 옆변의 기울기가 바뀌어도 밑변 8과 수직 높이 3이 유지되면 넓이는 24다. 여기서 높이는 기울어진 옆변의 길이가 아니라 두 평행선 사이의 수직 거리다.

자르기 활동을 할 때에는 조각의 경계가 맞는지 살펴본다. 작은 틈이나 겹침이 있으면 겉모양만으로 넓이 보존을 주장할 수 없다. 디지털 그림에서도 같은 원리가 적용된다. 보기 좋은 배열보다 각 조각이 어디로 이동했는지 추적하는 설명이 먼저다.

평행사변형을 삼각형 두 개로 나누면 각 삼각형의 넓이는 전체의 절반이다. 대각선이 만든 두 조각의 대응을 살펴보면 밑변과 높이의 곱에 $1/2$ 이 붙는 삼각형 넓이 공식도 설명할 수 있다.



탐구

밑변 8과 옆변 5만 알면 평행사변형의 넓이를 구할 수 있을까?

풀이와 확인

높이를 알 수 없으므로 넓이를 하나로 정할 수 없다. 옆변 5가 유지되어도 기울기에 따라 수직 높이가 달라진다. 밑변에 곱해야 할 길이는 옆변이 아니라 높이이다.

예시와 증명의 역할은 다르다

몇 가지 수에서 맞는 규칙을 전체로 넓히려면 이유가 필요하다.

연속한 두 자연수의 합을 계산해 보자. $3 + 4$ 는 7이고 $8 + 9$ 는 17이다. 두 예는 모두 홀수지만 예시를 많이 모았다는 사실만으로 모든 연속한 자연수에 대한 증명이 끝나지는 않는다. 아직 계산하지 않은 수가 남아 있기 때문이다.

첫 수를 n 이라 두면 다음 수는 $n + 1$ 이다. 합은 $2n + 1$ 이다. $2n$ 은 2의 배수이므로 여기에 1을 더한 값은 홀수다. 이 설명은 특정한 n 을 고르지 않았으므로 모든 자연수 n 에 같은 방식으로 적용된다.

예시는 규칙을 발견하거나 증명의 오류를 찾는 데 유용하다. 증명은 왜 그 규칙이 필요한 조건에서 항상 성립하는지 설명한다. 두 활동을 경쟁시키지 말고 순서를 연결한다. 먼저 작은 사례를 관찰하고 다음에는 사례에 공통으로 들어 있는 구조를 문자로 나타낸다.

규칙이 틀렸음을 찾는 단계에서는 큰 수를 무작정 계산하기보다 조건의 경계를 살펴본다. 0을 허용하는지와 음수를 포함하는지가 결론을 바꿀 수 있다. 명제의 수 범위를 먼저 읽는 습관을 들인다.

대상	합의 식	결론
연속한 두 수	$2n + 1$	항상 홀수
연속한 세 수	$3(n + 1)$	항상 3의 배수

예시와 증명의 역할은 다르다의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

연속한 세 자연수의 합에 대해서는 어떤 규칙을 증명할 수 있을까?

풀이와 확인

n 과 $n + 1$ 과 $n + 2$ 의 합은 $3n + 3 = 3(n + 1)$ 이다. 따라서 합은 3의 배수이며 가운데 수의 3배다. 사례를 더 계산하지 않아도 문자식의 구조가 이유를 보여 준다.

반례 하나의 힘

조건을 빠뜨린 문장은 작은 예에서 무너질 수 있다.

모든 사각형의 네 변은 같다는 문장은 정사각형 그림 하나만 보고 만든 잘못된 일반화다. 가로 6과 세로 2인 직사각형은 사각형이지만 네 변이 모두 같지 않다. 이 한 사례가 전체 주장에 대한 반례가 된다.

반례를 제시할 때에는 원래 조건을 만족하는지 확인해야 한다. 삼각형을 가져오면 사각형에 관한 주장을 반박한 것이 아니다. 직사각형이 분명히 사각형이라는 점과 네 변이 같지 않다는 점을 함께 확인해야 논리의 연결이 완성된다.

문장을 고치는 방법도 여러 가지다. 대상을 정사각형으로 좁히면 네 변이 같다는 말이 참이 된다. 대상을 사각형으로 유지하면서 결론을 네 개의 변을 가진다로 바꿀 수도 있다. 어떤 내용을 말하고 싶었는지에 따라 조건과 결론을 함께 조정한다.

반례를 바탕으로 수정한 주장도 다시 점검해야 한다. 모든 직사각형의 변이 같다고 바꾸면 같은 반례가 남는다. 이름이 비슷한 도형을 바꾸어 쓰기보다 네 변이 같다는 정의를 가진 대상을 골라야 한다.

주장	반례	수정 가능한 문장
모든 사각형의 변이 같다	가로 6 세로 2 직사각형	정사각형의 변은 같다
모든 짝수는 4의 배수다	2	4의 배수는 짝수다

반례 하나의 힘의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

모든 짝수는 4의 배수다라는 주장에 대한 가장 작은 양의 반례는 무엇일까?

풀이와 확인

2다. 2는 2로 나누어떨어지므로 짝수지만 4의 정수배는 아니다. 6도 반례지만 가장 작은 양의 반례라는 조건을 붙이면 2를 선택해야 한다.

작도 설명서를 쓰는 순서

다른 사람이 같은 조건을 만들 수 있어야 한다.

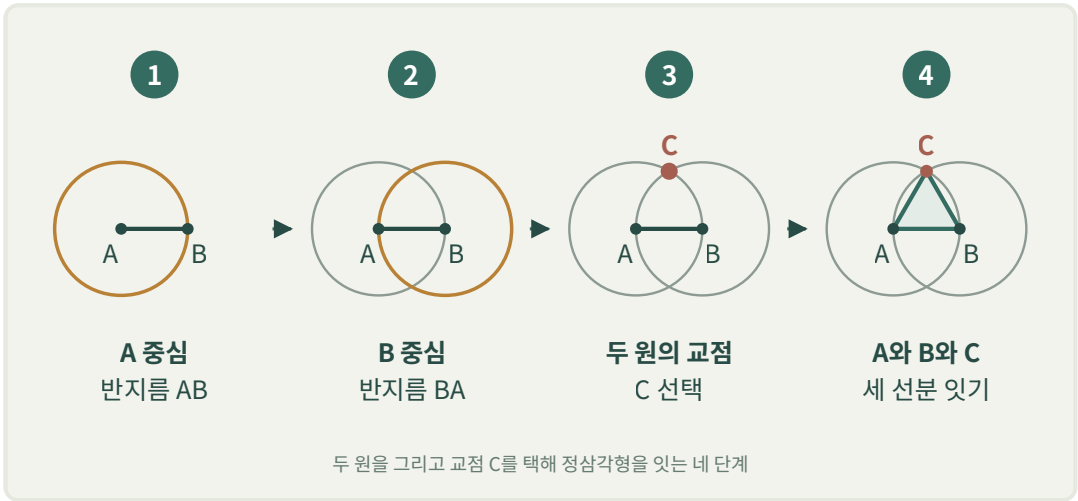
정삼각형 작도 설명서를 쓴다고 하자. 먼저 선분을 그린다라고만 적으면 길이를 어떻게 정할지 알기 어렵다. 주어진 선분 AB를 사용한다고 적으면 출발 조건이 분명해진다. 원을 두 개 그린다라는 지시도 중심과 반지름을 각각 명시해야 실행할 수 있다.

설명서의 동작은 그리기와 선택하기와 잇기로 나누어 볼 수 있다. 원 두 개가 만들어진 뒤에는 어느 교점을 택하는지 정해야 한다. 두 교점 중 하나를 고르면 충분한지 특정 방향의 교점이 필요한지 역시 목적에 따라 달라진다.

마지막 문장에는 결과의 확인을 넣는다. 세 변의 길이를 자로 재어 보는 확인과 원의 반지름 관계로 설명하는 확인을 구별한다. 측정은 실제 그림의 오차를 알려 주고 논증은 이상적인 작도가 정삼각형을 만든다는 이유를 알려 준다.

작도 지시의 순서를 바꾸면 아직 만들지 않은 점을 사용하게 될 수 있다. 교점 C를 선택하기 전에 두 원을 그려야 한다는 선후 관계를 확인한다. 절차의 정확성은 개별 문장과 순서에서 함께 나온다.

결과 기록을 작도와 측정 및 논증으로 나누어 둔다. 작도 칸에는 도구의 동작을 적고 측정 칸에는 실제 오차를 적는다. 논증 칸에는 같은 길이가 되는 이유를 쓴다. 초보 독자에게 필요한 두 원의 반지름 관계까지 간결함을 이유로 지우지 않는다.



탐구

원을 그린다라는 지시를 실행 가능한 문장으로 고쳐 보자.

풀이와 확인

점 A를 중심으로 하고 선분 AB의 길이를 반지름으로 하는 원을 그린다고 쓸 수 있다. 중심과 반지름이 지정되어야 어떤 원을 그릴지 결정된다. 단순한 동사보다 입력 조건이 중요하다.

반복해서 빼면 남는 공통 단위

원론의 수론을 오늘의 나머지 계산으로 다시 읽는다.

원론은 도형의 성질만 다루는 책이 아니다. 제7권 명제 2는 두 수를 함께 재는 가장 큰 공통 단위를 찾는 문제를 다룬다. 여기서는 원문의 선분 표기 대신 현대의 정수 나눗셈을 사용한다. 표현은 바뀌되 공통 단위가 왜 유지되는지는 직접 설명한다.

길이 84와 30을 같은 정수 길이의 조각으로 남김없이 나누려 한다. 84에서 30을 두 번 빼면 24가 남는다. 84와 30을 함께 나누는 수는 그 차인 24도 나눈다. 거꾸로 30과 24를 함께 나누는 수는 30을 두 번 더한 84도 나눈다.

이제 30과 24로 바꾸어 같은 일을 한다. 남은 수는 6이며 24는 6으로 남김없이 나뉜다. 공통 약수의 집합이 단계마다 같으므로 마지막 6은 원래 두 수의 최대공약수다. 마지막 값이 약수라는 검산과 그보다 큰 공통 약수가 없다는 이유를 함께 얻는다.

절차가 끝나는 까닭도 설명할 수 있다. 나머지는 바로 앞의 나누는 수보다 작고 음이 아닌 정수다. 따라서 같은 방식으로 끝없이 작아지는 양의 정수열은 만들 수 없다. 값이 보존되는 이유와 계산이 끝나는 이유는 서로 다른 두 질문이다.

나눗셈	나머지
$84 = 2 \times 30 + 24$	24
$30 = 1 \times 24 + 6$	6
$24 = 4 \times 6$	0

탐구

길이 126과 48을 함께 재는 가장 큰 정수 단위는 무엇인가?

풀이와 확인

$126 = 2 \times 48 + 30$ 이다. 이어서 $48 = 30 + 18$ 과 $30 = 18 + 12$ 및 $18 = 12 + 6$ 을 얻는다. 12가 6으로 나뉘므로 답은 6이다. 실제로 126과 48은 각각 6의 21배와 8배다.

[EUCLIDVII2] 클라크대학교. 유클리드 원론 제7권 명제 2의 원문 번역과 해설

그림자에서 지구의 크기까지

에라토스테네스의 질문

손이 닿지 않는 전체를 가까운 두 지점의 관계로 추론한다.

에라토스테네스의 지구 측정은 북아프리카의 장소를 연결하는 대표적인 수학사 이야기다. 이 장에서는 전해지는 측정 구상을 현대의 원 모형으로 읽는다. 고대 거리 단위의 정확한 길이와 실제 관측 조건에는 논의가 있으므로 오늘의 미터값을 유일한 역사적 정답처럼 적지 않는다.

핵심은 작은 중심각에 해당하는 지표 거리와 원 전체의 둘레를 비례로 연결하는 것이다. 태양빛을 서로 평행하다고 보고 두 지역의 위치를 단순화하면 그림자에서 얻은 각을 지구 중심의 각과 연결할 수 있다. 측정값만 아니라 이런 기하학적 가정이 계산을 가능하게 한다.

학습용 모형에서 중심각을 7.2° 로 두면 한 바퀴의 $1/50$ 이다. 해당 지표 거리를 800 km라고 가정하면 둘레는 40000 km가 된다. 여기서 800 km는 계산 원리를 설명하기 위한 둥근 수이며 고대 기록의 단위를 직접 확인한 값이 아니다.

구간 거리와 각을 서로 다른 지점 쌍에서 가져오면 비례식이 성립하지 않는다. 숫자가 각각 정확해도 서로 대응하지 않으면 잘못된 입력이다. 어떤 관측이 어느 거리와 한 쌍인지 표시한다.



원을 7.2°씩 나누면 50조각

$$360^\circ \div 7.2^\circ = 50$$

호 하나 800 km

$$\begin{aligned} \text{둘레} &= 50 \times 800 \text{ km} \\ &= 40000 \text{ km} \end{aligned}$$

7.2°의 호 하나가 원 둘레의 1/50이 되는 비례 모형

탐구

중심각이 한 바퀴의 1/50이라는 말은 어떤 비례식을 뜻할까?

풀이와 확인

중심각에 대응하는 지표 거리도 전체 둘레의 1/50이라는 뜻이다. 원 모형에서 호의 길이는 중심각에 비례한다. 따라서 작은 구간의 거리에 50을 곱하면 모형의 전체 둘레를 얻는다.

[ERATOSTHENES] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Eratosthenes

평행한 빛이라는 가정

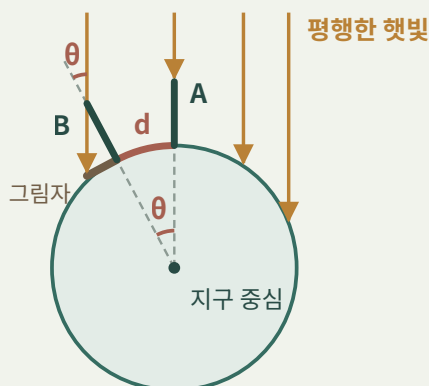
기하학의 각을 연결하려면 빛과 수직선의 관계를 정해야 한다.

그림자 길이만 재어 지구의 중심각을 바로 구할 수는 없다. 두 장소의 수직 방향과 태양빛이 하나의 평면에 놓이는 원 모형을 먼저 정한다. 그 평면에서 각의 방향까지 구별해 읽으면 두 수직선 사이의 각을 얻을 수 있다. 관측한 각의 크기 두 개를 아무 조건 없이 빼는 것은 충분하지 않다.

종이에 평행한 두 선과 그 선들을 가로지르는 선을 그려 보자. 대응하는 각의 관계는 선 사이의 거리를 바꾸어도 유지된다. 지구 그림에서는 이 평행선이 햇빛을 나타내고 반지름이 서로 다른 수직 방향을 나타낸다. 그림자 도해에서 어느 선이 무엇을 뜻하는지 표시해야 한다.

실험용 손전등은 태양처럼 멀리 있지 않다. 가까운 광원에서는 빛이 크게 퍼지므로 같은 모형의 가정을 만족시키기 어렵다. 손전등 실험 결과가 다르다고 해서 각의 성질이 틀린 것은 아니다. 사용한 광원이 평행한 빛이라는 조건에 얼마나 가까운지 먼저 살핀다.

실제 두 장소에서는 같은 자오선에 가까운지와 각 장소의 태양 남중 시각을 확인해야 한다. 두 그림자가 태양의 수직 아래 지점을 사이에 두고 반대쪽으로 생기면 각의 크기를 더해야 하는 경우도 있다. 이 책의 간단한 비례 계산은 대응하는 중심각을 이미 올바르게 얻었다는 조건에서 성립한다.



B의 막대와 햇빛이 이루는 각
= 두 반지름 사이의 중심각
(평행선의 엇각)

$\theta = 7.2^\circ$ 이면 360° 의 $1/50$

둘레 = $50 \times d$

그림의 각은 과장했다

평행한 햇빛과 막대가 이루는 각이 두 지점의 중심각과 같다.

모형 요소	대응하는 대상
평행선	멀리서 오는 태양빛
반지름	각 지점의 수직 방향
중심각	두 수직 방향의 차이

탐구

가까운 손전등으로 만든 그림자를 태양빛 관측과 똑같이 다루면 왜 문제가 생길까?

풀이와 확인

가까운 광원에서는 두 지점에 도달하는 빛의 방향이 크게 다를 수 있다. 계산에서 평행하다고 가정한 선이 실제로는 평행하지 않으므로 중심각을 추론하는 관계가 달라진다.

비례식으로 둘레 구하기

측정 구간이 전체의 몇 분의 일인지 찾는다.

원의 둘레를 C 라 하고 관측한 두 지점 사이의 호의 길이를 d 라 하자. 중심각이 θ 도이면 $d/C = \theta/360$ 이다. 따라서 $C = 360d/\theta$ 가 된다. 이 식에서 d 와 C 는 같은 길이 단위로 나타내야 하며 θ 에는 도 단위의 수치를 넣는다.

$d = 900$ km이고 $\theta = 8^\circ$ 인 학습용 자료를 넣으면 $C = 360 \times 900 \div 8 = 40500$ km다. 먼저 $360 \div 8 = 45$ 를 구한 뒤 900을 곱해도 같다. 8° 짜리 구간 45개가 원을 한 바퀴 채운다는 그림으로 계산의 뜻을 설명할 수 있다.

각이 0° 이면 이 식으로 유한한 둘레를 구할 수 없다. 분모가 0이 되는 계산 문제일 뿐 아니라 두 지점의 방향 차이를 관측하지 못한 상황이다. 입력값의 범위를 확인하는 일은 수식을 적용하는 과정의 일부다.

각을 라디안으로 쓴다면 식의 360 대신 2π 가 들어간다. 도와 라디안은 같은 각을 나타내는 서로 다른 단위다. 단위가 바뀌었는데 식의 상수를 그대로 두면 둘레의 값이 크게 달라진다.

$$\begin{aligned} d / C &= \theta / 360 \\ C &= 360d / \theta \\ C &= 360 \times 900 / 8 = 40500 \end{aligned}$$

같은 원에서 호의 길이와 중심각은 비례한다

d	θ	$360 \div \theta$	C
900 km	8°	45	40500 km
1000 km	9°	40	40000 km

탐구

$d = 1000$ km이고 $\theta = 9^\circ$ 라면 둘레는 얼마일까?

풀이와 확인

$360 \div 9 = 40$ 이므로 둘레는 $1000 \times 40 = 40000$ km다. 9° 의 호가 전체의 $1/40$ 이라는 해석과 함께 적으면 단순한 대입을 넘어 비례 구조를 확인할 수 있다.

각의 오차가 둘레를 바꾸는 방식

분모의 값이 작아지면 계산한 둘레는 커진다.

거리를 800 km로 고정하고 각만 조금 바꾸어 보자. 7.2° 를 사용하면 둘레는 40000 km다. 7.0° 를 사용하면 약 41143 km이며 7.4° 를 사용하면 약 38919 km다. 각의 작은 차이가 전체 둘레에 적지 않은 차이를 만든다.

이 변화는 $C = 360d/\theta$ 에서 θ 가 분모에 있기 때문에 생긴다. 거리 d 가 일정할 때 θ 가 작아지면 같은 거리가 더 작은 중심각에 대응하므로 원 전체는 더 커져야 한다. 식의 계산 결과를 그림의 해석과 연결하면 변화 방향을 기억하기 쉽다.

두 결과의 오차가 정확히 대칭은 아니라는 점도 살펴볼 만하다. 7.2 에서 0.2 를 빼거나 더한 변화는 대칭이지만 역수의 변화는 대칭이 아니다. 측정의 불확실성을 나타낼 때 입력의 오차와 출력의 오차가 같은 모양이라고 가정하지 않는다.

거리 오차도 결과에 영향을 준다. 각을 고정한 상태에서 거리가 1퍼센트 크게 입력되면 계산한 둘레도 1퍼센트 커진다. 분자와 분모의 오차가 결과에 작용하는 방식이 서로 다를 수 있다.



관측 각	계산한 둘레
7.0°	약 41143 km
7.2°	40000 km
7.4°	약 38919 km

탐구

각을 실제로보다 작게 기록하면 계산한 지구 둘레는 어느 방향으로 달라질까?

풀이와 확인

거리 측정이 같다면 둘레가 더 크게 계산된다. 작은 각에 같은 거리가 들어간다고 해석하기 때문이다. 실제로보다 크게 기록한 각은 반대로 더 작은 둘레를 만든다.

단위가 바뀌어도 비율은 같다

거리 단위의 해석과 계산 절차의 타당성을 분리한다.

한 구간이 5000개의 옛 거리 단위라고 기록되어 있고 그 구간이 원의 $1/50$ 이라고 하자. 모형의 둘레는 같은 단위로 250000이다. 이 단계에서는 그 단위가 오늘의 몇 미터인지 몰라도 비례 계산을 할 수 있다.

학습용 환산값으로 한 단위를 160 m라 두면 40000 km가 되고 180 m라 두면 45000 km가 된다. 두 환산값은 역사적 단위를 확정하려고 제시한 값이 아니다. 단위 길이에 관한 가정이 결과에 어떻게 영향을 주는지 보이기 위해 선택한 수다.

옛 측정이 현대값에 얼마나 가깝다는 평가를 하려면 어떤 단위 환산을 사용했는지 밝혀야 한다. 계산의 원리가 훌륭하다는 설명과 특정한 오차율을 주장하는 설명은 필요한 근거가 다르다. 숫자가 익숙한 단위로 바뀌었다는 이유만으로 불확실성이 사라지는 것은 아니다.

서로 다른 환산값으로 얻은 결과를 평균내어 역사적 단위를 결정할 수는 없다. 환산값마다 근거가 어떤지 먼저 따져야 한다. 불확실한 가정 여러 개를 더한다고 자동으로 신뢰할 만한 값이 되지는 않는다.

가정한 단위 길이 250000단위의 환산

160 m

40000 km

180 m

45000 km

단위가 바뀌어도 비율은 같다는 핵심 관계를 정리한 표

탐구

한 단위의 길이를 10퍼센트 크게 가정하면 환산한 둘레는 어떻게 될까?

풀이와 확인

같은 옛 단위 수에 환산 계수를 곱하므로 둘레도 10퍼센트 커진다. 이 변화는 각도 계산 때문이 아니라 단위 환산의 가정 때문에 생긴다.

그림자 비율을 직접 재기

막대의 높이와 그림자 길이를 같은 단위로 기록한다.

막대 높이를 h 라 하고 수평면 위 그림자의 길이를 s 라 하자. 막대가 수직이고 바닥이 수평이라는 조건에서 태양빛과 수직선 사이의 각 θ 는 $\tan \theta = s/h$ 로 연결된다. 이 활동은 고대 장비를 복원하는 것이 아니라 오늘의 관측 원리를 확인하는 실험이다.

높이 100 cm인 막대의 그림자가 20 cm라면 $s/h = 0.2$ 다. 높이를 50 cm로 줄였을 때 같은 시각과 장소에서 그림자가 10 cm라면 비율은 그대로 0.2다. 두 직각삼각형이 닮았기 때문에 막대 크기가 달라도 각은 같다.

그림자 끝이 흐리면 같은 기준으로 끝점을 선택하고 반복 측정한다. 막대가 기울어졌는지도 확인한다. 여러 값을 평균내는 것으로 기울기처럼 일정하게 작용하는 오차가 자동으로 사라지는 것은 아니다. 측정값의 흔들림과 설치 조건의 문제를 따로 살핀다.

막대 길이와 그림자 길이를 동시에 두 배로 만들면 그 비는 유지된다. 같은 태양 각도에서 높이가 다른 막대를 비교할 수 있는 이유다. 측정한 두 길이가 같은 시각의 값인지도 기록한다.



그림자 비율을 구하는 직각삼각형 모형

높이 h	그림자 s	s/h
100 cm	20 cm	0.2
50 cm	10 cm	0.2
80 cm	16 cm	0.2

탐구

막대 높이 80 cm와 그림자 16 cm는 위 사례와 같은 각을 나타낼까?

풀이와 확인

$16 \div 80 = 0.2$ 이므로 같은 비율이다. 수직 막대와 수평 바닥이라는 조건이 같다면 같은 θ 를 나타낸다. 길이 자체보다 그림자 길이와 높이의 비가 핵심이다.

이어 읽기 / 그림자에서 지구의 크기까지

그림자 비율에서 각도로 바꾸는 근사

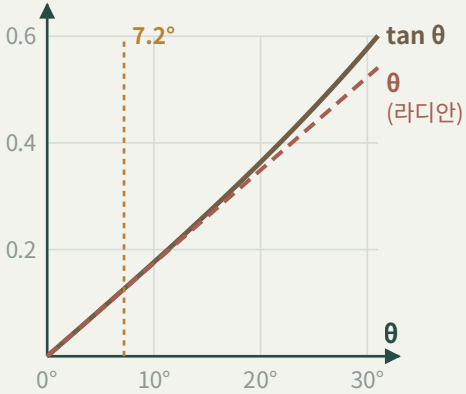
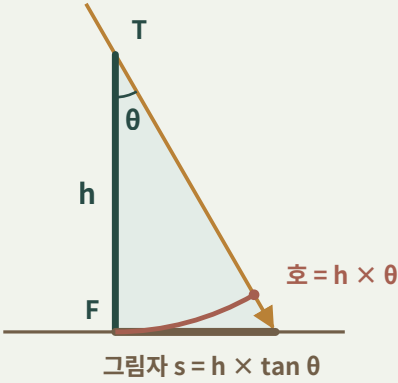
작은 각에서는 그림자 비율에 57.3을 곱해도 각도에 매우 가깝지만 각이 커지면 차이가 빠르게 커진다.

