

MATHESIS

세계 수학과 / 내용 중심 개정판

동아시아관

기록에서 출발해 직접 계산하는 수학의 역사

역사 / 도해 / 탐구

REVISED EDITION / 2026

차례

본문의 흐름에 따라 편집한 실제 PDF 쪽번호다.

그림으로 다시 읽는 보충 탐구	4
수를 놓는 공간과 도형을 보는 눈	5
산가지가 만든 계산의 공간	6
구장산술의 문제를 읽는 법	15
유휘와 도형을 나누는 생각	24
조충지와 근삿값의 정밀도	34
손자산경과 나머지의 만남	44
진구소와 계산 절차의 설계	54
양휘의 삼각형과 수의 배열	64
주세걸과 미지수의 배열	74
주판과 진검기의 계산 문화	81
세키와 다케베의 탐구	90
산가쿠의 원과 도형	98
바다를 건너고 책으로 남은 수학	107
참고 자료와 자료 읽기	114

READING THE WORLD

이 책을 여는 질문

이 책은 같은 분량으로 잘라 놓은 전시실이 아니라 서로 다른 질문을 지닌 여덟 권의 책에서 출발한다. 계산을 남긴 재료와 해결해야 했던 문제를 함께 읽으면 비슷한 수식 뒤에 있는 차이가 드러난다. 한 지역을 오늘의 국가 경계에 가두거나 다른 지역을 한 줄의 발전 순서에 놓지 않는다.

읽는 순서는 자유롭다. 수를 기록하는 방법이 궁금하다면 산가지와 자리값 및 키푸를 오가면 된다. 도형의 이유를 묻고 싶다면 넓이의 보존과 완전제곱 및 증명을 이어 읽을 수 있다. 서로 닮은 계산을 발견했을 때에는 구조의 공통점과 역사적 전파의 증거를 따로 살핀다.

이번 개정에서는 원고 단위마다 페이지를 끝내던 방식을 없앴다. 문장과 그림이 차지하는 실제 길이에 따라 다음 페이지로 이어지며 짧은 해설만 남는 쪽을 줄이도록 장 사이의 흐름도 연결했다. 빈 공간을 만들기 위해 본문을 늘리거나 일정한 쪽수를 맞추기 위해 설명을 나누지 않았다.

탐구 문제의 수치와 문자식은 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 재구성이다. 먼저 조건을 읽고 직접 계산한 뒤 풀이를 비교한다. 역사적 사실을 판단할 때에는 본문의 출처와 유물 설명을 함께 확인한다.

동아시아관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이 장은 개정판에 새로 붙인 보충 탐구다. 본문의 각 장이 계산의 결과나 조건을 말로 설명하고 지나간 자리에서 그림을 하나 더 그려 그 이유를 눈으로 확인하도록 구성했다. 단원마다 이어 읽을 본문의 장을 표시했으므로 해당 장을 읽은 뒤 펼치면 흐름이 자연스럽다.

여기에 실은 도해와 수치는 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 현대 재구성이다. 옛 자료가 실제로 이런 그림을 남겼다는 뜻은 아니며 자료가 말하는 범위는 각 단원 끝의 출처에서 따로 확인할 수 있다. 이번 개정에서는 본문에서 표로만 보여 주던 일부 도해도 실제 그림으로 다시 그렸다.

동아시아관 / 01

수를 놓는 공간과 도형을 보는 눈



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

계산 도구는 손의 움직임을 논리의 일부로 만든다. 산가지의 위치를 바꾸거나 주판의 알을 움직일 때에는 값이 보존되는 교환과 계산 결과가 달라지는 조작을 구별해야 한다. 종이에 남은 숫자만 읽으면 보이지 않는 과정이 있다. 이 관의 도해는 어떤 자리가 같은 단위를 뜻하는지 먼저 확인하도록 구성했다.

기하학의 그림도 스스로 이유를 말하지 않는다. 원이 맞닿는 것처럼 보이더라도 중심 사이의 거리와 반지름의 관계를 따로 세워야 한다. 수의 배열과 도형 문제를 오가면서 계산 절차를 설명하는 문장과 답을 뒷받침하는 논증을 함께 읽는다. 서로 다른 시대와 지역의 도구를 한 장면에 놓은 이 삽화는 비교를 위한 구성이다.

동아시아관 / 02

산가지가 만든 계산의 공간

숫자를 놓는 자리

같은 막대도 놓인 자리가 바뀌면 서로 다른 크기를 나타낸다.

산가지를 이해하는 첫걸음은 모양을 외우는 일이 아니라 자릿값을 읽는 일이다. 여기서는 역사적 산가지 글꼴을 그대로 재현하기보다 백의 자리와 십의 자리와 일의 자리를 나눈 계산판을 사용한다. 각 칸의 숫자는 그 칸이 나타내는 단위가 몇 개인지를 알려 준다.

백의 자리에 3을 놓고 십의 자리를 비워 두며 일의 자리에 7을 놓으면 307이다. 가운데 칸을 없애고 두 숫자를 붙여 읽으면 37이 되어 값이 달라진다. 비어 있는 자리는 아무 의미가 없는 공간이 아니라 십이 하나도 없다는 정보를 가진다.

이 원리를 그림으로 나타낼 때에는 막대의 개수와 수 전체의 크기를 혼동하지 않아야 한다. 백의 자리의 막대 하나는 일의 자리의 막대 백 개에 해당한다. 계산판은 작은 도구로 큰 수를 다루게 하는 약속의 공간이다.

백	십	일
3	0	7
3	7	

가운데 자리를 보존해야 두 수를 구분할 수 있다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

자리	백	십	일
307	3	0	7
370	3	7	0

탐구

307과 370에서 같은 숫자 7이 나타내는 값은 어떻게 다른가?

풀이와 확인

307에서는 7이 일곱을 뜻하고 370에서는 칠십을 뜻한다. 7의 모양이 변한 것이 아니라 기준 단위가 열배가 되었다. 두 수의 차는 63이며 이는 70에서 7을 뺀 결과와 같다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

열 개를 하나로 바꾸기

받아올림은 숫자를 쓰는 요령이면서 단위를 바꾸는 과정이다.

새로 만든 계산 문제 $268+157$ 을 계산판에서 생각해 보자. 일의 자리에는 $8+7=15$ 가 모인다. 일 열 개를 십 하나로 바꾸면 일의 자리에는 5가 남고 십의 자리에는 하나가 더해진다. 이때 전체의 양은 변하지 않는다.

십의 자리는 원래 6과 5에 받아온 1을 더하므로 12가 된다. 십 열 개를 백 하나로 바꾸면 십의 자리에는 2가 남는다. 백의 자리는 $2+1+1=4$ 가 되어 최종 결과는 425이다. 받아들임을 생략하면 서로 다른 단위의 양을 같은 칸에 남겨 두는 셈이다.

계산 과정을 설명할 때에는 작은 1을 올려 쓴다고만 말하지 말고 무엇 열 개를 무엇 하나로 바꾸었는지를 밝혀 보자. 이 설명은 십진법의 구조를 보여 준다. 같은 생각으로 16진법이나 시간의 분 단위도 다룰 수 있지만 묶는 개수는 각각 다르다.

묶음	계산	남는 값
일	$8+7=15$	일 5와 십 1
십	$6+5+1=12$	십 2와 백 1
백	$2+1+1=4$	백 4

탐구

일의 자리 계산을 먼저 하지 않고 백의 자리부터 더해도 되는가?

풀이와 확인

가능하다. $200+100=300$ 에 $60+50=110$ 과 $8+7=15$ 를 차례로 합하면 425이다. 다만 각 단계의 중간값을 남겨야 한다. 오른쪽부터 계산하는 방식은 단위 교환을 한 번에 정리하기 편한 절차이다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

빈 칸을 건너는 뺄셈

받아내림에서 빌리는 것은 숫자가 아니라 상위 단위 하나이다.

402-178을 계산할 때 일의 자리 2에서 8을 바로 뺄 수는 없다. 십의 자리가 비어 있으므로 백 하나를 십 열 개로 바꾼다. 다시 십 하나를 일 열 개로 바꾸면 402는 백 3과 십 9와 일 12로 나타난다. 표현은 달라졌지만 합은 여전히 402이다.

이제 일의 자리에서 $12-8=4$ 를 계산한다. 십의 자리에서는 $9-7=2$ 이며 백의 자리에서는 $3-1=2$ 이다. 따라서 차는 224이다. 백을 먼저 교환하고 십을 다시 교환했다는 두 단계를 표시하면 빈 칸을 사이에 둔 계산에서 생기는 오류를 줄일 수 있다.

검산은 $224+178$ 이 402가 되는지 확인하는 일이다. 여기에 대략적인 크기 확인도 덧붙일 수 있다. 402에서 약 180을 빼므로 답은 약 220이어야 한다. 정확한 역산과 어림을 함께 쓰면 자릿값을 잘못 옮긴 실수까지 찾아내기 쉽다.

표현	백	십	일
처음	4	0	2
첫 교환	3	10	2
둘째 교환	3	9	12

탐구

402를 백 3과 십 10과 일 2로 바꾼 뒤 십 10을 그대로 두면 왜 안 되는가?

풀이와 확인

십 하나를 일 열 개로 바꾸었다면 십의 개수는 9로 줄어야 한다. 십 10과 일 12를 함께 남기면 전체가 412가 된다. 교환은 한쪽의 증가와 다른 쪽의 감소를 동시에 기록해야 한다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

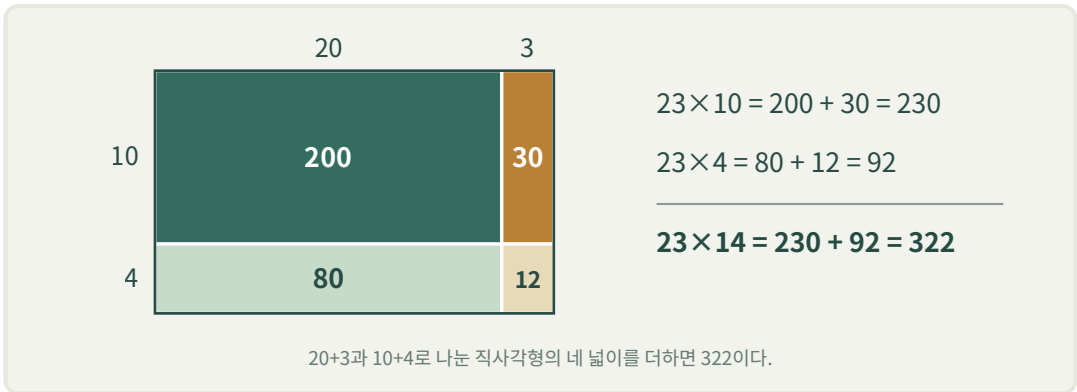
곱셈판을 나누어 읽기

큰 곱을 작은 곱의 합으로 바꾸면 계산의 구조가 보인다.

23×14 를 한 번에 외우려 하지 말고 23×10 과 23×4 로 나누어 보자. 앞의 곱은 230이고 뒤의 곱은 92이므로 합은 322이다. 이 계산은 곱하는 수를 10+4로 분해한 뒤 같은 양을 각각 곱하는 분배법칙에 따른다.

계산판의 두 수를 20+3과 10+4로 모두 나누면 작은 곱이 네 개 생긴다. $20 \times 10 = 200$ 과 $20 \times 4 = 80$ 과 $3 \times 10 = 30$ 과 $3 \times 4 = 12$ 를 합한 결과 역시 322이다. 직사각형을 네 조각으로 나누어 넓이를 더하면 같은 관계를 눈으로 확인할 수 있다.

산가지 계산을 오늘의 세로셈과 비교할 때에는 도구가 다르다는 점과 수학적 관계가 같다는 점을 함께 살핀다. 중간 결과를 어디에 놓는지는 표현의 선택이다. 그러나 십을 곱한 결과를 한 자리 옮겨야 한다는 이유는 어느 표현에서도 자릿값에 있다.



부분	10	4
20	200	80
3	30	12

탐구

23×14 에서 $23 \times 1 = 23$ 을 그대로 적으면 어떤 값이 빠지는가?

풀이와 확인

14의 1은 일 하나가 아니라 십 하나이다. 따라서 해당 부분곱은 23이 아니라 230이어야 한다. $23 + 92 = 115$ 는 23×5 와 같으며 십을 일로 잘못 읽은 결과이다.

나눗셈을 되돌아보기

나눗셈의 몫과 나머지는 곱셈과 덧셈으로 원래 수를 복원한다.

187을 12씩 묶는 교육용 문제를 생각해 보자. 열 묶음을 만들면 120을 사용하므로 67이 남는다. 다섯 묶음을 더 만들면 60을 사용하여 7이 남는다. 따라서 몫은 15이고 나머지는 7이다. 계산의 마지막에는 $187=12 \times 15+7$ 이 성립해야 한다.

나머지가 12 이상이라면 적어도 한 묶음을 더 만들 수 있으므로 계산이 끝난 것이 아니다. 나머지는 0 이상이면서 나누는 수보다 작아야 한다. 이 조건을 함께 적어야 같은 수를 여러 방식으로 표현하는 가운데 표준적인 몫과 나머지를 정할 수 있다.

계산판에서는 덜어 낸 양과 남은 양의 위치를 분명하게 나누는 것이 좋다. 이미 사용한 120을 다시 빼거나 몫의 십의 자리를 일의 자리로 읽으면 전체 관계가 깨진다. 중간 단계에서도 원래 수가 사용한 양과 남은 양의 합인지 확인하면 오류를 일찍 찾을 수 있다.

단계	묶음 수	사용량	남은 양
처음	10	120	67
다음	5	60	7
합계	15	180	7

탐구

$187=12 \times 14+19$ 도 참인데 왜 몫 14와 나머지 19라고 하지 않는가?

풀이와 확인

등식은 참이지만 나머지 19가 나누는 수 12보다 크다. 19에서 12를 한 번 더 덜어 몫을 15로 늘리고 나머지를 7로 줄여야 한다. 나머지의 범위를 정하면 결과가 하나로 정해진다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

부호를 공간으로 구별하기

반대 방향의 양을 구분하면 빛과 잔고를 하나의 계산으로 다룰 수 있다.

같은 크기의 양이라도 들어오는 양과 나가는 양은 서로 다른 역할을 한다. 교육용 장부에서 수입 8과 지출 5를 각각 +8과 -5로 적으면 합은 +3이다. 여기의 부호 표기는 현대적 설명이다. 역사 자료의 막대 색과 배치 규칙을 현대 기호와 완전히 같은 것으로 단정하지 않는다.

서로 반대인 한 쌍을 지워도 전체 차이는 변하지 않는다. 양의 표식 여덟 개와 음의 표식 다섯 개를 놓고 다섯 쌍을 지우면 양의 표식 세 개가 남는다. 이 표현은 $8+(-5)=3$ 을 설명한다. 반대로 양이 적으면 음의 표식이 남는다.

뺄셈에서는 없애야 하는 표식이 부족할 때 양과 음의 쌍을 함께 추가할 수 있다. 쌍의 합은 0이므로 전체 값은 유지된다. 계산 규칙을 무조건 외우기 전에 어떤 변환이 값을 보존하는지 확인하는 것이 부호 있는 계산을 이해하는 핵심이다.



상황	식	결과
수입이 더 많음	$8-5$	3
지출이 더 많음	$3-5$	-2
서로 같은 양	$5-5$	0

탐구

3-5를 표식으로 계산하려면 어떤 조작이 필요한가?

풀이와 확인

양의 표식 세 개에 양과 음의 쌍 두 개를 더한다. 전체 값은 여전히 3이다. 양의 표식 다섯 개를 없애면 음의 표식 두 개가 남으므로 답은 -2이다. 표식 추가와 제거를 각각 기록하면 부호의 뜻이 분명해진다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

기록하지 않은 중간 단계

움직이는 계산 도구를 읽을 때에는 사라진 절차를 함부로 채우지 않는다.

종이에 쓰인 식은 계산 뒤에도 남지만 계산판 위의 막대는 다음 단계에서 옮겨질 수 있다. 따라서 완성된 답만 보아서는 어떤 중간 배열을 거쳤는지 알기 어렵다. 역사적 계산을 재현하려면 기록에 분명하게 나오는 지시와 현대 독자가 보충한 절차를 구별해야 한다.

예를 들어 $36 \times 25 = 900$ 이라는 결과에는 여러 계산 경로가 가능하다. 36×100 을 4로 나눌 수도 있고 30×25 와 6×25 를 더할 수도 있다. 답이 같다는 사실은 두 방법이 수학적으로 동등함을 보여 주지만 특정한 옛 계산자가 어느 방법을 썼는지까지 알려 주지는 않는다.

재현 활동에서는 계산 전 배열과 한 번 움직인 뒤의 배열을 나란히 남겨 보자. 무엇이 바뀌었고 어떤 값이 보존되었는지 설명하면 도구의 사용법을 검토할 수 있다. 빈틈을 감추기보다 재구성한 부분을 밝히는 태도가 역사 읽기와 수학 검증을 함께 정확하게 만든다.

탐구

36×25 를 두 방법으로 계산한 뒤 공통으로 확인할 관계는 무엇인가?

풀이와 확인

$36 \times 25 = 36 \times 100 \div 4$ 와 $36 \times 25 = 30 \times 25 + 6 \times 25$ 가 각각 성립하는지 확인한다. 첫 방법은 $25 = 100 \div 4$ 를 이용한다. 둘째 방법은 $36 = 30 + 6$ 과 분배법칙을 이용한다. 어느 방법을 역사적으로 사용했는지는 별도의 근거가 필요하다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

나만의 계산판 설명서

좋은 계산 설명은 결과보다 단위와 보존 관계를 먼저 보여 준다.

이 장의 정리 활동은 $405+287-196$ 을 계산판으로 설명하는 것이다. 처음에는 백과 십과 일의 칸을 마련한다. 405와 287을 더하면 일의 자리 $5+7$ 에서 십 하나가 생기므로 692가 된다. 이어서 196을 빼는 과정을 별도로 남긴다.

692에서 일의 자리의 뺄셈을 위해 십 하나를 일 열 개로 바꾸면 백 6과 십 8과 일 12가 된다. 다시 십의 자리에서 9를 빼기 위해 백 하나를 십 열 개로 바꾸면 백 5와 십 18과 일 12로 나타낼 수 있다. 각 교환이 전체 값을 보존하는지 확인한다.

마지막으로 일은 6이 남고 십은 9가 남으며 백은 4가 남는다. 따라서 답은 496이다. 설명서에는 최종 답뿐 아니라 중간 배열과 교환 이유를 함께 넣는다. 다른 사람이 설명만 보고 같은 계산을 재현할 수 있다면 도구의 규칙을 충분히 전달한 것이다.

단계	값
덧셈 결과	692
뺄셈 결과	496
다른 순서	$405+91=496$

탐구

계산 순서를 $405+(287-196)$ 으로 바꾸어 검산하라.

풀이와 확인

$287-196=91$ 이다. $405+91=496$ 이므로 앞의 결과와 같다. 이 순서에서는 받아올림이 줄어 계산이 간단해진다. 원래 식에서 괄호를 옮겨도 되는 이유를 덧셈과 뺄셈의 관계로 설명하되 모든 괄호 이동이 허용된다고 일반화하지 않는다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

구장산술의 문제를 읽는 법

생활 문제와 일반 절차

특정한 수치의 문제에서도 여러 상황에 다시 쓰이는 계산법을 찾을 수 있다.

구장산술은 넓이와 곡물과 분배와 방정식 등 다양한 계산 문제를 담은 고전이다. 전승 과정에서 본문과 주석이 겹쳐졌으므로 한 사람의 한 번의 집필로 완성된 책처럼 소개하지 않는다. 유희가 263년에 남긴 주석은 이 책을 이해하는 중요한 층위이다.

이 장에서는 원문 문제를 길게 옮기지 않고 구조를 살린 새로운 교육용 수치를 사용한다. 곡식 84단위를 세 사람에게 같은 양으로 나누면 한 사람의 몫은 28단위이다. 여기서 중요한 것은 84라는 수 자체보다 전체량을 받는 사람 수로 나눈다는 관계이다.

문제를 읽을 때에는 어떤 양이 주어졌는지와 무엇을 구하는지와 단위가 무엇인지를 먼저 표시한다. 그 다음에 계산 절차를 쓰고 마지막에 결과를 원래 상황으로 해석한다. 계산이 맞더라도 서로 다른 단위의 양을 더했다면 문제에 맞는 해답이 될 수 없다.



84를 같은 세 몫으로 나누면 각 몫은 28이다.

탐구

곡식 84단위를 네 사람에게 나누는 문제로 바꾸면 무엇을 고치고 무엇을 유지하는가?

풀이와 확인

나누는 수를 3에서 4로 바꾸어 $84 \div 4 = 21$ 을 계산한다. 전체량을 사람 수로 나눈다는 구조와 한 사람의 몫이라는 해석은 유지된다. 수치가 달라져도 같은 절차가 적용된다는 점이 일반적인 계산법의 힘이다.

분수는 같은 크기의 조각

분모가 다른 분수를 더하려면 조각의 크기부터 맞추어야 한다.

교육용 문제에서 밭의 $\frac{2}{3}$ 를 먼저 일구고 다른 밭의 같은 전체 크기를 기준으로 $\frac{1}{4}$ 만큼을 더 일구었다고 하자. 두 비율을 더하려면 전체를 같은 수의 조각으로 나누어야 한다. 3등분과 4등분을 함께 표시하면 12개의 같은 조각을 만들 수 있다.

$\frac{2}{3}$ 는 $\frac{8}{12}$ 이고 $\frac{1}{4}$ 는 $\frac{3}{12}$ 이다. 따라서 합은 $\frac{11}{12}$ 이다. 분자를 더하면서 분모를 $3+4=7$ 로 바꾸는 방식은 조각의 크기와 개수를 동시에 뒤섞는다. 3등분 조각 두 개와 4등분 조각 한 개가 7등분 조각 세 개가 되는 것은 아니다.

공통분모는 반드시 최소일 필요는 없다. 24를 사용하면 $\frac{16}{24}+\frac{6}{24}=\frac{22}{24}$ 이고 약분하면 같은 결과가 나온다. 다만 작은 공통분모를 쓰면 중간 수가 작아져 계산이 편리하다. 효율과 정당성을 구분하면 여러 풀이를 비교할 수 있다.

비율	12등분 표현
$\frac{2}{3}$	$\frac{8}{12}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{12}$
합	$\frac{11}{12}$

탐구

$\frac{11}{12}$ 에서 $\frac{1}{6}$ 을 빼고 남은 비율을 구하라.

풀이와 확인

$\frac{1}{6}$ 은 $\frac{2}{12}$ 이므로 $\frac{11}{12}-\frac{2}{12}=\frac{9}{12}=\frac{3}{4}$ 이다. 전체를 12칸으로 나눈 그림에서 표시된 11칸 중 두 칸을 지우면 아홉 칸이 남는다. 이 결과를 네 등분의 세 조각으로 다시 묶을 수 있다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

약분으로 단위를 정리하기

약분은 양을 줄이는 일이 아니라 같은 비율을 더 작은 수로 쓰는 일이다.

곡물 42단위 가운데 30단위를 배분했다면 배분한 비율은 $30/42$ 이다. 분자와 분모를 6으로 나누면 $5/7$ 이 된다. 전체량과 배분량을 동시에 같은 묶음으로 세었으므로 비율은 변하지 않는다. 분자만 나누면 다른 양을 나타내게 된다.

공약수를 찾는 한 방법은 큰 수에서 작은 수를 반복해서 덜어 내는 것이다. $42-30=12$ 이고 30에서 12를 두 번 덜면 6이 남는다. 12가 6으로 나누어떨어지므로 두 수의 최대공약수는 6이다. 오늘의 나머지 연산으로 이 과정을 더 짧게 기록할 수 있다.

같은 비율인지 확인할 때에는 교차곱도 쓸 수 있다. 30×7 과 42×5 가 모두 210이므로 두 분수는 같다. 다만 계산의 뜻을 잊지 않도록 칠 등분한 전체 가운데 다섯 묶이라는 해석을 함께 적는다. 약분은 수의 표기를 간단하게 하면서 관계를 보존한다.

나눗셈	나머지
$42=30 \times 1+12$	12
$30=12 \times 2+6$	6
$12=6 \times 2$	0

탐구

$30/42$ 와 $15/21$ 가운데 어느 것이 더 큰가?

풀이와 확인

두 분수는 같다. 30과 42를 각각 2로 나누면 15와 21이 된다. 두 번째 분수를 다시 3으로 나누면 $5/7$ 이다. 분자만 비교하면 30이 더 커 보이지만 분모까지 함께 고려해야 한다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

몫이 다른 분배

같은 전체라도 분배 기준이 달라지면 각자의 몫이 달라진다.

세 팀이 각각 2일과 3일과 5일 동안 같은 속도로 일했다고 가정하자. 보상 120단위를 작업 일수에 비례하여 나누려면 비의 합 $2+3+5=10$ 을 먼저 구한다. 비 한 몫의 값은 $120 \div 10 = 12$ 이므로 세 팀은 각각 24와 36과 60을 받는다.

여기에는 같은 속도로 일한다는 조건이 들어 있다. 하루의 작업량이 서로 다르면 일수만으로 분배할 수 없다. 첫 팀이 하루에 두 배를 일했다면 작업량의 비는 4:3:5가 되고 몫도 달라진다. 비례배분은 계산식 이전에 어떤 기준을 선택했는지가 중요하다.

배분 뒤에는 세 몫의 합이 전체 120과 일치하는지 확인한다. 또한 $24 \div 2$ 와 $36 \div 3$ 과 $60 \div 5$ 가 모두 12인지 확인하면 같은 기준이 적용되었는지 알 수 있다. 전체 합 검산과 비율 검산은 서로 다른 종류의 오류를 발견한다.

팀	작업 일수	몫
가	2	24
나	3	36
다	5	60

탐구

작업량의 비가 4:3:5라면 120단위를 어떻게 나누는가?

풀이와 확인

비의 합은 12이고 한 몫은 10이다. 따라서 40과 30과 50으로 나눈다. 앞의 배분과 비교하면 총량은 같지만 기준이 바뀌었으므로 몫이 달라진다. 어느 배분이 적절한지는 문제에서 정한 기준을 확인해야 한다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

두 가정으로 찾는 참값

결과가 일정한 비율로 변하면 두 번의 가정 사이에서 답을 찾을 수 있다.

물건 한 개의 값을 모르는 상황을 새로 만들어 보자. 다섯 개를 사고 포장비 6을 더하여 총 41을 지불했다. 한 개의 값을 5로 가정하면 총액은 31로 10이 부족하다. 값을 9로 가정하면 총액은 51로 10이 남는다.

두 가정이 참값에서 같은 거리만큼 어긋났으므로 답은 5와 9의 가운데인 7이다. 이를 식으로 적으면 $5x+6=41$ 이다. 총액은 물건 한 개의 값이 1 증가할 때마다 5씩 증가하므로 오차가 일차적으로 변한다. 이 조건이 두 가정을 이용하는 방법을 가능하게 한다.

오차의 크기가 다르면 단순한 평균을 쓰면 안 된다. 가정값 6과 10의 총액은 36과 56이다. 각각 5가 부족하고 15가 남으므로 참값은 두 가정의 가운데보다 6에 더 가깝다. 부족한 양과 남는 양의 비를 가정값 사이 거리의 비로 옮기는 것이 핵심이다.

가정값	총액	41과의 차
6	36	-5
7	41	0
10	56	15

탐구

가정값을 6과 10으로 잡았을 때 오차를 이용해 답을 구하라.

풀이와 확인

총액은 36과 56이므로 각각 5가 부족하고 15가 남는다. 전체 오차 차 20 가운데 부족분 5의 비율은 $1/4$ 이다. 가정값 사이의 차 4의 $1/4$ 만큼 6에서 이동하면 7이다. 단순 평균 8은 답이 아니다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

두 번의 가정을 잇는 직선

가정법의 성공 조건을 밝히면 적용할 수 없는 문제도 알아볼 수 있다.

계산 결과를 $f(x)=ax+b$ 라고 적자. 목표값 T 를 두고 서로 다른 가정 u 와 v 를 넣으면 오차는 $f(u)-T$ 와 $f(v)-T$ 이다. a 가 0이 아니면 오차가 x 에 따라 일정한 비율로 변한다. 따라서 두 결과 사이에서 선형 보간하여 정확한 답을 찾을 수 있다.

$5x+6=41$ 에서 $u=6$ 은 5가 부족하고 $v=10$ 은 15가 남는다. 전체 오차 변화 20 가운데 부족분이 차지하는 비율은 $1/4$ 이다. 가정값 차이 4의 $1/4$ 만큼 6에서 이동하면 7이다. 두 오차의 부호를 포함해 기록해야 이동 방향을 잃지 않는다.

같은 절차를 $x^2=2$ 에 사용하면 한 번에 정확한 답을 얻지 못한다. 1을 넣으면 1이 부족하고 2를 넣으면 2가 남는다. 선형 보간값은 $4/3$ 이지만 그 제곱은 $16/9$ 이다. 목표 2와 차이가 남는 까닭은 제곱 함수가 두 점 사이에서 직선으로 변하지 않기 때문이다.

이 실패는 가정법의 가치를 낮추지 않는다. 오히려 정확한 풀이가 되는 조건과 근사 한 단계가 되는 조건을 구분해 준다. 역사적 계산 절차를 현대적으로 해석할 때에도 어떤 관계에 적용했는지를 읽어야 한다. 절차의 이름만 같다고 모든 문제에서 같은 정밀도를 기대할 수는 없다.

관계	두 가정	보간의 결과
$5x+6=41$	6과 10	7은 정확한 해
$x^2=2$	1과 2	$4/3$ 은 근삿값

탐구

$x^2=2$ 에서 얻은 $4/3$ 은 참값보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

$(4/3)^2=16/9<2$ 이고 $4/3$ 은 양수이므로 $\sqrt{2}$ 보다 작다. 이 값으로 한쪽 경계를 갱신할 수 있지만 정확한 해라고 적어서는 안 된다.

방정식의 줄을 지우기

소거는 정보를 없애는 대신 같은 정보를 더 간단한 형태로 바꾸는 일이다.

쌀 두 묶음과 콩 한 묶음의 값이 19이고 쌀 한 묶음과 콩 두 묶음의 값이 17이라고 하자. 쌀의 값을 x 와 콩의 값을 y 로 정하면 $2x+y=19$ 와 $x+2y=17$ 이다. 여기의 문자는 계산 구조를 읽기 위한 현대적 표기이다.

첫 식을 두 배로 만들면 $4x+2y=38$ 이 된다. 여기에서 둘째 식을 빼면 $3x=21$ 이므로 $x=7$ 이다. 다시 $2 \times 7 + y = 19$ 에 넣으면 $y=5$ 이다. 두 식에서 같은 양의 콩을 지웠기 때문에 쌀만 남은 관계를 얻을 수 있다.

계수를 줄과 칸으로 배열하면 같은 조작을 숫자표에도 적용할 수 있다. 다만 표에서 어느 칸이 어느 미지수인지 표시해야 한다. 한 줄 전체를 같은 수로 곱하는 것과 일부 칸만 곱하는 것은 다르다. 등식의 오른쪽 상수까지 함께 바꾸어야 해집합이 유지된다.

관계	x 의 계수	y 의 계수	값
첫째	2	1	19
둘째	1	2	17
소거 결과	3	0	21

탐구

$x=7$ 과 $y=5$ 가 두 조건을 모두 만족하는지 확인하라.

풀이와 확인

$2 \times 7 + 5 = 19$ 이고 $7 + 2 \times 5 = 17$ 이다. 첫 조건만 만족하는 수는 여러 개일 수 있으므로 두 조건을 모두 확인해야 한다. 소거 과정에서 부호나 배수를 잘못 적용했다면 두 번째 대입에서 드러날 수 있다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

넓이와 길이를 구별하기

밭의 모양이 바뀌어도 넓이를 유지할 수 있으며 길이는 반대로 변한다.

넓이가 180인 직사각형 밭을 생각하자. 폭이 12이면 길이는 15이다. 폭을 18로 늘리면서 넓이를 유지하려면 길이는 $180 \div 18 = 10$ 이 되어야 한다. 폭이 1.5배가 된 만큼 길이는 그 역수인 $2/3$ 배가 된다.

폭과 길이가 모두 같은 비율로 늘어나는 닮음 확대와 이 상황을 구별해야 한다. 두 길이를 모두 1.5배로 만들면 넓이는 2.25배가 된다. 넓이 고정 문제에서는 한 길이가 늘면 다른 길이가 줄어든다. 같은 비례라는 말 아래 서로 다른 관계를 섞지 않는 것이 중요하다.

표를 만들 때에는 폭과 길이의 곱을 마지막 열에 적어 보자. 각 줄에서 곱이 같다는 사실이 반비례 관계를 보여 준다. 그래프를 그린다면 직선이 아니라 곡선이 된다. 자료 몇 개만 보고 변화량이 일정하다고 생각하면 중간값을 잘못 예측할 수 있다.

폭	길이	넓이
12	15	180
15	12	180
18	10	180

탐구

폭이 15일 때 길이를 양 끝의 길이 15와 10의 평균으로 정해도 되는가?

풀이와 확인

안 된다. 넓이 180을 폭 15로 나누면 길이는 12이다. 폭의 중간값에서 길이가 양 끝 길이의 평균이 되는 것은 직선 관계의 성질이다. 여기서는 곱이 일정하므로 나눗셈으로 값을 구해야 한다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

문제와 해설 사이의 거리

옛 문제의 상황과 오늘의 풀이 기호를 분리하면 비교가 더 정확해진다.

구장산술을 읽을 때 본문 문제와 답과 절차와 후대 주석은 각각 다른 역할을 한다. 문제는 조건을 제시하고 답은 계산 결과를 말한다. 절차는 같은 종류의 문제를 푸는 방법을 설명하며 주석은 그 절차가 성립하는 까닭을 더 깊게 다룰 수 있다.

수업에서 이 구조를 새 문제에 적용해 보자. 직사각형의 둘레가 34이고 넓이가 60일 때 두 변을 구한다. 조건에서 $x+y=17$ 과 $xy=60$ 을 얻고 한 변을 x 로 놓으면 $x(17-x)=60$ 이다. 이를 정리하면 $x^2-17x+60=0$ 이며 두 변은 5와 12이다.

이 풀이를 원문에 없던 기호로 적었다면 현대적 해설이라고 밝혀야 한다. 그렇다고 현대 기호를 쓰는 일이 잘못된 것은 아니다. 어떤 관계를 쉽게 보여 주는지 설명하면서 원문 자체가 그 기호를 썼다는 인상을 피하면 역사 이해와 개념 학습을 함께 할 수 있다.

조건: 둘레 34와 넓이 60

관계: $x+y=17$ 및 $xy=60$

계산: $(x-5)(x-12)=0$

검산: $2(5+12)=34$ 및 $5 \times 12=60$

문제의 조건을 식으로 바꾼 뒤 원래 조건에 돌아가 검산한다.

탐구

문제의 조건에 두 변 가운데 짧은 변을 구하라고 덧붙이면 답은 무엇인가?

풀이와 확인

짧은 변은 5이다. 방정식의 두 근 5와 12는 직사각형의 두 변을 서로 바꿔 부른 경우에 해당한다. 두 근을 모두 계산한 뒤 문제의 질문에 맞는 값을 골라야 한다. 둘레 34와 넓이 60을 각각 검산한다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

동아시아관 / 04

유휘와 도형을 나누는 생각

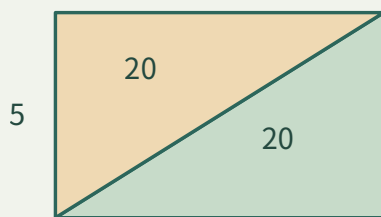
절차에 까닭을 붙이다

공식의 결과를 아는 일과 그 결과가 나오는 이유를 아는 일은 다르다.

유휘의 주석을 읽을 때에는 수치 답만 찾기보다 계산 절차를 정당화하는 설명에 주목할 필요가 있다. 도형을 자르고 옮기는 생각은 서로 다른 모양 사이에서 넓이나 부피가 유지되는 관계를 드러낸다. 다음의 활동은 그러한 관점을 배우기 위해 새로 만든 도형 문제이다.

가로 8과 세로 5인 직사각형을 대각선으로 자르면 서로 겹쳐지는 두 삼각형이 된다. 직사각형의 넓이가 40이므로 각 삼각형의 넓이는 20이다. 여기서 절반이라는 결론은 그림이 비슷해 보이기 때문이 아니라 두 삼각형을 정확하게 포갤 수 있기 때문에 성립한다.

그림을 그릴 때 대각선이 아닌 임의의 선분으로 잘랐다면 두 조각의 넓이가 같다고 말할 수 없다. 같은 공식처럼 보이는 주장도 어떤 조건에서 만들어졌는지 확인해야 한다. 증명은 계산 결과를 꾸미는 문장이 아니라 조건과 결론을 이어 주는 논리이다.



가로 8

전체 40 = 삼각형 20 + 삼각형 20

가로 8과 세로 5인 직사각형의 대각선은 넓이가 같은 두 삼각형을 만든다.

탐구

가로 8과 세로 5인 직사각형의 한 꼭짓점에서 반대쪽 변의 중점까지 자르면 두 조각의 넓이가 같은가?

풀이와 확인

일반적으로 같지 않다. 잘려 나온 삼각형의 밑변이 4이고 높이가 5라면 넓이는 10이다. 나머지 사각형의 넓이는 30이다. 대각선으로 자른 상황의 절반 관계를 다른 절단에 그대로 적용하면 안 된다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

평행사변형을 옮겨 놓기

기울어진 옆변의 길이는 넓이 공식에 들어가는 높이와 다르다.

밑변이 9이고 수직 높이가 4인 평행사변형을 그려 보자. 한쪽 끝의 삼각형을 잘라 반대편으로 옮기면 가로 9와 세로 4인 직사각형을 만들 수 있다. 겹침이나 빈틈이 없다면 전체 넓이는 바뀌지 않으므로 넓이는 36이다.

옆변이 5라고 해서 9×5 를 계산하면 안 된다. 옆변을 기울이면 길이는 그대로여도 수직 높이는 달라진다. 높이는 평행한 두 밑변 사이의 최단 거리이며 밑변과 직각을 이루는 선분으로 표시한다. 도형의 외곽 길이와 내부의 넓이 정보를 구분해야 한다.

이 조각 옮기기는 직사각형으로 바꾸는 과정에서 무엇이 보존되는지 확인하게 한다. 그림이 같은 모양이 될 필요는 없다. 각 조각의 크기가 그대로이고 조각 사이에 겹침과 누락이 없다는 사실이 중요하다. 잘라 옮긴 조각에 번호를 붙이면 대응을 추적하기 쉽다.

높이 4를 유지하며 조각을 옮긴다.



수직 높이가 4인 평행사변형을 넓이 36인 직사각형으로 재배열하는 모형

탐구

밑변 9와 옆변 5가 같은 두 평행사변형의 넓이가 서로 다를 수 있는가?