3장의 막대 실험은 $\tan \theta = s/h$ 라는 관계를 사용했다. 그런데 비율 s/h 에서 각 θ 를 얻으려면 탄젠트의 역함수를 계산해야 한다. 각이 작을 때에는 더 간단한 근사가 있다. 각을 라디안으로 재면 $\theta \approx s/h$ 이고 이를 도로 바꾸면 $\theta \approx 57.3 \times s/h$ 가 된다. 여기서 57.3은 $180/\pi$ 의 근삿값이다.

근사의 이유는 그림에서 보인다. 막대 끝 T를 중심으로 반지름이 h인 호를 그리면 막대의 발 F에서 햇빛 선까지 이어지는 호의 길이는 $h \times \theta$ 다. 반면 그림자 길이 s는 $h \times \tan \theta$ 다. 호는 직각삼각형의 안쪽으로 휘어 있어 그림자보다 짧고 각이 작을수록 두 길이는 거의 같아진다. 이 비교는 고대의 계산 절차를 복원한 것이 아니라 현대 학습용 모형이다.

숫자로 확인해 보자. 높이 80 cm인 막대의 그림자가 10 cm이면 $s/h = 0.125$ 다. 실제 각은 약 7.13° 이고 근사값은 약 7.16° 이므로 차이는 0.04° 쯤이다. 그러나 $s/h = 0.5$ 이면 실제 각은 약 26.57° 인데 근사값은 약 28.65° 가 되어 2° 넘게 벗어난다. 호가 그림자보다 짧으므로 이 근사는 언제나 실제 각보다 큰 값을 준다.

이 작은 차이가 둘레 계산에서 어떻게 드러나는지도 볼 수 있다. 실제 각이 7.2° 인 그림자 비율은 약 0.1263이며 근사로 바꾸면 약 7.24° 가 된다. 거리 800 km를 고정하면 둘레는 40000 km 대신 약 39789 km로 계산된다. 근사를 쓸 때에는 그 오차가 측정 자체의 오차보다 충분히 작은지 함께 확인한다.



반지름 h 인 호는 그림자보다 짧고 작은 각에서는 거의 같아진다.

그림자 비율 s/h	실제 각	$57.3 \times s/h$	차이
0.125	약 7.13°	약 7.16°	약 0.04°
0.25	약 14.04°	약 14.32°	약 0.29°
0.5	약 26.57°	약 28.65°	약 2.08°

탐구

그림자 비율이 0.25일 때 근사로 얻은 각과 실제 각의 차이는 얼마일까?

풀이와 확인

근사값은 $180/\pi \times 0.25 \approx 14.32^\circ$ 이고 실제 각은 약 14.04° 이므로 차이는 약 0.29° 다. 비율이 0.125일 때의 차이 약 0.04° 보다 8배쯤 크다. 비율이 두 배가 될 때 차이가 대략 세제곱인 8배로 늘어나므로 이 근사는 작은 각에서만 쓰는 편이 안전하다.

[ERATOSTHENES] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Eratosthenes

측정 계획에 필요한 기록

시간과 위치를 빠뜨리면 좋은 숫자도 비교하기 어렵다.

두 장소의 그림자를 비교하는 활동에서는 날짜와 관측 시각을 명확히 기록해야 한다. 장소마다 태양의 위치가 다르므로 아무 시각의 값을 모아 단순히 빼면 원하는 중심각이 나오지 않을 수 있다. 학교 활동에서는 어떤 비교 모형을 사용할지 먼저 정한다.

한 장소에서 같은 막대를 여러 번 측정한다면 막대 높이와 바닥의 수평 상태와 그림자 끝점 기준을 일정하게 유지한다. 측정값만 표에 적기보다 구름이나 흐린 경계처럼 결과에 영향을 줄 수 있는 상황을 간단히 메모한다. 기록의 목적은 다른 사람이 과정을 이해하고 다시 시도하게 하는 데 있다.

자료를 공개할 때에는 개인의 집 주소 같은 불필요한 위치 정보는 넣지 않아도 된다. 학습에 필요한 지역 수준의 정보와 거리 산정 방법을 적으면 충분한 경우가 많다. 정밀한 숫자를 많이 모으는 것보다 비교에 필요한 조건을 일관되게 적는 것이 먼저다.

측정을 반복할 때에는 이전 결과를 보고 숫자를 맞추지 않는다. 각 회차의 원값을 먼저 적고 나중에 비교한다. 기대한 값에 가까운 결과만 고르면 반복 측정이 검증이 아니라 선택이 된다.

기록 항목	필요한 이유
막대 높이	그림자와의 비 계산
날짜와 시각	관측 조건 비교
바닥과 수직 상태	모형 조건 확인
반복값	측정의 흔들림 파악

측정 계획에 필요한 기록의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

그림자 길이만 적힌 표에 어떤 항목을 더해야 비율을 비교할 수 있을까?

풀이와 확인

막대 높이를 추가해야 한다. 같은 길이의 그림자라도 막대 높이가 다르면 각도가 다르다. 측정 날짜와 시각 및 설치 상태도 함께 적으면 결과의 차이를 해석하는 데 도움이 된다.

지구 측정 탐구를 완성하다

결론과 함께 가정의 목록을 제출한다.

학습 자료에서 거리가 750 km이고 중심각이 6.75° 라고 하자. 둘레는 $360 \times 750 \div 6.75 = 40000$ km다. 계산을 마친 뒤에는 이 숫자가 무엇을 전제로 한 결과인지 한 문단으로 설명한다. 원 모형과 호의 거리와 각의 대응이 그 전제다.

다음에는 거리가 10 km 더 길게 측정되었다면 결과가 어떻게 달라지는지 계산한다. $360 \times 760 \div 6.75$ 는 약 40533 km다. 각도를 고정한 상태에서는 거리의 증가율과 둘레의 증가율이 같다. 입력 조건을 하나씩 바꾸면 결과 변화의 원인을 분리할 수 있다.

탐구 보고서의 마지막 문장은 측정값을 역사적 기록에 덧씌우지 않는 확인이어야 한다. 오늘 사용한 수는 원리를 배우기 위한 예제이며 실제 고대 측정의 세부를 모두 재현하지 않는다. 이 구분을 적으면 수학적 이해와 역사적 정밀성을 함께 지킬 수 있다.

발표에서는 모형의 계산 결과와 실제 지구에 대한 해석을 별도 문장으로 쓴다. 원 모형의 가정이 실제 조건에 얼마나 가까운지 설명해야 수식의 답이 관측 대상의 크기로 이어질 수 있다.

비교	거리	각	둘레
기준	750 km	6.75°	40000 km
거리 변경	760 km	6.75°	약 40533 km

지구 측정 탐구를 완성하단의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

각도는 그대로 두고 거리를 두 배로 바꾸면 계산한 둘레는 몇 배가 될까?

풀이와 확인

두 배가 된다. $C = 360d/\theta$ 에서 θ 가 일정하면 C 는 d 에 비례한다. 그러나 실제 지구에서 같은 중심각의 거리가 임의로 두 배가 된다는 뜻이 아니라 입력 자료를 바꾼 모형 비교다.

거리와 각이 함께 흔들릴 때

하나의 답 대신 모형이 허용하는 둘레의 범위를 구한다.

그림자 측정의 오차를 따로 살핀 뒤에는 거리와 각이 동시에 달라지는 경우를 생각한다. 학습용 조사에서 대응하는 호의 거리는 790 km에서 810 km이고 중심각은 7.1°에서 7.3°라고 하자. 두 범위 안의 모든 조합을 허용하는 모형이다.

둘레 식 $C = 360d/\theta$ 에서 거리 d 가 커지면 C 도 커진다. 각 θ 가 커지면 C 는 작아진다. 따라서 최소 둘레는 가장 짧은 거리와 가장 큰 각을 함께 넣어 구한다. 최대 둘레에는 가장 긴 거리와 가장 작은 각을 넣는다.

최소는 $360 \times 790 \div 7.3$ 으로 약 38959 km다. 최대는 $360 \times 810 \div 7.1$ 로 약 41070 km다. 양 끝을 평균낸 수만 남기면 입력 자료가 허용한 넓은 범위를 가리게 된다. 계산 결과의 자릿수가 많다는 사실은 측정이 정밀하다는 뜻이 아니다.

이 범위는 지구의 실제 둘레를 새로 측정한 결과가 아니다. 가상 입력과 원 모형에서 얻은 계산상 범위다. 거리와 각의 오차가 서로 연관되어 모든 조합이 가능하지 않다면 범위는 달라질 수 있다. 입력의 제약까지 알아야 더 좁은 결론을 낼 수 있다.

조건	거리	중심각	둘레
최소	790 km	7.3°	약 38959 km
최대	810 km	7.1°	약 41070 km

탐구

중심각을 정확히 7.2°로 알고 거리만 790 km에서 810 km라면 둘레 범위는?

풀이와 확인

$360 \div 7.2 = 50$ 이므로 39500 km에서 40500 km다. 각의 불확실성을 없애면 이 모형의 계산 범위가 좁아진다.

[ERATOSTHENES] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Eratosthenes

방정식과 주석의 전통

디오판토스의 문제를 만나는 태도

오늘의 대수 기호로 옮기더라도 원문과 같은 표기라고 말하지 않는다.

알렉산드리아의 디오판토스는 산술 문제의 전통을 살펴볼 때 중요한 이름이다. 그의 저술을 현대 문자식으로 읽으면 관계를 빠르게 파악할 수 있지만 원래의 표기와 풀이 관행이 오늘의 대수 교과서와 같았다고 생각해서는 안 된다. 번역은 이해를 돕는 동시에 차이를 가릴 수도 있다.

이 장의 예제는 역사적 원문 문제를 그대로 인용한 것이 아니다. 조건을 식으로 옮기고 해의 범위를 정하며 검산하는 과정을 배우기 위해 새로 구성했다. 정수 해를 찾는 질문과 유리수 해를 찾는 질문은 같은 식을 사용해도 다른 과제가 된다.

예를 들어 $x + y = 5$ 는 양의 정수 범위에서 네 개의 순서쌍을 가진다. 유리수 범위에서는 훨씬 많은 해를 만들 수 있다. 해가 몇 개인지 묻기 전에 어떤 수를 허용하는지 적어야 답의 의미가 분명해진다.

디오판토스라는 이름이 붙은 현대 방정식 연구는 역사 저술의 내용보다 훨씬 넓다. 오늘의 용어를 옛 책의 분류에 그대로 적용하면 관심의 차이를 놓칠 수 있다. 시대별 용법을 따로 확인한다.

범위	첫 수 x	순서 있는 해의 수
양의 정수	1부터 4	4
음이 아닌 정수	0부터 5	6

디오판토스의 문제를 만나는 태도의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

$x + y = 5$ 에서 양의 정수 해와 음이 아닌 정수 해의 개수는 어떻게 다를까?

풀이와 확인

양의 정수 해는 첫 수가 1부터 4까지여서 네 개다. 0을 허용하면 첫 수가 0부터 5까지여서 여섯 개다. 순서를 구별한다는 조건도 함께 명시해야 한다.

[DIOPHANTUS] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Diophantus of Alexandria

합과 차로 두 수 찾기

두 조건을 더하면 한 미지수가 사라진다.

두 수의 합이 20이고 큰 수에서 작은 수를 뺀 차가 6이라고 하자. 큰 수를 x 와 작은 수를 y 로 두면 $x + y = 20$ 과 $x - y = 6$ 이다. 두 식을 더하면 y 와 $-y$ 가 없어져 $2x = 26$ 을 얻는다. 따라서 x 는 13이고 y 는 7이다.

이 풀이에서 더하기는 단순한 요령이 아니다. 같은 양의 y 를 한 번 더하고 한 번 빼면 남지 않는다는 구조를 사용한다. 그림으로 보면 두 수의 합에 차이를 보태 작은 수를 큰 수만큼 채운 것이므로 큰 수 두 개가 된다.

검산에서는 합과 차를 모두 확인한다. $13 + 7 = 20$ 만 확인하면 첫 조건만 검사한 셈이다. $13 - 7 = 6$ 까지 적어야 두 조건을 만족했다는 결론을 내릴 수 있다. 여러 조건이 주어진 문제에서는 해를 원래의 모든 조건에 되돌려 넣는다.

큰 수는 합과 차의 합을 반으로 나누고 작은 수는 합에서 차를 뺀 뒤 반으로 나눈다. 이 두 식을 다시 더하면 원래 합이 되고 빼면 원래 차가 되어 일반적인 검산도 가능하다.

$$\begin{aligned}x + y &= 20 \\x - y &= 6 \\2x &= 26 \\x = 13 \quad y &= 7\end{aligned}$$

같은 미지수의 반대 부호를 이용한 소거

단계	식
조건	$x + y = 20$
조건	$x - y = 6$
더하기	$2x = 26$
해	$x = 13$ 및 $y = 7$

탐구

합이 31이고 차가 9인 두 수를 같은 방법으로 구해 보자.

풀이와 확인

두 식을 더하면 큰 수의 두 배가 40이므로 큰 수는 20이다. 작은 수는 11이다. 합은 31이고 차는 9이므로 두 조건이 모두 맞는다.

짝홀 조건이 알려 주는 가능성

정수 해를 구하기 전에 합과 차의 짝홀을 비교한다.

합을 S 와 차를 D 라고 쓰면 큰 수는 $(S + D)/2$ 이고 작은 수는 $(S - D)/2$ 다. 두 수가 정수이면 $S + D$ 와 $S - D$ 가 모두 짝수여야 한다. 따라서 합과 차가 같은 짝홀성을 가질 때 정수 해를 얻을 수 있다.

합이 20이고 차가 5라면 큰 수는 12.5이고 작은 수는 7.5다. 식의 해는 존재하지만 정수 해는 아니다. 두 수를 사람 수처럼 반드시 정수인 양으로 해석했다면 조건에 맞는 상황이 없다고 말해야 한다. 소수점이 나왔다는 이유만으로 반올림해서 답을 만들 수는 없다.

반면 길이를 구하는 문제라면 12.5와 7.5를 허용할 수 있다. 수의 범위는 계산 뒤에 편의대로 바꾸는 것이 아니라 문제의 대상에 맞추어 먼저 정한다. 같은 방정식이 상황에 따라 다른 판단을 요구한다는 점이 드러난다.

양의 정수 조건까지 요구하면 합 S 가 차 D 보다 커야 한다. $S = D$ 이면 작은 수가 0이 되어 양수가 아니다. 짝홀 조건만 맞는다고 모든 추가 조건을 만족하는 것은 아니다.

합 S	차 D	정수 해 여부
20	6	가능
20	5	불가능
27	9	가능
27	8	불가능

짝홀 조건이 알려 주는 가능성의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

합이 27이고 차가 8일 때 양의 정수 두 수가 존재할까?

풀이와 확인

존재하지 않는다. 합은 홀수이고 차는 짝수이므로 두 식을 더한 35를 2로 나눈 값은 정수가 아니다. 유리수 해 17.5와 9.5는 있지만 정수 조건을 만족하지 않는다.

유리수 해를 만드는 직선

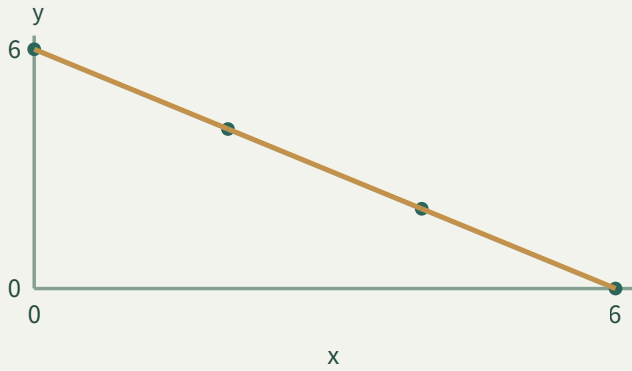
자유롭게 고른 수 하나가 다른 수를 결정한다.

$x + y = 6$ 에서 x 를 유리수 t 로 고르면 y 는 $6 - t$ 가 된다. $t = 1/2$ 이면 $y = 11/2$ 이고 $t = 7/3$ 이면 $y = 11/3$ 이다. 이처럼 한 매개변수를 사용하면 여러 해를 따로 찾는 대신 전체 해의 형태를 나타낼 수 있다.

양의 해만 필요하면 $0 < t < 6$ 이라는 조건을 붙인다. x 가 양수여야 하므로 $t > 0$ 이고 y 도 양수여야 하므로 $t < 6$ 이다. 식을 만족하는 것과 추가 조건을 만족하는 것은 별도로 점검해야 한다.

좌표평면에서 이 해들은 직선 위에 놓인다. 그러나 직선 위의 모든 점이 유리수 좌표를 갖는 것은 아니다. 유리수 해를 다룬다고 했으면 t 에도 유리수라는 조건이 필요하다. 그림은 해의 위치를 보여 주지만 허용되는 수의 범위를 자동으로 표시해 주지는 않는다.

양의 유리수 해는 무한히 많다. 0과 6 사이에서 유리수 t 를 계속 고를 수 있기 때문이다. 하지만 두 수가 정수라는 조건을 붙이면 t 는 1부터 5까지 다섯 경우로 줄어든다.



$x + y = 6$ 을 나타낸 현대 좌표 도해

t	x	y	합
1/2	1/2	11/2	6
7/3	7/3	11/3	6
7	7	-1	6

탐구

t = 7을 넣으면 방정식의 해가 될까? 양의 해도 될까?

풀이와 확인

$x = 7$ 과 $y = -1$ 이므로 합은 6이다. 방정식의 해는 맞지만 y 가 음수이므로 양의 해는 아니다. 원래 식과 부가 조건을 따로 확인해야 한다.

제곱의 차를 곱으로 바꾸기

식의 모양을 바꾸면 정수 조건을 나누어 볼 수 있다.

$x^2 - y^2 = 45$ 에서 왼쪽을 $(x - y)(x + y)$ 로 묶을 수 있다. 양의 정수 x 와 y 를 찾는다면 45의 양의 약수 쌍을 살펴본다. 1과 45를 택하면 $x - y = 1$ 과 $x + y = 45$ 이므로 $x = 23$ 과 $y = 22$ 가 된다.

3과 15를 택하면 $x = 9$ 와 $y = 6$ 이며 5와 9를 택하면 $x = 7$ 과 $y = 2$ 다. 각 약수 쌍은 모두 홀수 끼리이므로 합과 차를 반으로 나누었을 때 정수가 된다. 두 인수를 바꾸면 y 의 부호가 바뀔 수 있으므로 양의 y 라는 조건도 함께 지킨다.

검산은 $49 - 4 = 45$ 처럼 원래의 제곱식에서 한다. 인수의 곱이 45라는 사실만 확인해도 대수 변형이 정확하면 충분하지만 원식 검산은 계산 실수를 찾는 데 도움이 된다. 이 예는 역사 원문의 복제가 아닌 현대 학습 문제다.

약수 쌍의 두 값이 같은 짝홀성을 가져야 x 와 y 가 정수가 된다. 45의 쌍은 모두 홀수지만 다른 수에서는 짝수와 홀수가 섞일 수 있다. 인수분해 뒤에도 정수 조건을 다시 살핀다.

$$\begin{aligned}x^2 - y^2 &= 45 \\(x - y)(x + y) &= 45 \\5 \times 9 &= 45 \\x = 7 \quad y &= 2\end{aligned}$$

약수 쌍으로 바꿔 살펴보는 정수 해

$x - y$	$x + y$	x	y
1	45	23	22
3	15	9	6
5	9	7	2

탐구

위의 양의 정수 해 중 x 가 가장 작은 것은 무엇일까?

풀이와 확인

양의 약수 쌍을 모두 살펴보면 $x = 7$ 과 $y = 2$ 가 가장 작은 x 를 준다. 45의 양의 약수 쌍은 1과 45 및 3과 15 및 5와 9이므로 빠진 경우가 없다.

이러 읽기 / 방정식과 주석의 전통

제곱의 차를 넓이로 보기

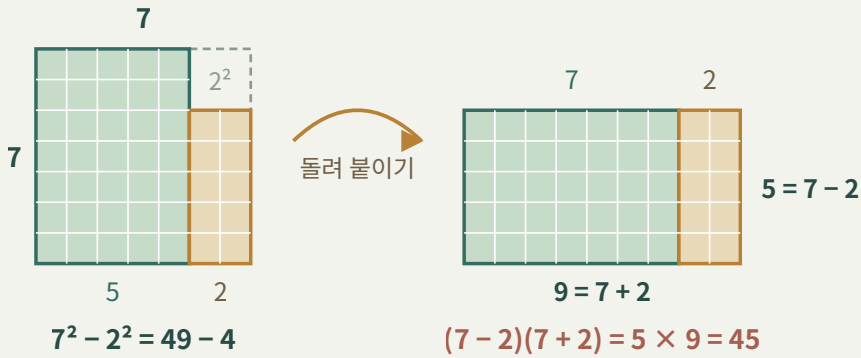
큰 정사각형에서 작은 정사각형을 떼어 낸 모양을 옮겨 붙이면 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ 가 그림으로 보인다.

4장은 $x^2 - y^2 = 45$ 를 $(x - y)(x + y) = 45$ 로 바꾸어 약수 쌍을 살폈다. 이 인수분해는 전개해서 확인할 수 있지만 넓이 그림으로도 설명할 수 있다. 한 변이 x 인 정사각형의 모서리에서 한 변이 y 인 정사각형을 떼어 내면 남은 넓이가 $x^2 - y^2$ 다. 남은 ㄱ자 모양을 두 직사각형으로 잘라 다시 배치해 본다.

$x = 7$ 과 $y = 2$ 로 확인하자. 49에서 4를 뺀 모양은 가로 5와 세로 7인 직사각형 하나와 가로 2와 세로 5인 직사각형 하나로 나뉜다. 첫 조각을 돌려 놓으면 가로 7과 세로 5가 되고 둘째 조각을 옆에 붙이면 가로 $7 + 2 = 9$ 와 세로 5인 직사각형이 된다. 넓이는 $5 \times 9 = 45$ 로 $49 - 4$ 와 같다.

일반적인 경우에도 조각의 크기를 문자로 그대로 읽을 수 있다. 첫 조각은 가로 $x - y$ 와 세로 x 인 직사각형이고 둘째 조각은 가로 y 와 세로 $x - y$ 인 직사각형이다. 두 조각을 세로 $x - y$ 에 맞추어 이으면 가로가 $x + y$ 인 직사각형이 된다. 조각을 겹치거나 버리지 않았으므로 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ 가 성립한다.

이 그림은 x 와 y 가 양수이고 x 가 y 보다 클 때의 넓이 모형이다. 0이나 음수를 포함하는 경우에는 넓이 대신 전개식으로 등식을 확인해야 한다. 디오판토스의 저술이 이런 그림을 사용했다는 뜻이 아니며 이 장의 다른 예제처럼 학습용 모형이다. 완성된 직사각형의 세로 5와 가로 9가 4장에서 찾은 약수 쌍 5와 9에 그대로 대응한다는 점도 살펴본다.



7 × 7에서 2 × 2를 떼고 옮겨 붙이면 5 × 9 직사각형이 된다.

탐구

$x = 9$ 와 $y = 6$ 일 때 같은 방법으로 만든 직사각형의 세로와 가로는 얼마일까?

풀이와 확인

세로는 $9 - 6 = 3$ 이고 가로는 $9 + 6 = 15$ 다. 넓이는 $3 \times 15 = 45$ 이며 $81 - 36 = 45$ 와 같다. 이 직사각형은 4장의 약수 쌍 3과 15에 해당하고 해 $x = 9$ 와 $y = 6$ 을 그림으로 확인해 준다.

[DIOPHANTUS] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Diophantus of Alexandria

히파티아와 남아 있는 기록

전승과 주석의 기여를 말하되 확인되지 않은 발견을 덧붙이지 않는다.

히파티아를 소개할 때에는 수학과 철학을 가르친 활동과 저술 전승에 관한 기록을 함께 살펴본다. 다만 전해지는 자료가 제한적이므로 특정 정리를 처음 발견했다거나 널리 알려진 도구를 혼자 발명했다고 쉽게 단정하지 않는다. 유명한 인물일수록 후대의 이야기와 확인 가능한 기록을 구별할 필요가 있다.

주석은 기존 문장을 그대로 되풀이하는 작업만은 아니다. 계산 사이의 빠진 이유를 설명하고 독자가 어려워하는 기호를 풀어 쓰며 오류가 의심되는 부분을 비교할 수 있다. 수학 지식은 새로운 명제를 만드는 일뿐 아니라 배우고 검토하고 전하는 일로도 이어진다.

학습 활동에서는 짧은 풀이에 주석을 붙여 보자. $2x = 26$ 에서 $x = 13$ 으로 넘어가는 줄에 양변을 2로 나눈다는 이유를 적는다. 이런 활동은 히파티아의 실제 주석을 재현하는 것이 아니라 주석이라는 지적 작업의 역할을 이해하기 위한 예다.

전승에 관한 설명은 남은 저술과 다른 저자의 언급을 구분해 적는다. 누군가가 활동을 기록했다는 사실과 그 원고가 오늘까지 남았다는 사실은 같지 않다. 자료의 형태를 제목 옆에 명시한다.

활동	의미
교육	개념과 방법을 배우게 함
주석	풀이의 이유를 드러냄
비교	판본과 계산을 검토함

히파티아와 남아 있는 기록의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

자료가 제한된 인물의 업적을 설명할 때 어떤 문장을 피해야 할까?

풀이와 확인

확인 근거 없이 모든 발견을 혼자 이루었다는 식으로 단정하는 문장을 피한다. 남은 기록이 뒷받침하는 활동을 구체적으로 적고 저술의 귀속이나 내용이 불확실한 부분은 따로 밝힌다.