풀이와 확인

가능하다. 수직 높이가 4이면 넓이는 36이고 높이가 3이면 넓이는 27이다. 옆변의 길이가 5인 상태에서도 기울기를 바꾸어 두 높이를 만들 수 있다. 넓이를 정하려면 수직 높이 또는 이에 해당하는 각도 정보가 더 필요하다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

사다리꼴 두 개를 잇기

평균을 이용한 넓이 공식은 두 도형을 합치는 장면에서 이해할 수 있다.

윗변 6과 아랫변 10과 높이 5인 사다리꼴을 하나 더 복사하여 거꾸로 붙인다. 두 도형은 밑변이 16이고 높이가 5인 평행사변형을 이룬다. 합친 넓이는 80이므로 원래 사다리꼴 하나의 넓이는 40이다.

이를 식으로 쓰면 $(6+10) \times 5 \div 2$ 이다. 윗변과 아랫변의 평균인 8에 높이 5를 곱해도 같은 값이다. 그러나 평균이라는 말을 외우기만 하면 왜 평행한 두 변을 골라야 하는지 놓치기 쉽다. 복사한 도형을 붙여 길이가 합쳐지는 두 변이 바로 그 변들이다.

사다리꼴을 삼각형 둘로 나누는 풀이도 가능하다. 두 삼각형의 밑변은 각각 6과 10이고 높이는 모두 5이므로 넓이는 15와 25이다. 서로 다른 분할이 같은 결과를 준다는 사실을 비교하면 도형의 구조를 더 유연하게 읽게 된다.

풀이	계산	넓이
두 개 이어 붙이기	$16 \times 5 \div 2$	40
삼각형으로 나누기	$6 \times 5 \div 2 + 10 \times 5 \div 2$	40

탐구

윗변을 6에서 8로 늘리고 아랫변과 높이를 유지하면 넓이는 얼마나 증가하는가?

풀이와 확인

넓이는 $(8+10) \times 5 \div 2 = 45$ 이므로 5만큼 증가한다. 새로 늘어난 삼각형 부분의 밑변이 2이고 높이가 5라고 보아도 $2 \times 5 \div 2 = 5$ 이다. 공식 계산과 추가된 부분의 넓이가 서로 일치한다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

구고 관계를 넓이로 보기

직각삼각형의 세 변 관계는 정사각형의 넓이를 비교하는 문장이다.

직각을 끼는 두 변이 3과 4인 삼각형의 빗변을 c 라 하자. 구고 관계를 오늘날의 기호로 쓰면 $c^2=3^2+4^2$ 이다. 따라서 $c^2=25$ 이고 길이가 양수이므로 $c=5$ 이다. 여기에서 제곱은 단순한 계산 기호이면서 각 변 위에 만든 정사각형의 넓이를 나타낸다.

같은 직각삼각형 네 개를 한 변이 7인 큰 정사각형 안에 배열하면 가운데에 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 남길 수 있다. 큰 정사각형 넓이 49에서 삼각형 네 개의 넓이 24를 빼면 가운데 넓이는 25이다. 이 구성은 독자를 위한 현대적 재구성 도해이다.

도해의 힘은 숫자를 바꾸어도 같은 절차가 성립한다는 데 있다. 두 직각변을 a 와 b 로 적으면 큰 정사각형의 넓이는 $(a+b)^2$ 이고 삼각형 네 개의 넓이는 $2ab$ 이다. 차를 정리하면 a^2+b^2 이 남는다.



$$\text{큰 정사각형 } 49 - \text{삼각형 네 개 } 24 = 25$$

직각변 3과 4인 삼각형 네 개를 한 변 7인 정사각형 안에 놓은 정확한 넓이 모형

탐구

직각변이 5와 12인 경우 빗변을 구하고 넓이 관계를 확인하라.

풀이와 확인

$5^2+12^2=25+144=169$ 이므로 빗변은 13이다. 세 길이가 삼각형을 이루는지 확인하면 $5+12>13$ 이다. 단순히 세 수의 제곱 관계만 보는 데서 멈추지 않고 길이와 직각 조건을 함께 해석한다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

원 안의 다각형

곡선을 직접 재기 어려울 때 곧은 변으로 둘러싼 도형을 이용할 수 있다.

반지름이 1인 원 안에 정육각형을 그리면 한 변의 길이는 1이다. 중심과 꼭짓점을 연결하면 정삼각형 여섯 개가 생긴다. 각 삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}/4$ 이므로 정육각형의 넓이는 $3\sqrt{3}/2$ 로 약 2.598이다. 원의 넓이는 이보다 크다.

정다각형의 변 수를 늘리면 원과 다각형 사이의 빈 부분이 작아진다. 유헤의 원 연구를 소개할 때 중요한 점은 단순히 긴 소수를 적는 것이 아니라 다각형을 세분하여 남는 차이를 다룬다는 생각이다. 이 책의 삼각함수 표기는 그 구조를 보여 주는 현대적 도구이다.

반지름 1인 원에 내접한 정 n 각형의 넓이는 $n \times \sin(360^\circ/n) \div 2$ 이다. n 을 6에서 12로 늘리면 넓이는 3이 된다. 값이 원의 넓이에 가까워진다는 관찰과 어느 범위 안에 있음을 엄밀히 보이는 일은 구별해야 한다.



반지름 1
삼각형 여섯 개
각 넓이 $\sqrt{3}/4$

단위원에 내접한 정육각형을 여섯 정삼각형으로 나누면 넓이는 $3\sqrt{3}/2$ 이다.

탐구

정육각형 넓이 2.598과 정십이각형 넓이 3 가운데 원의 넓이에 더 가까운 것은 무엇인가?

풀이와 확인

두 다각형이 같은 원에 내접하고 십이각형이 육각형을 포함하도록 배치되므로 3이 더 가깝다. 두 값 모두 원의 넓이보다 작다. 그러나 3이라는 값만으로 원의 넓이가 3.1보다 작은지까지 판단할 수는 없다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

이어 읽기 / 유험와 도형을 나누는 생각

변을 두 배로 늘리는 연 모양 넓이

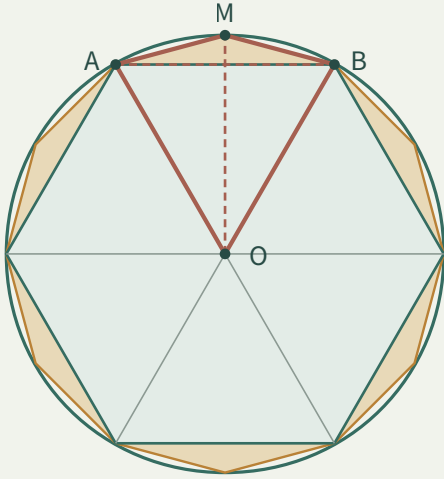
정다각형의 변을 두 배로 늘릴 때 생기는 연 모양 사각형이 원 넓이의 아래 경계와 위 경계를 함께 알려 준다.

반지름 1인 원에 내접한 정육각형의 한 변 AB를 생각하자. 호 AB의 가운데 점 M을 잡아 중심 O와 이으면 OM은 현 AB를 수직으로 이등분한다. 사각형 OAMB는 두 대각선이 서로 수직인 연 모양이므로 넓이는 두 대각선의 곱의 절반인 $1 \times 1 \div 2$ 이다. 이러한 연 여섯 개가 빈틈없이 모여 정십이각형을 이루므로 정십이각형의 넓이는 3이 된다.

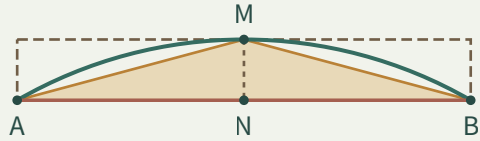
이 관계는 변의 수와 상관없이 성립한다. 반지름 1인 원에 내접한 정 n 각형의 한 변을 s 라 하면 정 $2n$ 각형의 넓이는 $n \times s \div 2$ 이며 이는 정 n 각형 둘레의 절반과 같다. 정십이각형의 한 변은 구고 관계를 두 번 써서 $\sqrt{(2-\sqrt{3})} \approx 0.5176$ 으로 구할 수 있다. 따라서 정이십사각형의 넓이는 $12 \times \sqrt{(2-\sqrt{3})} \div 2$ 로 약 3.1058이다. 각도를 쓰지 않고 변의 길이만으로 넓이를 이어 간다는 점이 이 방법의 특징이다.

위쪽 경계는 현과 호 사이의 활꼴에서 나온다. 현 AB의 중점을 N이라 하고 AB 위에 높이가 MN인 직사각형을 세우면 활꼴은 이 직사각형 안에 들어간다. 삼각형 AMB의 넓이는 직사각형의 절반이므로 활꼴 하나의 넓이는 삼각형 AMB 넓이의 두 배보다 작다. 삼각형 AMB 여섯 개의 합은 정십이각형과 정육각형의 넓이 차인 약 0.402이므로 원의 넓이는 $2.598 + 2 \times 0.402$, 즉 약 3.402보다 작다.

같은 논리를 정십이각형과 정이십사각형에 적용하면 원주율은 3.1058보다 크고 3.2117보다 작다는 결론을 얻는다. 아래 경계가 3.1보다 크므로 정십이각형 하나만으로는 판단할 수 없었던 질문, 곧 원의 넓이가 3.1보다 큰지에 이제 답할 수 있다. 이 전개는 다각형을 세분하는 생각을 현대 기호로 정리한 현대 재구성이며 유험의 주석에 적힌 계산 순서를 그대로 옮긴 것은 아니다.



한 변 AB를 확대한 그림



삼각형 AMB = 직사각형의 절반
활꼴은 직사각형 안에 들어간다

원의 넓이 < $3 + (3 - 2.598) \approx 3.402$

연 OAMB와 활꼴을 감싸는 직사각형으로 세운 원 넓이의 경계

비교한 두 다각형	아래 경계	위 경계	경계의 폭
정육각형과 정십이각형	3	3.4019	0.4019
정십이각형과 정이십사각형	3.1058	3.2117	0.1058
정이십사각형과 정사십팔각형	3.1326	3.1594	0.0268

탐구

표에서 변의 수를 두 배로 할 때마다 경계의 폭은 대략 몇 분의 일로 줄어드는가?

풀이와 확인

경계의 폭은 0.4019에서 0.1058로, 다시 0.0268로 줄어든다. $0.4019 \div 0.1058 \approx 3.80$ 이고 $0.1058 \div 0.0268 \approx 3.95$ 이므로 한 단계마다 대략 4분의 1로 줄어든다. 활꼴 하나의 밑변은 약 절반이 되고 높이는 약 4분의 1이 되며 활꼴의 개수는 두 배가 되므로 전체로는 약 4분의 1이 된다고 설명할 수 있다. 폭이 이렇게 줄어드는 규칙을 알면 원하는 정밀도를 얻기 위해 몇 번 더 나누어야 하는지 미리 알 수 있다.

[EA03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Liu Hui

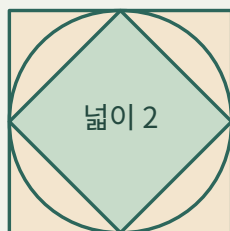
안쪽 값과 바깥쪽 값

근삿값 하나보다 양쪽 경계가 오차를 더 분명하게 알려 준다.

반지름 1인 원에 내접하는 정다각형과 외접하는 정다각형을 함께 그려 보자. 내접 다각형의 넓이는 원보다 작고 외접 다각형의 넓이는 원보다 크다. 두 넓이 사이에 원의 넓이가 끼어 있으므로 계산값의 범위를 말할 수 있다.

정사각형을 쓰면 안쪽 넓이는 2이고 바깥쪽 넓이는 4이다. 이 구간은 너무 넓지만 도형을 더 세분화하면 범위를 좁힐 수 있다. 여기서는 내접과 외접을 짝지은 현대적 학습 모형을 사용한다. 이를 특정 역사 문헌의 계산 순서와 똑같다고 주장하지 않는다.

오차를 설명할 때 3.14가 가까워 보인다고만 말하는 대신 참값이 어떤 두 수 사이에 있는지 제시해 보자. 예를 들어 $3.141 < \pi < 3.142$ 를 알면 3.1415를 쓸 때의 절대오차는 0.0005보다 작다. 양 끝과의 거리를 비교하면 이 결론을 얻을 수 있다.



바깥 넓이 4

$$2 < \text{원의 넓이 } \pi < 4$$

반지름 1인 원의 내접 정사각형 넓이 2와 외접 정사각형 넓이 4를 비교한다.

탐구

π 가 3.141과 3.142 사이에 있다는 정보만 있을 때 3.141을 쓰면 오차는 얼마보다 작은가?

풀이와 확인

절대오차는 0.001보다 작다. 왼쪽 끝을 사용했으므로 실제 값과의 거리는 구간의 전체 길이를 넘지 않는다. 가운데 값 3.1415를 쓰면 가능한 최대 거리가 절반으로 줄어든다. 어느 값을 택했는지도 오차 평가에 영향을 준다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

부피를 층으로 나누기

입체의 겉모습이 달라도 같은 높이에서의 단면을 비교할 수 있다.

밑면이 가로 6과 세로 4이며 높이가 5인 직육면체의 부피는 120이다. 높이를 1씩 나누면 넓이 24인 층이 다섯 개 쌓여 있다. 층의 두께와 단면 넓이의 곱을 모두 더한다는 생각은 부피를 조직적으로 다루는 출발점이다.

각 층을 옆으로 조금씩 밀어 비스듬한 모양을 만들더라도 층마다 차지하는 양은 그대로이다. 다만 겹치거나 빠지는 부분 없이 입체가 정의되어야 한다. 종이 모형의 유한한 층과 연속적인 입체 사이에는 차이가 있으므로 모형 관찰만으로 모든 입체에 대한 정리를 끝냈다고 보지 않는다.

밑면 넓이가 높이에 따라 달라지는 각뿔에서는 각 층을 똑같이 계산할 수 없다. 높이의 절반 지점에서 단면의 길이가 절반이라면 넓이는 $1/4$ 이 된다. 길이의 비와 넓이의 비를 구별해야 부피의 변화도 제대로 이해할 수 있다.



두께 1인 각 층의 부피는 24이다. 다섯 층을 더하면 120이다.

탐구

얇은 입체의 모든 길이가 두 배가 되면 부피는 몇 배가 되는가?

풀이와 확인

가로와 세로와 높이에 각각 2가 곱해지므로 부피는 8배가 된다. 밑면 넓이가 먼저 4배가 되고 높이가 다시 2배가 된다고 설명해도 같다. 길이만 두 배라는 이유로 부피도 두 배라고 답하면 차원의 변화를 놓친 것이다.

[EA03] University of St Andrews, Liu Hui

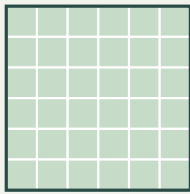
잘라 붙이기 탐구의 검산

눈으로 그럴듯한 그림과 빈틈없는 넓이 증명은 구별해야 한다.

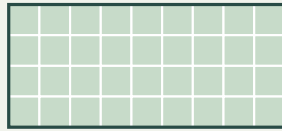
넓이 36인 정사각형을 여러 조각으로 잘라 다른 직사각형처럼 배열했다고 하자. 새 외곽이 가로 9와 세로 4라면 넓이는 여전히 36이다. 그러나 외곽이 가로 10과 세로 4라고 주장한다면 조각 사이의 틈이나 겹침 또는 경계선의 오독을 의심해야 한다.

퍼즐 그림에서는 거의 직선처럼 보이는 경계가 실제로는 서로 다른 기울기를 가진 선분일 수 있다. 확대했을 때 아주 좁은 틈이 드러나기도 한다. 길이와 좌표와 기울기를 계산하면 시각적 인상을 넘어 정확한 검증이 가능하다.

활동에서는 조각마다 넓이를 적고 전체 합과 외곽 도형의 넓이를 독립적으로 계산한다. 두 결과가 다르면 어느 전제가 잘못되었는지 찾아본다. 도형을 나누어 설명하는 방식의 가치는 아름다운 배치 자체보다 각 조각이 무엇을 보존하는지 명확하게 보여 주는 데 있다.



$$6 \times 6 = 36$$



$$9 \times 4 = 36$$



조각 넓이 합 36

4

$$10 \times 4 = 40$$

조각 36칸으로는 10×4 외곽을 채우지 못하고 4칸이 빈다.

탐구

작은 조각들의 넓이 합이 36인데 외곽 직사각형 넓이가 40이면 어떤 결론을 내릴 수 있는가?

풀이와 확인

겹침이 없다는 조건 아래 빈 부분의 넓이는 4이다. 반대로 조각을 겹쳐 놓았다면 외곽과 조각 넓이의 차만으로 빈틈의 크기를 바로 정할 수 없다. 빈틈과 겹침을 각각 구분한 뒤 넓이의 합을 세워야 한다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

동아시아관 / 05

조충지와 근삿값의 정밀도

원주율을 둘러싼 두 수

정밀한 계산은 많은 자릿수뿐 아니라 믿을 수 있는 범위를 남긴다.

조충지는 원주율에 관한 정밀한 결과와 $355/113$ 이라는 분수 근삿값으로 알려져 있다. 그의 저술은 완전한 형태로 전하지 않으므로 구체적인 계산 경로를 모두 알고 있는 것처럼 서술해 서는 안 된다. 알려진 결과와 그것을 오늘 재현하는 방법은 별도로 제시해야 한다.

$3.1415926 < \pi < 3.1415927$ 이라는 범위는 폭이 0.0000001 이다. 두 끝값 사이의 구간이 좁다는 것은 실제 값이 있을 수 있는 위치를 매우 세밀하게 제한한다는 뜻이다. 이 범위 자체와 $355/113$ 이 주는 근삿값의 오차는 서로 다른 정보를 제공한다.

분수 $355/113$ 은 약 3.1415929204 이다. 따라서 이 분수는 위의 상한 3.1415927 보다 조금 크다. 좋은 근삿값이라고 해서 반드시 알려진 좁은 구간 안에 들어가는 것은 아니다. 값의 비교를 직접 해 보면 서로 다른 정확도 주장을 혼동하지 않게 된다.

왼쪽 경계	실제 값	오른쪽 경계
3.1415926	π	3.1415927
구간 폭 0.0000001		

경계 사이의 간격이 원주율의 가능한 위치를 제한한다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

$355/113$ 과 3.1415927 가운데 어느 것이 큰지 소수 계산으로 확인하라.

풀이와 확인

$355 \div 113$ 을 계산하면 약 3.1415929204 이므로 분수 쪽이 더 크다. 둘의 차는 약 0.0000002204 이다. 조충지의 구간 결과와 분수 근삿값을 같은 정확도의 표현으로 취급하지 않는 것이 중요하다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

분수가 가까운 정도

분모가 작다는 장점과 오차가 작다는 장점은 함께 비교할 수 있다.

원주율의 근삿값으로 3과 $22/7$ 과 $355/113$ 을 비교해 보자. 각각 계산의 편리함이 다르다. 3은 곱하기 쉽지만 오차가 크다. $22/7$ 은 약 3.142857이고 $355/113$ 은 약 3.1415929204이다. 작은 분수로 정밀한 비율을 나타낼 수 있다는 점이 흥미롭다.

비교를 위해 $\pi \approx 3.1415926536$ 을 기준값으로 사용하면 절대오차는 각각 약 0.141593과 0.00126449와 0.0000002668이다. 이 기준값도 유한소수이지만 여기에서 비교하는 오차보다 충분히 세밀하다. 계산에 사용한 기준 자릿수를 밝혀 두면 검산이 가능하다.

근삿값을 고를 때에는 목적을 먼저 생각한다. 빠른 어림에는 3이 편리할 수 있고 정밀한 설계에는 더 정확한 값이 필요할 수 있다. 자릿수가 많은 수를 무조건 택하는 대신 입력 자료의 정확도와 요구되는 결과의 오차를 함께 고려한다.