[HYPATIA] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Hypatia

틀린 풀이에 주석 달기

나누기 전에 나누는 값이 0인지 확인한다.

$x^2 = x$ 를 보고 양변을 x 로 나누어 $x = 1$ 만 얻었다면 해 하나를 잃어버렸다. x 가 0일 가능성을 확인하지 않은 채 나누었기 때문이다. 원식에 0을 넣으면 $0 = 0$ 이므로 0도 해다. 나누는 동작에는 나누는 값이 0이 아니라는 조건이 붙는다.

모든 해를 찾으려면 $x^2 - x = 0$ 을 $x(x - 1) = 0$ 으로 고친다. 두 수의 곱이 0이면 적어도 하나가 0이므로 $x = 0$ 또는 $x = 1$ 이다. 이 방식은 어떤 해도 나눗셈으로 제외하지 않는다.

주석에는 틀렸다고만 적기보다 잘못된 전제가 들어간 줄을 가리킨다. 양변을 x 로 나누는 줄 옆에 $x \neq 0$ 일 때만 가능하다고 적으면 오류의 위치가 분명해진다. 오류를 설명하는 문장은 다음 문제에서도 사용할 수 있는 조건을 남겨야 한다.

나누기뿐 아니라 제곱근을 취할 때도 해가 달라질 수 있다. $x^2 = 9$ 에서 $x = 3$ 만 적으면 -3 을 놓친다. 양수라는 조건이 없는 한 두 부호를 모두 검사해야 한다.

풀이 줄	점검할 조건
$x^2 = x$	출발 식
x 로 나누기	$x \neq 0$ 필요
$x(x - 1) = 0$	해를 보존하는 변형
$x = 0$ 또는 1	원식에 대입해 검사

틀린 풀이에 주석 달기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

$x(x - 4) = 0$ 의 해를 두 개 모두 설명해 보자.

풀이와 확인

곱이 0이므로 $x = 0$ 이거나 $x - 4 = 0$ 이다. 따라서 해는 0과 4다. 양변을 x 로 바로 나누면 0이라는 해를 놓치므로 인수인식의 곱이 0이라는 성질을 사용한다.

해의 목록과 완전성

답을 찾았다는 말과 모든 답을 찾았다는 말은 다르다.

$2x + 3y = 12$ 의 음이 아닌 정수 해를 구하자. y 가 0부터 4까지 가능하므로 하나씩 대입한다. y 가 0이면 x 는 6이고 y 가 2이면 x 는 3이며 y 가 4이면 x 는 0이다. y 가 1이나 3이면 x 가 정수가 되지 않는다.

세 해를 찾았다는 것만으로는 목록이 완전하다는 설명이 부족하다. y 가 음이 아니고 $3y \leq 12$ 이므로 $0 \leq y \leq 4$ 라는 범위를 먼저 정하면 이 다섯 경우를 모두 검사했다는 근거가 된다. 경우 나누기의 시작과 끝을 밝히는 것이 완전성의 핵심이다.

같은 문제를 짝홀로 줄일 수도 있다. $2x$ 와 12가 짝수이므로 $3y$ 도 짝수여야 하고 따라서 y 가 짝수다. 범위 안의 짝수 0과 2와 4만 보면 된다. 작은 사례를 빠짐없이 조사하는 방법과 수의 구조로 경우를 줄이는 방법을 비교해 보자.

해의 순서쌍에서 x 와 y 의 역할도 유지한다. $x = 6$ 과 $y = 0$ 을 바꾸면 $2x + 3y$ 의 값이 달라진다. 계수가 서로 다르므로 두 수를 뒤집은 것이 자동으로 또 다른 해가 되지는 않는다.

y	$x = (12 - 3y)/2$	정수 해
0	6	가능
1	4.5	불가능
2	3	가능
3	1.5	불가능
4	0	가능

탐구

$2x + 3y = 10$ 의 음이 아닌 정수 해는 무엇일까?

풀이와 확인

y 의 범위는 0부터 3이고 y 는 짝수여야 한다. $y = 0$ 이면 $x = 5$ 이며 $y = 2$ 이면 $x = 2$ 다. 따라서 두 해만 존재한다. 범위와 짝홀 조건을 함께 사용했으므로 빠진 경우가 없다.

이상고의 자국과 해석의 경계

뼈에 남은 자국을 보는 방법

관찰할 수 있는 배열과 제작 목적을 따로 기록한다.

이상고의 뼈 유물은 오늘날 콩고민주공화국에 있는 유적에서 발견되었다. 표면의 자국이 여러 묶음으로 보인다는 점 때문에 수량 기록에 관한 논의가 이어졌다. 그러나 어떤 계산을 위해 만든 물건인지에는 여러 해석이 있다. 유물의 중요성을 설명하려고 하나의 가설을 확정된 사실로 바꿀 필요는 없다.

관찰표를 만들 때에는 사진의 어느 면을 보았는지부터 적는다. 그다음 자국 사이의 간격과 묶음의 경계를 기록한다. 손상 때문에 개수를 확신하기 어려운 곳은 묶음표로 남긴다. 깨끗하게 정리된 도식은 읽기 쉽지만 실제 표면의 모호함을 감출 수 있다.

이 장에서는 실제 유물의 숫자를 다시 판정하기보다 학습용 자국 배열을 사용한다. 자국을 세는 과정에서 묶음 기준이 결과에 미치는 영향을 살핀다. 현대 독자가 발견한 규칙과 옛 제작자가 의도한 규칙을 구분하는 것이 탐구의 중심이다.

사진의 명암을 조정하면 자국을 더 잘 볼 수 있지만 새로운 흔적이 생긴 듯 보일 수도 있다.
가공 전 사진과 가공 방법을 함께 남겨야 다른 사람이 관찰을 다시 확인할 수 있다.



확실한 8개 + 불확실한 1자리

관찰 범위: 8개 또는 9개

실제 이상고 유물의 배열이 아닌 판독 불확실성의 학습용 도식

탐구

사진에서 흐릿한 자국 하나를 확신할 수 없을 때 어떻게 기록할까?

풀이와 확인

확정한 개수와 가능한 개수의 범위를 함께 적는다. 예를 들어 분명한 자국이 8개이고 한 자리가 불확실하면 8개 또는 9개라고 기록한다. 추측으로 빈칸을 채우지 않는다.

[ISHANGO] 벨기에 자연과학연구소. The Ishango Bone

같은 배열을 다르게 묶기

묶음의 경계는 계산 결과의 의미를 바꾼다.

학습용 자국 열여덟 개를 한 줄로 놓아 보자. 세 개씩 묶으면 여섯 묶음이고 여섯 개씩 묶으면 세 묶음이다. 전체 개수는 같아도 묶음 수와 묶음의 크기가 바뀐다. 따라서 묶음의 존재를 알아보았다는 사실만으로 어떤 진법을 사용했다고 결론 내릴 수 없다.

배열에 큰 간격이 있다면 묶음의 근거로 삼을 수 있다. 다만 간격이 제작 과정의 차이나 표면의 손상 때문일 가능성도 살펴야 한다. 규칙을 먼저 정하고 그 규칙에 맞도록 경계를 옮기면 자신이 넣은 가정을 자료에서 발견한 것처럼 착각하게 된다.

계산 활동에서는 같은 열여덟 개를 2×9 와 3×6 으로 나타낸다. 두 배열을 비교하면 약수라는 개념을 도입할 수 있다. 이는 유물을 계기로 만든 오늘의 수학 수업이며 고대인이 이 식을 적었다는 뜻이 아니다.

전체가 18개일 때 네 개씩 묶으면 네 묶음과 두 개가 남는다. 남은 두 개도 기록해야 전체 수량이 보존된다. 남김없는 묶음만 찾는 질문과 일반적인 나눗셈 문제는 조건이 다르다.



3개씩 6묶음



6개씩 3묶음



4개씩 4묶음 + 2개 남음

$$18 = 3 \times 6 = 6 \times 3 = 4 \times 4 + 2$$

같은 열여덟 개의 자국을 3개씩, 6개씩, 4개씩 묶은 결과

탐구

열여덟 개를 남김없이 같은 크기로 묶을 때 가능한 묶음 크기를 모두 찾아보자.

풀이와 확인

양의 약수인 1과 2와 3과 6과 9와 18이 가능하다. 각 크기로 나눈 나머지가 0인지 검사하면 목록을 확인할 수 있다.

소수처럼 보이는 목록

선택한 수의 범위를 먼저 정해야 규칙을 평가할 수 있다.

11과 13과 17과 19는 모두 소수다. 이 목록만 보면 소수를 의도적으로 고른 것처럼 느껴질 수 있다. 그러나 해석하려는 자료에서 왜 이 네 수를 한 묶음으로 선택했는지 설명해야 한다. 다른 줄이나 다른 구분법을 제외한 이유가 없으면 우연한 규칙을 과장할 위험이 있다.

소수의 뜻을 확인하는 현대 활동에서는 2 이상인 자연수 중 약수가 1과 자신뿐인 수를 찾는다. 15는 3×5 이므로 소수가 아니다. 17은 2와 3과 4로 나누어떨어지지 않으며 그 제공근보다 큰 약수는 작은 약수와 짝을 이루므로 더 검사할 필요가 없다.

유물의 자국 수가 소수와 같다는 관찰은 탐구의 시작이 될 수 있다. 그러나 소수 개념을 이해했다는 역사적 주장은 추가 맥락을 요구한다. 오늘의 분류 기준을 적용한 결과와 과거의 의도를 하나로 합치지 않는다.

1은 소수가 아니다. 약수가 1 하나뿐이므로 서로 다른 약수 두 개를 가진다는 정의에 맞지 않는다. 작은 수의 분류를 정확히 해 두면 소수 목록을 이용한 해석에서도 기준이 흔들리지 않는다.

수	검사	판정
15	3×5	합성수
17	1과 17만 약수	소수
21	3×7	합성수

소수처럼 보이는 목록의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

21이 소수가 아니라는 사실을 가장 짧게 보이려면 무엇을 제시하면 될까?

풀이와 확인

$21 = 3 \times 7$ 을 제시하면 된다. 1과 21 이외의 약수가 있다는 한 사례만으로 소수의 정의를 만족하지 못함을 알 수 있다.

달력 가설과 주기의 증거

합계 하나가 주기 전체를 입증하지는 않는다.

어떤 자국의 합이 달의 한 주기와 비슷하다고 해서 곧바로 달력이라고 부를 수는 없다. 관측의 시작과 끝을 어떻게 정했는지와 비슷한 묶음이 반복되는지가 중요하다. 여러 목적의 기록도 우연히 비슷한 합을 만들 수 있다.

학습용으로 29일과 30일을 번갈아 쓰는 두 달을 만들면 합은 59일이고 평균은 29.5일이다. 이 모형은 실제 천문 현상의 변화를 모두 표현하지 않는다. 특히 두 달의 평균이 맞다고 매 달의 관측 오차가 사라지는 것은 아니다.

표에는 첫 달의 값과 둘째 달의 값을 따로 남긴다. 평균만 적으면 변동을 잃어버리기 때문이다. 고대 기록을 해석할 때도 합계와 세부 배열을 모두 확인해야 한다. 유리한 부분만 남긴 설명은 다른 가능한 목적을 검토하기 어렵게 한다.

평균 주기를 사용해 먼 시점을 예측하면 작은 차이가 누적될 수 있다. 한 주기마다 0.1일씩 차이가 나면 열 주기 뒤에는 1일이다. 평균이 비슷하다는 관찰과 정확한 달력 운영 능력은 다른 주장이다.

구분	일수
29일인 달 6개	174
30일인 달 6개	180
합계	354

달력 가설과 주기의 증거의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

29일과 30일을 여섯 번씩 사용한 모형의 총일수와 평균은 얼마일까?

풀이와 확인

총일수는 $29 \times 6 + 30 \times 6 = 354$ 일이다. 열두 달로 나누면 평균은 29.5일이다. 이 계산은 가정된 모형의 결과이며 실제 달력을 확인한 증거는 아니다.

두 관찰자의 기록 비교

불일치를 지우기 전에 그 위치를 찾아본다.

같은 사진을 두 사람이 읽었는데 첫 사람은 묶음마다 4와 6과 8을 기록하고 둘째 사람은 4와 7과 8을 기록했다고 하자. 합계는 18과 19로 다르다. 평균인 18.5를 유물의 자국 수라고 쓰기보다 가운데 묶음의 판독 차이를 찾아야 한다.

불일치가 있는 부분을 확대하고 조명 방향이 다른 사진을 비교한다. 여전히 판단하기 어렵다면 두 판독을 함께 보존한다. 수량이 정수인 대상에 평균을 적용했다고 해서 불확실성이 해결되는 것은 아니다. 평균은 관찰자 차이를 요약할 수 있지만 실제 개수를 대신 확정하지 못한다.

협업 기록에는 누가 어떤 자료를 보고 썼는지도 적는다. 같은 도식을 복사해 본 두 사람의 위치는 독립적인 관찰 두 개와 다르다. 기록 과정의 독립성과 자료의 선명도가 결론의 신뢰도를 좌우한다.

관찰자가 합의해 하나의 수를 고르더라도 원래의 두 기록을 지우지 않는다. 합의의 근거가 새 사진인지 단순한 타협인지 적어 두어야 한다. 최종값만 남기면 판독 과정의 불확실성을 되짚기 어렵다.

묶음	관찰자 A	관찰자 B
첫째	4	4
둘째	6	7
셋째	8	8

두 관찰자의 기록 비교의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

두 기록의 합계만 비교하는 것보다 묶음별 값을 비교하는 것이 유리한 이유는 무엇일까?

풀이와 확인

차이가 발생한 위치를 바로 찾을 수 있기 때문이다. 합계 하나로 줄이면 어느 묶음에서 판독이 달랐는지 알 수 없어 원자료를 다시 살피기 어렵다.

규칙을 찾기 전에 예측하기

이미 본 배열에 맞춘 설명과 새 자료를 맞힌 설명을 구분한다.

2와 4와 6이라는 배열 뒤에는 8이 올 것 같지만 다른 규칙도 만들 수 있다. 처음 세 항이 같고 넷째 항만 9인 규칙도 수학적으로 가능하다. 짧은 목록을 본 뒤 만든 설명은 유일하지 않다는 점을 기억해야 한다.

학습 실험에서는 앞부분만 공개하고 다음 값을 먼저 기록하게 한다. 뒤의 값을 본 뒤 규칙을 바꾸면 수정 이유도 남긴다. 이런 절차는 예측과 사후 설명을 구별하게 한다. 자료를 본 뒤 규칙을 바꾸는 일이 항상 잘못된 아니지만 그 변경을 숨겨서는 안 된다.

유물에서는 새로운 독립 자료가 충분하지 않을 수 있다. 그럴 때에는 여러 해석의 가능성을 그대로 제시하는 것이 정확하다. 하나의 멋진 이야기로 모든 빈틈을 채우는 것보다 어떤 자료가 추가되면 해석을 구별할 수 있을지 묻는 편이 생산적이다.

다음 값을 맞혔다고 규칙이 유일해지는 것은 아니다. 같은 예측을 내는 다른 규칙도 있을 수 있다. 여러 규칙이 서로 다른 결과를 내는 새로운 조건을 찾으면 가설을 구별하는 실험을 설계할 수 있다.

일부 자료 관찰

규칙 제안

새 값 예측

추가 자료와 비교

예측을 기록한 뒤 자료와 비교하는 현대 탐구 절차

탐구

2와 4와 6 다음이 반드시 8이라고 증명할 수 있을까?

풀이와 확인

주어진 세 수만으로는 증명할 수 없다. 연속한 짝수라는 규칙이 명시되면 8이지만 다른 생성 규칙도 같은 앞부분을 만들 수 있다.

손상된 자료의 범위 계산

정확한 하나의 값 대신 가능한 구간을 제시할 수 있다.

세 묶음 중 첫째는 5개이고 둘째는 7개다. 셋째는 손상 때문에 3개부터 5개까지 가능하다고 하자. 전체는 최소 15개이며 최대 17개다. 확실한 두 묶음의 합 12에 불확실한 묶음의 양 끝값을 더하면 범위를 구할 수 있다.

범위를 적으면 정보가 부족하다는 사실을 계산 안에 남길 수 있다. 가운데 값인 16만 제시하면 원자료가 정확한 것처럼 보인다. 반대로 아무것도 알 수 없다고 쓰면 확인된 12개와 나머지 범위라는 유용한 정보를 잃는다.

두 손상 구간을 더할 때도 각 구간의 최소와 최대를 살펴본다. 다만 서로 연관된 제약이 있다면 끝값을 마음대로 결합할 수 없는 경우가 있다. 계산 전에 각 불확실성이 독립적으로 가능한지 확인하는 습관이 필요하다.

손상된 두 구간이 각각 2개에서 3개와 4개에서 6개라면 합은 6개에서 9개다. 최소끼리와 최대끼리를 더해 범위를 얻는다. 이는 두 범위의 조합이 모두 가능하다는 가정에서 성립한다.

경우	계산	합계
최소	$5 + 7 + 3$	15
최대	$5 + 7 + 5$	17

손상된 자료의 범위 계산의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

확실한 자국이 20개이고 흐릿한 부분에 2개부터 4개가 더 있다면 전체 범위는?

풀이와 확인

22개부터 24개다. 최소와 최대를 함께 기록하면 23이라는 중앙값만 쓰는 것보다 자료의 상태를 정확하게 전한다.

작은 유물의 전시 설명 만들기

확실한 관찰 하나와 열린 질문 하나를 함께 남긴다.

전시 설명은 유물을 대단하게 보이게 하는 문구의 경쟁이 아니다. 독자가 실제로 볼 수 있는 특징을 짚어 주고 그 특징이 어떤 질문을 낳는지 알려 주는 글이다. 이상고의 경우 묶인 자국이라는 관찰과 기능에 대한 다양한 해석을 함께 적을 수 있다.

설명문의 첫 문장에는 유물과 발견 장소를 적는다. 둘째 문장에는 자국의 배열이라는 관찰을 적는다. 셋째 문장에는 계산 도구나 다른 기록이라는 해석이 논의되지만 목적이 확정되지 않았다고 밝힌다. 세 문장의 역할이 다르면 짧은 글도 충분한 정보를 담을 수 있다.

마지막으로 도해에 학습용 재구성이라는 표시가 있는지 확인한다. 실제 사진을 사용하지 않았는데 정밀 복제처럼 보이게 하면 독자는 그림의 세부를 증거로 오해할 수 있다. 좋은 전시물은 호기심과 근거의 경계를 함께 지킨다.

설명문과 그림에 같은 확실성 수준을 유지한다. 문장에서는 가설이라고 썼는데 그림 제목에 완성된 달력이라고 붙이면 메시지가 충돌한다. 본문과 캡션 및 제목을 함께 검토해야 한다.

해설의 주어와 숫자의 단위도 점검한다. 확인된 공동체를 대륙 전체로 넓혀 쓰지 않으며 자국 수와 묶음 수를 구별한다. 같은 그림에 붙은 제목과 본문이 서로 다른 확실성을 주장하지 않는지도 함께 읽는다.

설명문 요소	답을 내용
확인 가능한 관촬인 자국이 보인다	
제안된 해석	수량 기록일 가능성
확인되지 않은 잠재적인 제작 목적	

이상고 전시 해설에서 관촬과 해석 및 미확인 내용을 구분하는 구조

탐구

이 유물은 최초의 소수표다라는 제목을 어떤 방향으로 고치면 좋을까?

풀이와 확인

이상고의 자국과 수량 기록의 가능성처럼 관촬과 질문을 드러내는 제목으로 바꿀 수 있다. 소수표라는 해석을 소개하더라도 확정된 제작 목적과 구분한다.

[ISHANGO] 벨기에 자연과학연구소. The Ishango Bone

팀북투의 필사본과 계산

사막의 도시에서 읽던 책

산술과 천문학도 필사본의 세계에 들어 있었다.

미국 의회도서관의 팀북투 필사본 전시는 산술과 천문학을 포함한 여러 분야의 문헌을 소개한다. 이 자료는 서아프리카의 지식 활동을 구전만으로 설명할 수 없음을 보여 준다. 그러나 문헌이 남았다는 사실 때문에 구전과 실습의 역할을 반대로 지울 필요도 없다.

필사본은 내용뿐 아니라 배우고 고쳐 읽은 흔적을 보존한다. 본문과 여백의 주석을 구분하면 계산 절차를 설명한 사람과 나중에 검토한 사람의 목소리가 겹쳐 있음을 알 수 있다. 한 권을 단일한 순간에 완성된 고정물로만 보면 전승의 과정을 놓치기 쉽다.

이 장의 산술 문제는 전시된 문헌의 원문 번역이 아니다. 분수와 비례와 천문 계산이라는 주제에서 출발해 만든 현대 학습 예다. 실제 필사본의 명칭과 소장 정보를 따로 확인할 수 있도록 출처를 함께 제공한다.

소장처가 공개한 자료 번호는 제목과 함께 기록한다. 비슷한 제목의 산술 문헌을 구별할 수 있고 나중에 이미지 주소가 바뀌어도 자료를 다시 찾는 데 도움이 된다. 제목만으로 동일성을 판단하지 않는다.

자료의 층위 독자가 확인할 정보

실물 필사본 소장 번호와 상태

필사된 본문 산술 또는 천문 주제

여백의 주석 후대 읽기와 검토

이 책의 예제 편집자가 만든 학습 문제

팀북투 필사본 소개와 이 책의 새 계산 예제를 구별한 독서 안내

탐구

산술 필사본을 소개하면서 계산 문제를 새로 만들었다면 어떤 표시가 필요할까?

풀이와 확인

문헌의 주제에서 착안한 현대 학습 문제라고 밝혀야 한다. 원문에 실제로 실린 문제와 편집자가 만든 문제를 독자가 구별할 수 있어야 한다.

[LOC] 미국 의회도서관. Ancient Manuscripts from the Desert Libraries of Timbuktu

비례표에서 단가 찾기

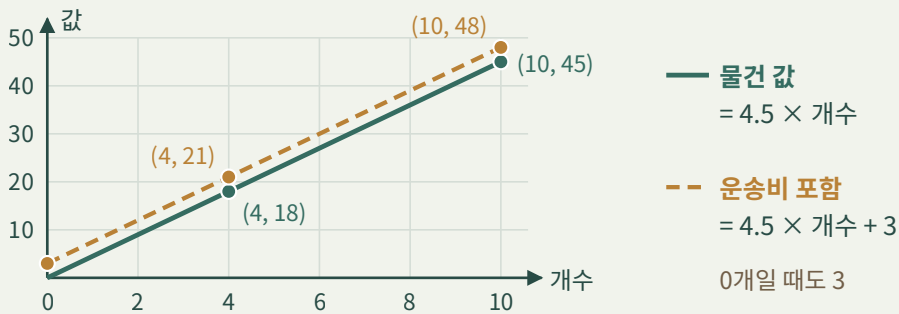
전체 값과 개수를 같은 단위로 맞추어 비교한다.

학습용 거래에서 같은 물건 4개의 값이 18단위라고 하자. 한 개의 값은 $18 \div 4 = 4.5$ 단위다. 10개의 값은 $4.5 \times 10 = 45$ 단위가 된다. 이 계산은 물건 하나의 값이 수량에 따라 바뀌지 않는다는 가정을 포함한다.

표의 한 열에는 개수를 적고 다른 열에는 전체 값을 적는다. 값의 차가 일정한지만 보지 말고 전체 값을 개수로 나눈 비가 일정한지 확인한다. 수량 간격이 일정하지 않으면 차이만으로 정비례를 판단하기 어렵다.

운송비가 거래마다 3단위씩 따로 붙는다면 식은 달라진다. 물건의 값에 고정비를 더한 전체 지불액은 개수에 단순 비례하지 않는다. 실제 계산을 모형으로 바꿀 때에는 무엇을 포함한 금액인지 먼저 정해야 한다.

개수가 0일 때 물건 값은 0이지만 운송비가 항상 부과되는 모형에서는 지불액이 3이다. 이 차이는 정비례와 고정비가 있는 관계를 구별하는 방법이다. 실제 주문이 없는 경우에도 비용이 드는지는 따로 정해야 한다.



원점을 지나는 정비례 직선과 운송비 3만큼 올라간 직선

탐구

한 개 값이 4.5단위이고 고정 운송비가 3단위라면 10개의 지불액은?

풀이와 확인

물건 값 45단위에 운송비 3단위를 더하여 48단위다. 4개의 전체 지불액에 단순히 10/4를 곱하면 고정비 까지 비례시켜 잘못 계산하게 된다.

몫을 분수로 나누기

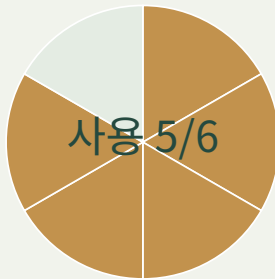
분모를 같게 만들면 합계와 남는 양을 확인하기 쉽다.

가상의 공동 기금 120단위 중 절반을 재료에 쓰고 3분의 1을 운반에 쓴다고 하자. 두 비율의 합은 $1/2 + 1/3 = 5/6$ 이다. 따라서 남는 비율은 $1/6$ 이며 실제 남는 양은 20단위다. 이는 역사적 상속 규칙을 재현한 문제가 아니라 분수 계산 연습이다.

공통분모 6을 사용하면 전체를 같은 크기의 여섯 몫으로 나누어 볼 수 있다. 재료는 세 몫이고 운반은 두 몫이다. 분모를 더하지 않는 이유는 각 조각의 크기를 같게 맞춘 뒤 조각 수를 더해야 하기 때문이다.