근사 결과를 기록할 때에는 사용한 분수와 비교 기준과 오차의 방향을 함께 적는다. 이 예에서는 $355/113$ 이 기준값보다 약 0.0000002668 크다. 역사적 기록에 있는 결과와 오늘 직접 계산한 비교값을 구분하면 검산의 근거가 분명해진다.

근사 분수	소수값
22/7	3.14285714
355/113	

두 유리수 근삿값의 자릿수 비교 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

근삿값	소수 표현	대략적인 절대오차
3	3	0.141593
22/7	3.14285714	0.00126449
355/113	3.14159292	0.000000267

탐구

22/7의 오차와 355/113의 오차는 대략 몇 배 차이가 나는가?

풀이와 확인

0.00126449를 0.0000002668로 나누면 약 4740이다. 즉 이 기준에서는 355/113의 절대오차가 수천 배 더 작다. 분모는 약 16배 커졌지만 오차 개선 정도는 그보다 훨씬 크다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

큰 원에서 커지는 오차

같은 비율의 오차라도 길이가 커지면 결과의 절대오차가 커진다.

지름이 100인 원의 둘레를 πd 로 계산한다고 하자. π 대신 3.14를 쓰면 둘레는 314이다. 기준값 $\pi \approx 3.1415926536$ 을 사용한 둘레는 약 314.15926536이므로 차는 약 0.15926536이다. 지름이 1000이면 같은 근삿값을 쓸 때 차도 열 배가 된다.

이는 둘레 공식에서 지름과 원주율이 곱해지기 때문이다. 원주율 근삿값의 오차를 e 라 하면 둘레의 오차는 $d \times e$ 이다. 지름이 정확하게 주어졌다는 가정 아래 이 관계가 성립한다. 지름 측정에도 오차가 있으면 두 원인을 함께 살펴야 한다.

정밀한 계산이 필요하다는 말에는 대상의 크기와 허용 오차가 포함되어야 한다. 작은 모형에서 보이지 않던 차이가 큰 원형 구조에서는 문제가 될 수 있다. 반대로 입력 지름을 거칠게 측정했다면 원주율의 자릿수만 늘리는 것이 전체 정확도를 크게 높이지 못한다.

지름 100		0.159265
지름 200		0.318531
지름 1000		1.592654

π 대신 3.14를 썼을 때 둘레의 오차

탐구

지름이 200인 원에서 π 를 3.14로 쓰면 둘레 오차는 대략 얼마인가?

풀이와 확인

원주율 오차 약 0.0015926536에 200을 곱하면 약 0.31853072이다. 지름 100인 경우의 두 배이다. 길이 단위가 cm라면 결과도 cm이며 넓이 단위로 적지 않아야 한다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

반올림과 잘라 버리기

마지막 자리를 처리하는 방식에 따라 오차의 방향과 범위가 달라진다.

3.1415926을 소수 셋째 자리까지 나타낼 때 잘라 버리면 3.141이고 반올림하면 3.142이다. 두 값은 모두 근삿값이지만 첫 값은 원래 수보다 작고 둘째 값은 크다. 무엇을 했는지 쓰지 않고 자릿수만 표시하면 정확도에 대한 해석이 모호해진다.

양수를 소수 셋째 자리에서 잘라 버리면 오차는 0 이상 0.001 미만이다. 가장 가까운 값으로 반올림하면 절대오차는 보통 0.0005 이하로 제한된다. 정확히 중간인 경우의 처리 규칙은 별도로 정할 수 있다. 계산 프로그램마다 이 규칙이 다를 수 있음도 알아 두자.

긴 계산에서는 매 단계마다 반올림하는지 마지막에만 반올림하는지도 결과에 영향을 준다. 중간값의 자릿수를 너무 일찍 줄이면 작은 오차들이 누적될 수 있다. 가능한 경우 계산 도중에는 여분의 자릿수를 유지하고 마지막 표시 단계에서 필요한 정확도로 정리한다.

처리 방법	소수 셋째 자리까지	원래 값과 비교
잘라 버리기	3.141	작음
가장 가까운 값	3.142	

3.1415926을 줄이는 두 방법은 서로 다른 방향의 오차를 만든다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

3.1415926을 소수 넷째 자리까지 반올림한 값과 잘라 버린 값을 구하라.

풀이와 확인

반올림한 값은 3.1416이고 잘라 버린 값은 3.1415이다. 다섯째 자리 숫자가 9이므로 반올림에서는 넷째 자리 숫자 5를 6으로 올린다. 두 표현의 차는 0.0001이다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

사이 분수의 위치

두 분수의 분자와 분모를 각각 더하면 사이에 놓이는 분수를 만들 수 있다.

양의 분모를 가진 $3/1$ 과 $22/7$ 을 보자. 분자를 더하고 분모를 더한 $25/8$ 은 3.125이다. 이 값은 3과 $22/7$ 사이에 있다. 이러한 사이 분수의 성질은 유리수의 순서를 탐구하는 좋은 출발점이다. 여기의 활동은 특정 인물의 발견 과정을 재현한다고 주장하지 않는다.

일반적으로 $a/b < c/d$ 이고 b 와 d 가 양수라면 $a/b < (a+c)/(b+d) < c/d$ 이다. 첫 부등식은 $a(b+d) < b(a+c)$ 를 정리하면 $ad < bc$ 가 되어 확인된다. 둘째 부등식도 같은 조건으로 돌아간다. 분모가 양수라는 조건이 부등식 방향을 유지하게 한다.

이 성질을 이용하면 알려진 두 경계 사이에 새 분수를 만들 수 있다. 다만 사이에 있다는 사실만으로 목표값에 더 가깝다고 보장되지는 않는다. 목표값이 어느 쪽에 있는지 추가로 비교하면서 경계를 바꾸어 나가야 유용한 근사 절차가 된다.

왼쪽 경계	사이 분수	오른쪽 경계
$1/3$	$2/5$	$1/2$
약 0.3333	0.4	

$1/3$ 과 $1/2$ 사이의 분수 $2/5$ / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

$1/3$ 과 $1/2$ 의 사이 분수를 구하고 두 경계 사이에 있는지 확인하라.

풀이와 확인

사이 분수는 $2/5$ 이다. $1/3 \approx 0.3333$ 이고 $2/5 = 0.4$ 이며 $1/2 = 0.5$ 이므로 사이에 있다. 분수 덧셈 $1/3 + 1/2 = 5/6$ 과는 다른 연산이다. 분자와 분모를 각각 더했다고 두 분수의 합이라고 부르면 안 된다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

이어 읽기 / 조충지와 근삿값의 정밀도

사이 분수를 거듭하여 355/113에 닿기

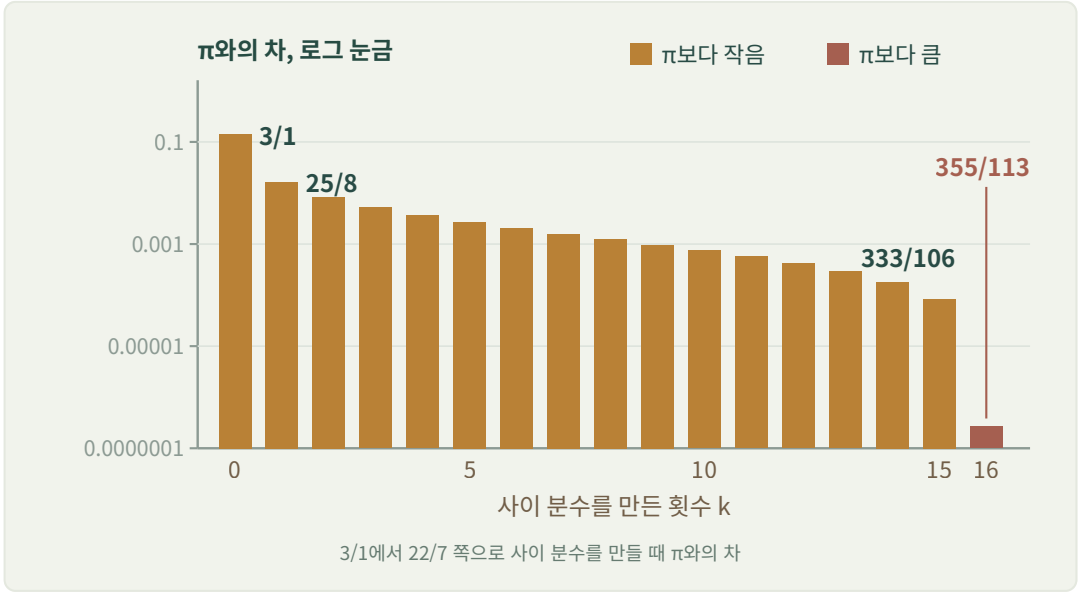
한쪽 경계를 고정하고 사이 분수를 거듭 만들면 오차가 줄어드는 순서를 한눈에 볼 수 있다.

앞에서 본 사이 분수의 성질을 한 번만 쓰지 않고 되풀이해 보자. $3/1$ 은 π 보다 작고 $22/7$ 은 π 보다 크므로 출발 구간은 $3/1$ 과 $22/7$ 사이이다. 사이 분수 $25/8$ 은 3.125로 π 보다 작으므로 아래 경계를 $25/8$ 로 바꾼다. 위 경계 $22/7$ 은 그대로 두고 새 아래 경계와의 사이 분수를 다시 만든다.

아래 경계를 바꿀 때마다 분자에는 22가, 분모에는 7이 더해지므로 k 번째 분수는 $(3+22k)/(1+7k)$ 로 쓸 수 있다. k 가 15일 때 분수는 $333/106$ 이며 여전히 π 보다 약 0.0000832 작다. k 가 16이 되는 순간 분수는 처음으로 π 를 넘어서는데 그 분수가 $355/113$ 이다. 이때 오차는 약 0.000000267로 앞 단계보다 300배 이상 작아진다.

그래프에서 앞의 열다섯 단계는 오차가 천천히 줄어든다. 위 경계 $22/7$ 을 고정한 채 분자와 분모에 22와 7만 거듭 더하므로 분수가 $22/7$ 쪽으로 조금씩만 움직인다. 마지막 분수가 특별히 가까운 까닭은 113π 가 정수 355에 매우 가깝기 때문이며 이는 분모를 고정하여 찾아본 계산과 같은 사실이다. 오차의 감소가 고르지 않다는 점도 앞의 표에서 본 유리수 근사의 불규칙함과 이어진다.

이 절차는 사이 분수의 성질을 확인하기 위한 학습용 모형이다. 조충지가 $355/113$ 을 어떤 경로로 얻었는지는 전하지 않으므로 이 계산을 그의 방법이라고 말할 수 없다. 다만 알려진 결과를 오늘의 도구로 재현해 보면 어떤 분수가 왜 눈에 띄는지 설명할 수 있다. 결과의 확인과 발견 경로의 복원을 구별하는 태도는 이 장 전체의 원칙과 같다.



k	분수	π 와의 차
0	3/1	약 -0.1416
1	25/8	약 -0.0166
15	333/106	약 -0.0000832
16	355/113	약 +0.000000267

탐구

이번에는 333/106을 아래 경계로, 355/113을 위 경계로 두고 사이 분수를 만들면 어떤 분수가 되며 π 보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

분자와 분모를 각각 더하면 688/219이다. $688 \div 219 \approx 3.1415525$ 이므로 π 보다 약 0.00004 작다. 이 분수는 333/106보다는 π 에 가깝지만 분모가 더 큰데도 355/113보다 훨씬 멀다. 사이 분수를 만든다고 해서 언제나 더 좋은 근삿값이 되는 것은 아니라는 앞 단원의 주의를 다시 확인할 수 있다.

[EA04] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Zu Chongzhi

분모를 고정하여 찾아보기

가까운 분수를 찾을 때에는 분모와 분자를 따로 조절해 볼 수 있다.

분모를 7로 정하고 π 에 가까운 분수를 찾으려면 7π 에 가까운 정수를 고르면 된다.

$7\pi \approx 21.9911$ 이므로 분자는 22가 적절하다. 분모를 113으로 정하면 $113\pi \approx 354.99997$ 이므로 분자 355가 매우 가까운 값을 만든다.

이 관찰은 왜 특정 분수가 좋은 근삿값인지를 수치적으로 설명하지만 그 분모를 처음에 어떻게 찾았는지까지 설명하지는 않는다. 결과를 확인하는 일과 탐색 절차를 밝히는 일은 구별해야 한다. 역사 자료가 남지 않은 부분에 현대 계산을 넣을 때에도 이 구분이 필요하다.

직접 탐구할 때에는 분모를 1부터 20까지 바꾸면서 가장 가까운 정수 분자를 정하고 오차를 표로 만들 수 있다. 모든 분모가 이전보다 좋은 근삿값을 주는 것은 아니다. 오차가 특별히 작아지는 지점을 찾으면 유리수 근사의 불규칙한 모습을 볼 수 있다.

분모	분모 $\times \pi$ 의 근삿값	선택한 분수
7	21.9911	22/7
10	31.4159	31/10
113	354.99997	355/113

탐구

분모 10과 분모 14에서 π 에 가장 가까운 정수 분자를 골라 보자.

풀이와 확인

분모 10에서는 $10\pi \approx 31.416$ 이므로 31/10을 고른다. 분모 14에서는 $14\pi \approx 43.982$ 이므로 $44/14=22/7$ 을 고른다. 분모가 커졌다고 반드시 약분되지 않는 새로운 분수가 생기는 것은 아니다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

측정 오차와 계산 오차

입력값의 불확실성은 정밀한 상수만으로 없앨 수 없다.

지름을 10.0cm로 측정했지만 실제로는 9.95cm에서 10.05cm 사이일 수 있다고 하자. 원주율을 충분히 정확하게 사용해도 둘레에는 약 0.157cm의 편차가 생길 수 있다. 지름의 최대 편차 0.05cm에 π 를 곱한 값이다.

이때 π 를 3.1415926536까지 쓰면서 둘레를 소수 열 자리로 발표하면 측정 수준보다 지나치게 정밀한 인상을 준다. 계산기가 보여 주는 자릿수와 결과가 실제로 믿을 만한 자릿수는 다르다. 수치를 전달할 때에는 측정 방법과 단위와 오차 범위를 함께 생각해야 한다.

원주율을 3.14로 쓰는 데서 생기는 오차와 지름 측정에서 생기는 오차를 비교하면 개선 방향이 보인다. 지름 10cm에서 상수 근사 때문에 생기는 오차는 약 0.0159cm이다. 이 예에서는 지름을 더 정확히 재는 일이 우선적으로 도움이 된다.

지름 측정 오차		0.157
π 근사 오차		0.0159

지름 10cm인 예에서 계산한 둘레 오차의 크기 비교. 두 막대의 단위는 cm이다.

탐구

지름의 오차를 0.05cm에서 0.005cm로 줄이면 둘레의 입력 오차는 어떻게 바뀌는가?

풀이와 확인

약 0.157cm에서 약 0.0157cm로 열 분의 일로 줄어든다. 이 정도가 되면 π 를 3.14로 쓸 때의 상수 근사 오차와 비슷한 규모가 된다. 전체 정확도를 높이려면 두 원인을 함께 조절해야 한다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

동아시아관 / 06

손자산경과 나머지의 만남

세 조건으로 수를 찾다

하나의 나머지는 불완전하지만 여러 나머지는 수의 범위를 좁힌다.

손자산경에는 3으로 나누면 2가 남고 5로 나누면 3이 남으며 7로 나누면 2가 남는 수를 찾는 문제가 나온다. 가장 작은 양의 답은 23이다. 책의 성립 시기는 정확히 확정하기 어렵다. 병법서의 손자와 같은 저자라고 보아서도 안 된다.

먼저 3으로 나누어 2가 남는 수를 적으면 2에서 시작하여 3씩 늘어난다. 이 가운데 5로 나누어 3이 남는 수를 고르면 8과 23과 38 등이 남는다. 다시 7에 대한 조건을 확인하면 23을 찾을 수 있다.

이 방식은 가능한 수를 차례로 거르는 탐색이다. 세 조건을 한 번에 머릿속으로 해결하는 대신 조건 하나를 만족하는 목록부터 만든다. 마지막 답은 원래의 세 나눗셈으로 각각 검산해야 한다. 한 조건의 확인만으로는 충분하지 않다.

수	3의 나머지	5의 나머지	7의 나머지
8	2	3	1
23	2	3	2
38	2	3	

후보를 조건별로 검사하는 현대식 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

23의 세 나머지를 직접 확인하라.

풀이와 확인

$23=3 \times 7+2$ 이고 $23=5 \times 4+3$ 이며 $23=7 \times 3+2$ 이다. 따라서 세 조건을 모두 만족한다. 목록에서 먼저 등장한 8은 처음 두 조건만 만족하므로 답으로 선택할 수 없다.

[EA05] University of St Andrews. Sun Zi

같은 나머지가 돌아오는 간격

반복되는 조건을 합치면 새로운 반복 주기가 생긴다.

3으로 나누어 2가 남고 5로 나누어 3이 남는 수는 8에서 시작하여 15씩 늘어난다. 15는 3과 5의 공배수이므로 더해도 두 나머지가 바뀌지 않는다. 8과 23과 38과 53은 같은 두 조건을 공유한다.

반대로 두 수가 이 조건을 함께 만족하면 두 수의 차는 3과 5로 모두 나누어진다. 3과 5가 서로소이므로 차는 15의 배수이다. 그러므로 확인하지 않은 다른 갈래의 답이 중간에 숨어 있지 않다는 것도 설명할 수 있다.

세 번째 조건까지 합치면 반복 간격은 105가 된다. 23에 105를 더한 128도 같은 나머지를 가진다. 가장 작은 양의 답을 묻는 문제와 가능한 모든 정수 해를 묻는 문제는 답의 형식이 다르다.



처음 두 조건을 만족하는 후보의 간격은 15이다.

탐구

손자산경 문제에서 128은 답인가?

풀이와 확인

128도 세 조건을 만족한다. 다만 가장 작은 양의 정수를 요구했다면 23을 적어야 한다. 모든 정수 해는 정수 k 에 대하여 $23+105k$ 로 나타낼 수 있다.

하나의 조건만 바꾸는 수

다른 나머지를 건드리지 않는 수를 만들면 조건을 조립할 수 있다.

3에 대해서는 나머지가 1이고 5와 7에 대해서는 나머지가 0인 수를 찾아보자. $5 \times 7 = 35$ 의 배수를 보면 70이 이 조건을 만족한다. 같은 방법으로 21은 5에 대해서만 1이 남고 15는 7에 대해서만 1이 남는다.

이 세 수를 나머지 조절 장치처럼 사용할 수 있다. 70을 두 번 쓰면 3에 대한 나머지가 2가 된다. 21을 세 번 쓰면 5에 대한 나머지가 3이 된다. 15를 두 번 쓰면 7에 대한 나머지가 2가 된다.

모두 더한 233은 원하는 세 조건을 만족한다. 여기서 105를 두 번 빼면 23을 얻는다. 이 설명은 역사적 계산 규칙을 현대의 나머지 언어로 해석한 것이다. 각 수의 역할을 검산하면 마술 같은 공식이 논리적인 구성으로 바뀐다.

장치	$\div 3$	$\div 5$	$\div 7$
70	1	0	0
21	0	1	0
15	0	0	1

각 조절 장치가 남기는 나머지

탐구

70 대신 35를 사용하면 왜 첫 번째 나머지가 달라지는가?

풀이와 확인

35를 3으로 나누면 2가 남는다. 원하는 조절 장치의 나머지는 1이므로 35를 두 배 한 70을 사용한다. 70은 여전히 5와 7의 배수이므로 나머지 두 조건에는 영향을 주지 않는다.