각 항목의 양을 따로 계산해도 검산할 수 있다. 60과 40과 20의 합은 120이다. 비율의 합과 실제 양의 합을 모두 확인하면 단위나 분모를 잘못 처리한 오류를 발견하기 쉽다.

전체가 무엇인지 바꾸면 같은 분수의 양도 바뀐다. 120의 절반은 60이고 남은 60의 절반은 30이다. 전체의 절반과 나머지의 절반을 같은 몫으로 읽지 않도록 기준량을 문장마다 확인한다.



동일한 크기 여섯 몫 중 다섯 몫을 사용한 모형

탐구

180단위를 같은 비율로 나누면 남는 양은 얼마일까?

풀이와 확인

남는 비율은 그대로 $1/6$ 이므로 $180 \div 6 = 30$ 단위다. 재료 90과 운반 60을 더한 뒤 전체에서 빼도 30이 나온다.

필사 오류를 검산으로 찾기

답의 크기를 어렵하면 자리 하나의 누락을 알아챌 수 있다.

24×15 의 답을 36으로 베껴 썼다면 일의 자리만 보아서는 오류를 알아채기 어렵다. 그러나 24×10 이 240이므로 답은 240보다 커야 한다. 대략적인 크기 비교만으로도 36은 불가능하다는 사실을 알 수 있다.

정확히 계산하면 $24 \times (10 + 5) = 240 + 120 = 360$ 이다. 베껴 쓴 값에서 0 하나가 빠졌을 가능성을 생각할 수 있지만 계산 오류인지 필사 오류인지는 원자료 비교가 더 필요하다. 틀린 결과를 찾는 일과 오류의 원인을 밝히는 일은 다르다.

검산은 여러 방향으로 할 수 있다. 곱셈 결과를 15로 나누면 24가 되는지 확인하고 다른 판본의 숫자도 살펴본다. 한 가지 검사가 통과했다고 모든 오류가 사라지는 것은 아니므로 검산의 목적에 맞는 방법을 고른다.

나눗셈 검산에서 $360 \div 15$ 가 어렵다면 $360 \div 3 \div 5$ 로 나눌 수 있다. $15 = 3 \times 5$ 라는 관계를 사용한 것이다. 서로 다른 분해로 같은 값을 얻으면 자리 계산을 한 번 더 점검할 수 있다.

$$24 \times 15 = 24 \times (10 + 5)$$

$$240 + 120 = 360$$

$$360 / 15 = 24$$

곱셈을 분해하고 나눗셈으로 되돌리는 검산

탐구

48×21 의 답이 1008인지 어렵과 분해로 확인해 보자.

풀이와 확인

$48 \times 20 = 960$ 이므로 답은 960보다 조금 커야 한다. 여기에 48을 더하면 1008이므로 계산이 맞다. 크기와 정확한 분해 결과가 서로 일치한다.

천문표의 중간값 읽기

두 행 사이를 채우려면 변화에 대한 가정을 적어야 한다.

학습용 천문표에 시각 2의 값이 14이고 시각 4의 값이 22로 적혀 있다고 하자. 시각 3의 값을 두 값의 평균인 18로 잡는 것은 선형 보간이다. 두 점 사이에서 값이 일정한 속도로 변한다고 가정한 셈이다.

시각이 한 단위 증가할 때 값은 4씩 늘어난다. 따라서 시각 2.5의 값은 $14 + 4 \times 0.5 = 16$ 으로 추정한다. 중간값을 채울 수 있다고 해서 실제 현상이 그 구간에서 정확히 직선으로 변했다는 뜻은 아니다.

표의 간격이 넓거나 변화가 빠른 구간에서는 보간 오차가 커질 수 있다. 계산값 옆에 관측값인지 보간값인지 표시하면 자료의 성격을 유지할 수 있다. 매끈한 표를 만드는 편의가 원자료의 정확도를 높여 주지는 않는다.

표의 두 끝값 바깥으로 같은 직선을 늘리는 것은 보간이 아니라 외삽이다. 시각 6의 값을 추정하면 관측 구간을 벗어나므로 변화가 계속 일정하다는 더 강한 가정이 필요하다. 두 작업의 이름과 범위를 구별한다.



실제 천문 수치를 옮기지 않은 보간 학습용 표

탐구

같은 가정에서 시각 3.5의 추정값은 얼마일까?

풀이와 확인

시각 2보다 1.5단위 늦으므로 $14 + 4 \times 1.5 = 20$ 이다. 이 값은 표의 두 관측값 사이를 선형으로 연결한 추정값이다.

누락된 끝부분을 다루는 태도

본문이 끊겼다고 계산의 결말을 임의로 채우지 않는다.

의회도서관에 소개된 천문 계산 필사본 중에는 마지막 부분이 남아 있지 않은 자료가 있다. 문헌이 불완전하다는 정보도 자료 설명의 일부다. 남아 있는 부분에서 저자의 전체 결론을 추정할 때에는 그 추정의 범위를 밝혀야 한다.

학습용 풀이가 $3x + 7 = 22$ 다음 줄에서 끊겼다면 현대 독자는 $x = 5$ 를 구할 수 있다. 그러나 그 풀이를 원저자가 같은 방식으로 마무리했다고 단정할 수는 없다. 수학적으로 가능한 복원과 문헌적으로 확인된 문장은 구별된다.

복원판을 만들 때에는 원문과 보충문을 다른 서체나 테두리로 표시할 수 있다. 또한 보충의 근거를 설명해 다음 독자가 검토하게 한다. 빈 부분을 매끈하게 채우는 것보다 어떤 부분이 남았는지를 정확하게 전달하는 편이 연구에 도움이 된다.

다른 사본에 결말이 남아 있다면 복원의 근거가 늘어난다. 그래도 두 사본이 같은 계통인지와 후기 수정이 있는지를 비교해야 한다. 비슷한 문장을 찾았다는 사실만으로 빠진 부분의 원형을 확정하지 않는다.

$$\text{남은 식: } 3x + 7 = 22$$

$$\text{현대적 보충: } 3x = 15$$

$$\text{따라서 } x = 5$$

$$\text{검산: } 3 \times 5 + 7 = 22$$

끊긴 학습용 풀이의 보충 예. 마지막 세 줄은 원문 확인이 아닌 현대 계산이다.

탐구

끊긴 풀이를 완성한 답안에 어떤 설명을 덧붙여야 할까?

풀이와 확인

남아 있는 식을 바탕으로 편집자가 계산한 보충 풀이임을 밝힌다. 원문이 실제로 같은 문장이나 방법을 사용했는지는 확인할 수 없다고 구분한다.

[LOCASTRO] 미국 의회도서관. On the Calculation of Numbers in the Science of Astronomy

서가를 목록으로 만들기

내용과 물리적 자료와 디지털 파일을 연결한다.

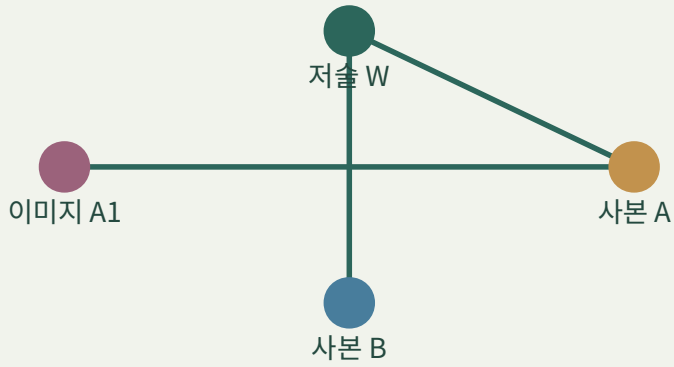
같은 저술을 담은 사본 두 권이 있다고 하자. 내용 제목은 같지만 종이 상태와 필사 시기와 소장 번호는 다를 수 있다. 디지털 목록에서 제목만 남기면 두 자료를 하나로 합쳐 버릴 위험이 있다. 각각의 사본에 별도 식별자를 부여해야 한다.

가상의 자료 A와 B를 같은 저술 항목 W에 연결한다. A에서 촬영한 이미지 파일은 A1과 A2로 기록한다. 이런 연결을 만들면 독자가 어느 사본의 어느 면을 보았는지 추적할 수 있다. 파일 이름이 바뀌더라도 자료 식별자는 안정적으로 유지하는 편이 좋다.

목록 작성도 수학적 분류 문제와 닿아 있다. 같은 저술이라는 관계와 같은 실물이라는 관계는 다른 동치 기준이다. 무엇을 같은 대상으로 묶었는지 명시하면 중복을 없애다가 중요한 차이까지 지우는 일을 막을 수 있다.

디지털 파일의 순서를 바꾸어도 사본의 원래 면 순서는 보존해야 한다. 화면에서 보기 편한 배열과 실물의 순서를 따로 기록하면 분리된 낱장이 어디에 놓였는지에 관한 논의도 남길 수 있다.

목록의 링크는 해설인지 원문 이미지인지 구별해 적고 실제로 열리는지 확인한다. 소개 문장과 독자가 새로 계산한 예도 분리한다. 단위의 현대 환산값을 모르면 같은 단위끼리의 비율까지만 계산하며 확인하지 못한 환산계수를 추가하지 않는다.



같은 저술과 서로 다른 실물 자료를 구분한 목록 모형

탐구

제목이 같다는 이유로 두 필사본의 이미지를 한 폴더에 뒤섞으면 어떤 문제가 생길까?

풀이와 확인

필사 시기와 여백 주석이 다른 사본을 구별하기 어려워진다. 독자는 인용한 문장이 어느 실물에 있는지 되짚어 확인할 수 없게 된다.

아프리카관 / 08

요루바 수 이름과 기준량

언어가 수를 나누는 방식

같은 수량을 어떤 기준에서 바라보는지 살핀다.

요루바어의 수 이름을 다룬 언어학 연구는 스무 개의 묶음과 덧셈 및 뺄셈이 결합되는 구조를 분석한다. 다만 표준어와 조사된 방언 사이에도 차이가 있으므로 모든 화자의 표현을 한 규칙으로 정리해서는 안 된다. 이 장은 발음을 흉내 내기보다 수 이름을 분석할 때의 수학적 관점을 다룬다.

17이라는 수량은 $10 + 7$ 로도 $20 - 3$ 으로도 나타낼 수 있다. 첫 표현은 이미 가진 열 개에 일곱 개를 더하고 둘째 표현은 스무 개에서 세 개가 부족하다고 본다. 두 표현의 차이는 수량의 차이가 아니라 기준량의 선택에 있다.

아래 식은 언어의 문법을 그대로 번역한 사전이 아니다. 언어 자료에서 만나는 더하기와 빼기의 구조를 이해하기 위한 현대 수식이다. 실제 수 이름을 쓰려면 성조와 형태 변화 및 사용 맥락을 확인한 언어 자료가 별도로 필요하다.

한 수를 두 방식으로 표현할 수 있다는 사실은 등식의 의미를 익히는 데도 도움이 된다. 등호는 계산을 시작하라는 신호만이 아니라 양쪽이 같은 수량이라는 관계다. 식을 오른쪽에서 왼쪽으로 읽어도 성립한다.

$$17 = 10 + 7$$

$$17 = 20 - 3$$

$$17 + 3 = 20$$

같은 수량을 서로 다른 기준에서 분해한 학습용 식

탐구

17을 20 - 3으로 나타낼 때 기준량과 부족한 양은 각각 무엇일까?

풀이와 확인

기준량은 20이고 부족한 양은 3이다. 세 개를 되돌려 더하면 기준량에 도달하므로 $17 + 3 = 20$ 으로 계산할 수 있다.

[YORUBA] Felix Abídèmi Fábùnmi. Vigesimal Numerals on Ifè Dialects of Yorùbá. Linguistik Online

스무 개씩 묶어 세기

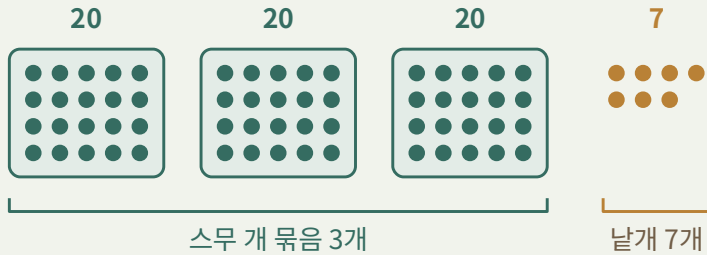
묶음 수와 남은 낱개를 나누면 큰 수가 단순해진다.

돌 67개를 스무 개씩 묶으면 세 묶음과 낱개 일곱 개가 남는다. 따라서 $67 = 3 \times 20 + 7$ 이다. 이 분해에서는 묶음 수 3과 나머지 7이 서로 다른 역할을 맡는다. 일곱 묶음과 낱개 세 개로 바꾸면 143이 되어 원래 수와 달라진다.

나머지는 0 이상이고 20보다 작아야 한다. 스무 개 이상의 낱개가 남았다면 새 묶음을 하나 더 만들 수 있기 때문이다. 이 조건을 붙이면 같은 수량에 대한 묶음 수와 나머지가 하나로 정해진다.

묶음 계산을 사용한다고 반드시 자리값 숫자를 사용하는 것은 아니다. 말로 묶음을 표현하는 체계와 각 위치의 값이 20배씩 커지는 표기 체계는 구별해야 한다. 이 구분은 서로 다른 문화의 숫자를 비교할 때 특히 중요하다.

자리값 20진 표기를 현대 활동으로 따로 만들면 두 자리의 값은 $20a + b$ 가 된다. 이때 b 는 0부터 19까지다. 언어의 수 이름 연구와 구분해 만든 표기 모형이라고 표시해야 두 체계를 혼동하지 않는다.



$$67 = 3 \times 20 + 7 \text{ (낱개는 20보다 작다)}$$

점 67개를 스무 개 묶음 3개와 낱개 7개로 나눈 모형

탐구

94개를 스무 개씩 묶었을 때 묶음 수와 나머지는?

풀이와 확인

네 묶음이 80개이므로 14개가 남는다. $94 = 4 \times 20 + 14$ 이며 나머지 14는 20보다 작으므로 묶기가 끝났다.

이어 읽기 / 요루바 수 이름과 기준량

스무 개씩 두 번 묶어 세 자리 만들기

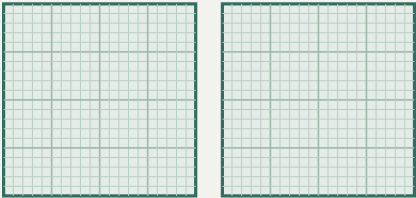
스무 개 묶음을 다시 스무 개씩 묶으면 400을 단위로 하는 세 번째 자리가 생긴다.

7장은 $67 = 3 \times 20 + 7$ 처럼 수를 스무 개 묶음과 낱개로 나누었고 자리값 20진 표기를 현대 활동으로 따로 만들 수 있다고 했다. 이 단원은 그 모형을 한 단계 넓힌다. 스무 개 묶음이 스무 개 모이면 $20 \times 20 = 400$ 개짜리 큰 묶음이 된다. 그러면 수를 400 묶음의 개수와 20 묶음의 개수 및 낱개로 나타낼 수 있다.

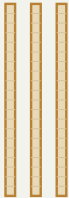
867을 예로 들자. 867을 20으로 나누면 몫이 43이고 나머지가 7이다. 몫 43을 다시 20으로 나누면 몫이 2이고 나머지가 3이다. 따라서 $867 = 2 \times 400 + 3 \times 20 + 7$ 이며 세 자리는 큰 자리부터 2와 3과 7이다.

반복 나눗셈이 옳은 이유는 식을 되짚으면 보인다. $867 = 43 \times 20 + 7$ 에서 43을 $2 \times 20 + 3$ 으로 바꾸어 넣으면 $2 \times 400 + 3 \times 20 + 7$ 을 얻는다. 가운데 자리와 마지막 자리는 각각 0부터 19까지의 수다. 두 자리로 만들 수 있는 가장 큰 값은 $19 \times 20 + 19 = 399$ 로 400보다 작으므로 각 수의 세 자리는 하나로 정해진다.

이 표기는 요루바어의 수 이름을 옮긴 것이 아니라 스무 개 묶음이라는 관점에서 만든 현대 표기 모형이다. 실제 수 이름은 덧셈과 뺄셈을 섞어 쓰고 방언에 따라 다를 수 있으므로 이 자리 표기와 일대일로 대응시키지 않는다. 다만 묶음 수와 나머지를 구별하는 7장의 생각이 자리값의 바탕이 된다는 점은 확인할 수 있다.



400 묶음 2개



20 묶음 3개



날개 7개

867

$= 2 \times 400$

$+ 3 \times 20$

$+ 7$

세 자리 (2, 3, 7)

작은 한 칸이 날개 하나

867을 400 묶음 2개와 20 묶음 3개 및 날개 7개로 나눈 모형

나눗셈	몫	나머지
$867 \div 20$	43	7
$43 \div 20$	2	3
$2 \div 20$	0	2

탐구

1000을 같은 방식의 세 자리로 나타내 보자.

풀이와 확인

$1000 = 50 \times 20 + 0$ 이고 $50 = 2 \times 20 + 10$ 이다. 따라서 $1000 = 2 \times 400 + 10 \times 20 + 0$ 이며 세 자리는 2와 10과 0이다. 되짚어 계산하면 $800 + 200 + 0 = 1000$ 이다. 가운데 자리의 10은 20보다 작으므로 하나의 자리에 들어갈 수 있다.

[YORUBA] Felix Abídè mí Fábùnmí. Vigesimal Numerals on Ifè Dialects of Yorùbá. Linguistik Online

가까운 기준에서 빼기

기준량에 가까운 수는 부족분이 더 작을 수 있다.

98개의 물건을 직접 하나씩 세는 대신 백 개짜리 틀에서 빈칸이 두 개인지 확인할 수 있다. 이때 $98 = 100 - 2$ 라는 표현이 상황에 잘 맞는다. 기준량을 정하는 것은 계산을 더 쉽게 만드는 표현 선택이다.

59는 $60 - 1$ 로 나타낼 수도 있고 $40 + 19$ 로 나타낼 수도 있다. 두 식은 같은 답을 주지만 다루어야 할 작은 수의 크기가 다르다. 차이가 작은 기준을 택하면 머릿속으로 보충하거나 검산하기 쉬울 수 있다.

그러나 가장 가까운 기준이 언제나 언어의 실제 수 이름을 결정하지는 않는다. 언어는 역사와 관습과 문법을 함께 가지기 때문이다. 편리해 보이는 산술 규칙을 만들어 실제 화자의 표현을 대신 설명하지 않도록 주의한다.

계산할 때 쓴 기준량을 바꾸어 검산할 수 있다. 79를 $80 - 1$ 로 구한 뒤 $60 + 19$ 로도 확인한다. 서로 다른 분해가 같은 값에 도달하면 부족분의 부호를 잘못 처리한 실수를 발견하기 쉽다.



80에 가까운 수를 부족분과 초과분으로 읽는 수직선

탐구

79와 121을 가까운 스무 개의 배수에서 표현해 보자.

풀이와 확인

$79 = 80 - 1$ 이고 $121 = 120 + 1$ 이다. 같은 기준량 계열에서 하나는 부족분을 빼고 다른 하나는 초과분을 더한다.

표현식을 되돌려 읽기

빼기와 곱하기의 범위를 괄호로 구별한다.

$4 \times 20 - 3$ 은 스무 개짜리 네 묶음에서 세 개를 뺀 77이다. 반면 $4 \times (20 - 3)$ 은 열일곱 개 짜리 네 묶음이므로 68이다. 같은 수와 연산 기호를 사용해도 어느 연산이 먼저 묶이는지에 따라 값이 달라진다.

언어의 수 이름을 수식으로 옮길 때도 이런 범위가 중요하다. 낱말의 순서만 따라 기호를 늘어놓기보다 어떤 덩어리가 하나의 단위를 이루는지 분석해야 한다. 괄호는 현대 수식에서 그 결합 관계를 드러내는 장치다.

두 식의 차이는 9다. 첫 식에서는 세 개를 한 번만 빼고 둘째 식에서는 네 번 빼기 때문에 12 개를 뺀다. 식의 모양과 물건 묶음을 함께 비교하면 괄호의 의미가 계산 순서 암기를 넘어 선 명해진다.

괄호가 없는 긴 설명을 들었을 때에는 묶음을 먼저 그림으로 표시한다. 스무 개짜리 네 묶음 전체에서 빼는지 각 묶음에서 빼는지 확인한다. 말을 수식으로 바꾸는 과정은 단어 치환보다 구조 분석에 가깝다.

$$\begin{aligned} 4 \times 20 - 3 &= 77 \\ 4 \times (20 - 3) &= 68 \\ 77 - 68 &= 9 \end{aligned}$$

괄호가 가리키는 묶음 범위의 차이

탐구

$3 \times 20 - 2$ 와 $3 \times (20 - 2)$ 의 차이를 설명해 보자.

풀이와 확인

첫 값은 58이고 둘째 값은 54다. 첫 식은 2를 한 번 빼지만 둘째 식은 세 묶음에서 각각 2를 빼므로 총 6을 뺀다.

보충량으로 더하기

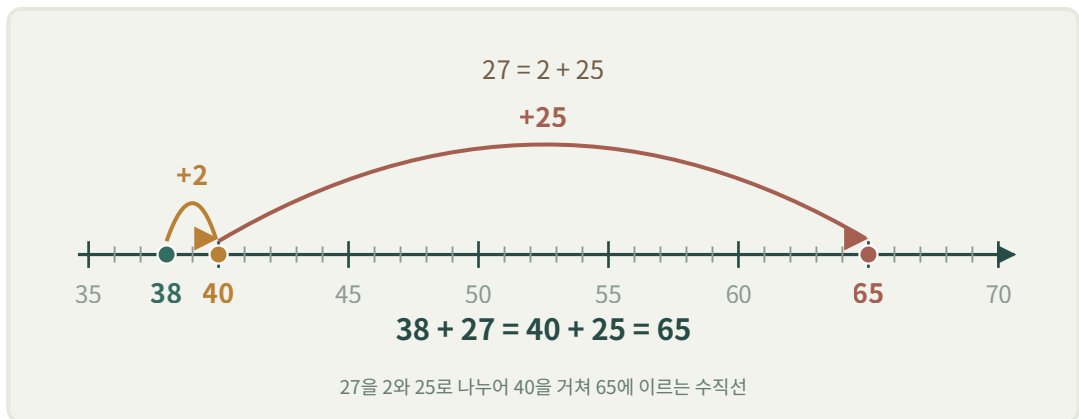
큰 합을 만들기 전에 기준량을 채워 본다.

$38 + 27$ 을 계산할 때 38에 2를 보태 40을 만들 수 있다. 그 2는 27에서 가져왔으므로 나머지는 25다. 따라서 $38 + 27 = 40 + 25 = 65$ 가 된다. 한쪽에 더한 양만큼 다른 쪽에서 빼면 합이 유지된다.

이 과정을 보충이라고 부를 수 있지만 특정 언어의 모든 화자가 같은 암산법을 쓴다고 주장하는 것은 아니다. 수 이름이 제공하는 기준량의 관점에서 새로 설계한 학습 활동이다. 실제 계산 관습을 말하려면 관찰 자료가 필요하다.

그림에서는 27개의 묶음에서 두 개를 옮기는 화살표를 그린다. 물건을 새로 만들거나 없앤 것이 아니므로 전체 수량은 변하지 않는다. 식의 등호마다 왜 값이 보존되는지 설명하면 계산 요령을 다른 숫자에도 적용할 수 있다.

같은 보충법을 뺄셈에 쓸 때에는 두 수에 같은 양을 더하면 차가 유지된다. $83 - 39$ 는 $84 - 40$ 과 같다. 합을 유지하는 이동과 차를 유지하는 이동의 방향이 다르다는 점을 비교한다.



탐구

$59 + 18$ 을 60을 기준으로 계산해 보자.

풀이와 확인

18에서 1을 옮겨 59를 60으로 만들면 17이 남는다. 따라서 $60 + 17 = 77$ 이다. 1을 양쪽에 동시에 더하지 않았는지 확인한다.

부족분으로 곱하기

기준량의 배수에서 모자란 양을 빼면 된다.

19×6 은 $(20 - 1) \times 6$ 으로 바꾸어 계산할 수 있다. 스무 개짜리 여섯 묶음은 120개이며 각 묶음에서 하나씩 부족하므로 총 여섯 개를 뺀다. 답은 114다. 부족분은 한 번만 빼는 것이 아니라 묶음 수만큼 빼야 한다.

이 설명은 분배법칙의 구체적인 모습이다. $6 \times 20 - 6 \times 1$ 이라는 식이 물건 묶음의 이동과 맞아떨어진다. 식을 외우기 전에 각 곱이 어떤 수량을 세는지 말해 보면 오류를 줄일 수 있다.

기준량을 백으로 잡으면 $98 \times 7 = 700 - 14 = 686$ 도 같은 구조로 계산된다. 십진법과 스무 개 묶음에서 모두 사용할 수 있는 일반적인 수학 성질이다. 문화적 출발점과 보편적으로 검산 가능한 계산을 함께 연결한다.

기준보다 큰 수에서도 같은 분배법칙을 쓸 수 있다. 21×6 은 20×6 에 1×6 을 더해 126이다. 기준에서 부족한지 초과하는지에 따라 부호만 달라지며 묶음마다의 차이를 합한다는 구조는 같다.

$$\begin{aligned} 19 \times 6 &= (20 - 1) \times 6 \\ 20 \times 6 - 1 \times 6 \\ 120 - 6 &= 114 \end{aligned}$$

묶음마다 부족한 수를 곱한 뒤 전체에서 뺀다

탐구

39×4 를 40을 기준으로 계산해 보자.