[EA05] University of St Andrews. Sun Zi

곱셈을 거꾸로 푸는 나머지

나머지 세계에서는 곱셈의 역을 조건부로 찾을 수 있다.

5의 배수 가운데 7로 나누면 1이 남는 수를 찾자. 5를 차례로 곱하면 나머지는 5에서 3과 1로 바뀐다. 따라서 5×3 은 7을 기준으로 1과 같은 나머지를 가진다. 이를 현대 용어로 3이 5의 법 7에 대한 역원이라고 한다.

여기에서 $1/5$ 라는 보통의 분수를 계산하는 것은 아니다. 나머지만 비교하는 새로운 관계에서 곱셈을 되돌리는 수를 찾는다. $5x$ 를 7로 나눈 나머지가 4라면 양쪽에 3을 곱하여 x 의 나머지가 12와 같다는 것을 얻는다.

12를 7로 나누면 5가 남으므로 x 는 7로 나누어 5가 남는 수이다. 실제로 $5 \times 5 = 25$ 는 7로 나누어 4가 남는다. 계산을 마친 뒤 원래 조건으로 돌아가면 기호 조작의 뜻을 확인할 수 있다.

x	1	2	3	4	5
5x의 법 7 나머지	5	3	1	6	4

곱셈표에서 역원을 찾는 활동

탐구

3x를 5로 나눈 나머지가 1일 때 x 의 가장 작은 양의 값을 구하라.

풀이와 확인

$3 \times 2 = 6$ 은 5로 나누면 1이 남으므로 $x=2$ 이다. 이때 2가 3의 법 5에 대한 역원이다. x 에 5의 배수를 더해도 같은 조건을 만족한다.

서로소가 아닐 때

공통 인수가 있는 주기는 조건끼리 충돌할 수도 있다.

4로 나누면 1이 남고 6으로 나누면 3이 남는 수를 찾자. 4의 조건을 만족하는 수는 모두 홀수이다. 6의 조건도 홀수를 요구하므로 두 조건은 적어도 홀짝에서 충돌하지 않는다. 실제로 9가 두 조건을 만족한다.

이때 반복 간격은 $4 \times 6 = 24$ 보다 작은 12이다. 두 수의 최소공배수가 12이기 때문이다. 따라서 모든 해는 $9 + 12k$ 로 나타낼 수 있다. 서로소인 경우의 곱을 언제나 그대로 쓰면 가장 짧은 반복 주기를 놓칠 수 있다.

반면 4로 나누어 1이 남고 6으로 나누어 2가 남는 조건은 불가능하다. 첫 조건은 홀수를 요구하고 둘째 조건은 짝수를 요구한다. 더 일반적으로 두 나머지의 차는 나누는 두 수의 최대공약수로 나누어져야 한다.



서로소가 아닌 두 조건의 공통 주기는 최소공배수로 정한다.

탐구

4로 나누면 2가 남고 6으로 나누면 4가 남는 가장 작은 양의 수는?

풀이와 확인

10이다. $10 = 4 \times 2 + 2$ 이며 $10 = 6 + 4$ 이다. 두 나머지의 차 2가 최대공약수 2의 배수이므로 조건은 양립한다. 답은 12씩 반복된다.

이어 읽기 / 손자산경과 나머지의 만남

나머지 격자에 수를 채워 보기

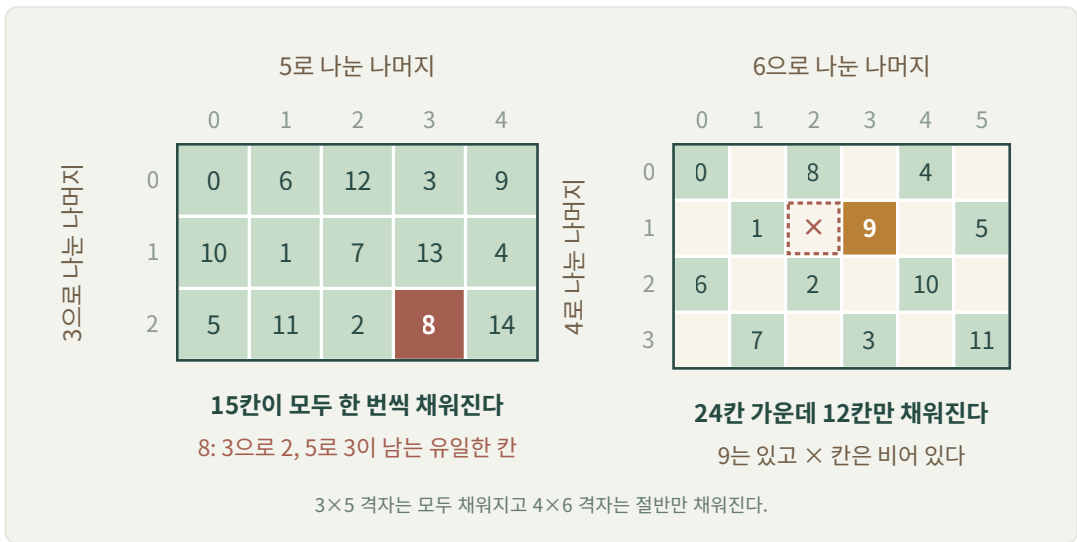
두 나머지를 행과 열의 번호로 삼으면 해가 하나뿐인 까닭과 해가 없는 경우가 한 그림에 나타난다.

3으로 나눈 나머지를 행 번호로, 5로 나눈 나머지를 열 번호로 하는 3×5 격자를 그리자. 0부터 14까지의 수를 차례로 넣으면 수가 1 커질 때마다 한 칸 아래와 한 칸 오른쪽으로 비스듬히 이동하고 끝에 닿으면 반대편에서 다시 들어온다. 이렇게 넣은 열다섯 수는 열다섯 칸을 하나씩 모두 채운다. 따라서 3으로 나누어 2가 남고 5로 나누어 3이 남는 칸에는 정확히 하나의 수 8이 들어 있다.

모든 칸이 채워지는 까닭은 두 수가 같은 칸에 들어갈 수 없다는 데 있다. 0부터 14 사이의 두 수가 같은 칸에 있다면 그 차는 3과 5로 모두 나누어떨어지므로 15의 배수여야 한다. 그런데 두 수의 차는 1 이상 14 이하이므로 이런 일은 일어나지 않는다. 겹치지 않는 열다섯 수가 열다섯 칸에 들어가므로 빈칸이 남을 수 없다.

4와 6으로 4×6 격자를 만들면 사정이 달라진다. 0부터 차례로 넣으면 12에서 이미 출발 칸으로 돌아오므로 스물네 칸 가운데 열두 칸만 채워진다. 채워진 칸은 행과 열의 번호가 모두 짝수이거나 모두 홀수인 칸이며 나머지 칸에는 어떤 정수도 들어가지 않는다. 4로 1이 남고 6으로 3이 남는 칸에는 9가 있지만 4로 1이 남고 6으로 2가 남는 칸은 비어 있다.

두 격자를 나란히 놓으면 서로소 조건과 최대공약수 조건이 한 장면으로 정리된다. 비스듬한 이동이 모든 칸을 지나려면 두 법의 최소공배수가 칸의 수와 같아야 하며 이는 두 수가 서로소일 때 일어난다. 이 격자는 나머지 문제의 구조를 보기 위한 현대식 학습용 모형이며 손자산경의 풀이 방식을 그린 것은 아니다.



탐구

3으로 나눈 나머지와 4로 나눈 나머지로 격자를 만들면 몇 칸이 채워지며 3으로 2가 남고 4로 1이 남는 가장 작은 수는 무엇인가?

풀이와 확인

3과 4는 서로소이므로 0부터 11까지의 열두 수가 3×4 격자의 열두 칸을 모두 채운다. 행 2와 열 1의 칸에 들어가는 수는 5이다. $5=3 \times 1+2$ 이고 $5=4 \times 1+1$ 이므로 두 조건을 모두 만족한다. 이 수에 12를 더한 17과 29도 같은 칸으로 돌아온다.

나머지 조건이 만날 수 있는 까닭

최대공약수 조건은 정수 방정식의 존재 조건과 연결된다.

어떤 정수 x 를 m 으로 나눈 나머지가 a 이고 n 으로 나눈 나머지가 b 라고 하자. 첫 조건은 $x=a+mu$ 로 쓸 수 있다. 둘째 조건 $x=b+nv$ 와 같게 놓으면 $mu-nv=b-a$ 이다. 두 나머지의 만남을 일차 정수 방정식으로 바꾼 셈이다.

d 를 m 과 n 의 최대공약수라고 하면 왼쪽은 반드시 d 의 배수이다. 따라서 $b-a$ 도 d 로 나누어 떨어져야 한다. 이 조건을 어기면 아무리 큰 수까지 검색해도 해를 찾을 수 없다. 계산을 시작하기 전에 불가능함을 판정하는 이유가 여기에 있다.

조건이 맞으면 나눗셈을 거꾸로 읽어 d 를 m 과 n 의 정수배 합으로 나타낼 수 있다. 그 식에 $(b-a)/d$ 를 곱하면 필요한 u 와 v 가 생긴다. 이렇게 얻은 한 해에 최소공배수를 더해도 두 나머지는 유지된다. 인도판의 쿠타카와 연결해 읽을 수 있는 현대적 대수 설명이다.

예를 들어 x 가 6으로 나누어 1을 남기고 8로 나누어 3을 남긴다고 하자. 차이 2는 최대공약수 2의 배수이다. $6u-8v=2$ 의 해 $u=3$ 과 $v=2$ 를 사용하면 $x=19$ 이다. 반복 간격은 24이므로 모든 해는 $19+24k$ 이다. k 는 정수이다.

조건	차이	판정
법 6에서 1과 법 8에서 3	2	해 19와 주기 24
법 6에서 1과 법 8에서 4	3	정수 해 없음

탐구
두 번째 나머지를 3에서 4로 바꾸면 어떤 일이 생기는가?

풀이와 확인

차이 $4-1=3$ 은 최대공약수 2의 배수가 아니다. 첫 조건은 홀수를 요구하고 둘째 조건은 짝수를 요구하므로 공통 해가 없다.

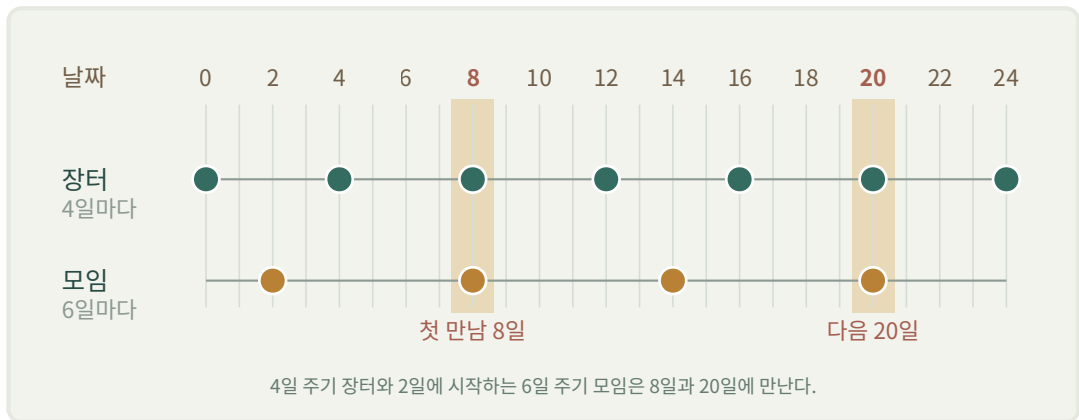
달력 문제의 모형

주기 계산은 실제 달력과 연결되지만 모형의 가정을 먼저 밝혀야 한다.

가상의 마을에서 장터는 4일마다 열리고 관측 모임은 6일마다 열린다고 하자. 오늘 두 행사가 함께 열렸다면 12일 뒤 다시 겹친다. 공통 주기를 찾는 계산은 달력의 여러 반복을 함께 생각하는 기초가 된다.

출발점이 다르면 주기만 알아서는 부족하다. 장터가 오늘 열리고 관측 모임이 이틀 뒤 열린다면 날짜 t 는 4의 배수이면서 6으로 나누어 2가 남아야 한다. 후보 0과 4와 8을 차례로 확인하면 8일 뒤가 첫 만남이다.

실제 천문 현상의 주기는 정수 일수로 정확히 나누어지지 않을 수 있다. 이 페이지의 계산은 정해진 간격으로 반복되는 행사 모형이다. 달과 태양의 운동을 동일한 정수 주기표로 완전히 설명했다고 해석하지 않아야 한다.



탐구

두 행사 간격이 5일과 7일이고 오늘 함께 열렸다면 다음 만남은 언제인가?

풀이와 확인

35일 뒤이다. 5와 7은 서로소이므로 최소공배수는 35이다. 오늘을 0일로 세었으며 오늘 자체를 다음 만남에 포함하지 않았다는 조건도 함께 확인한다.

나머지로 오류 찾기

짧은 검사는 일부 실수를 잡지만 정답을 완전히 보장하지 않는다.

십진수는 9로 나눈 나머지를 각 자리 숫자의 합으로 검사할 수 있다. 10은 9로 나누면 1이 남으므로 10의 거듭제곱도 같은 나머지를 갖기 때문이다. 347의 숫자 합 14와 원래 수는 모두 9로 나누면 5가 남는다.

$23 \times 14 = 322$ 를 검사하면 23의 나머지 5와 14의 나머지 5를 곱한 25는 나머지 7을 준다. 322의 숫자 합도 7이다. 이 검사는 계산 결과가 모순되지 않는다는 신호를 준다.

그러나 331도 숫자 합이 7이다. 따라서 나머지 검사를 통과한 오답이 존재한다. 검사에서 틀리면 계산 오류가 확실하지만 검사에서 맞았다고 전체 계산이 옳다고 결론 내릴 수는 없다. 검사의 힘과 한계를 함께 기록하자.

$$347 = 3 \times 100 + 4 \times 10 + 7$$

법 9에서 100과 10은 1과 같다.

$$3 + 4 + 7 = 14 \rightarrow \text{나머지 } 5$$

십진 자릿값과 9의 나머지 관계

탐구

322를 232로 잘못 적으면 9의 나머지 검사로 찾을 수 있는가?

풀이와 확인

찾을 수 없다. 자리의 순서를 바꾸어도 숫자 합은 7로 같다. 자리 바꿈 오류를 확인하려면 어림이나 다른 나머지 검사 또는 직접 역산을 함께 사용해야 한다.

나머지 문제를 설계하기

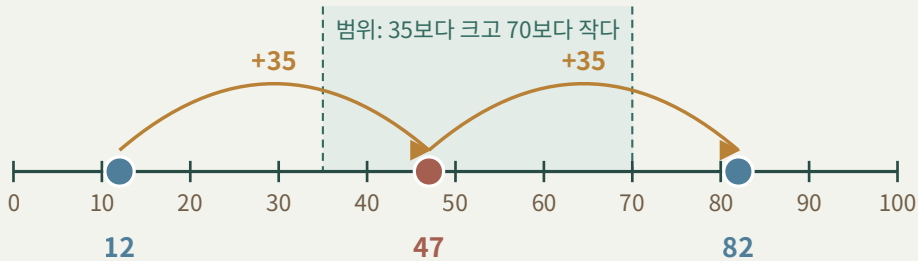
조건의 개수보다 조건이 서로 어울리는지가 중요하다.

직접 문제를 만들려면 먼저 숨길 수를 하나 정하고 여러 나눗셈의 나머지를 구하는 방법이 편리하다. 예를 들어 47을 정한 뒤 5와 7에 대한 나머지를 구하면 각각 2와 5이다. 다만 이 두 조건만으로 47을 유일하게 결정할 수는 없다.

두 조건은 35마다 반복되므로 12도 같은 나머지를 가진다. 수가 35보다 크고 70보다 작다는 범위를 추가하면 47이 하나로 정해진다. 나머지 정보와 범위 정보가 서로 다른 역할을 한다는 것을 볼 수 있다.

좋은 문제에는 찾으려는 대상의 범위와 답의 의미가 분명하게 적혀 있다. 가장 작은 양의 정수인지 주어진 구간의 정수인지 모든 정수인지 밝히자. 만든 문제를 다른 사람이 풀었을 때 예상과 다른 답이 나온다면 조건이 부족하지 않았는지 먼저 살핀다.

5로 나누면 2, 7로 나누면 5가 남는 수



35 간격의 해 12, 47, 82 가운데 범위 띠 안에는 47만 들어간다.

탐구

5로 나누면 2가 남고 7로 나누면 5가 남는 0 이상 100 이하의 수를 모두 구하라.

풀이와 확인

12와 47과 82이다. 가장 작은 비음수 해 12에서 공통 주기 35를 더하여 찾는다. 다음 수 117은 범위를 벗어난다. 숨긴 수만 맞히는 활동과 모든 가능한 수를 찾는 활동은 다르다.

동아시아관 / 07

진구소와 계산 절차의 설계

문제를 방정식으로 옮기기

현실의 조건과 수학적 식 사이에는 해석의 단계가 있다.

진구소의 수서구장은 1247년에 나온 수학서로 방정식과 나머지 문제를 비롯한 다양한 계산을 다룬다. 제목이 비슷한 구장산술과는 서로 다른 책이다. 토지와 측량 등의 문제를 수량 관계로 바꾸는 일이 중요한 특징이다.

여기서는 새로운 교육용 문제로 가로가 세로보다 3만큼 긴 직사각형의 넓이가 40이라고 하자. 세로를 x 로 두면 가로는 $x+3$ 이고 넓이 조건은 $x(x+3)=40$ 이다. 정리하면 $x^2+3x-40=0$ 이 된다.

수학적 식의 해는 5와 -8 이지만 길이라는 조건에는 양수 5만 맞는다. 식을 푸는 일 뒤에는 답을 현실의 조건에 되돌려 검사하는 단계가 필요하다. 가로 8과 세로 5를 곱하여 넓이 40을 확인하면 모델링이 끝난다.



$$8 \times 5 = 40$$

이 장에서 새로 만든 직사각형 문제

탐구

넓이가 54이며 가로가 세로보다 3만큼 길다면 세로는?

풀이와 확인

6이다. $x^2+3x-54=(x-6)(x+9)$ 이므로 양의 해는 6이다. 가로는 9가 된다. 음의 해 -9 는 방정식에는 맞지만 양의 길이 조건에 맞지 않는다.

[EA06] University of St Andrews. Qin Jiushao

계수를 줄로 놓기

문자의 모양을 줄여도 각 계수의 자리는 남아 있어야 한다.

다항식 $2x^3+0x^2-5x+7$ 을 계수만으로 기록하면 2와 0과 -5와 7의 줄이 된다. 차수가 내려가는 순서라는 약속이 있어야 원래 식을 복원할 수 있다. 가운데 0을 빼면 -5가 제곱항의 계수로 잘못 읽힐 수 있다.

산가지의 배열과 현대의 계수 표는 서로 같은 도구는 아니지만 자리가 역할을 정한다는 생각을 비교할 수 있다. 수의 자릿값에서 빈 칸이 중요했던 것처럼 다항식에서도 빠진 항의 자리를 보존해야 한다.

$x=2$ 를 넣으면 $2 \times 8 - 5 \times 2 + 7 = 13$ 이다. 계수 줄을 다루는 모든 절차는 이 직접 대입과 같은 값을 내야 한다. 기호를 간단히 적는 목적은 의미를 없애는 것이 아니라 반복 계산의 구조를 잘 드러내는 데 있다.

차수	3	2	1	0
계수	2	0	-5	7

빈 항까지 보존한 현대식 계수 배열

탐구

x^3-4 의 계수 줄은 어떻게 쓰는가?

풀이와 확인

내림차순으로 1과 0과 0과 -4를 쓴다. 제곱항과 일차항이 없으므로 두 자리에 0이 필요하다. 최고차항 계수 1도 배열에서는 명시하면 혼동을 줄일 수 있다.

중첩하여 계산하기

거듭제곱을 따로 만들지 않아도 다항식의 값을 구할 수 있다.

$2x^3-5x+7$ 은 $((2x)x-5)x+7$ 로 쓸 수 있다. $x=2$ 를 넣을 때 2에서 시작하여 2를 곱하고 0을 더하면 4가 된다. 다시 2를 곱하고 -5를 더하면 3이 된다. 마지막으로 2를 곱하고 7을 더하면 13이다.

각 단계가 곱하고 다음 계수를 더하는 같은 모양을 갖는다. 계수에 0이 있는 자리도 한 단계를 차지한다. 이 구조는 계산을 일정한 순서로 수행하게 하며 필요한 곱셈의 수를 줄인다.

오늘날 호너 방식이라고 부르는 형태의 계산과 중국의 다항식 수치 계산 전통을 비교할 수 있다. 현대의 이름이 그 생각의 모든 역사를 대표하지는 않는다. 다만 현재의 괄호와 문자 표기를 역사적 원문의 표기라고 제시하지는 않아야 한다.

2

$\times 2+0 \rightarrow 4$

$\times 2-5 \rightarrow 3$

$\times 2+7 \rightarrow 13$

$2x^3-5x+7$ 을 $x=2$ 에서 계산하는 순서

탐구

x^3+2x^2+3x+4 를 $x=2$ 에서 중첩 계산하라.

풀이와 확인

1에서 시작한다. $1 \times 2+2=4$ 이다. $4 \times 2+3=11$ 이다. $11 \times 2+4=26$ 이다. 직접 계산한 $8+8+6+4$ 와 같은 값이다.

[EA06] University of St Andrews. Qin Jiushao

답이 놓인 구간 찾기

정확한 해를 모르더라도 해의 위치부터 좁힐 수 있다.

$x^2-2=0$ 의 양의 해를 찾으려면 1과 2를 먼저 넣어 보자. 결과는 각각 -1과 2이다. 제곱 함수가 이 구간에서 연속적으로 증가하므로 해는 두 수 사이에 있다. 이제 중간값 1.5를 넣으면 0.25이므로 오른쪽 경계를 1.5로 옮긴다.

새 구간의 중간값 1.25에서는 -0.4375가 나온다. 따라서 해는 1.25와 1.5 사이에 있다. 이처럼 부호와 연속성을 이용하여 구간을 절반씩 좁히는 것은 현대적으로 설명한 탐색 활동이다.

구간 길이는 단계를 거칠 때마다 절반이 된다. 처음 길이가 1이면 열 단계 뒤 길이는 $1/1024$ 이다. 답의 소수 자릿수를 막연히 늘리기보다 어느 구간 안에 있다는 보장을 얻는 것이 이 방법의 장점이다.



양의 제곱근을 둘러싼 경계를 좁히는 과정

탐구

1.375의 제곱은 2보다 큰가 작은가? 다음 구간은?

풀이와 확인

$1.375^2=1.890625$ 로 2보다 작다. 앞의 구간이 1.25에서 1.5였으므로 새 구간은 1.375에서 1.5이다. 양수 영역에서 제곱이 증가한다는 조건을 함께 사용했다.

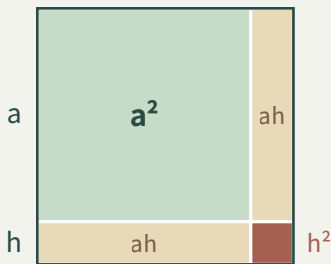
자리 하나를 더 얻는 법

정수 해를 찾은 다음에는 작은 단위로 다시 살필 수 있다.

$\sqrt{2}$ 가 1과 2 사이에 있다는 것을 안다면 소수 첫째 자리 후보 1.1부터 1.9까지 제공해 볼 수 있다. $1.4^2=1.96$ 이고 $1.5^2=2.25$ 이므로 해는 1.4와 1.5 사이에 있다. 소수 둘째 자리에서도 같은 방식으로 1.41과 1.42 사이를 찾는다.

제공을 매번 처음부터 계산할 필요는 없다. 이미 a^2 를 안다면 $(a+h)^2=a^2+2ah+h^2$ 를 이용하여 늘어난 부분만 계산할 수 있다. h 가 작은 새 자리의 값이다. 이 관계는 도형의 넓이를 덧 붙이는 그림으로도 볼 수 있다.

이 활동은 자리별 근사 계산의 원리를 설명하기 위한 재구성이다. 역사서의 구체적인 배열과 계산 순서를 그대로 복원했다고 주장하지 않는다. 어느 단계까지 계산했는지와 마지막 구간의 폭을 기록하면 근삿값의 의미가 분명해진다.



$$a = 1.4, h = 0.01$$

$$a^2 = 1.96$$

$$2ah = 0.028, h^2 = 0.0001$$

$$\mathbf{1.41^2 = 1.9881}$$

h 의 폭은 확대하여 그림

한 번 a 에 h 를 덧붙이면 넓이는 두 번 $2ah$ 와 h^2 만큼 늘어난다.

탐구

1.41^2 을 1.4^2 에서 출발하여 구하라.

풀이와 확인

$h=0.01$ 로 두면 $1.96+2 \times 1.4 \times 0.01+0.0001=1.9881$ 이다. 따라서 1.41은 $\sqrt{2}$ 보다 작다. 다음 후보 1.42의 제공은 2.0164이다.

이어 읽기 / 진구소와 계산 절차의 설계

세제공근에서 자리 하나를 더 얻기

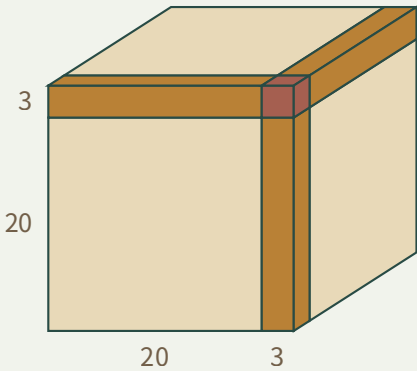
정육면체에 얇은 판과 막대를 덧붙이면 $(a+h)^3$ 을 이루는 네 종류의 부분이 그대로 보인다.

앞에서는 $(a+h)^2$ 을 정사각형에 떠 두 개와 작은 정사각형을 덧붙이는 그림으로 읽었다. 같은 생각을 한 차원 올리면 한 모서리가 a 인 정육면체에 두께 h 인 층을 세 방향으로 덧씌우는 장면이 된다. 덧붙는 부분은 $a \times a \times h$ 인 판 세 개와 $a \times h \times h$ 인 막대 세 개와 한 모서리가 h 인 작은 정육면체 하나이다. 따라서 $(a+h)^3 = a^3 + 3a^2h + 3ah^2 + h^3$ 이며 계수 1과 3과 3과 1은 이항계수 삼각형의 한 줄과 같다.

12167의 세제공근을 자리별로 찾아보자. $20^3=8000$ 이고 $30^3=27000$ 이므로 십의 자리 숫자는 2이며 $a=20$ 으로 둔다. 남은 양 $12167-8000=4167$ 을 덧붙일 부분의 부피로 보고 h 를 고른다. $h=3$ 이면 $3 \times 400 \times 3 + 3 \times 20 \times 9 + 27 = 3600 + 540 + 27 = 4167$ 이 되어 남은 양과 정확히 같으므로 세제공근은 23이다.

h 를 정할 때에는 덧붙는 부피가 남은 양을 넘지 않는 가장 큰 숫자를 고른다. $h=4$ 를 넣으면 $4800 + 960 + 64 = 5824$ 가 되어 4167보다 크므로 너무 크다. 판 세 개의 부피 $3a^2h$ 가 가장 큰 몫을 차지하므로 $4167 \div 1200 \approx 3.47$ 로 후보를 어림한 뒤 막대와 작은 정육면체까지 더하여 확인하면 된다. 나눗셈으로 어렵하고 전체 부피로 검산하는 두 단계는 제공근에서 본 구조와 같다.

구장산술에는 제공근과 함께 세제공근을 구하는 문제들이 실려 있다. 여기의 판과 막대 그림은 자리별 계산의 원리를 설명하기 위한 현대 재구성이며 옛 책의 산가지 배열이나 계산 순서를 복원한 것은 아니다. 세 자리 이상의 세제공근에서는 앞에서 얻은 값을 새 a 로 삼아 같은 과정을 되풀이한다. 자리마다 남은 양과 덧붙인 부피를 기록해 두면 계산이 어디에서 어긋났는지 찾기 쉽다.



- 안쪽 정육면체 $20^3 = 8000$
- 판 3개 $3 \times 20^2 \times 3 = 3600$
- 막대 3개 $3 \times 20 \times 3^2 = 540$
- 작은 정육면체 $3^3 = 27$

$23^3 = 8000 + 4167 = 12167$

안쪽 정육면체는 가려져 보이지 않는다

한 모서리 20인 정육면체에 두께 3인 판과 막대를 덧붙인 23^3

부분	개수	하나의 부피	합
안쪽 정육면체	1	8000	8000
판	3	1200	3600
막대	3	180	540
작은 정육면체	1	27	27

탐구

13824의 세제곱근을 같은 방법으로 구하라.

풀이와 확인

$20^3=8000$ 이므로 $a=20$ 이고 남은 양은 5824이다. $5824 \div 1200 \approx 4.85$ 이므로 $h=4$ 를 먼저 시험한다. $3 \times 400 \times 4 + 3 \times 20 \times 16 + 64 = 4800 + 960 + 64 = 5824$ 로 남은 양과 같으므로 세제곱근은 24이다. 앞 문단에서 너무 크다고 버린 5824가 바로 이 문제의 덧붙는 부피였다는 점도 확인할 수 있다.

[EA02] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nine Chapters on the Mathematical Art

[EA06] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Qin Jiushao

빗물의 높이와 부피

높이가 바뀌는 그릇에서는 높이를 그대로 비교할 수 없다.

입구가 넓고 바닥이 좁은 그릇에 모인 빗물의 높이를 평평한 땅에 내린 비의 깊이로 곧바로 읽을 수는 없다. 진구소의 수학서에는 빗물을 받는 그릇의 형태와 관련된 문제가 등장한다. 관측값을 해석하려면 그릇의 기하가 필요하다.

단순한 교육용 모형으로 입구 넓이가 100이고 모인 물의 부피가 250이라고 하자. 손실 없이 입구 전체에서 빗물을 받았다면 강수 깊이는 $250 \div 100 = 2.5$ 이다. 이 계산의 분모는 그릇 바닥 넓이가 아니라 비를 받은 입구 넓이이다.

증발이나 튀는 물이나 바람은 여기서 제외하였다. 실제 측정에서는 이런 조건이 결과에 영향을 준다. 부피를 알고 있다는 가정과 높이만 읽었다는 상황도 구분해야 한다. 높이를 부피로 바꾸려면 그릇 단면이 어떻게 변하는지 알아야 한다.

입구 100		250
입구 200		500

같은 강수 깊이 2.5에서 모이는 물의 부피

탐구

입구 넓이를 두 배로 하고 같은 깊이의 비를 받으면 물의 부피는?

풀이와 확인

손실이 없다는 모형에서는 두 배이다. 강수 깊이는 부피를 입구 넓이로 나눈 값이므로 변하지 않는다. 큰 그릇에 물이 많이 모였다는 사실만으로 비가 더 많이 왔다고 판단해서는 안 된다.

[EA06] University of St Andrews. Qin Jiushao

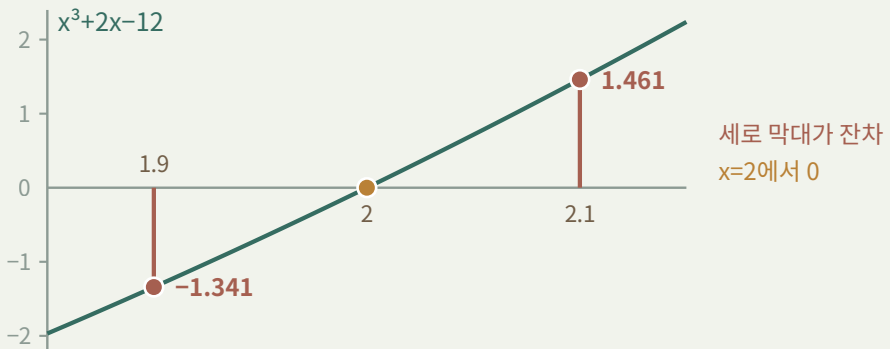
수치 답의 검산

복잡한 계산도 원래 관계에 넣어 보면 오류의 흔적이 드러난다.

새로 만든 삼차방정식 $x^3+2x-12=0$ 에서 계산 결과가 $x=2$ 라고 하자. 대입하면 $8+4-12=0$ 이므로 정확한 해이다. 반면 $x=1.9$ 를 넣으면 $6.859+3.8-12=-1.341$ 이 나온다. 이 값은 식을 얼마나 벗어나는지 보여 준다.

다항식에 근삿값을 넣어 얻은 차를 잔차라고 부른다. 잔차가 작으면 도움이 되지만 언제나 해 자체의 오차가 작다고 보장하는 것은 아니다. 함수가 매우 완만한 곳에서는 작은 잔차에도 해의 위치가 크게 달라질 수 있다.

따라서 검산 보고서에는 대입 결과뿐 아니라 해를 둘러싼 구간과 함수의 변화 양상도 함께 제시하면 좋다. 정답 숫자 하나보다 어떤 기준으로 믿을 만하다고 판단했는지가 중요하다. 이 원칙은 역사 계산을 현대 프로그램으로 재현할 때에도 같다.



$x^3+2x-12$ 의 그래프에서 1.9와 2.1의 잔차를 세로 막대로 나타냈다.

탐구

$x^2=10000$ 의 근삿값 99.9를 넣으면 잔차는 얼마인가?

풀이와 확인

$99.9^2-10000=-19.99$ 이다. 해의 오차는 -0.1 이지만 잔차의 크기는 약 20이다. 두 수는 다른 양이므로 잔차를 곧바로 해의 오차라고 부르면 안 된다.

절차를 설명하는 문장

계산법은 시작값과 반복 규칙과 종료 조건을 갖추어야 한다.

알고리즘을 설명할 때 단순히 계속 계산한다고 쓰면 독자는 언제 멈추어야 하는지 알 수 없다. 제공근 구간 탐색이라면 처음 구간을 정하고 중간값을 계산한 뒤 어느 경계를 바꿀지 설명해야 한다. 구간 폭이 원하는 정확도보다 작아지면 종료한다.

같은 규칙을 다른 수에 적용해 보아야 절차의 일반성을 확인할 수 있다. $\sqrt{2}$ 에 맞는 숫자를 외운 것과 임의의 양수의 제공근을 찾는 절차를 이해한 것은 다르다. 입력이 0이거나 1보다 작은 경우에는 처음 구간도 조정해야 한다.

설명 문장을 실제 계산 순서로 바꾸어 쓰면 숨은 가정이 드러난다. 음수의 실수 제공근처럼 이 절차의 대상이 아닌 입력도 분명히 표시한다. 계산법의 역사에서 중요한 질문은 어떤 답을 얻었는지뿐 아니라 어떤 종류의 문제를 다룰 수 있었는지이다.

$\sqrt{0.25}$ 의 처음 구간: 0에서 1

중간값: $(0+1)/2=0.5$

제공 검사: $0.5^2=0.25$

정확히 일치하므로 종료

해를 포함하는 처음 구간에서 시작하는 구체적인 제공근 탐색

탐구

$\sqrt{0.25}$ 를 찾으면서 처음 구간을 1과 2로 잡으면 무엇이 잘못되는가?

풀이와 확인

정답 0.5가 처음 구간 안에 없다. 구간을 줄이는 절차는 애초에 해를 포함한 구간에서 시작해야 한다. 0과 1로 시작하면 제공값이 0.25를 양쪽에서 둘러싼다.

동아시아관 / 08

양휘의 삼각형과 수의 배열

이웃을 더하는 삼각형

간단한 덧셈 규칙이 여러 수학적 관계를 한 배열에 모은다.

양휘의 저술에는 오늘날 이항계수 삼각형으로 읽는 배열이 전한다. 양휘는 앞선 가현의 연구를 전하는 중요한 경로이기도 하다. 유럽 인물의 이름으로만 이 배열을 부르면 여러 지역에 걸친 역사가 가려질 수 있다.

맨 위에 1을 놓고 다음 줄의 양 끝에도 1을 놓는다. 가운데 칸은 바로 위의 이웃한 두 수를 더하여 채운다. 처음 다섯 줄은 1에서 시작하여 1과 1인 줄과 1과 2와 1인 줄로 이어진다.

규칙을 따라 만드는 일과 왜 그런 규칙이 성립하는지를 설명하는 일은 다르다. 이 장에서는 곱셈 전개와 선택의 개수와 경로 세기를 통해 같은 배열을 다시 읽는다. 여러 해석이 만나면 외운 수열이 의미 있는 구조로 바뀐다.

		1		
	1		1	
1		2		1

처음 세 줄을 벌려 놓은 이항계수 배열

탐구

1과 4와 6과 4와 1인 줄 다음을 구하라.

풀이와 확인

양 끝에 1을 놓고 이웃한 수를 더하면 1과 5와 10과 10과 5와 1이 된다. 가운데의 10은 $4+6$ 또는 $6+4$ 에서 나온다. 좌우 대칭도 유지된다.

[EA07] University of St Andrews. Yang Hui

제곱을 펼치는 계수

삼각형의 한 줄은 두 항의 거듭제곱을 전개하는 계수이다.

$(a+b)^2$ 을 곱셈으로 펼치면 $a^2+ab+ba+b^2$ 이다. ab 와 ba 가 같으므로 $a^2+2ab+b^2$ 로 정리된다. 여기의 계수 1과 2와 1은 삼각형의 해당 줄과 일치한다.

한 번 더 $a+b$ 를 곱하면 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ 이 된다. 같은 항을 모을 때 바로 앞 전개의 이웃한 계수가 더해진다. 이항계수 삼각형의 덧셈 규칙은 다항식 곱셈 안에서도 자연스럽게 생긴다.

중요한 것은 계수뿐 아니라 지수의 순서이다. a 의 지수는 한 칸씩 줄고 b 의 지수는 한 칸씩 늘며 두 지수의 합은 일정하다. 수만 외우고 항의 순서를 잃으면 올바른 전개식을 만들 수 없다.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

계수: $1 \rightarrow 1 \ 1 \rightarrow 1 \ 2 \ 1$

현대 문자로 읽는 이항계수

탐구

$(a+b)^3$ 에서 $a=b=1$ 로 두면 계수 합은 얼마인가?

풀이와 확인

왼쪽은 $2^3=8$ 이다. 오른쪽 계수의 합도 $1+3+3+1=8$ 이다. 이 관계는 전개 과정에서 항을 빠뜨리지 않았는지 확인하는 간단한 검산이 된다.

선택을 두 갈래로 나누기

어떤 사람을 포함하는 경우와 제외하는 경우를 나누면 개수를 더할 수 있다.

다섯 사람 가운데 두 사람을 뽑는 경우를 생각하자. 특정한 한 사람을 정하여 그 사람이 포함되는 선택과 포함되지 않는 선택으로 나눈다. 포함된다면 나머지 네 사람 중 한 사람을 뽑는 4가지가 있다.

포함되지 않는다면 나머지 네 사람 중 두 사람을 뽑아야 한다. 그 경우는 6가지이므로 전체는 10가지이다. 두 갈래는 겹치지 않으면서 모든 선택을 포함한다. 이것이 앞줄의 이웃한 두 수를 더하는 규칙의 또 다른 이유이다.