풀이와 확인

40×4 에서 1×4 를 빼면 $160 - 4 = 156$ 이다. 부족한 하나가 네 묶음에 각각 있으므로 4를 빼야 한다.

방언의 차이를 표에 남기기

다른 표현을 오류로 처리하기 전에 사용 범위를 확인한다.

요루바어의 방언을 비교한 연구는 같은 수량을 만드는 덧셈과 뺄셈의 사용 범위가 달라질 수 있음을 보여 준다. 하나의 표에서 본 규칙을 다른 방언에 그대로 적용하면 실제 언어 자료를 잘못 읽을 수 있다. 서로 다른 표현은 먼저 각각의 맥락에서 기록한다.

학습용 비교표에는 수량과 표현 A 및 표현 B를 별도 열로 둔다. 실제 언어 예를 옮길 때에는 연구자가 조사한 지역과 표기 방식을 함께 적는다. 이 책의 20 - 3 같은 수식은 의미 구조를 설명한 것이며 발음과 문법 정보를 모두 담고 있지 않다.

차이를 발견했을 때 더 간단한 체계를 우수하다고 평가할 필요는 없다. 언어의 표현은 사용자의 경험과 관습 안에서 기능한다. 수학 활동에서는 두 표현의 값이 같은지 계산하고 언어학 활동에서는 어떤 조건에서 각 표현을 쓰는지 묻는다.

방언 이름과 조사 시점은 표의 주석으로 남긴다. 언어가 변할 수 있으므로 한 시기의 조사 결과를 모든 시대의 고정 규칙으로 말하지 않는다. 자료가 보여 주는 사용 범위를 존중하는 것이 비교의 출발점이다.

기록 항목	수학적 비교	언어적 비교
대상	수량과 식의 값	지역과 조사된 방언
표현	20 - 3 = 17	철자와 성조와 문법
검사	양쪽 값이 같은지	맥락에서 쓰이는가

수식의 값 비교와 실제 요루바 방언 표현의 확인은 서로 다른 작업이다.

탐구

두 표현의 값이 같으면 발음이나 사용 맥락도 같다고 할 수 있을까?

풀이와 확인

없다. 값의 동등성은 수학적 관계다. 발음과 성조와 방언의 사용 범위는 별도 자료로 확인해야 하는 언어적 정보다.

[YORUBA] Felix Abídémí Fábùnmi. Vigesimal Numerals on Ifè Dialects of Yorùbá. Linguistik Online

나만의 수 표현 사전 만들기

뜻과 구조와 출처를 한 항목 안에서 연결한다.

수 표현 사전의 한 항목을 만들 때에는 먼저 나타내려는 수량을 적는다. 다음에 더하거나 빼기로 분석한 구조를 적고 마지막에 그 표현을 확인한 출처를 붙인다. 실제 언어 자료가 없으면 내가 만든 학습용 표현이라고 분명하게 표시한다.

예를 들어 47을 $2 \times 20 + 7$ 로 분해한 카드는 스무 개 묶음에 관한 수학 카드다. 이것만으로 실제 요루바어의 47을 적었다고 주장할 수는 없다. 언어 사전 항목에는 철자와 성조 및 사용 맥락이 추가로 필요하기 때문이다.

카드끼리 교환한 뒤 상대가 수량을 정확히 복원하는지 확인한다. 오해가 생기면 괄호의 위치나 묶음 단위를 고친다. 이 활동은 계산 능력뿐 아니라 자신이 사용한 표현의 규칙을 다른 사람에게 명확히 전달하는 능력을 기른다.

카드에는 역문제도 붙일 수 있다. 96을 받은 독자가 같은 규칙으로 $5 \times 20 - 4$ 를 만들게 한다. 다만 다른 동등한 식도 가능하므로 허용할 기준량과 형식 조건을 미리 정해 평가한다.

사전 항목	적을 정보
수량	96
분석 구조	$5 \times 20 - 4$
자료 성격	현대 학습용 수식

나만의 수 표현 사전 만들기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

$5 \times 20 - 4$ 라는 학습용 표현을 받은 사람이 복원해야 할 수량은?

풀이와 확인

$100 - 4 = 96$ 이다. 곱셈으로 만든 기준량에서 네 개를 빼는 구조이며 $5 \times (20 - 4)$ 인 80과는 다르다.

소나의 선과 연결

모래 위의 그림과 이야기

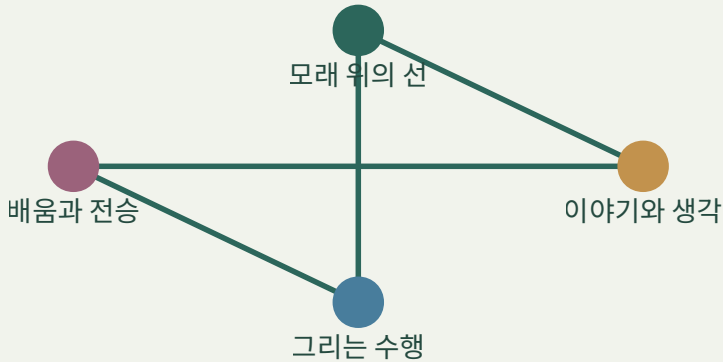
선을 수학으로 읽기 전에 전승의 장면을 살핀다.

유네스코는 앙골라 동부의 룬다 초크웨와 이웃 공동체가 전승하는 소나를 모래 위의 그림과 기하 도형으로 소개한다. 그림은 생각과 믿음 및 자연과 사람의 관계를 표현한다. 선의 규칙만 뽑아내면 이러한 이야기와 전승의 맥락을 놓칠 수 있다.

이 장에서는 소나에서 착안한 점과 선 활동을 다룬다. 제시하는 격자와 경로는 전통 도안을 정확하게 복제한 것이 아니라 수학적 연결을 탐구하기 위해 새로 만든 모형이다. 실제 전승자의 설명을 대신할 수 없다는 점을 처음부터 밝힌다.

점의 배열은 눈에 잘 들어오는 기준을 제공하고 선의 이동은 순서를 만든다. 완성된 그림뿐 아니라 그리는 과정에도 정보가 담긴다. 따라서 두 그림이 비슷해 보이더라도 출발점과 진행 순서를 함께 기록해야 활동을 재현할 수 있다.

소나의 복수와 단수 명칭을 소개하는 자료도 확인할 수 있다. 번역 과정에서 이름의 쓰임이 달라질 수 있으므로 출처의 용법을 따라 설명한다. 익숙하지 않은 이름을 임의로 하나의 장식 유형으로 축소하지 않는다.



소나를 볼 때 함께 읽을 요소의 개념도. 전통 도안의 재현이 아니다.

탐구

완성 사진만으로는 알기 어려운 정보에는 무엇이 있을까?

풀이와 확인

그린 순서와 손을 떼었는지 여부 및 이야기와 몸짓의 흐름을 알기 어렵다. 사진은 중요한 기록이지만 수행 전체를 담지는 못한다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

점의 배열을 좌표로 옮기기

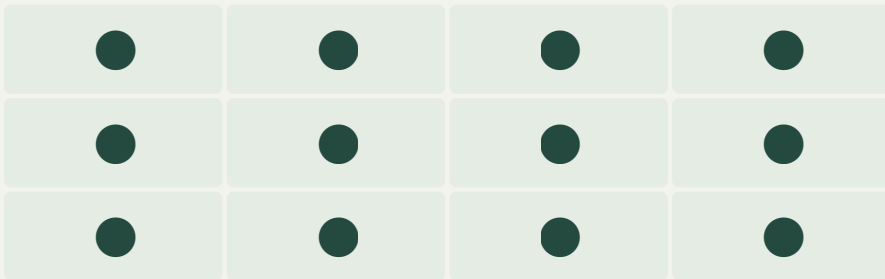
행과 열의 기준을 정하면 같은 위치를 다시 찾을 수 있다.

가로 방향으로 네 점을 놓은 행을 세 줄 만든다. 전체 점은 $4 \times 3 = 12$ 개다. 행은 가로로 이어진 점 묶음이며 열은 세로로 이어진 점 묶음이다. 따라서 이 배열은 세 행과 네 열을 갖는다. 방향과 개수를 함께 적으면 점 수와 줄 수의 혼동을 줄일 수 있다.

왼쪽 아래 점을 기준으로 가로 위치를 x 와 세로 위치를 y 라고 쓰자. x 는 0부터 3까지이고 y 는 0부터 2까지다. 각 점은 두 좌표로 구별된다. 가로 위치만 같아도 세로 위치가 다르면 다른 점이다.

좌표는 현대적인 기록 장치다. 격자를 좌표로 옮겼다고 원래 전통이 이 기호를 썼다고 말하지 않는다. 모형화의 목적은 위치를 정확히 공유하는 데 있다. 종이의 실제 간격이 조금 달라도 행과 열의 관계는 유지될 수 있다.

격자의 바깥을 따라 생기는 작은 칸은 가로 세 칸과 세로 두 칸이므로 여섯 칸이다. 점은 열 두 개다. 점 수와 사이의 칸 수를 나란히 세면 곱셈에서 무엇을 곱하는지가 분명해진다.



소나의 복제가 아닌 4×3 점 배열 활동

탐구

가로 다섯 점과 세로 네 점인 격자에는 점이 몇 개 있을까?

풀이와 확인

$5 \times 4 = 20$ 개다. 선 사이의 칸 수와 점 수를 혼동하지 않는다. 가로 네 칸을 만들려면 점은 다섯 개가 필요하다.

교차점과 지나치는 선

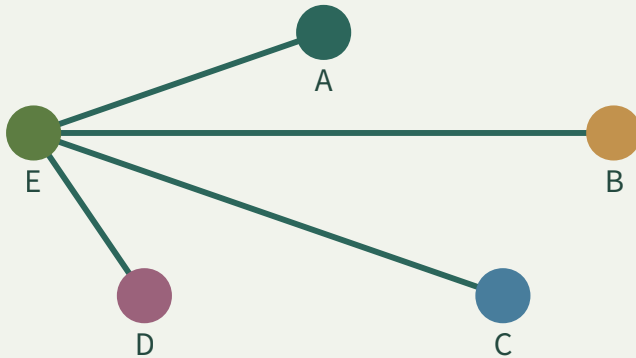
만나는 모양과 연결된 상태는 다를 수 있다.

두 선이 종이 위에서 교차할 때 그 지점에서 방향을 바꿀 수 있는지 정해야 한다. 다리처럼 한 선이 다른 선 위를 지나간다면 교차해 보여도 연결점은 아니다. 그래프를 만들 때에는 이러한 차이를 점의 표시로 구별한다.

네 지점 A와 B와 C와 D를 잇는 두 선 AB와 CD가 가운데서 교차한다고 하자. 교차점에 E를 두어 실제로 연결하면 선은 AE와 EB 및 CE와 ED 네 구간으로 나뉜다. E에서 다른 방향으로 갈 수 있으므로 이동 가능성도 바뀐다.

도형을 분석하기 전에 연결 규칙을 쓰는 이유가 여기에 있다. 같은 그림을 보고도 사람마다 다른 경로를 셀 수 있기 때문이다. 선의 길이나 색만 아름답게 맞추는 것보다 어느 점에서 갈아탈 수 있는지 명시하는 편이 수학적으로 더 중요하다.

그래프의 선을 휘게 그려도 끝점이 그대로면 연결 관계는 유지된다. 선을 곧게 그린 정도가 그래프의 핵심은 아니다. 다만 교차를 연결점으로 바꾸는 수정은 구조를 바꾸므로 단순한 꾸미기와 구별한다.



가운데 E에서 실제로 연결되는 경우의 추상 그래프

탐구

교차점에서 연결되지 않는 두 선에는 연결된 성분이 몇 개일까?

풀이와 확인

다른 곳에서도 만나지 않는다면 두 개다. 교차점을 연결점으로 정하면 하나가 된다. 종이 위의 겹침과 경로상의 연결을 구별해야 한다.

한 번씩 지나는 길 찾기

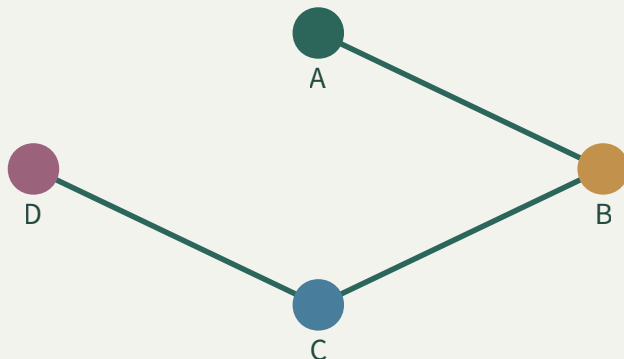
들어온 선과 나가는 선을 짝지어 본다.

선을 한 번씩만 지나며 그림 전체를 따라가는 활동을 생각하자. 중간에 방문한 점에서는 들어오는 선과 나가는 선이 한 쌍을 이룬다. 따라서 출발점과 도착점을 제외한 점의 연결선 수는 짝수여야 한다. 이 조건은 한붓그리기 가능성을 판단하는 실마리다.

연결된 그래프에서 홀수 개의 선이 붙은 점이 두 개라면 그 두 점을 시작과 끝으로 하는 경로를 찾을 수 있다. 홀수 점이 없으면 출발점으로 돌아오는 경로가 가능하다. 여기서는 선을 다시 지나가지 않는다는 현대 그래프 문제의 규칙을 사용한다.

이 정리가 모든 소나 도안의 의미를 설명하는 것은 아니다. 전승의 선을 어떤 그래프로 바꾸었는지에 따라 조건이 달라질 수 있다. 수학적 성질은 정한 모형 안에서 정확하게 사용하고 문화적 설명은 별도의 근거로 보완한다.

한붓 경로를 찾았으면 지난 선에 표시를 하며 실제로 모두 한 번씩 사용했는지 확인한다. 끝점 조건이 맞는다는 사실과 직접 제시한 경로가 정확하다는 사실은 따로 검산할 수 있다.



홀수 차수인 두 끝점을 가진 연결 그래프

탐구

연결선 수가 1과 2와 2와 1인 한 줄 그래프는 어디에서 시작하고 끝나야 할까?

풀이와 확인

연결선 수가 1인 양 끝점에서 시작하고 끝나야 한다. 가운데 점에서는 들어온 뒤 다른 선으로 나가므로 두 선이 짝을 이룬다.

닫힌 경로와 짝수 차수

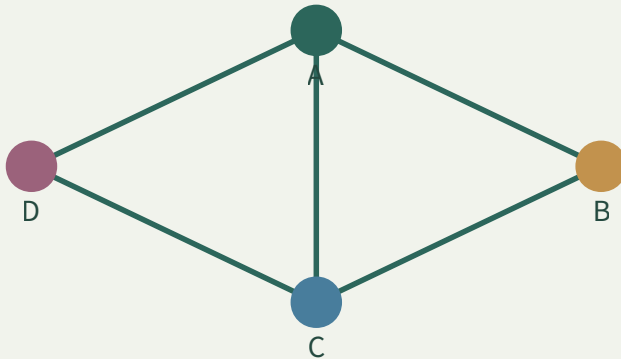
돌아오는 길에서는 모든 방문을 쌍으로 셀 수 있다.

사각형의 네 변을 차례대로 따라가면 출발점으로 돌아온다. 각 꼭짓점에는 두 선이 붙어 있으므로 연결선 수가 모두 짝수다. 한 번 들어간 점에서 한 번 나오는 동작이 짝을 이룬다는 생각을 그림으로 확인할 수 있다.

사각형에 대각선 하나를 더하면 그 대각선의 양 끝점만 연결선 수가 3이 된다. 이제 모든 선을 한 번씩 지나는 길은 가능하지만 출발점과 도착점이 달라진다. 두 홀수 점 중 하나에서 시작해 다른 하나에서 끝나야 한다.

선을 하나 더 그리는 작은 수정이 경로의 성질을 바꾼다. 그래서 완성 그림이 비슷하다는 이유만으로 같은 한붓그리기 문제라고 볼 수 없다. 선을 추가하거나 지울 때마다 각 점의 차수가 어떻게 바뀌는지 기록하면 변화의 이유를 설명할 수 있다.

한붓그리기의 차수 조건에는 선이 있는 부분 전체가 연결되어 있다는 조건이 붙는다. 서로 떨어진 닫힌 고리 두 개는 모든 점의 차수가 짝수여도 손을 떼지 않고 하나의 길로 전부 지날 수 없다. 고립된 점은 지나야 할 선을 만들지 않으므로 별도로 다룬다.



대각선 하나를 더하면 양 끝점의 차수가 홀수로 바뀐다

탐구

사각형에 두 대각선을 모두 넣고 교차점을 연결점으로 정하면 홀수 점은 몇 개일까?

풀이와 확인

네 꼭짓점은 각각 차수 3이므로 홀수 점 네 개다. 가운데 교차점은 차수 4다. 따라서 모든 선을 한 번씩 지나는 단일 경로는 없다.

이어 읽기 / 소나의 선과 연결

차수의 합과 홀수 점의 개수

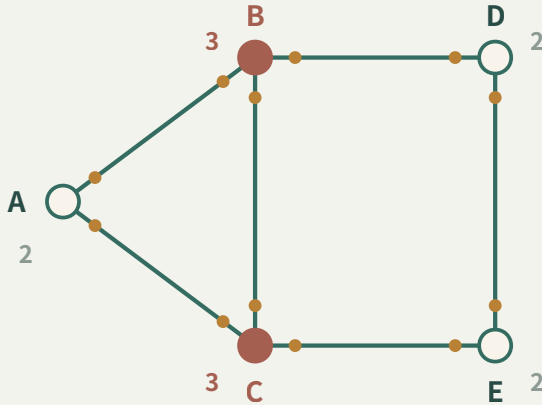
모든 선은 끝을 두 개 가지므로 차수의 합은 언제나 짝수이고 홀수 차수의 점은 짝수 개만 생긴다.

8장은 연결된 그래프에서 홀수 차수의 점이 없거나 두 개이면 한붓 경로를 찾을 수 있다고 했다. 그렇다면 홀수 점이 하나이거나 세 개인 그래프는 왜 예로 나오지 않았을까? 그런 그래프는 처음부터 만들 수 없기 때문이다. 이 단원은 그 이유를 선의 끝을 세는 방법으로 설명한다.

선 하나는 양 끝에서 두 점에 붙는다. 그래서 모든 점의 차수를 더하면 각 선이 정확히 두 번씩 세어진다. 차수의 합은 선의 수의 두 배이므로 언제나 짝수다. 그림의 그래프는 선이 6개이고 차수가 2와 3과 3과 2와 2이므로 합은 $12 = 2 \times 6$ 이다.

차수의 합이 짝수이면 홀수 차수의 점도 짝수 개여야 한다. 짝수 차수들의 합은 짝수이므로 나머지 홀수 차수들의 합도 짝수여야 하는데 홀수를 홀수 개 더하면 홀수가 되기 때문이다. 따라서 홀수 점의 수는 0이나 2나 4처럼 짝수만 가능하다. 그림에서는 B와 C 두 점이 홀수이므로 B에서 출발해 A와 C와 B와 D와 E를 차례로 지나 C에서 끝나는 한붓 경로를 찾을 수 있다.

이 성질은 점과 선으로 정한 그래프 모형 안의 결론이며 소나 도안의 의미를 설명하는 것은 아니다. 도안을 그래프로 옮길 때 교차점을 연결점으로 볼지에 따라 차수가 달라지므로 먼저 규칙을 적어야 한다. 규칙이 정해진 뒤에는 차수의 합을 계산 도구로 쓸 수 있다. 차수를 세었는데 합이 홀수라면 어느 점에서 선을 빠뜨렸거나 두 번 센 것이다.



● 선의 끝 = 선마다 2개

차수의 합

$$2 + 3 + 3 + 2 + 2 = 12$$

$$= 2 \times (\text{선 6개})$$

홀수 점: B와 C

한붓 경로

$B \rightarrow A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C$

선마다 끝이 두 개이므로 차수의 합 12는 선의 수 6의 두 배다.

탐구

차수가 3과 3과 3과 2인 네 점으로 이루어진 그래프를 그릴 수 있을까?

풀이와 확인

그릴 수 없다. 차수의 합이 $3 + 3 + 3 + 2 = 11$ 로 홀수인데 차수의 합은 선의 수의 두 배여야 하기 때문이다. 홀수 점이 세 개라는 사실만 보아도 같은 결론을 얻는다. 그림을 그리다 보면 어딘가에서 선 하나의 끝이 남게 된다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

반복되는 동작을 기록하기

짧은 규칙으로 긴 경로를 재현할 수 있다.

격자에서 오른쪽 한 칸과 위쪽 한 칸을 번갈아 이동하는 경로를 만들자. 동작을 R과 U로 적으면 RURU라는 네 동작이 된다. 기본 묶음 RU를 세 번 반복하면 가로 세 칸과 세로 세 칸 이동한다. 반복 기호는 긴 설명을 압축한다.

하지만 동작 목록만으로는 경로가 완전히 정해지지 않는다. 출발점과 방향의 기준 및 한 칸의 크기가 필요하다. 시작을 왼쪽 아래로 정했는지 화면의 위쪽을 양의 방향으로 정했는지에 따라 결과가 달라질 수 있다.

규칙을 다른 사람에게 주어 같은 경로를 그려 보게 한다. 결과가 다르면 손재주를 탓하기 전에 설명에서 빠진 조건을 찾는다. 전승의 수행을 알고리즘으로 바꾸는 활동은 단순화가 무엇을 보존하고 무엇을 생략하는지 드러내는 좋은 사례다.

R과 U의 횟수가 같아도 순서가 다르면 경로의 모양은 달라진다. RRUU와 RURU는 같은 도착점에 이르지만 지나간 점은 다르다. 최종 위치와 전체 경로라는 두 정보를 구별해 기록한다.

출발점 지정

R 오른쪽 한 칸

U 위쪽 한 칸

RU를 정한 횟수만큼 반복

전통 도안의 복제가 아닌 반복 경로 기록법

탐구

RU를 다섯 번 반복하면 시작점에서 가로와 세로로 각각 얼마나 이동할까?

풀이와 확인

가로 다섯 칸과 세로 다섯 칸 이동한다. 전체 동작은 열 번이다. 이동 거리의 합과 시작점에서의 직선거리는 서로 다른 양이다.

도형을 돌려도 남는 성질

모양의 방향이 달라도 연결 관계는 보존된다.

점과 선으로 만든 경로를 종이째 90° 돌려 보자. 오른쪽을 향하던 선은 위쪽을 향하지만 어느 점과 어느 점이 연결되었는지는 바뀌지 않는다. 각 점의 차수와 한붓그리기 가능성도 그대로다. 이런 성질을 회전에 대해 변하지 않는다고 말한다.

반면 위로 이동한 횟수는 달라질 수 있다. 방향에 의존하는 기록이기 때문이다. 같은 그림을 비교할 때 어떤 정보를 보존 대상으로 삼았는지 정해야 한다. 연결 문제와 위치 문제는 요구하는 기준이 다르다.

좌표를 원점 중심으로 90° 반시계 회전하면 점의 좌표 x 와 y 는 $-y$ 와 x 로 바뀐다. 이 식은 현대 좌표 활동이며 실제 모래 그림의 수행 지침이 아니다. 도형의 변환과 기록 방식의 변화를 함께 살펴보는 데 사용한다.

90° 회전을 네 번 반복하면 원래 위치로 돌아온다. 좌표 변환을 차례로 적용하면 두 번째에는 두 부호가 바뀌고 네 번째에 처음 좌표가 나온다. 동작의 합성도 작은 규칙의 반복으로 검산할 수 있다.

$$\begin{aligned} \text{회전 전: } & x = 2 \quad y = 1 \\ & 90^\circ \text{ 반시계 회전} \\ \text{회전 후: } & x = -1 \quad y = 2 \end{aligned}$$

좌표 표현은 바뀌어도 점 사이의 연결은 유지된다

탐구

점의 좌표가 $x = 2$ 와 $y = 1$ 일 때 90° 반시계 회전한 좌표는?

풀이와 확인

$x = -1$ 과 $y = 2$ 다. 원점에서의 거리는 유지되지만 좌표의 값은 바뀐다. 그림을 그려 방향까지 확인하면 부호 오류를 찾기 쉽다.

같은 도착점에 이르는 다른 길

동작의 횟수가 같아도 그 순서는 달라질 수 있다.

소나의 수행과 현대 좌표 모형을 구별한 상태에서 경로를 세는 질문을 더해 본다. 왼쪽 아래에서 오른쪽 세 칸과 위쪽 두 칸만 움직여 반대 꼭짓점에 도달한다. 되돌아가는 동작은 허용하지 않는다. 이 규칙은 특정 전통 도안의 그리는 법을 복원한 것이 아니다.

모든 경로에는 R 세 번과 U 두 번이 들어간다. RRRUU와 RURRU는 같은 도착점에 이르지만 지나간 선은 다르다. 다섯 동작 자리 중 U가 들어갈 두 자리를 고르면 경로 하나가 정해진다. 서로 다른 자리 두 개를 고르는 방법은 $5 \times 4 \div 2 = 10$ 가지다.

2로 나누는 이유는 두 U의 순서를 구별하지 않기 때문이다. 첫째와 셋째 자리를 선택한 경우를 셋째와 첫째 자리의 선택과 따로 세면 같은 경로를 두 번 센다. 같은 종류의 동작을 세는 문제에서는 무엇을 다른 경우로 볼지 먼저 정한다.