순서를 세는 문제인지도 확인해야 한다. 두 사람을 대표와 부대표로 구분하면 같은 두 사람이라도 역할을 바꾸는 경우가 달라진다. 삼각형의 계수는 이 페이지처럼 역할 순서를 구분하지 않는 선택을 센다.

5명 중 2명

특정인 포함: 4

특정인 제외: 6

합계: 10

겹치지 않는 두 경우로 나누어 세기

탐구

네 사람 가운데 세 사람을 뽑는 경우는 몇 가지인가?

풀이와 확인

4가지이다. 뽑지 않을 한 사람을 고르는 것과 대응시킬 수 있다. 뽑는 사람들의 순서를 따로 세면 같은 선택을 여러 번 세게 된다.

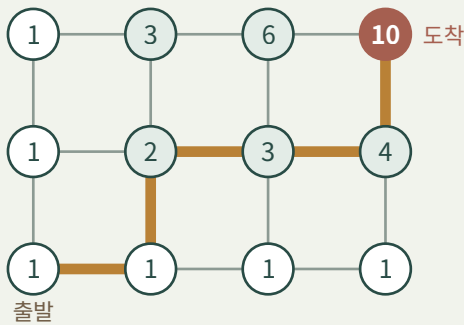
격자 길과 이항계수

오른쪽과 위쪽으로만 움직이는 길에도 같은 덧셈이 나타난다.

가로 세 칸과 세로 두 칸의 격자에서 왼쪽 아래부터 오른쪽 위까지 최단 경로로 이동한다고 하자. 오른쪽으로 세 번과 위쪽으로 두 번 움직여야 한다. 다섯 번의 이동 중 위로 갈 두 자리를 고르면 경로가 정해진다.

각 격자점에 도착하는 길의 수는 왼쪽 점에서 오는 수와 아래 점에서 오는 수의 합이다. 끝점에 들어오는 마지막 방향은 둘 중 하나이며 서로 겹치지 않는다. 가장자리 점의 경로 수는 모두 1이다.

안쪽을 덧셈으로 채우면 끝점의 값은 10이 된다. 도형의 경로를 세던 문제가 사람을 뽑는 문제와 같은 구조를 가진다. 다만 되돌아가는 이동을 허용하면 더 이상 이 작은 표만으로 모든 경로를 셀 수 없다.



각 점의 수 = 왼쪽 점 + 아래 점

예: $6 = 3 + 3$, $10 = 4 + 6$

오른쪽 3번, 위쪽 2번

5번 이동 중 위로 갈 2자리 고르기

금색 길은 그 가운데 하나

가로 3칸과 세로 2칸 격자의 각 점에 도착하는 최단 경로의 수

탐구

가로 두 칸과 세로 두 칸의 최단 경로는 몇 개인가?

풀이와 확인

6개이다. 네 이동 가운데 위로 가는 두 자리를 고르는 수와 같다. 경로 순서를 직접 적거나 격자점의 값을 덧셈으로 채워 서로 검산할 수 있다.

이어 읽기 / 양휘의 삼각형과 수의 배열

대각선을 따라 더하면 꺾이는 자리

삼각수를 차례로 더한 합이 이항계수 삼각형의 다음 줄에 나타나는 까닭을 덧셈 규칙과 선택의 개수로 설명한다.

이항계수 삼각형에서 1과 3과 6과 10으로 이어지는 대각선을 따라가 보자. 네 수의 합 20은 10의 바로 아래 줄에서 대각선을 한 칸 벗어난 오른쪽 칸에 놓여 있다. 더한 칸들이 곧은 막대를 이루고 합이 놓인 칸이 꺾인 끝을 이루므로 그림은 갈고리 모양이 된다. 한 항을 더 더하면 $1+3+6+10+15=35$ 로 한 줄 더 아래의 칸에 닿는다.

이웃을 더하는 규칙으로 이유를 설명할 수 있다. 20은 바로 위의 10과 10을 더한 값이고 오른쪽의 10은 다시 그 위의 6과 4를 더한 값이다. 4를 3과 1로 펼치고 마지막 1을 그 위의 1로 바꾸면 $20=10+6+3+1$ 이 된다. 매번 오른쪽 칸만 위로 펼쳤으므로 대각선 위의 수들만 남는다.

선택의 개수로도 같은 결과를 얻는다. 1부터 6까지의 번호 가운데 세 개를 고르는 경우는 20가지이며 이를 고른 번호 중 가장 큰 번호에 따라 나눈다. 가장 큰 번호가 6이면 나머지 둘을 1부터 5 가운데에서 고르므로 10가지이고 가장 큰 번호가 5와 4와 3이면 각각 6가지와 3가지와 1가지이다. 네 경우는 겹치지 않으므로 모든 선택을 포함하므로 합은 20이다.

1과 3과 6과 10은 공을 삼각형 모양으로 늘어놓은 층의 개수이므로 이 합은 네 층으로 쌓은 삼각뿔 더미의 공 개수이다. 일반적으로 n 층 더미의 공은 $n(n+1)(n+2)/6$ 개이며 $n=4$ 이면 $4 \times 5 \times 6 \div 6 = 20$ 이다. 주세걸의 책에는 이와 같은 합의 공식이 실려 있다고 소개된다. 그림의 갈고리 배열과 선택의 분류는 그 공식을 이해하기 위한 현대 재구성이다.



$$1 + 3 + 6 + 10 = 20$$

$$4 \times 5 \times 6 \div 6 = 20$$

가장 큰 번호가 6, 5, 4, 3일 때
 $10 + 6 + 3 + 1$

삼각수 1, 3, 6, 10의 합 20이 놓이는 갈고리 모양의 자리

탐구

첫째부터 스무째 삼각수까지 모두 더하면 얼마인가?

풀이와 확인

$n=20$ 을 대입하면 $20 \times 21 \times 22 \div 6 = 1540$ 이다. 이 값은 1부터 22까지의 번호 가운데 세 개를 고르는 경우의 수와 같다. 가장 큰 번호가 3, 4, 5부터 22까지일 때 나머지 둘을 고르는 경우의 수는 차례로 1, 3, 6부터 210까지로 첫째부터 스무째 삼각수와 같다. 작은 n 에서 공식과 직접 합을 비교하여 계산해 두면 큰 n 에서도 믿고 쓸 수 있다.

[EA07] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Yang Hui

[EA08] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Zhu Shijie

줄을 더하면 두 배가 된다

부분집합을 모두 세면 거듭제곱이 나타난다.

원소가 네 개인 집합에서 아무것도 고르지 않는 경우부터 네 개를 모두 고르는 경우까지 세어 보자. 각각의 개수는 1과 4와 6과 4와 1이다. 합하면 16이 된다. 이는 원소마다 고를지 말지 두 선택이 있기 때문에 2^4 로도 셀 수 있다.

새 원소 하나를 추가하면 기존의 모든 선택에 두 갈래가 생긴다. 새 원소를 넣거나 넣지 않는 것이다. 따라서 다음 줄의 합은 이전 줄의 두 배이다. 이 성질은 삼각형을 작성한 뒤 전체적인 오류를 찾는 데 유용하다.

그러나 합이 맞다고 각 칸이 모두 맞는 것은 아니다. 한 칸을 1 크게 쓰고 다른 칸을 1 작게 쓰면 합은 유지된다. 줄의 합 검사와 이웃 덧셈 검사를 함께 사용해야 배열을 더 확실하게 확인할 수 있다.

0개 원소		1
1개 원소		2
2개 원소		4
3개 원소		8
4개 원소		16

원소를 하나 늘릴 때마다 부분집합 수는 두 배가 된다.

탐구

원소가 여섯 개인 집합의 부분집합은 모두 몇 개인가?

풀이와 확인

$2^6=64$ 개이다. 공집합과 전체 집합도 포함한다. 적어도 하나를 고르는 경우만 묻는다면 공집합 하나를 빼서 63개가 된다.

대칭을 증명하는 짝짓기

같은 개수라는 주장은 서로 대응시키면 분명해진다.

다섯 사람 중 두 사람을 뽑는 방법과 세 사람을 뽑는 방법은 모두 10가지이다. 이는 삼각형이 예쁘게 대칭이어서 우연히 같은 것이 아니다. 두 사람의 선택마다 남은 세 사람을 연결하면 일대일 대응이 된다.

이 대응은 거꾸로도 가능하다. 세 사람을 주면 뽑히지 않은 두 사람이 하나로 정해진다. 어느 선택도 빠지거나 겹치지 않는다. 따라서 실제 목록을 모두 작성하지 않아도 두 개수가 같다는 것을 증명할 수 있다.

수학에서 대칭은 눈에 보이는 모양을 넘어 구조를 보존하는 대응으로 해석할 수 있다. 이항계수의 좌우 대칭을 이해한 뒤에는 격자 경로를 뒤집는 대응도 찾아보자. 같은 명제를 서로 다른 대상으로 설명하는 능력이 길러진다.

5명 중 2명 선택

선택한 2명

남겨진 3명

5명 중 3명 선택

선택과 여집합 사이의 대응

탐구

여덟 사람 가운데 일곱 사람을 고르는 수를 빠르게 구하라.

풀이와 확인

한 사람을 제외하는 선택과 대응하므로 8가지이다. 복잡한 곱셈 공식을 먼저 사용하지 않아도 된다. 제외하는 사람을 하나씩 지정하면 모든 선택을 정확히 한 번씩 얻는다.

마방진의 조건을 검사하기

줄의 합이 같은 배열에는 여러 조건이 동시에 걸려 있다.

양휘의 수학 전통에는 수의 배열에 관한 탐구도 보인다. 여기서는 1부터 9까지를 한 번씩 사용하는 3×3 마방진을 현대식 표로 살펴본다. 모든 행과 열과 두 대각선의 합이 같아야 한다.

아홉 수의 합은 45이다. 세 행이 같은 합을 가지므로 각 행의 합은 15가 되어야 한다. 다만 합이 15라는 조건만 알아도 배열이 저절로 완성되는 것은 아니다. 수의 중복 여부와 열과 대각선도 따로 확인해야 한다.

가운데 수가 5인 예에서는 중심을 사이에 둔 두 수가 10을 이룬다. 배열을 회전하거나 뒤집어도 합 조건은 유지된다. 서로 다른 모양의 답을 세려면 회전한 배열을 같은 것으로 볼지 먼저 정해야 한다.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

각 행과 열과 두 대각선의 합이 15인 배열

탐구

아래 배열에서 세로 두 번째 열과 두 대각선의 합을 확인하라.

풀이와 확인

두 번째 열은 $1+5+9=15$ 이다. 대각선은 $8+5+2=15$ 와 $6+5+4=15$ 이다. 행만 확인하면 놓칠 수 있는 조건을 함께 검사하였다.

[EA07] University of St Andrews. Yang Hui

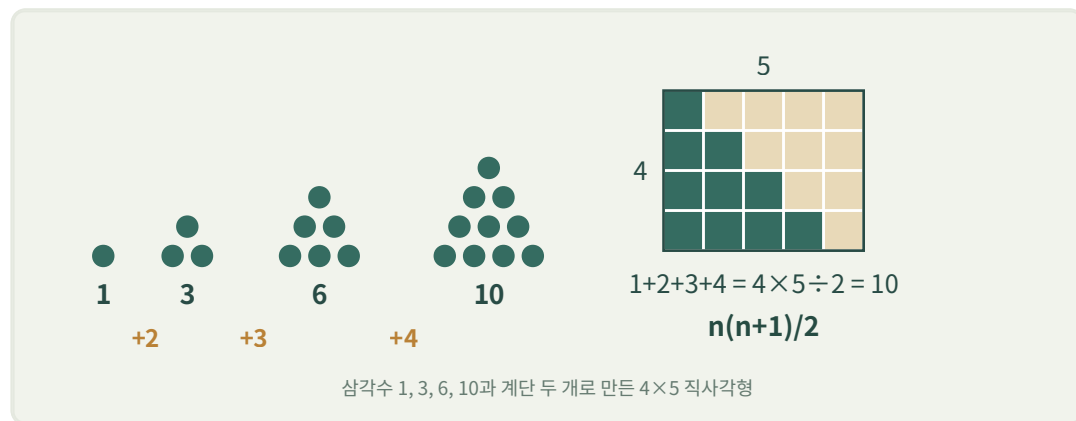
발견한 규칙의 범위

몇 줄에서 보인 모습은 추측의 근거이지 끝난 증명은 아니다.

배열을 탐구하다 보면 대각선에 자연수나 삼각수가 나타나는 것을 볼 수 있다. 예를 들어 왼쪽에서 세 번째 대각선은 1과 3과 6과 10으로 이어진다. 연속된 두 항의 차는 2와 3과 4로 증가한다.

이 수는 차례로 1부터 n 까지를 더한 값과 연결된다. $n(n+1)/2$ 라는 식은 같은 계단 배열을 뒤집어 붙여 직사각형을 만드는 방법으로 설명할 수 있다. 그림이 숫자 패턴의 이유를 제공한다.

처음 몇 항을 계산하여 규칙을 추측한 뒤에는 다음 항에도 적용되는 이유를 찾아야 한다. 이름이 붙은 유명한 배열이라도 관찰과 증명과 역사적 귀속은 서로 다른 질문이다. 어떤 문장이 어느 종류의 주장인지 표시하며 탐구를 마무리하자.



탐구

1부터 20까지의 합을 구하고 짝짓기로 설명하라.

풀이와 확인

처음과 끝을 짝지으면 각 쌍의 합이 21이며 열 쌍이 있다. 따라서 합은 210이다. $20 \times 21/2$ 도 같은 결과를 준다. 항이 홀수 개일 때에는 가운데 항의 처리까지 설명해야 한다.

동아시아관 / 09

주세걸과 미지수의 배열

하나를 모른다고 정하기

미지수는 무엇을 모르는지 정확하게 지정하는 이름이다.

주세걸의 산학계몽은 1299년에 간행되었고 사원옥감은 1303년에 나왔다. 두 저술은 방정식과 여러 미지수를 다루는 전통을 보여 준다. 천원술 등의 역사적 표현을 현대 문자식과 비교하면 계산의 구조를 이해하기 쉽다.

다만 x 와 y 가 인쇄된 현대 방정식을 원문 표기처럼 제시해서는 안 된다. 이 장의 식은 독자의 이해를 위한 번역이다. 역사적 배열의 위치와 명칭이 현대의 문자 역할과 어떻게 대응하는지 따로 확인해야 한다.

가령 두 수의 합이 11이고 차가 3이면 작은 수를 x 로 놓고 큰 수를 $x+3$ 으로 쓸 수 있다. 합 조건은 $2x+3=11$ 이므로 $x=4$ 이다. 미지수를 하나 정하면 다른 양을 그 수로 표현하는 것이 첫 단계이다.

표현을 바꾸는 활동에서는 문장과 곱의 형태와 전개식과 계수 배열을 차례로 연결한다. 한 수와 그보다 3 큰 수의 곱이 40이라는 조건은 $x(x+3)=40$ 이며 계수 배열에서는 1과 3과 -40을 사용한다. 각 표기가 보존하는 정보와 쉽게 보여 주는 관계를 설명한다.

작은 수: x

큰 수: $x+3$

$$x+(x+3)=11 \rightarrow x=4$$

이 장의 현대식 미지수 표현

탐구

합이 18이며 큰 수가 작은 수의 두 배이면 두 수는?

풀이와 확인

작은 수를 x 라 하면 큰 수는 $2x$ 이다. $3x=18$ 이므로 작은 수 6과 큰 수 12를 얻는다. 합과 배수 조건을 각각 검산한다.

[EA08] University of St Andrews. Zhu Shijie

제곱항을 없애는 소거

같은 소거 원리를 서로 다른 차수의 두 조건에도 적용할 수 있다.

두 수 x 와 y 가 $x^2+y=11$ 과 $x^2-y=7$ 을 만족한다고 하자. 이번에는 x 가 제곱으로 나타나므로 앞 장의 일차 연립방정식과 다르다. 두 식을 빼면 x^2 이 사라져 $2y=4$ 가 된다. 따라서 $y=2$ 이다. 소거는 특정 문자만 지우는 요령이 아니라 같은 형태의 항을 맞추어 제거하는 생각이다.

$y=2$ 를 첫 식에 넣으면 $x^2=9$ 이다. 실수 범위에서는 $x=3$ 과 $x=-3$ 이 모두 가능하다. 따라서 순서쌍은 두 개이다. x 가 양의 길이라는 조건을 추가한 경우에만 $x=3$ 으로 좁힐 수 있다. 식을 정리하는 일과 해의 범위를 선택하는 일은 분리해야 한다.

두 식을 더하는 경로도 가능하다. 이때 y 가 없어져 $2x^2=18$ 이 된다. 먼저 x 를 찾은 뒤 y 를 복원하면 같은 두 해를 얻는다. 어떤 항을 먼저 없애는지 바꾸어도 원래 조건의 공통 해는 유지되어야 한다. 서로 다른 경로를 비교하면 부호 실수를 찾기 쉽다.

이 예제는 다변수 소거의 구조를 이해하기 위한 현대적 구성이다. 주세걸의 실제 배열이나 원문 문제를 복제한 것은 아니다. 앞 장의 일차 소거와 이번 제곱항 소거를 함께 읽으면 미지수의 수와 차수가 서로 다른 난점임을 알 수 있다.

단계	남는 관계
두 식의 차	$2y=4$
두 식의 합	$2x^2=18$
실수 해	$x=3$ 또는 -3 이며 $y=2$

탐구

두 식의 우변을 각각 18과 14로 바꾸면 실수 해는 어떻게 되는가?

풀이와 확인

두 식을 빼면 $y=2$ 이다. 더하면 $x^2=16$ 이므로 $x=4$ 또는 $x=-4$ 이다. 두 순서쌍을 각각 원래 식에 대입하면 18과 14가 나온다.

[EA08] University of St Andrews. Zhu Shijie

항마다 두 가지 차수가 있다

두 미지수의 식에서는 한 줄만으로 항의 위치를 정하기 어렵다.

$3x^2+2xy+4y^2-5$ 를 계수 배열로 나타내려면 x 의 차수와 y 의 차수를 함께 기록해야 한다.

$2xy$ 는 x 의 차수가 1이며 y 의 차수도 1인 항이다. 단순히 전체 차수 2라고만 쓰면 x^2 과 구분되지 않는다.

행을 y 의 차수로 정하고 열을 x 의 차수로 정하면 각 항이 하나의 칸을 차지한다. 없는 항의 칸은 0으로 남긴다. 이런 배열은 문자식의 구조를 공간으로 옮기는 현대적인 학습 방법이다.

$x=1$ 과 $y=2$ 를 대입하면 $3+4+16-5=18$ 이다. 배열에서 같은 계산을 해 보고 문자식의 결과와 비교한다. 표기 방식이 바뀌어도 항의 뜻과 최종 값이 보존되어야 한다.

y차수 / x차수	0	1	2
0	-5	0	3
1	0	2	0
2	4	0	0

$3x^2+2xy+4y^2-5$ 의 현대식 계수 배열

탐구

$2xy$ 와 $2x^2y$ 는 어떤 칸에서 구별되는가?

풀이와 확인

y 의 차수는 둘 다 1이다. 그러나 x 의 차수는 각각 1과 2이다. 따라서 같은 행의 서로 다른 열에 놓인다. 계수가 모두 2라는 이유로 같은 항으로 합칠 수 없다.

곱셈은 차수를 이동시킨다

식에 문자를 곱하면 배열의 위치가 일정하게 바뀐다.

다항식 $2x+3$ 에 x 를 곱하면 $2x^2+3x$ 가 된다. 각 항의 x 차수가 하나씩 증가한다. 계수는 그대로이며 위치가 이동한다. 수의 자릿값에서 10을 곱할 때 자리가 바뀌는 모습과 비교할 수 있지만 두 개념을 동일시해서는 안 된다.