한 교차점을 통과하지 못하도록 하면 단순한 열 가지에서 금지된 경로를 빼야 한다. 오른쪽 한 칸과 위쪽 한 칸인 점까지 가는 길은 두 가지다. 그 점에서 끝까지는 오른쪽 두 번과 위쪽 한 번이므로 세 가지다. 금지점을 지나는 길 여섯 개를 빼면 네 개가 남는다.

세는 대상	경로 수
제약 없는 전체	10
금지점까지	2
금지점에서 끝까지	3
금지점을 피한 경로	$10 - 2 \times 3 = 4$

탐구

오른쪽 두 칸과 위쪽 두 칸만 움직이면 서로 다른 최단 경로는 몇 개인가?

풀이와 확인

네 동작 중 위쪽 동작 두 자리의 선택은 $4 \times 3 \div 2 = 6$ 가지다. 모든 길은 네 칸 길이지만 중간에 지나가는 점은 서로 다를 수 있다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

전통에서 배운 모형을 되돌아보기

수학적 결과와 남겨 둔 맥락을 함께 설명한다.

활동 결과를 발표할 때에는 내가 만든 그래프에서 무엇을 증명했는지 구체적으로 적는다. 예를 들어 홀수 차수의 점 두 개를 찾아 한붓 경로의 시작과 끝을 정했다고 쓸 수 있다. 이것을 소나 전체의 의미를 해명했다는 문장으로 넓히지 않는다.

발표의 다른 칸에는 모형에 들어오지 않은 요소를 적는다. 이야기와 전승자와 그리는 몸의 움직임이 그 예다. 모형의 한계를 밝히는 일은 수학을 포기하는 것이 아니다. 어떤 질문에는 유용하고 어떤 질문에는 다른 자료가 필요한지 알려 주는 일이다.

마지막으로 공동체의 명칭과 출처를 확인한다. 모래 그림이라는 넓은 말만 쓰면 서로 다른 지역의 전통을 섞기 쉽다. 학습용 도해에는 새로 만든 모형이라고 붙이고 전승 소개에는 확인한 자료를 연결해 독자가 두 층위를 구별하게 한다.

모형의 한계를 적은 뒤 더 배우고 싶은 질문을 남긴다. 전승자가 그림을 설명하는 방식이나 도안을 배우는 과정처럼 수식만으로 답할 수 없는 질문이 다음 자료 탐색의 방향을 정해 준다.

결과	함께 적을 범위
한붓 경로 존재	이번에 만든 그래프
소나 소개	특정 공동체와 출처
생략한 요소	이야기와 수행 맥락

전통에서 배운 모형을 되돌아보기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

내 그림에 한붓 경로가 있다는 사실로 전통 도안 모두에 같은 성질이 있다고 말할 수 있을까?

풀이와 확인

없다. 확인한 것은 내가 정한 점과 선 및 연결 규칙의 성질이다. 다른 도안에는 다른 연결 관계가 있을 수 있으므로 각각 살펴야 한다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

만칼라에서 상태와 전략을 읽다

같은 이름 아래의 여러 게임

판의 모양보다 실제 규칙을 먼저 확인한다.

만칼라는 여러 지역에서 전해지는 수 세기와 이동 게임의 넓은 계열명이다. 박물관 소장품에도 서로 다른 모양과 지역의 판이 들어 있다. 구멍 수가 비슷하더라도 씨앗을 옮기는 방향과 잡는 조건 및 종료 규칙은 다를 수 있다. 하나의 규칙을 대륙 전체의 전통으로 소개하지 않는다.

이 장에서는 실제 전통 게임을 완전하게 재현하는 대신 규칙을 단순화한 씨앗 이동 모형을 사용한다. 여섯 칸을 원형으로 연결하고 한 칸의 씨앗을 모두 집어 다음 칸부터 하나씩 놓는다. 잡기와 승패는 처음에는 사용하지 않는다.

규칙을 줄인 이유는 이동 과정과 보존되는 양을 명확하게 보기 위해서다. 특정 전통의 이름을 빌려 만든 새 모형을 표시하면 수학 활동과 문화 소개를 혼동하지 않을 수 있다. 실제 게임을 배우려면 해당 지역의 온전한 규칙을 따로 읽어야 한다.

박물관의 오래된 소장품 설명에는 과거의 분류나 기원 추정 등이 들어 있을 수 있다. 판의 재료와 형태라는 관찰과 기원에 관한 해석을 구별한다. 한 항목의 설명을 계열 전체의 역사로 확대하지 않는다.

규칙	이 장의 학습 모형
판	원형으로 연결한 여섯 칸
이동	다음 칸부터 하나씩 놓기
출발 칸 재방문 씨앗을 놓는다	
처음의 분석 잡기와 승패를 생략	

만칼라 계열 전체의 규칙이 아니라 이 장에서 새로 정한 분석용 규칙

탐구

구멍이 열두 개인 두 게임판이 있다고 해서 같은 게임이라고 판단할 수 없는 이유는?

풀이와 확인

씨앗 분배와 잡기와 종료 조건이 다를 수 있기 때문이다. 판의 외형은 규칙의 일부만 알려 준다. 어떤 규칙으로 사용했는지에 관한 자료가 필요하다.

[MANCALA] 대영박물관 소장 만칼라판. Af1996 17 1 a b l

이동 전후의 상태를 기록하기

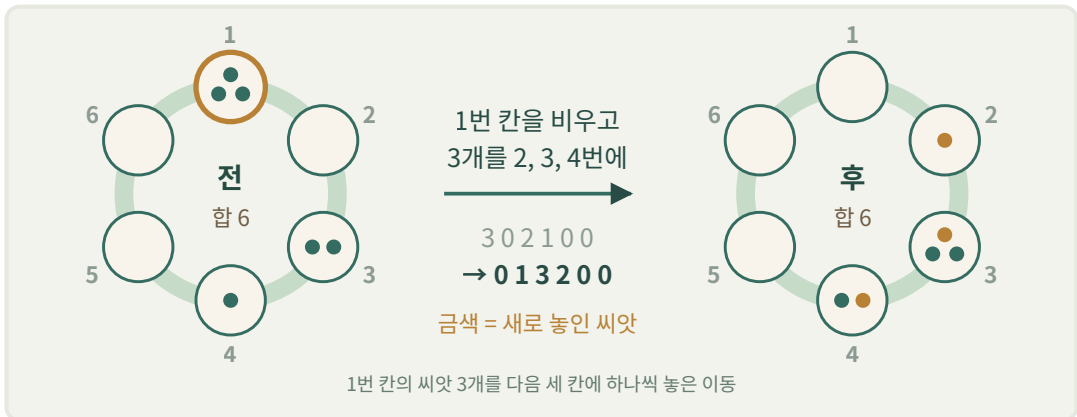
각 칸의 수를 같은 순서로 적으면 변화를 추적할 수 있다.

학습판의 여섯 칸을 1번부터 6번까지 정하고 처음 상태를 3과 0과 2와 1과 0과 0으로 둔다. 1번 칸의 세 씨앗을 집어 2번과 3번과 4번에 하나씩 놓으면 상태는 0과 1과 3과 2와 0과 0이 된다. 칸의 순서를 고정해야 두 상태를 비교할 수 있다.

선택한 칸은 먼저 0으로 만들고 그다음 씨앗을 분배한다. 출발 칸의 씨앗을 그대로 둔 채 더 하면 전체 개수가 늘어나는 오류가 생긴다. 한 차례의 이동을 여러 작은 동작으로 나누어 기록하면 이런 실수를 찾기 쉽다.

상태 기록에는 누구의 차례인지도 필요할 수 있다. 지금 모형은 혼자 움직이므로 생략했지만 두 사람이 번갈아 하는 게임에서는 같은 씨앗 배열이라도 다음 선택권이 다르면 다른 상황이다. 수학적 상태는 미래의 행동을 결정하는 정보를 담아야 한다.

여섯 칸의 이름을 시계 방향으로 붙였는지 반시계 방향으로 붙였는지도 정해야 한다. 같은 숫자열을 보아도 번호의 방향이 다르면 실제 판 위의 이동이 달라진다. 상태와 배치의 대응을 먼저 고정한다.



탐구

이동 전과 뒤의 씨앗 총수는 각각 얼마일까?

풀이와 확인

두 상태 모두 6개다. $3 + 0 + 2 + 1 = 6$ 이며 $0 + 1 + 3 + 2 = 6$ 이다. 위치만 바뀌고 씨앗을 만들거나 제거하지 않았기 때문이다.

변하지 않는 합계

보존량을 알면 잘못된 이동을 빠르게 찾는다.

씨앗을 판 안에서 옮기기만 하는 규칙에서는 전체 씨앗 수가 변하지 않는다. 이런 양을 불변량 또는 보존량이라고 부른다. 모든 칸의 값을 더한 합이 이동 전후에 같아야 한다는 조건은 긴 게임 기록을 검사하는 데 유용하다.

처음 합이 12였는데 어느 단계에서 13이 되었다면 이동 기록에 오류가 있다. 다만 합이 같다고 기록이 반드시 정확한 것은 아니다. 한 칸에 하나를 잘못 더하고 다른 칸에서 하나를 잘못 빼면 합은 유지되기 때문이다.

그래서 합계 검사는 필요한 검사이지만 충분한 검사는 아니다. 선택한 칸의 수와 씨앗을 놓은 경로를 함께 확인해야 한다. 간단한 보존량은 오류를 빨리 찾고 상세한 경로 검사는 어디서 틀렸는지 알려 준다.

합계가 맞는 잘못된 예를 직접 만들어 보면 검산의 한계가 드러난다. 0과 1과 3과 2 대신 0과 2와 2와 2를 적어도 합은 6이다. 따라서 총수 검사 뒤에는 분배 경로를 반드시 대조한다.

놀이 칸 합 + 저장칸 합 = 전체
이동 전 전체 = 이동 뒤 전체
위치는 변해도 개수는 보존

잡힌 씨앗까지 포함해 범위를 정한 보존량

탐구

실제 게임에서 씨앗을 잡아 저장칸으로 옮긴다면 어떤 합을 보존량으로 삼을까?

풀이와 확인

놀이 칸과 저장칸을 모두 합한 씨앗 수를 사용한다. 놀이 칸만 더하면 잡기가 일어날 때 합이 줄지만 판 전체의 씨앗 수는 유지될 수 있다.

여러 바퀴를 도는 분배

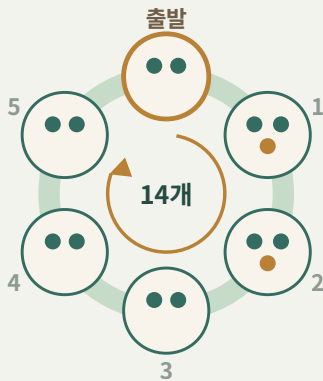
몫과 나머지가 한꺼번에 들어가는 양을 알려 준다.

여섯 칸을 원형으로 놓고 출발 칸도 다시 만날 때 씨앗을 놓는다고 정하자. 씨앗 14개를 분배하면 두 바퀴에 12개가 필요하고 두 개가 남는다. 따라서 모든 칸에 두 개씩 놓인 뒤 다음 두 칸에 하나씩 더 놓인다.

이 규칙에서는 $14 = 2 \times 6 + 2$ 라는 나눗셈이 이동을 압축한다. 몫 2는 모든 칸에 공통으로 더해지는 양이고 나머지 2는 추가로 한 개씩 받는 칸의 수다. 출발 칸을 건너뛰는 다른 규칙을 쓴다면 분모가 달라질 수 있으므로 주의한다.

끝나는 칸도 나머지로 찾을 수 있다. 다음 칸부터 세었을 때 두 번째 칸에서 마지막 씨앗을 놓는다. 다만 나머지가 0이면 다음 칸이 아니라 한 바퀴의 마지막 칸에서 끝난다. 경계 사례를 직접 그려 확인하면 실수가 줄어든다.

씨앗 수가 여섯의 배수일 때 마지막 씨앗은 출발 칸에 놓인다. 여섯 칸 모두를 한 바퀴에 방문한다는 규칙 때문이다. 실제 게임에서 출발 칸을 건너뛰면 이 결론이 달라진다는 점도 함께 확인한다.



$$14 = 2 \times 6 + 2$$

- 몫 2: 여섯 칸 모두 2개씩
- 나머지 2: 1번과 2번에 1개 더

마지막 씨앗은 2번 칸

출발 칸도 다시 만나면 놓는 규칙

씨앗 14개를 여섯 칸에 두 바퀴 돌리고 남은 2개를 놓기

탐구

같은 여섯 칸 모형에서 씨앗 20개를 놓으면 각 칸의 기본 증가량과 추가 칸 수는?

풀이와 확인

$20 = 3 \times 6 + 2$ 이므로 모든 칸에 세 개씩 놓고 다음 두 칸에 하나씩 더 놓는다. 마지막 칸은 출발점 다음의 두 번째 칸이다.

선택의 나무 만들기

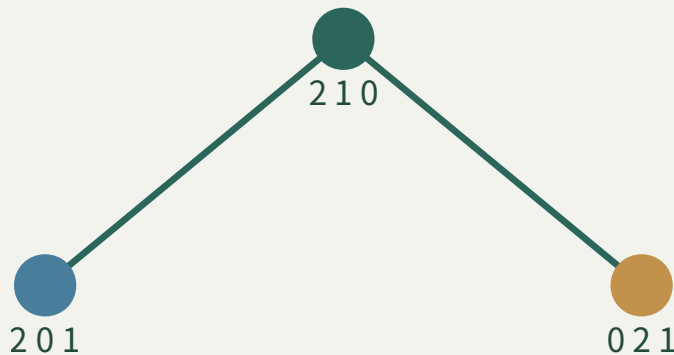
가능한 다음 상태를 빠짐없이 펼친다.

상태가 2와 1과 0인 세 칸 원형 모형을 생각하자. 비어 있지 않은 칸만 선택할 수 있으므로 가능한 첫 선택은 1번과 2번이다. 1번의 두 씨앗을 옮기면 0과 2와 1이 되고 2번의 한 씨앗을 옮기면 2와 0과 1이 된다.

두 결과에서 다시 가능한 선택을 펼치면 나무 모양의 탐색도가 된다. 각 선에는 어떤 칸을 골랐는지 적는다. 상태 이름만 적고 선택을 생략하면 같은 결과에 이르는 서로 다른 동작을 구별하기 어렵다.

탐색을 깊게 할수록 경우의 수가 빠르게 늘 수 있다. 그러나 같은 상태가 다시 나타나면 이미 계산한 결과를 재사용할 수도 있다. 이때 씨앗 배열뿐 아니라 차례와 종료 조건까지 같아야 같은 상태로 취급할 수 있다.

두 갈래를 비교할 때 나무의 가로 위치는 우열을 뜻하지 않는다. 왼쪽에 그린 선택이 더 좋은 수라는 의미는 없다. 선택의 이름과 결과 값을 선명하게 적어 도해의 배치가 판단을 대신하지 않게 한다.



첫 선택 두 가지가 만드는 다음 상태의 분기

탐구

처음 상태 2와 1과 0에서 3번 칸을 선택할 수 없는 이유는?

풀이와 확인

선택할 수 있는 칸을 비어 있지 않은 칸으로 정했기 때문이다. 이동할 씨앗이 없는 동작을 허용하면 아무 변화 없이 차례만 넘기는 등 다른 게임이 된다.

순환과 종료 조건

가능한 상태가 적어도 게임이 저절로 끝나는 것은 아니다.

두 칸 모형에서 한 씨앗을 다음 칸으로 옮기는 규칙만 사용하면 상태 1과 0 다음은 0과 1이며 그다음은 다시 1과 0이다. 가능한 상태는 두 개뿐이지만 이동은 끝없이 반복할 수 있다. 상태 수가 유한하다는 사실만으로 종료를 보장할 수 없다.

실제 게임에는 잡기나 금지 수 및 종료 조건이 따로 들어갈 수 있다. 이러한 규칙은 재미뿐 아니라 반복을 어떻게 다루는지에도 영향을 준다. 새 학습 게임을 만들 때에는 언제 끝나는지를 처음부터 명시해야 한다.

종료를 증명하려면 매번 줄어드는 음이 아닌 정수량 같은 장치를 찾을 수 있다. 하지만 씨앗 총수는 이 모형에서 일정하므로 종료 증명에 바로 쓸 수 없다. 불변량과 감소량은 서로 다른 역할을 한다.

같은 상태로 돌아왔다는 것을 증명하려면 모든 칸과 차례가 처음과 같은지 확인한다. 일부 칸만 같아서는 순환이 아니다. 기록을 완전한 상태 단위로 저장하면 반복을 더 정확하게 찾을 수 있다.



두 상태를 번갈아 반복할 수 있는 단순 이동 모형

탐구

씨앗 총수가 유지된다는 사실만으로 게임이 끝난다고 증명할 수 있을까?

풀이와 확인

없다. 총수 보존은 같은 상태를 반복하는 것을 막지 못한다. 종료를 보이려면 반복을 금지하는 규칙이나 매번 감소하는 양 등 별도의 이유가 필요하다.

당장의 이익과 다음 수

전략을 평가할 때 상대의 선택까지 생각한다.

학습 게임에 점수 규칙을 추가하면 많은 씨앗을 즉시 얻는 수가 좋아 보일 수 있다. 그러나 다음 차례에 상대가 더 큰 이득을 얻는다면 현재 점수만으로 최선의 수를 고를 수 없다. 전략은 연속된 선택의 결과를 비교하는 활동이다.

가상의 선택 A는 지금 4점을 얻지만 상대에게 5점을 허용한다. 선택 B는 지금 2점을 얻고 상대에게 1점을 허용한다. 두 차례의 점수 차만 평가한다면 A는 -1이고 B는 1이므로 B가 낫다. 이 수치는 실제 전통 게임의 기록이 아닌 전략 비교용 예다.

평가 기준을 바꾸면 선택도 달라질 수 있다. 승패만 중요한지 점수 차가 중요한지와 앞으로 몇 차례를 살필지가 영향을 준다. 계산 결과를 제시할 때에는 무엇을 최대화했는지 함께 밝혀야 다른 사람이 결론을 검토할 수 있다.

상대가 항상 가장 큰 이득을 택한다고 가정했는지도 밝혀야 한다. 상대의 선택 모형이 바뀌면 평가가 달라질 수 있다. 전략의 수치는 규칙과 상대 행동에 관한 가정 위에서 계산된다.

선택	내 점수	상대 점수	차
A	4	5	-1
B	2	1	1
C	5	3	2

당장의 이익과 다음 수의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

선택 C가 지금 5점을 얻고 상대에게 3점을 허용한다면 같은 기준에서 평가는?

풀이와 확인

두 차례의 점수 차는 $5 - 3 = 2$ 다. A의 -1과 B의 1보다 크므로 주어진 짧은 평가 기준에서는 C가 가장 좋다. 더 먼 결과까지 좋다는 보장은 없다.

씨앗의 배치를 빠짐없이 세기

가능한 상태와 실제로 도달하는 상태를 나누어 생각한다.

씨앗 네 개를 이름이 붙은 세 칸에 놓는 학습 모형을 생각한다. 씨앗끼리는 구별하지 않으며 빈칸도 허용한다. 이때 상태는 첫 칸과 둘째 칸 및 셋째 칸의 수량으로 정해진다. 같은 네 씨앗이라도 어느 칸에 놓였는지에 따라 다른 상태다.

첫 칸에 놓인 수를 0부터 4까지 나누어 세면 목록을 빠뜨리지 않을 수 있다. 첫 칸이 0이면 남은 네 개를 둘째와 셋째 칸에 나누는 방법은 다섯 가지다. 첫 칸이 1이면 네 가지이며 이후 세 가지와 두 가지 및 한 가지가 남는다.

전체 상태 수는 $5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$ 다. 이 수는 분배 규칙을 실행하지 않아도 셀 수 있다. 특정 시작 상태에서 씨앗을 뿌리는 이동을 적용했을 때 열다섯 상태가 모두 나타나는지는 별도의 문제다. 수량 조건만 맞는 상태와 규칙으로 도달 가능한 상태를 구분한다.

상태를 세면 기록 공간의 크기를 미리 가늠할 수 있다. 열다섯 칸의 표를 만들고 실제로 만난 상태에만 표시해 보자. 같은 상태가 다시 나온 뒤에도 다음에 어떤 칸을 선택하는지에 따라 다른 진행이 가능하다. 상태가 반복되었다는 사실만으로 모든 미래가 같아지지는 않는다.

첫 칸의 씨앗	나머지 두 칸의 배치 수
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1

탐구

씨앗 다섯 개를 세 칸에 같은 조건으로 놓으면 상태는 몇 개인가?

풀이와 확인

첫 칸을 0부터 5까지 정하면 나머지 배치 수는 6과 5와 4와 3과 2와 1이다. 합은 21이다. 이동 규칙으로 실제 도달하는 상태 수가 21이라는 뜻은 아니다.

[MANCALA] 대영박물관 소장 만칼라판. Af1996 17 1 a bl

규칙 카드로 게임 검증하기

다른 사람이 같은 상태를 만들면 설명이 작동한 것이다.

게임을 소개하는 카드에는 판의 칸 수와 시작 씨앗 수를 적는다. 다음에 선택할 수 있는 칸과 이동 방향 및 출발 칸을 다시 만났을 때의 처리 방법을 적는다. 마지막에는 잡기와 종료 및 승리 조건을 적는다. 어느 한 가지가 빠져도 서로 다른 게임이 될 수 있다.

시험자는 카드만 보고 첫 세 차례를 실행한다. 제작자는 결과를 고치기 전에 어느 지시가 모호했는지 기록한다. 규칙을 머릿속으로 알고 있다는 사실과 다른 사람이 읽어 실행할 수 있다는 사실은 다르다.

문화 소개에는 출처를 따로 두고 학습용 변경 사항을 표시한다. 단순화하면서 뻔 규칙이 무엇인지 알면 독자는 실제 게임을 배울 때 혼란을 줄일 수 있다. 좋은 수학 활동은 놀이를 존중하면서도 분석에 필요한 조건을 명확하게 정한다.

규칙을 수정한 뒤에는 같은 시작 상태로 다시 시험한다. 시작값까지 함께 바꾸면 결과의 차이가 규칙 때문인지 입력 때문인지 알기 어렵다. 한 번에 한 조건을 바꾸는 비교가 이해에 도움이 된다.

규칙 항목	확인할 내용
시작	칸 수와 씨앗 수
이동	방향과 건너뛰는 칸
판정	잡기와 종료와 승리

규칙 카드로 게임 검증하기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

출발 칸을 다시 만나면 씨앗을 놓는지 여부가 빠졌다면 어떤 계산이 달라질까?

풀이와 확인

여러 바퀴를 도는 분배의 주기와 마지막 칸이 달라진다. 여섯 칸 모두에 놓는지 다섯 칸만 사용하는지에 따라 몫과 나머지의 기준도 바뀐다.

[MANCALA] 대영박물관 소장 만칼라판. Af1996 17 1 a bl

직조의 격자와 무늬

좁은 띠가 넓은 천이 되는 과정

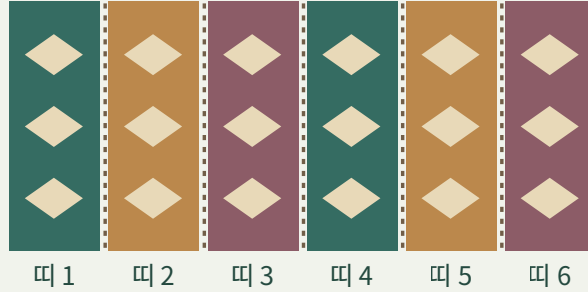
재료의 연결 방식은 완성 무늬의 구조를 만든다.

메트로폴리탄미술관은 켄테 천을 설명하며 따로 짠 좁은 띠를 이어 큰 천을 만드는 과정을 소개한다. 아산테와 에웨의 작품을 같은 물건처럼 합치기보다 소장품의 제작 공동체와 구조를 각각 확인해야 한다. 색과 무늬의 의미도 구체적인 자료를 통해 읽는다.

이 장의 격자 무늬는 실제 전통 도안을 그대로 복제하지 않은 현대 학습용 설계다. 띠의 폭과 반복 단위 및 대칭을 수학적으로 살펴본다. 계산 도해가 직조자의 기술과 문화적 의미를 모두 설명하지는 못한다.

띠를 이어 붙일 때에는 무늬의 시작 위치가 맞아야 한다. 각각의 띠가 정확하게 짜였어도 길이가 다르거나 반복 단위의 위상이 어긋나면 전체 배열이 달라진다. 부분의 규칙과 조립의 규칙을 함께 생각해야 완성된 구조를 이해할 수 있다.

띠를 옆으로 돌려 붙이면 세로 무늬가 가로 무늬로 보일 수 있다. 제작 때의 실 방향과 전시 때의 화면 방향을 구별한다. 완성품의 사진만으로 낱실과 씨실을 단정하지 않고 제작 설명을 함께 읽는다.



여섯 띠를 잇는 경계는 다섯 곳

전통 켄테 문양의 복제가 아닌 띠 조립 학습 모형. 점선은 이음 경계다.

탐구

같은 길이의 띠라도 무늬가 이어지지 않을 수 있는 이유는 무엇일까?

풀이와 확인

반복 무늬가 시작하는 위치나 방향이 다를 수 있기 때문이다. 길이뿐 아니라 반복 단위의 정렬도 맞추어야 경계에서 무늬가 이어진다.

[KENTE] 메트로폴리탄미술관. Asante Akan artist Wrapper

날실과 씨실을 격자로 나타내기

교차의 위아래를 두 값으로 기록한다.

서로 수직으로 놓인 실이 만나는 지점에서 어느 실이 위로 지나가는지 표시해 보자. 학습 모형에서는 날실이 위면 1이고 씨실이 위면 0으로 적는다. 두 값은 색이 아니라 교차 상태를 나타낸다. 실제 직조는 실의 재료와 장력 등 더 많은 조건을 포함한다.

가장 단순한 번갈아 교차 모형에서는 첫 줄을 1과 0으로 반복하고 다음 줄은 0과 1로 반복한다. 네 칸씩 네 줄을 만들면 체커판 같은 배열이 된다. 옆 칸과 아래 칸이 모두 반대 값이라는 규칙을 확인할 수 있다.

같은 이진표를 사용해도 실의 색이 달라지면 보이는 무늬가 바뀔 수 있다. 구조 정보와 색 정보는 별도의 층위다. 따라서 직조 도안을 기록할 때 0과 1이 어떤 성질을 나타내는지 범례를 반드시 붙인다.

0과 1을 모두 뒤집으면 위로 지나가는 실이 서로 바뀐다. 이때 표의 규칙성은 유지되지만 교차 구조는 반대가 된다. 같은 기하 배열이라고 해서 제작상의 앞뒷면까지 같다고 볼 수는 없다.

1	0	1	0
0	1	0	1
1	0	1	0
0	1	0	1

실제 켄테 도안의 복제가 아닌 교차 상태의 이진 모형

탐구

번갈아 교차하는 모형에서 첫 칸이 1이면 바로 오른쪽과 바로 아래는 무엇일까?

풀이와 확인

둘 다 0이다. 대각선 아래 오른쪽은 다시 1이 된다. 가로와 세로로 한 번씩 바뀌면 두 번 바뀐 셈이기 때문이다.

반복 단위의 최소 길이

눈에 띄는 묶음이 언제나 가장 작은 단위는 아니다.

ABABAB라는 무늬는 AB를 세 번 반복한 것으로 볼 수 있다. ABAB를 반복 단위로 택해도 일부 구간을 설명할 수 있지만 가장 작은 반복 단위는 AB다. 최소 단위를 찾으면 긴 무늬를 짧게 기록하고 필요한 재료를 계산하기 쉽다.

ABBABBABB의 경우에는 ABB가 최소 반복 단위다. A와 B 두 종류의 기호만 사용한다고 주기가 반드시 2인 것은 아니다. 기호의 종류 수와 배열의 주기는 서로 다른 정보다.

유한한 천 조각에서는 끝이 잘려 완전한 반복이 보이지 않을 수 있다. 관찰한 부분이 ABBAB라면 뒤에 B가 올 것이라고 예상할 수 있지만 실제 더 긴 무늬가 무엇인지는 추가 자료가 필요하다. 반복 규칙의 추론에도 자료 범위를 표시한다.

서로 다른 색을 같은 기호로 합치면 원래 주기가 더 짧아 보일 수 있다. 색 A와 색 C를 모두 어두운색으로 기록하는 경우가 그렇다. 무늬의 정보를 줄인 방식이 반복 분석에 영향을 준다.

A	B	C	A	B	C
1	1	1	2	2	2

같은 세 기호 묶음이 이어지는 반복 단위

탐구

ABCABCABCABC의 최소 반복 단위와 반복 횟수는?

풀이와 확인

최소 단위는 ABC이며 네 번 반복된다. A만이나 AB만으로는 전체 배열을 같은 순서로 만들 수 없으므로 더 짧은 단위는 아니다.

평행이동으로 무늬 이어 붙이기

모양과 방향을 유지한 채 위치만 바꾼다.

격자 무늬의 작은 모티프를 오른쪽으로 네 칸 옮겨 복사한다고 하자. 각 점의 가로 좌표에 4를 더하고 세로 좌표는 그대로 둔다. 모티프의 크기와 방향이 유지되므로 이것은 평행이동이다. 단순히 비슷하게 다시 그리는 것과 구별된다.

모티프의 가로 폭이 네 칸이면 같은 이동을 반복해 빈틈없이 띠를 채울 수 있다. 폭이 다르면 겹치거나 사이가 벌어질 수 있으므로 이동량과 모티프의 실제 경계를 비교해야 한다. 그림의 중심 사이 거리만 보고 판단하지 않는다.

평행이동 대칭을 가진 무늬에서는 일정한 거리만큼 옮긴 뒤 원래 무늬와 겹친다. 다만 실제 천은 유한하므로 가장자리까지 무한히 이어지는 것은 아니다. 수학적 무늬는 가장자리 영향을 생략한 이상화라는 점을 함께 적는다.

오른쪽 네 칸 이동을 두 번 하면 오른쪽 여덟 칸 이동과 같다. 반대로 네 칸 이동한 뒤 왼쪽 네 칸 이동하면 원래 위치다. 평행이동의 합성은 이동량의 덧셈으로 간단하게 표현된다.

평행이동: $x \rightarrow x + 4$

$y \rightarrow y$

예: $x = 3 \rightarrow 7$ $y = 2$ 유지

격자의 모든 점에 같은 가로 이동을 적용한다

탐구

점의 가로 좌표가 3이고 세로 좌표가 2일 때 오른쪽 네 칸 이동하면?

풀이와 확인

가로 좌표는 7이고 세로 좌표는 2다. 모든 점에 같은 이동을 적용해야 모양이 유지된다. 일부 점만 옮기면 도형이 변형된다.

반사와 회전을 구별하기

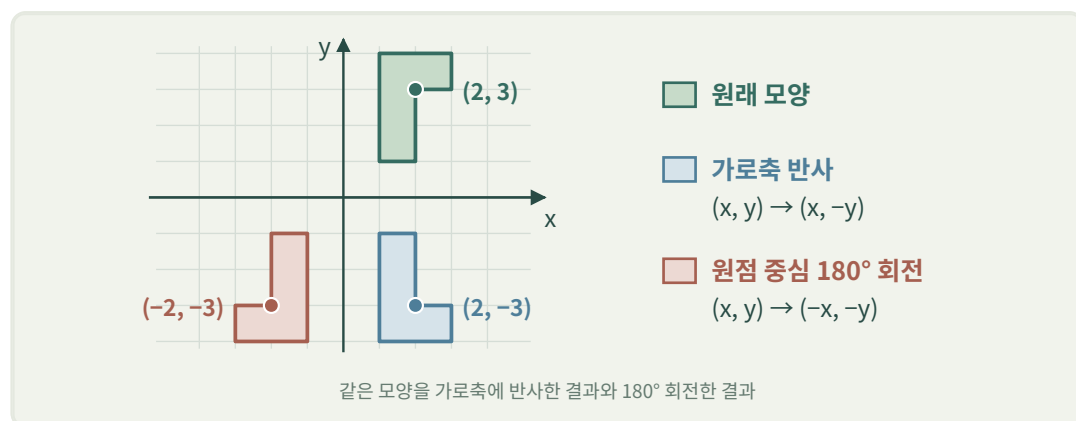
앞아 보이는 두 무늬도 뒤집는 방법은 다르다.

오른손 모양을 종이에서 돌리면 여전히 오른손 모양이다. 거울에 비추면 왼손처럼 보인다. 회전은 평면 안에서 방향을 돌리는 동작이고 반사는 기준선의 양쪽을 맞바꾸는 동작이다. 무늬를 비교할 때 어떤 변환이 필요한지 구별해야 한다.

가로축에 대한 반사는 가로 좌표를 유지하고 세로 좌표의 부호를 바꾼다. 원점 중심의 180° 회전은 두 좌표의 부호를 모두 바꾼다. 점 하나의 위치만 비교하기보다 비대칭 모티프의 여러 점을 함께 옮기면 차이가 드러난다.

대칭축처럼 보이는 선을 찾았으면 선 양쪽의 각 점이 같은 수직 거리에 있는지 검사한다. 색을 포함한 대칭을 말할 때에는 모양뿐 아니라 대응 위치의 색도 같아야 한다. 어떤 정보를 보존하는 대칭인지 범례에 적어 둔다.

모티프 자체가 대칭이면 서로 다른 변환이 같은 모습으로 보일 수 있다. 차이를 배우려면 비대칭인 작은 모양을 사용하는 편이 낫다. 예제를 고르는 일도 관찰하려는 성질에 맞추어야 한다.



탐구

$x=2$ 와 $y=3$ 인 점을 가로축에 반사한 결과와 180° 회전한 결과는?

풀이와 확인

반사하면 $x=2$ 와 $y=-3$ 이다. 180° 회전하면 $x=-2$ 와 $y=-3$ 이다. 가로 좌표의 변화가 두 동작을 구별한다.

띠를 잇는 길이 계산

완성 폭과 재단 폭 사이에는 이음 부분이 있다.

학습용 천을 만들기 위해 폭 8 cm인 띠 여섯 개를 나란히 잇는다고 하자. 각 이음에서 전체 폭이 1 cm씩 줄어든다고 정하면 이음은 다섯 곳이다. 완성 폭은 $6 \times 8 - 5 \times 1 = 43$ cm가 된다. 띠의 수와 이음의 수는 하나 차이가 난다.

이음마다 줄어드는 1 cm는 두 띠에 걸친 총감소량으로 정의했다. 양쪽에서 각각 1 cm가 접한다는 뜻으로 바꾸면 감소량은 2 cm가 되어 답도 달라진다. 실제 제작 계산에서는 시접의 정의를 정확하게 맞추어야 한다.

띠 수를 n 이라 하면 같은 모형의 완성 폭은 $8n - (n - 1) = 7n + 1$ 이다. 문자식은 띠를 하나 늘릴 때 완성 폭이 7 cm씩 증가한다는 점을 보여 준다. 첫 띠에는 연결 손실이 없다는 예외도 식에 들어 있다.

완성 폭이 50 cm 이상이어야 한다면 $7n + 1 \geq 50$ 을 푼다. n 은 정수이므로 최소 일곱 띠가 필요하고 완성 폭은 50 cm다. 제작 수량은 소수 해를 그대로 사용할 수 없다는 점을 확인한다.

$$\begin{aligned} &\text{띠 6개} \rightarrow \text{이음 5곳} \\ &\text{완성 폭} = 6 \times 8 - 5 \times 1 \\ &48 - 5 = 43 \text{ cm} \end{aligned}$$

이음 하나의 총감소량을 1 cm로 정한 제작 모형

탐구

같은 규칙으로 띠 열 개를 이으면 완성 폭은 얼마일까?

풀이와 확인

이음 아홉 곳에서 9 cm가 줄어드므로 $80 - 9 = 71$ cm다. 식 $7n + 1$ 에 $n = 10$ 을 넣어도 같은 결과가 나온다.

색의 비율과 실제 사용량

무늬 칸의 비율과 실 길이의 비율은 같지 않을 수 있다.

가상의 무늬 한 주기가 빨강 세 칸과 파랑 두 칸으로 이루어졌다면 빨강 칸의 비율은 3/5다. 열 주기를 그리면 전체 50칸 중 빨강은 30칸이다. 이 계산은 같은 넓이의 색칠 칸을 세는 문제다.

실제 직조에서 필요한 빨강 실의 길이가 전체의 정확히 3/5라고 곧바로 결론 내릴 수는 없다. 실이 보이지 않는 뒤쪽으로 지나가거나 교차 구조에 따라 길이가 달라질 수 있기 때문이다. 표면 색의 면적과 재료 사용량을 구별해야 한다.

재료량을 계산하려면 작은 시험 조각을 만들어 실제 실 길이를 재는 방법을 사용할 수 있다. 다만 가장자리 손실과 연결 부분이 큰 작품에서도 같은 비율로 늘어나는지 살펴야 한다. 면적 확대와 재료 소비를 연결할 때에는 추가 가정이 필요하다.

무늬 칸의 크기가 서로 다르면 칸 수의 비가 면적 비와 같지 않다. 빨강 칸이 파랑 칸보다 두 배 넓다면 넓이에 가중치를 주어야 한다. 무엇을 같은 단위 하나로 썼는지 먼저 확인한다.

빨강 칸



36

파랑 칸



24

실 길이가 아닌 같은 넓이의 색칠 칸 수 비교

탐구

같은 색칠 주기를 열두 번 반복하면 빨강 칸과 파랑 칸은 각각 몇 개일까?

풀이와 확인

빨강은 $3 \times 12 = 36$ 칸이며 파랑은 $2 \times 12 = 24$ 칸이다. 합은 60칸이고 빨강의 비율은 여전히 3/5다.

두 무늬가 다시 만나는 이음

주기와 시작 위치를 함께 알아야 무늬를 맞출 수 있다.

두 띠를 옆에 놓고 같은 높이에서 특징적인 색칸이 다시 만나는 지점을 찾는다. 첫 띠의 반복 길이는 여섯 칸이며 둘째 띠는 네 칸이라고 하자. 두 특징이 처음 위치에서 나란히 시작하면 다음 일치는 열두 칸 뒤다. 이는 두 반복 길이의 최소공배수다.

시작 위치가 다르면 주기만으로 답할 수 없다. 첫 띠의 특징이 0과 6과 12에 나타나고 둘째 띠의 특징이 2와 6과 10에 나타난다면 첫 일치는 6이다. 그다음 일치는 18이다. 공통 주기 열둘은 같지만 만나는 위치는 달라진다.

둘째 띠를 한 칸 더 옮겨 특징이 1과 5와 9에 나타나게 하면 두 특징은 만나지 않는다. 첫 띠의 위치는 모두 짝수이고 둘째는 모두 홀수이기 때문이다. 그림에서 자꾸 어긋나는 까닭을 짝홀의 조건으로 증명할 수 있다.

이 탐구는 특정 켄테 문양이나 직조자의 계산법을 재현하지 않은 창작 띠 모형이다. 실제 천을 이어 붙일 때에는 시접과 장력 및 무늬의 의미도 함께 고려한다. 수학은 여기서 반복 길이와 시작 위치가 만드는 정렬 조건을 설명한다.

첫 띠 위치	둘째 띠 위치	판단
$0 + 6n$	$0 + 4m$	12칸마다 일치
$0 + 6n$	$2 + 4m$	6에서 첫 일치
$0 + 6n$	$1 + 4m$	짝홀이 달라 불일치

탐구

주기가 8칸과 6칸인 두 띠가 같은 위치에서 시작하면 다음 일치는 언제인가?

풀이와 확인

두 수의 최대공약수는 2이므로 최소공배수는 $8 \times 6 \div 2 = 24$ 다. 8칸 무늬 세 번과 6칸 무늬 네 번이 끝나는 지점에서 다시 만난다.

[KENTE] 메트로폴리탄미술관. Asante Akan artist Wrapper

무늬 해설의 두 층위

수학적 변환과 문화적 의미에 각각 근거를 붙인다.

무늬가 좌우 대칭이라는 설명은 도형을 비교해 검산할 수 있다. 그 무늬가 특정한 격언이나 사회적 지위를 뜻한다는 설명은 제작 공동체와 작품 자료를 통해 확인해야 한다. 수학적 관찰만으로 문화적 의미까지 알아낼 수는 없다.

전시 카드를 만들 때 위쪽에는 제작자와 공동체 및 자료 출처를 적는다. 아래쪽에는 반복 단위나 평행이동처럼 직접 분석한 내용을 적는다. 새로 만든 모티프라면 실제 전통 문양의 이름을 붙이지 않고 학습용 창작 무늬라고 표시한다.

이러한 분리는 서로의 가치를 낮추지 않는다. 오히려 직조자의 기술과 작품의 의미를 존중하면서 수학적 질문을 구체적으로 할 수 있게 한다. 아름다운 무늬를 기하학의 예시로만 소비하지 않고 만든 사람과 제작 과정을 함께 읽는다.

창작 도안을 전시할 때에도 영감을 얻은 자료를 밝혀 둘 수 있다. 출처를 표시하는 것과 실제 전통 도안이라고 주장하는 것은 다르다. 새 작품의 성격과 참고한 문화 자료를 함께 정확하게 설명한다.

설명 층위 필요한 근거

평행이동과 대칭형의 대응 검사

이름과 상징 공동체와 작품 자료

재료와 제작 직조 과정의 기록

무늬 해설의 두 층위의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

대칭 도형을 발견했다는 이유로 그 무늬의 이름이나 상징을 추정하면 왜 곤란할까?

풀이와 확인

같은 기하 형태도 공동체와 상황에 따라 다른 이름과 의미를 가질 수 있기 때문이다. 상징 해석은 도형 자체만으로 결정되지 않는다.

[KENTE] 메트로폴리탄미술관. Asante Akan artist Wrapper

반복과 자기닮음의 모형

닮은 부분을 찾는 새로운 렌즈

현대의 분석 개념과 전통의 실제 설계를 구별한다.

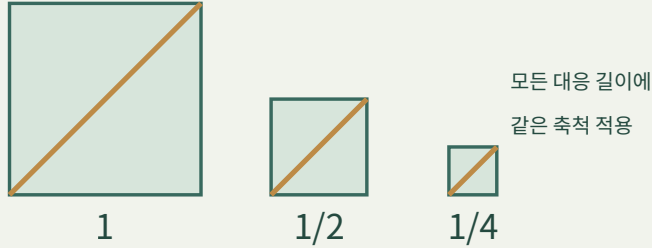
론 에글래시의 연구와 교육 자료는 아프리카 여러 지역의 설계에서 반복과 크기 변화의 관계를 살펴본다. 이 관점은 기하학을 일상적 제작 활동과 연결하는 계기가 된다. 그러나 모든 건축이나 무늬가 프랙털이라는 식으로 대륙 전체를 하나의 특징에 묶어서는 안 된다.

자기닮음은 부분의 모양이 전체와 닮은 관계를 말한다. 실제 물건에서는 재료의 굵기와 제작 한계 때문에 반복이 유한하다. 무한히 작은 부분까지 같은 규칙이 이어지는 수학적 도형은 현실의 물건을 분석하기 위한 이상화다.

이 장은 특정 마을이나 작품을 정확하게 복제하지 않고 크기가 줄어드는 사각형과 분기 모형을 사용한다. 원래 설계자의 의도는 현장 기록으로 확인해야 하며 오늘의 수식만으로 거꾸로 단정하지 않는다. 계산은 모형의 성질을 밝히는 데 집중한다.

자기닮음 여부를 비교할 때에는 먼저 어떤 변환을 허용할지 정한다. 확대와 축소만 허용하는지 회전도 허용하는지에 따라 대응이 달라진다. 같은 모양이라는 말에 포함된 조건을 명시한다.

크기 변화가 있는 닮음



닮은 부분의 관찰 $\neq$ 제작 의도의 확인

한 도형의 대응 길이를 1과 1/2 및 1/4로 줄인 현대 학습 모형

탐구

같은 크기의 모양이 반복되는 것만으로 자기닮음의 크기 변화를 설명할 수 있을까?

풀이와 확인

그것만으로는 부족하다. 같은 크기의 반복과 다른 크기 사이의 닮음은 구분해야 한다. 어떤 부분이 어떤 확대율로 전체와 대응하는지 보여 주어야 한다.

[FRACTAL] 노스캐롤라이나대학교 그린즈버러. African Fractals. Ron Eglash 교육 자료

길이를 절반으로 줄이기

같은 축척을 모든 방향에 적용해야 닮음이 유지된다.

한 변이 16인 정사각형을 절반 크기로 줄이면 한 변은 8이 된다. 다시 절반으로 줄이면 4이고 다음은 2다. 길이는 16과 8과 4와 2로 변하며 매번 앞의 값에 $1/2$ 을 곱한다. 같은 비율이 반복되는 수열이다.

가로만 절반으로 줄이고 세로를 그대로 두면 정사각형은 직사각형이 된다. 원래 도형과 닮지 않으므로 자기닮음 모형의 축소라고 부를 수 없다. 길이의 비를 한 방향에서만 확인하지 않고 모든 대응 길이에서 확인한다.

실제 도안을 줄일 때에는 선의 두께를 어떻게 다룰지도 정해야 한다. 선까지 같은 비율로 줄이면 인쇄에서 보이지 않을 수 있다. 읽기 쉬운 도해를 위해 선 두께를 유지했다면 도해의 선 폭이 실제 축척을 따르지 않는다는 점을 이해해야 한다.

처음 도형과 두 번째 축소 도형의 길이 비는 $1/4$ 이다. 한 번의 비율 $1/2$ 을 두 번 곱한 결과다. 단계 번호와 길이의 비를 표로 정리하면 누적 축척과 한 단계 축척을 혼동하지 않는다.



같은 비율로 줄어드는 정사각형의 상대 크기

탐구

한 변이 24인 정사각형을 세 번 연속 절반으로 줄이면 마지막 변의 길이는?

풀이와 확인

$24 \times (1/2)^3 = 3$ 이다. 단계마다 12와 6과 3이 된다. 세 번 줄였다는 말은 처음 도형을 포함해 도형 네 개를 나열한다는 뜻이다.

축소한 조각들의 전체 넓이

조각 수와 조각 하나의 넓이를 함께 곱한다.

한 정사각형을 길이가 절반인 작은 정사각형 네 개로 나누면 각 조각의 넓이는 원래의 $1/4$ 이다. 네 조각의 합은 1이므로 원래 넓이를 모두 채운다. 길이가 절반이라는 사실만 보고 각 조각의 넓이도 절반이라고 계산하면 전체가 두 배가 되는 모순이 생긴다.

작은 정사각형 세 개만 남기는 모형에서는 남은 넓이가 $3/4$ 이다. 남긴 각 조각에서 같은 규칙을 한 번 더 적용하면 전체 넓이는 다시 $3/4$ 배가 되어 $9/16$ 이 된다. 같은 모양의 축소와 남기는 조각 수가 넓이의 변화를 함께 결정한다.

이 모형은 실제 전통 건축의 평면을 설명하는 것이 아니라 반복 규칙의 학습 모형이다. 현실의 공간에는 길과 출입구 및 기능 같은 조건이 있어 단순한 면적 비만으로 설계를 설명할 수 없다.

남기는 세 조각이 서로 겹치지 않는다는 조건도 필요하다. 겹친 부분이 있으면 조각별 넓이를 단순히 더할 때 중복 계산한다. 개수와 축척만 아니라 조각의 배치가 전체 넓이에 영향을 준다.

$$\text{남는 비율} = 3 \times (1/2)^2 = 3/4$$

$$\text{두 단계: } (3/4)^2 = 9/16$$

$$256 \times 9/16 = 144$$

길이 축척과 조각 수를 함께 사용한 넓이 계산

탐구

처음 넓이가 256일 때 매 단계 $3/4$ 씩 남기면 두 단계 뒤 넓이는?

풀이와 확인

$256 \times 3/4 \times 3/4 = 144$ 다. 첫 단계는 192이며 둘째 단계는 그 $3/4$ 인 144다. 처음 넓이에서 같은 양을 반복해 빼는 과정이 아니다.

분기하는 나무의 개수

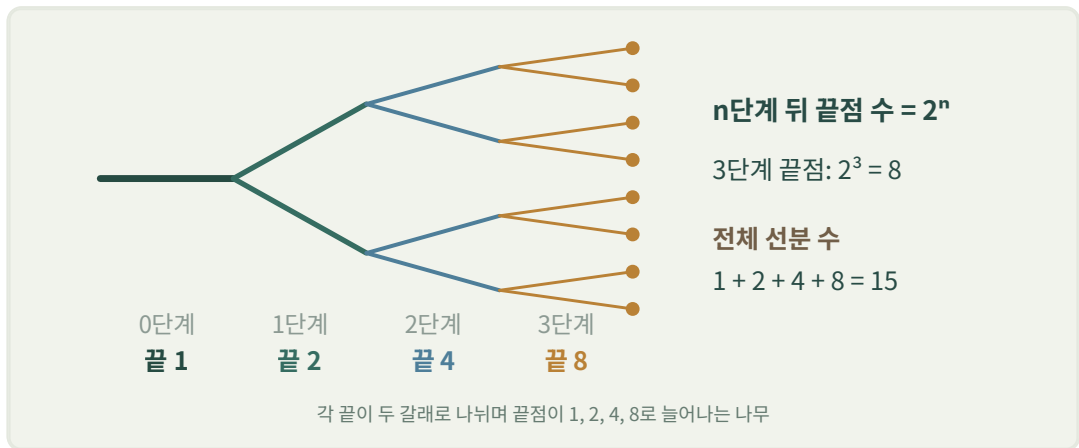
각 끝에서 같은 수로 갈라지면 곱셈이 반복된다.

학습용 분기 모형에서 첫 줄 하나의 끝이 두 갈래로 나뉜다고 하자. 한 번 분기한 끝은 2개이고 두 번 분기하면 4개이며 세 번 분기하면 8개다. n 번 뒤의 끝점 수는 2^n 이다. 각 끝이 모두 같은 규칙으로 갈라진다는 조건이 필요하다.

전체 선분 수는 마지막 끝점 수와 다르다. 처음 선분을 포함하고 세 번 분기했다면 선분은 $1 + 2 + 4 + 8 = 15$ 개다. 끝부분만 세는지 누적된 전체를 세는지에 따라 답이 달라진다.

실제 나무나 공간 조직은 모든 가지가 같은 횟수로 분기하지 않을 수 있다. 이 모형의 목적은 균일한 반복 규칙의 결과를 계산하는 데 있다. 현실의 불균등함을 오차로 버리지 않고 다른 설계 조건을 알려 주는 정보로 볼 수 있다.

세 번 분기한 모형에서 마지막 가지 한 개가 빠지면 끝점 수는 7개가 된다. 균일한 2^n 공식의 조건이 깨진 사례다. 실제 자료가 공식과 다를 때에는 계산 실수뿐 아니라 모형의 가정도 점검한다.



탐구

네 번 분기한 끝점 수와 처음 선분을 포함한 전체 선분 수는?

풀이와 확인

끝점은 $2^4 = 16$ 개다. 전체 선분은 $1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31$ 개다. 두 수는 서로 다른 대상을 세므로 같은 답이 될 필요가 없다.

전체 길이가 늘어나는 조건

가지 수가 늘어도 각 가지가 짧아지는 효과를 함께 보아야 한다.

각 가지가 두 개로 갈라지고 새 가지의 길이는 이전 가지의 $1/3$ 이라고 하자. 한 단계의 새 가지 총길이는 이전 단계 총길이의 $2/3$ 이 된다. 개수는 두 배지만 길이는 각각 $1/3$ 이므로 두 효과를 곱해야 한다.

처음 길이가 9이면 다음 단계의 두 가지는 각각 3이고 합은 6이다. 그다음 네 가지는 각각 1이므로 합은 4다. 단계별 총길이가 9와 6과 4로 줄어든다. 가지가 많아진다는 인상만으로 전체 길이가 커진다고 판단하면 틀린다.

축소 비율이 $1/2$ 이면 단계별 총길이는 일정하고 $3/4$ 이면 $3/2$ 배로 늘어난다. 조각 수와 축척의 곱을 비교하면 증가와 감소의 경계를 찾을 수 있다. 이 분석은 선분 길이에 관한 것이며 넓이에는 축척의 제곱이 들어간다.

단계별 길이와 지금까지의 누적 길이는 다르다. 9와 6과 4를 모두 합하면 19다. 단계별 값이 줄어들어도 누적 합은 계속 늘 수 있으므로 그래프의 세로축이 무엇을 뜻하는지 명시한다.



두 갈래 분기와 $1/3$ 축소를 함께 적용한 길이 변화

탐구

세 갈래로 나뉘고 각 길이가 $1/4$ 이 되면 단계별 총길이는 어떻게 변할까?

풀이와 확인

$3 \times 1/4 = 3/4$ 배가 되므로 줄어든다. 가지 수가 늘어도 각 길이의 감소가 더 크게 작용한 결과다.

차원이라는 수를 조심해서 읽기

같은 모양의 복사본 수와 축척 사이의 관계를 본다.

선분 하나는 길이를 절반으로 줄인 선분 두 개로 채울 수 있다. 정사각형 하나는 같은 축척의 정사각형 네 개로 채울 수 있다. 이 관계를 $N = 2^D$ 로 쓰면 선분은 $D = 1$ 이고 정사각형은 $D = 2$ 다. N 은 필요한 복사본 수다.

축척이 $1/2$ 인 복사본 세 개로 이루어진 이상적인 자기닮음 모형에서는 $2^D = 3$ 이 된다. 따라서 D 는 1과 2 사이에 있다. 이 수는 도형의 채움 정도를 비교하는 한 방식이지만 모든 실제 무늬에 그대로 부여할 수 있는 값은 아니다.

현실의 유한한 물체에 차원을 추정하려면 어떤 길이 범위에서 어떤 측정법을 썼는지 밝혀야 한다. 사진 한 장에서 닮은 모양이 보인다는 이유만으로 정확한 비정수 차원을 선언하지 않는다. 이 장의 식은 조건이 정해진 이상적 모형을 위한 설명이다.

이상적인 자기닮음 차원 식은 조각의 겹침 등 조건을 살펴 사용한다. 아무 복잡한 그림에서 복사본 수를 대충 세어 넣으면 의미 있는 값이 나오지 않는다. 먼저 모형의 정확한 생성 규칙이 필요하다.

대상	$1/2$ 축척 복사본 수	D
선분	2	1
정사각형	4	2
정육면체	8	3

차원이라는 수를 조심해서 읽기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

축척 $1/2$ 의 복사본 수가 8인 입체 모형에서는 D 가 얼마일까?

풀이와 확인

$2^3 = 8$ 이므로 $D = 3$ 이다. 선분과 정사각형 및 정육면체의 사례를 비교하면 길이 축척에 따른 조각 수의 차이를 이해할 수 있다.

유한한 반복의 끝을 정하기

화면의 점과 실제 재료에는 최소 크기가 있다.

한 번이 128픽셀인 정사각형을 계속 절반으로 줄이면 64와 32와 16을 거쳐 1픽셀이 된다. 일곱 번 줄인 결과가 1픽셀이므로 그보다 작은 같은 모양을 화면에서 분명하게 구별하기 어렵다. 수학적 무한 반복과 표시 가능한 반복 수는 다르다.

종이 오리기에서도 가위의 두께와 종이의 강도가 한계를 만든다. 반복을 멈추는 조건을 한 번이 5 mm보다 작아지기 전이라고 정하면 재현 가능한 제작 지침이 된다. 단순히 아주 작게라는 말보다 수치와 조건을 적는 편이 좋다.

디지털 도해에서는 단계 수를 바꾸어 비교할 수 있지만 더 많은 단계가 언제나 더 유익한 것은 아니다. 작은 선이 겹쳐 무늬가 겹게 뭉치면 구조를 읽기 어렵다. 설명하려는 관계를 보여 주는 단계 수를 선택하는 것도 편집의 판단이다.

파일을 확대해서 보더라도 원본의 정보가 무한히 늘지는 않는다. 작은 비트맵의 픽셀을 크게 보여 주는 것과 새로운 세부를 계산하는 벡터 도형은 다르다. 확대 기능의 성격에 맞게 그림을 읽는다.

80 mm

40 mm → 20 mm

10 mm → 5 mm

최소 크기에서 중단

재료의 최소 크기를 고려한 유한한 반복

탐구

한 번 80 mm를 절반씩 줄이되 5 mm까지 허용하면 몇 번 줄일 수 있을까?

풀이와 확인

80에서 40과 20과 10과 5로 이어지므로 네 번이다. 한 번 더 줄이면 2.5 mm가 되어 정한 최소 크기보다 작아진다.

문화 자료를 바탕으로 모형 쓰기

닮음을 발견한 단계와 의도를 확인한 단계를 분리한다.

모형 보고서에는 먼저 어떤 자료의 어느 부분을 관찰했는지 적는다. 그다음 크기가 다른 부분 사이에서 어떤 대응을 찾았는지 그림으로 보인다. 마지막에는 복사본 수와 축척을 어떻게 정했는지 설명한다. 이 순서가 있어야 독자가 분석 과정을 따라갈 수 있다.

설계자가 의도적으로 같은 수학 규칙을 사용했다고 주장하려면 별도의 증언이나 제작 기록이 필요하다. 관찰자가 현대 개념으로 설명할 수 있다는 사실과 제작자의 개념이 같다는 사실은 다르다. 두 종류의 지식을 구별하면서 서로 대화하게 할 수 있다.

보고서의 결론에는 모형이 놓친 기능도 적는다. 집의 배치는 통로와 생활 방식에 영향을 받고 직조는 재료와 기술에 영향을 받는다. 기하학적 관계는 중요한 한 측면이지만 대상을 완전히 대신하는 설명은 아니다.

모형이 맞지 않는 부분을 따로 모아 보면 새로운 질문이 생긴다. 반복이 끊기는 경계나 다른 크기의 공간이 실제 기능과 관련될 수 있다. 어긋난 부분도 대상의 구조를 알려 주는 자료다.

분석 단계 확인할 근거

형태 관찰 대응하는 부분

수학 모형 축척과 복사본 수

의도 해석 제작자의 설명과 기록

문화 자료를 바탕으로 모형 쓰기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

사진에서 비슷한 도형 세 개를 찾았을 때 바로 말할 수 있는 것과 더 필요한 것은?

풀이와 확인

관찰한 부분들의 형태가 비슷하다는 점은 말할 수 있다. 정확한 축척과 설계자의 의도를 주장하려면 측정 자료와 제작 맥락이 추가로 필요하다.

[FRACTAL] 노스캐롤라이나대학교 그린즈버러. African Fractals. Ron Eglash 교육 자료

오늘의 수학과 열린 탐구

아프리카 수학을 현재형으로 읽기

과거의 유산과 오늘의 연구를 함께 바라본다.

아프리카 수학을 오래된 유물과 전통 놀이로만 소개하면 오늘의 연구자와 교육기관이 보이지 않는다. 아프리카수리과학원 AIMS는 수리과학 교육과 연구를 연결하는 기관망의 사례다. 이 책의 마지막 장은 역사 소개에서 배운 정확한 기록과 검산을 현대적인 자료 탐구에 연결한다.

여기서 사용하는 교통 시간과 강수량 및 학생 수는 실제 지역을 평가하려고 수집한 통계가 아니다. 계산의 원리를 설명하기 위해 만든 작은 가상 자료다. 실제 아프리카 국가나 공동체의 상황을 이 숫자로 대표해서는 안 된다.

자료 분석에서는 수식만큼 질문의 범위가 중요하다. 무엇을 측정했고 누구의 경험이 빠졌는지를 확인해야 계산 결과가 의미를 가진다. 과거 자료의 해석에서 지켜 온 출처와 불확실성의 구분은 현재의 데이터에서도 그대로 필요하다.

2026년 10월에 확인한 AIMS의 교육 안내는 수리과학의 대학원 교육과 연구 및 대중 참여를 연결하는 기관망을 소개한다. 교육 과정과 기관망은 바뀔 수 있으므로 이 설명은 확인 당시의 기관 역할을 보여 주는 사례로 읽는다.

질문: 무엇을 비교할까

자료: 실제 관측인가 가상값인가

계산: 단위와 처리 규칙은 무엇인가

해석: 어느 범위에서 결론이 성립할까

현대 자료 탐구에서 수학적 계산과 입력의 성격 및 결론의 범위를 연결한다.

탐구

가상 강수량 자료로 계산한 평균을 실제 지역의 기후라고 소개하면 왜 잘못일까?

풀이와 확인

숫자가 실제 관측에서 나온 것이 아니기 때문이다. 계산 절차가 정확해도 입력 자료의 성격을 바꾸어 해석할 수는 없다.

[AIMS] African Institute for Mathematical Sciences. 기관 소개와 교육 자료

평균만으로 보이지 않는 차이

같은 합계라도 값이 퍼진 모양은 다르다.

가상의 이동 시간 A는 10분과 20분과 30분이고 B는 19분과 20분과 21분이라고 하자. 두 집단 모두 평균은 20분이다. 그러나 A는 가장 빠른 값과 가장 느린 값의 차가 20분이며 B는 2분이다. 평균 하나로 두 상황의 변동을 알 수 없다.

범위는 최댓값에서 최솟값을 뺀 간단한 퍼짐 지표다. 계산하기 쉽지만 중간값들의 분포를 모두 보여 주지는 않는다. 자료가 많아지면 중앙값과 사분위수 등 다른 요약도 함께 사용할 수 있다.

생활 계획에서는 평균뿐 아니라 늦어질 가능성이 중요할 수 있다. 두 교통편의 평균이 같아도 도착 시간을 일정하게 맞춰야 한다면 변동이 작은 쪽을 선호할 수 있다. 어떤 요약이 유용한지는 질문과 사용 상황에 따라 달라진다.

세 값의 중앙값도 두 집단 모두 20이다. 평균과 중앙값을 함께 써도 퍼짐까지 같아지는 것은 아니다. 작은 자료에서는 원값을 모두 보여 주는 표가 요약 통계 몇 개보다 더 많은 정보를 전달한다.

자료	첫째	둘째	셋째	평균
A	10	20	30	20
B	19	20	21	20

실제 관측이 아닌 이동 시간의 평균 비교 모형

탐구

자료 5와 20과 35의 평균과 범위는 얼마일까?

풀이와 확인

합이 60이므로 평균은 20이다. 범위는 $35 - 5 = 30$ 이다. 앞의 두 집단과 평균은 같지만 퍼짐은 더 크다.

표본의 크기를 함께 쓰기

비율이 같아도 관찰한 정보의 양은 다를 수 있다.

가상 설문에서 첫 집단은 10명 중 6명이 찬성했고 둘째 집단은 100명 중 60명이 찬성했다고 하자. 두 비율은 모두 60퍼센트다. 그러나 조사한 사람 수는 열 배 차이가 난다. 비율만 적으면 표본의 크기와 조사 범위를 알 수 없다.

표본이 크다고 자동으로 대표성이 확보되는 것은 아니다. 같은 장소에서 편한 사람만 골랐다면 많은 응답을 모아도 빠진 집단이 있을 수 있다. 무작위 추출 여부와 응답하지 않은 사람의 특성을 함께 고려해야 한다.

보고서에는 분자와 분모를 함께 적는 습관을 들인다. 60퍼센트라는 문장 옆에 100명 중 60명이라고 쓰면 계산을 검산하고 조사 규모를 파악하기 쉽다. 모집단 전체에 대한 결론은 표본을 뽑은 방법까지 검토한 뒤 신중하게 내린다.

찬성하지 않은 사람과 응답하지 않은 사람은 구별한다. 무응답을 모두 반대로 처리하면 비율의 뜻이 달라진다. 분모가 조사 대상 전체인지 응답자만인지 표의 제목에서 분명하게 밝혀야 한다.

$$6 / 10 = 60\%$$

$$60 / 100 = 60\%$$

같은 비율 $\neq$ 같은 조사 규모

비율과 표본 수를 함께 읽는 가상 설문

탐구

20명 중 12명과 50명 중 30명의 찬성 비율은 각각 얼마일까?

풀이와 확인

둘 다 60퍼센트다. 그러나 비율이 같다는 사실은 같은 사람들을 조사했다거나 같은 정확도를 갖는다는 뜻이 아니다.

가장 빠른 경로를 계산하기

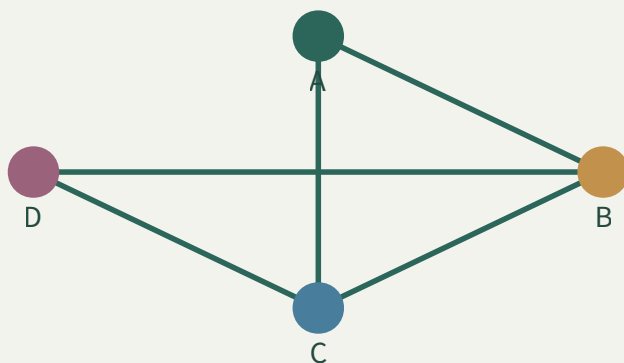
직선거리보다 구간 비용의 합이 목적에 맞을 수 있다.

가상의 네 지점 A와 B와 C와 D를 연결한다. A에서 B까지 4분이고 B에서 D까지 7분이다. A에서 C까지는 6분이고 C에서 D까지는 3분이다. 두 경로의 합은 11분과 9분이므로 주어진 값에서는 C를 거치는 길이 빠르다.

B에서 C까지 1분인 길을 더하면 A에서 B와 C를 거쳐 D로 가는 경로는 8분이다. 구간 수가 더 많아도 총시간은 줄어 들 수 있다. 가장 적은 단계와 가장 적은 비용은 서로 다른 최적화 문제다.

실제 길찾기에는 시간대와 혼잡 및 도로 상태가 영향을 준다. 하나의 고정값으로 계산한 결과는 그 가정 아래에서만 최선이다. 모형을 제시할 때에는 값이 관측인지 추정인지와 어느 시점에 적용되는지를 함께 적어야 한다.

이 예에서는 모든 이동 시간이 양수이므로 같은 지점을 괜히 다시 도는 경로는 시간을 늘린다. 경로 후보를 줄이는 근거가 된다. 비용에 다른 보상이나 제약이 들어가면 이런 판단도 다시 검토해야 한다.



실제 지도가 아닌 경로 선택 모형. 시간은 본문에 제시했다.

탐구

B에서 C까지의 시간이 5분으로 늘어나면 B와 C를 모두 거치는 경로는 얼마일까?

풀이와 확인

$4 + 5 + 3 = 12$ 분이다. 이때는 C만 거치는 9분 경로가 더 빠르다. 한 구간의 변화가 전체 최적 경로를 바꿀 수 있다.

연립방정식으로 자원 배분하기

두 조건을 동시에 만족하는 조합을 찾는다.

가상의 수업에서 작은 꾸러미와 큰 꾸러미를 합해 10개 준비한다. 작은 꾸러미에는 연필 2자루가 들어가고 큰 꾸러미에는 5자루가 들어간다. 연필 총수가 32자루라면 작은 꾸러미 수 x 와 큰 꾸러미 수 y 는 $x + y = 10$ 과 $2x + 5y = 32$ 를 만족한다.

첫 식을 두 배 하면 $2x + 2y = 20$ 이다. 둘째 식에서 이를 빼면 $3y = 12$ 이므로 $y = 4$ 다. 따라서 x 는 6이다. 결과를 두 조건에 넣으면 꾸러미 수 10과 연필 수 32가 모두 맞는다.

이 문제에서는 꾸러미 수가 음이 아닌 정수여야 한다. 식의 해가 소수나 음수로 나오면 현실의 조건을 만족하지 못할 수 있다. 수식을 푸는 과정과 실제 배분이 가능한지 판단하는 과정을 끝까지 연결한다.

총연필 수가 20보다 작거나 50보다 크면 이 조건의 꾸러미 열 개로는 만들 수 없다. 전부 작은 경우와 전부 큰 경우가 가능한 범위의 양 끝이다. 방정식을 풀기 전에 답의 가능 범위를 점검할 수 있다.

$$\begin{aligned}x + y &= 10 \\2x + 5y &= 32 \\3y &= 12 \rightarrow y = 4 \\x &= 6\end{aligned}$$

꾸러미 수와 연필 수를 동시에 맞추는 학습용 배분

탐구

꾸러미 총수는 10개로 유지하고 연필을 35자루로 바꾸면 작은 것과 큰 것은 몇 개일까?

풀이와 확인

$2x + 5y = 35$ 에서 $2x + 2y = 20$ 을 빼면 $3y = 15$ 다. 큰 꾸러미는 5개이고 작은 꾸러미도 5개다.

계산 결과를 다시 만들 수 있게

입력과 규칙을 남겨야 다른 사람이 검산할 수 있다.

평균이 20이라는 결과만 적으면 독자는 어떤 값에서 나온 수인지 알 수 없다. 입력 자료와 누락 처리 방식 및 계산식을 함께 남겨야 재현할 수 있다. 자료에 빈칸이 있었는지도 중요하다. 빈칸을 0으로 바꾸는 것과 계산에서 제외하는 것은 다른 선택이다.

값이 10과 빈칸과 30이라면 관측된 두 값의 평균은 20이다. 빈칸을 0으로 바꾸어 세 값의 평균을 구하면 약 13.33이 된다. 어느 방식이 맞는지는 빈칸이 실제 0인지 관측 누락인지에 달려 있다. 편한 답을 얻으려고 처리 방식을 바꾸지 않는다.

작업 기록에는 원자료를 보존하고 가공한 표를 별도로 둔다. 숫자를 고쳤으면 이유와 날짜를 적는다. 이런 습관은 거대한 연구만을 위한 절차가 아니다. 작은 교실 활동에서도 실수를 찾고 협업의 신뢰를 높이는 데 도움이 된다.

소수점 반올림도 마지막 단계에서 하는 편이 좋다. 중간값을 일찍 반올림하면 뒤의 계산에서 오차가 커질 수 있다. 원래 값과 표시용 값을 구분해 저장하면 다시 계산하기도 쉽다.

처리	사용 값	평균
누락 제외	10과 30	20
누락을 0으로 간주	10과 0과 30	약 13.33

계산 결과를 다시 만들 수 있게의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

강수량 표의 빈칸을 곧바로 0 mm라고 쓰면 어떤 문제가 생길까?

풀이와 확인

관측하지 못한 날을 비가 전혀 오지 않은 날로 바꾸게 된다. 평균 강수량이 낮아질 수 있으며 자료가 실제로 말하지 않은 사실을 추가한 셈이다.

작은 공동 탐구 설계하기

질문을 좁히면 필요한 측정이 구체적이 된다.

학교 안에서 어느 길이 가장 빠른가라는 질문은 출발점과 도착점이 없으면 측정하기 어렵다. 도서관 입구에서 운동장 문까지 걷는 시간을 비교한다고 좁히면 필요한 자료가 분명해진다. 걷는 속도와 측정 시간대도 가능하면 일정하게 맞춘다.

각 경로를 한 번씩만 재면 우연한 지연의 영향을 크게 받을 수 있다. 여러 번 재고 모든 값을 보존하면 평균과 변동을 함께 비교할 수 있다. 불편한 결과를 지우기보다 왜 차이가 났는지를 기록한다. 실제 사람을 관찰한다면 개인을 드러낼 필요가 없는 방식으로 설계한다.

결과 보고에는 가장 빠른 경로라는 결론과 측정 조건을 함께 쓴다. 비가 오는 날이나 혼잡한 시간에는 달라질 수 있다는 범위를 밝혀야 한다. 제한된 자료로 얻은 결과를 모든 상황의 규칙으로 넓히지 않는 태도는 역사 연구와 현대 탐구에 공통으로 필요하다.

측정 결과를 친구와 비교할 때에는 초와 분을 같은 단위로 맞춘다. 90초와 1.5분은 같은 시간이지만 단위를 빼면 다른 값처럼 보인다. 작은 탐구에서도 단위 표기가 결과 해석을 좌우한다.

출발점과 도착점 지정

측정 조건 맞추기

여러 번 재고 기록

평균과 변동 함께 비교

질문에서 검산 가능한 자료까지 이어지는 소규모 탐구

탐구

한 경로만 점심시간에 재고 다른 경로는 빈 시간에 재면 비교가 왜 어려울까?

풀이와 확인

경로의 차이와 혼잡 시간대의 차이가 함께 섞이기 때문이다. 같은 조건에서 재거나 시간대의 영향을 별도로 기록해야 원인을 구별할 수 있다.

다양한 수학을 연결하는 독자에게

정확한 비교는 차이를 남겨 둔 채 관계를 찾는다.

이 책은 알렉산드리아의 논증에서 출발해 유물의 자국과 필사본 및 수 이름과 모래 그림을 살펴보았다. 각 주제는 서로 다른 자료와 맥락을 갖는다. 모두를 하나의 기원 이야기로 합치는 대신 어떤 질문과 도구를 공유하는지 비교하면 연결이 더 풍부해진다.

원의 비례에서는 관측과 가정을 나누었고 이상고에서는 관찰과 해석을 나누었다. 소나와 직조에서는 전통의 의미와 현대의 모형을 구별했다. 현대 자료 분석에서도 입력값과 처리 규칙 및 결론의 범위를 확인했다. 이런 구분은 지식을 멀어지게 하는 장벽이 아니라 정확하게 연결하는 기준이다.

마지막 활동은 마음에 남은 두 장을 골라 공통점 하나와 차이점 하나를 쓰는 것이다. 공통점에는 실제 계산이나 논증을 제시하고 차이점에는 자료의 종류와 맥락을 적는다. 독자가 직접 계산하고 다시 질문할 수 있을 때 책의 탐구는 다음 단계로 이어진다.

책의 출처 목록은 모든 질문에 답하는 종착점이 아니다. 각 자료의 원문과 도해를 다시 읽으며 설명이 어떤 근거에 기대었는지 확인하는 출발점이다. 좋은 독자는 답을 얻은 뒤에도 조건을 다시 살핀다.

다시 묻는 질문독자의 확인

무엇을 관찰했는지원자료와 출처

무엇을 가정했는지모형의 조건

어디까지 말할 수 있는계산과 해석의 범위

다양한 수학을 연결하는 독자에게의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

그림자 측정과 소나 그래프 활동의 공통점과 차이점을 한 가지씩 설명해 보자.

풀이와 확인

둘 다 복잡한 대상을 조건이 정해진 수학 모형으로 바꾼다. 다만 그림자 모형은 각과 거리의 측정을 다루고 소나에서 착안한 그래프는 연결 관계를 다룬다. 필요한 자료와 보존하는 정보가 다르다.

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[EUCLID] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Euclid of Alexandria

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/>

[ERATOSTHENES] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Eratosthenes

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eratosthenes/>

[DIOPHANTUS] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Diophantus of Alexandria

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Diophantus/>

[HYPATIA] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Hypatia

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hypatia/>

[ISHANGO] 벨기에 자연과학연구소. The Ishango Bone

<https://www.naturalsciences.be/en/museum/exhibitions-activities/exhibitions/250-years-of-natural-sciences/the-ishango-bone>

[LOC] 미국 의회도서관. Ancient Manuscripts from the Desert Libraries of Timbuktu

<https://www.loc.gov/exhibits/mali/mali-exhibit.html>

[LOCASTRO] 미국 의회도서관. On the Calculation of Numbers in the Science of Astronomy

<https://www.loc.gov/item/2021667146/>

[YORUBA] Felix Abídèmi Fábùnmi. Vigesimal Numerals on Ifè Dialects of Yorùbá. Linguistik Online

<https://bop.unibe.ch/linguistik-online/article/view/411>

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

<https://ich.unesco.org/en/RL/sona-drawings-and-geometric-figures-on-sand-01994>

[MANCALA] 대영박물관 소장 만칼라판. Af1996 17 1 a bl

https://www.britishmuseum.org/collection/object/E_Af1996-17-1-a-bl

[KENTE] 메트로폴리탄미술관. Asante Akan artist Wrapper

<https://www.metmuseum.org/art/collection/search/316800>

[FRACTAL] 노스캐롤라이나대학교 그린즈버러. African Fractals. Ron Eglash 교육 자료

<https://span.uncg.edu/fractals/homepage.html>

[AIMS] African Institute for Mathematical Sciences. 기관 소개와 교육 자료

<https://learn.nexteinstein.org/>

[EUCLIDVII2] 클라크대학교. 유클리드 원론 제7권 명제 2의 원문 번역과 해설

<https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/bookVII/propVII2.html>