두 미지수의 배열에서는 y 를 곱할 때 y 차수 방향으로 한 칸 이동한다. xy 를 곱하면 두 방향으로 각각 한 칸씩 움직인다. 같은 칸에 도착한 항들은 계수를 더하여 합친다.

이 설명을 이용하여 $(x+y)(x+2y)$ 를 계산하면 $x^2+3xy+2y^2$ 가 된다. 네 부분곱 가운데 xy 와 $2xy$ 가 같은 칸에 놓여 $3xy$ 가 된다. 배열은 항을 빠뜨리거나 다른 종류의 항을 잘못 합치는 실수를 줄이는 데 도움을 준다.

$\times$	x	$2y$
x	x^2	$2xy$
y	xy	$2y^2$

부분곱을 만든 뒤 같은 항을 모은다.

탐구

$(x+2)(x+3)$ 을 전개하라.

풀이와 확인

$x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$ 이다. x 항 두 개를 합치되 제곱항이나 상수항과 섞지 않는다. $x=1$ 을 넣으면 왼쪽 12와 오른쪽 12가 같아 검산할 수 있다.

대입으로 차원을 줄이기

한 조건에서 미지수를 표현하면 다른 조건에 넘겨줄 수 있다.

두 수의 합이 7이고 곱이 12인 문제를 살펴보자. 합 조건에서 $y=7-x$ 를 얻는다. 곱 조건 $xy=12$ 에 이를 넣으면 $x(7-x)=12$ 이다. 정리하면 $x^2-7x+12=0$ 이 된다.

인수분해하면 $(x-3)(x-4)=0$ 이므로 x 는 3 또는 4이다. 각각에 대해 y 는 4 또는 3이 된다. 두 수의 역할을 구분하지 않으면 하나의 짝이지만 x 와 y 의 자리를 구분하면 두 수쌍이다.

미지수를 없애는 과정에서 해의 정보를 잃거나 가짜 해를 만들지 않았는지 확인해야 한다. 이 예의 대입은 합 조건을 그대로 사용했으며 나누거나 제공하지 않았다. 마지막에는 두 수 쌍을 원래 합과 곱에 넣어 검사한다.

$$x+y=7$$

$$y=7-x$$

$$xy=12$$

$$x^2-7x+12=0$$

두 조건을 하나의 미지수 식으로 모으는 과정

탐구

합이 10이고 곱이 21인 두 양수는?

풀이와 확인

3과 7이다. $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$ 이므로 두 후보를 얻는다. 순서가 있는 수쌍이라면 $x=3$ 과 $y=7$ 인 경우와 그 반대 경우를 모두 적는다.

제곱합을 다른 정보로 구하기

새로운 양을 직접 찾지 않고 관계식을 이용할 수 있다.

$x+y=7$ 이며 $xy=12$ 일 때 x^2+y^2 을 구하는 데 두 수를 먼저 풀 필요는 없다.

$(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$ 이므로 제곱합은 $49-24=25$ 이다. 원하는 답에 필요한 정보만 선택하는 방식이다.

차의 제곱도 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$ 로 구한다. 따라서 이 경우 차의 제곱은 $49-48=1$ 이다. 차의 크기가 1임을 알지만 $x-y$ 의 부호까지는 정할 수 없다. 어느 수가 큰지라는 정보가 더 필요하다.

이와 같은 항등식은 특정 숫자에만 맞는 우연한 공식이 아니다. 곱셈을 전개하면 모든 실수 x 와 y 에 대해 성립함을 확인할 수 있다. 문제에 주어진 합과 곱이 답을 얼마나 결정하는지 살피는 활동이다.

$$x^2+y^2 = (x+y)^2 - 2xy$$

$$(x-y)^2 = (x+y)^2 - 4xy$$

합 7과 곱 12 → 제곱합 25

합과 곱을 다른 양으로 바꾸는 항등식

탐구

$x+y=10$ 이며 $xy=21$ 이면 x^2+y^2 과 차의 크기를 구하라.

풀이와 확인

제곱합은 $100-42=58$ 이다. 차의 제곱은 $100-84=16$ 이므로 차의 크기는 4이다. $x-y$ 는 순서에 따라 4 또는 -4일 수 있다.

차이를 한 번 더 살피기

수열의 값보다 이웃한 값의 차이가 규칙을 더 잘 드러낼 수 있다.

제곱수 1과 4와 9와 16과 25를 늘어놓자. 이웃한 차는 3과 5와 7과 9이다. 이 차들의 차는 모두 2이다. 원래 값은 빨리 커지지만 두 번째 차이는 일정하다.

n^2 과 $(n+1)^2$ 의 차를 식으로 구하면 $2n+1$ 이다. 따라서 첫 번째 차이가 홀수로 늘어나는 이유를 설명할 수 있다. 첫 값과 차이 규칙을 알면 다음 값을 거듭제곱 없이 덧셈으로 만들 수 있다.

차분은 수열과 다항식의 관계를 탐구하는 도구이다. 몇 항이 일정한 두 번째 차이를 가진다고 해서 모든 미래 항이 반드시 제곱 규칙을 따른다고 단정할 수는 없다. 무한히 계속되는 정의를 제시했는지 유한한 관측표만 제시했는지 구분한다.

제곱수	1	4	9	16	25
첫 차이		3	5	7	9
둘째 차이			2	2	2

제곱수의 두 번째 차이는 일정하다.

탐구

제곱수 25 다음 값을 차이만 이용하여 구하라.

풀이와 확인

앞의 차이 9 다음은 11이므로 $25+11=36$ 이다. 다음 차이는 13이므로 그 뒤는 49이다. $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ 이라는 일반식이 이 절차를 보장한다.

동아시아관 / 10

주판과 진검기의 계산 문화

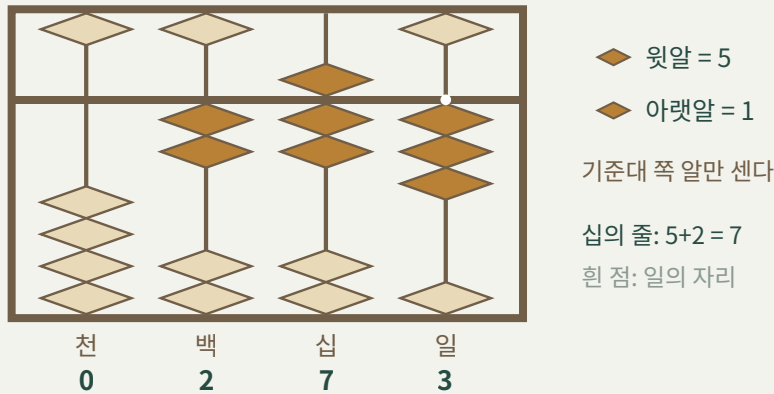
손으로 움직이는 자릿값

도구가 달라져도 한 자리의 단위는 계산 전체를 지탱한다.

일본의 소로반은 중국에서 전해진 주판과 연결된다. 요시다 미쓰요시의 진검기는 1627년에 처음 간행되어 주판 계산과 생활의 여러 문제를 소개했다. 산가지와 주판을 함께 보면 같은 자릿값을 서로 다른 물리적 장치로 구현하는 방식을 알 수 있다.

이 장에서는 윗알 하나가 5를 나타내고 아랫알 네 개가 각각 1을 나타내는 현대식 소로반 모형을 사용한다. 역사상의 모든 주판이 이 구성과 같았던 것은 아니다. 기준대에 붙은 알만 계산에 참여하도록 약속한다.

한 줄의 알은 0부터 9까지를 표현하며 옆줄로 이동할 때 단위가 열 배 달라진다. 단위 줄을 어디로 정했는지 표시하지 않으면 같은 알 배열도 37이나 3.7처럼 다르게 읽힐 수 있다.



현대식 소로반에서 기준대 쪽으로 붙은 알을 읽으면 273이다.

탐구

윗알 하나와 아랫알 두 개가 기준대에 붙어 있으면 한 줄의 값은?

풀이와 확인

5+2=7이다. 그 줄이 십의 자리라면 전체 수에 70을 더한다. 알의 값과 자릿값을 곱해서 읽어야 한다.

[EA09] National Diet Library. Early Edo Period

다섯을 이용하는 보수

알이 모자라면 같은 값을 다른 조작으로 바꾼다.

한 줄에 4가 놓여 있을 때 3을 더한다고 하자. 아랫알 네 개를 이미 사용했으므로 아랫알 세 개를 더 올릴 수 없다. 대신 5를 더한 뒤 2를 빼면 된다. $3=5-2$ 라는 관계를 손의 움직임으로 바꾼 것이다.

따라서 윗알을 기준대에 붙이고 아랫알 두 개를 떼면 값은 7이 된다. 도구의 제약은 단순한 불편함이 아니라 수를 여러 방식으로 분해하는 연습 기회가 된다. 어떤 조작이 같은 양을 나타내는지 설명할 수 있어야 한다.

보수는 합이 정해진 기준에 이르도록 채우는 수이다. 5에 대한 3의 보수는 2이다. 이때 보수라는 말을 뺄셈 결과와 기계적으로 연결하기보다 $3+2=5$ 라는 짝 관계로 이해하면 응용하기 쉽다.

$$4+3 = 4+(5-2)$$

윗알로 5 더하기
아랫알로 2 빼기 → 7

5의 보수를 이용한 덧셈

탐구

한 줄의 3에 4를 더하려면 5를 기준으로 어떻게 조작하는가?

풀이와 확인

$4=5-1$ 이므로 윗알로 5를 더하고 아랫알 하나를 빼면 7이 된다. 처음 값 3을 없애고 다시 답을 놓는 대신 값이 보존되는 조작을 연결한다.

열을 넘는 덧셈

한 줄을 넘어가면 다음 자리와 함께 움직여야 한다.

8에 7을 더하면 15이다. 주판에서는 $7=10-3$ 으로 생각하여 다음 자리에서 10을 더하고 현재 자리에서 3을 뺄 수 있다. 8이 5로 바뀌고 다음 자리가 하나 늘어나 전체가 15가 된다.

이때 현재 자리의 알을 5로 바꾸는 것만 하면 값은 5가 되어 10이 사라진다. 받아올림은 두 자리의 연동이다. 각 조작 뒤에 전체 수를 읽어 보면 어느 단계에서 양이 보존되는지 확인할 수 있다.

수 계산에 익숙해지면 손은 빠르게 움직이지만 학습 과정에서는 이유를 말로 설명하는 것이 유용하다. 10의 보수를 이용하는 규칙은 암산에도 그대로 쓸 수 있다. $48+7$ 을 $48+10-3$ 으로 계산하면 55이다.

76

10 더하기: 86

2 빼기: 84

10의 보수를 이용한 암산과 주판의 공통 구조

참고

$76+8$ 을 10의 보수로 계산하라.

풀이와 확인

$8=10-2$ 이므로 $76+10-2=84$ 이다. 86에서 2를 빼는 두 단계로 계산한다. 원래 수보다 8만큼 커졌는지 확인하면 보수를 잘못 선택한 실수를 잡을 수 있다.

소수점은 기준의 위치다

알의 배열보다 단위의 약속이 먼저이다.

주판의 같은 세 줄이 2와 7과 5를 나타내더라도 단위 줄을 어디로 정하느냐에 따라 275나 27.5나 2.75가 된다. 소수 계산은 특별한 알을 추가하는 일이 아니라 각 줄이 나타내는 단위를 정하는 일이다.

2.75+1.6을 계산할 때 1.6은 1.60과 같은 값이다. 일의 자리와 십분의 일 자리와 백분의 일 자리를 각각 맞추면 4.35가 된다. 숫자 개수를 맞추는 것보다 같은 단위끼리 더한다는 원리를 이해해야 한다.

계산 뒤에는 어림으로 소수점 위치를 검사하자. 약 3에 약 2를 더하는 문제의 답이 43.5나 0.435일 수는 없다. 정확한 알 조작을 했더라도 단위 기준을 잃으면 전체 결과가 열 배씩 달라진다.

수	일	1/10	1/100
2.75	2	7	5
1.60	1	6	0
합	4	3	5

같은 단위가 같은 열에 놓이는 소수 덧셈

탐구

0.48+2.7을 계산하고 단위 정렬을 설명하라.

풀이와 확인

2.7을 2.70으로 읽어 2.70+0.48=3.18을 얻는다. 백분의 일 자리끼리 0과 8을 더하고 십분의 일 자리에서 7과 4를 더하여 받아올림한다.

상인의 비율 문제

단가와 수량을 구분하면 장부의 관계가 선명해진다.

새로 만든 장부에서 천 3필의 값이 420이라고 하자. 종류와 품질이 같고 값이 수량에 비례한다면 한 필의 값은 140이다. 같은 천 5필은 700이다. 이 계산은 전체값을 단위값으로 바꾼 뒤 새 수량으로 늘리는 두 단계이다.

할인이나 고정 운송비가 있으면 단순 비례는 깨진다. 예를 들어 주문마다 운송비 30을 따로 받는다면 지불액은 $140n+30$ 이다. 3필 주문과 5필 주문의 총액을 곧바로 수량 비율로 비교하면 틀린다.

역사적 생활 문제를 풀 때에도 사용된 단위와 가격 조건을 읽어야 한다. 익숙한 비례식으로 바꾸기 전에 무엇이 일정한지 확인하자. 주판은 계산을 빠르게 하지만 잘못 세운 관계까지 바로잡아 주지는 않는다.

수량	상품값	운송비	총액
3	420	30	450
5	700	30	730

고정 비용을 분리한 교육용 장부

탐구

한 필 140에 주문별 운송비 30이면 5필 주문의 총액은?

풀이와 확인

$140 \times 5 + 30 = 730$ 이다. 운송비는 필마다 붙는다고 하지 않았으므로 다섯 번 더하지 않는다. 조건이 달라지면 식도 달라진다.

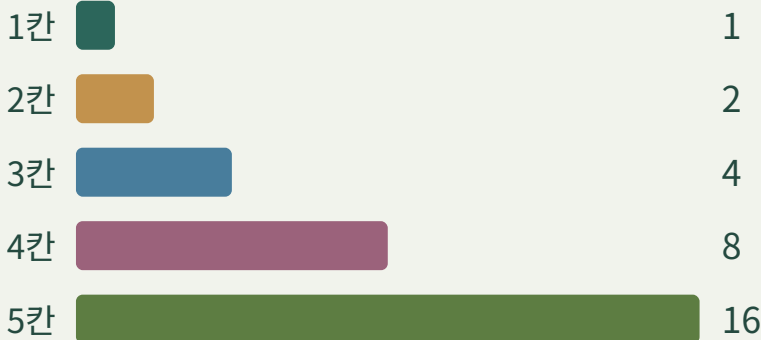
두 배가 쌓이는 이야기

작은 시작도 반복된 곱셈을 거치면 빠르게 커진다.

진검기는 실용 계산과 함께 수학적 흥미를 불러일으키는 문제도 다루었다. 여기서는 첫 칸에 곡식 한 알을 놓고 다음 칸마다 두 배로 늘리는 새로운 활동을 해 보자. 여덟 칸의 수는 1과 2와 4와 8에서 128까지 이어진다.

첫 여덟 칸의 합은 255이다. 합을 S라 하면 2S는 2에서 256까지의 항을 더한 값이다. 2S에서 S를 빼면 가운데 항들이 사라지고 256-1이 남는다. 따라서 S=255이다.

이 계산은 두 배로 늘어나는 항들의 합을 직접 모두 더하지 않아도 구하는 방법이다. 처음 값이나 증가 비율이 달라지면 식을 수정해야 한다. 이야기의 큰 숫자에 놀라는 데서 멈추지 말고 반복 규칙이 합을 어떻게 결정하는지 살핀다.



두 배씩 증가하는 처음 다섯 칸의 값

탐구

처음 열 칸의 합은 얼마인가?

풀이와 확인

$1+2+\cdots+512=2^{10}-1=1023$ 이다. 마지막 칸의 값은 512이며 전체 합 1023과 다르다. 몇 번째 칸인지와 몇 칸까지의 합인지 구별한다.

[EA09] National Diet Library. Early Edo Period

빠른 계산과 설명하는 계산

숙련된 손동작을 이해 가능한 단계로 풀어 쓰는 일도 수학이다.

계산 도구를 오래 사용한 사람은 여러 조작을 하나의 움직임처럼 수행할 수 있다. 이를 처음 배우는 사람에게 보여 줄 때에는 생략된 단계를 다시 펼쳐야 한다. 속도가 빠른 시범만으로는 왜 답이 맞는지 알기 어렵다.

예를 들어 $98+27$ 을 $100+25$ 로 바꾸는 암산은 한쪽에서 2를 덜고 다른 쪽에 2를 더하여 합을 보존한다. 주판에서 비슷한 보수 조작을 쓸 수 있다. 그러나 손의 움직임과 종이 위의 등식은 표현 방식이 다르다.

설명에서는 시작값과 바뀐 값과 보존된 관계를 나란히 적어 보자. 독자가 각 단계를 혼자 재현할 수 있으면 좋은 설명이다. 계산 시간을 재는 활동과 절차의 타당성을 설명하는 활동은 서로 보완하지만 같은 평가 기준은 아니다.

수	바꾸기 전	조정	바꾼 뒤
첫째 수	98	+2	100
둘째 수	27	-2	25
합	125	0	125

한쪽에 더한 2를 다른 쪽에서 빼면 전체 합은 보존된다.

탐구

49+38을 합을 보존하는 방식으로 쉽게 계산하라.

풀이와 확인

49에서 1을 더해 50을 만들고 38에서 1을 빼서 37로 만들면 $50+37=87$ 이다. 한쪽만 늘리면 전체 합이 바뀌므로 반대 조작을 함께 해야 한다.

도구를 비교하는 실험

어떤 계산을 하느냐에 따라 도구의 장점이 달라진다.

같은 덧셈 열 문제를 종이와 주판과 암산으로 풀어 보자. 시간을 기록하는 것 외에 틀린 문제의 종류와 중간값을 다시 확인하기 쉬웠는지도 비교한다. 반복 연습량이 다르면 결과를 도구 자체의 우열로 해석하기 어렵다.

종이는 중간 계산을 남기기 좋고 주판은 수를 움직이며 연산하는 데 강점이 있다. 암산은 도구 없이 수행할 수 있지만 긴 중간 결과를 기억해야 한다. 목적이 정답 확인인지 계산 원리 학습인지에 따라서도 적절한 선택이 달라진다.

역사 속 도구는 사회의 필요와 학습 방식 속에서 사용되었다. 오늘의 전자 계산기가 있다고 이전 도구의 의미가 사라지는 것은 아니다. 도구를 통해 어떤 수의 구조가 보이고 어떤 단계가 숨겨지는지를 관찰하면 계산 문화의 차이를 이해할 수 있다.

비교 문제로 $402-178$ 을 골라 보자. 답 224뿐 아니라 비어 있는 십의 자리를 어떻게 처리했는지 기록한다. 종이에 남은 교환 표시와 주판에서 바뀐 알의 상태를 비교하면 두 도구가 중간 정보를 보존하는 방식의 차이가 드러난다.

비교 항목	관찰할 내용
정확도	맞힌 문제 수와 오류 유형
시간	같은 수량의 문제 풀이 시간
검토 가능성	중간값을 다시 찾을 수 있는가
조건	난도와 연습량 및 제시 순서

도구 비교에서 관찰 지표와 통제 조건을 분리한 실험 설계표

탐구

공정한 비교 실험을 위해 어떤 조건을 맞추어야 하는가?

풀이와 확인

문제의 난도와 수량과 제한 시간과 연습 기회를 맞춘다. 같은 문제를 반복하면 답을 기억하는 효과가 생기므로 순서를 바꾸거나 난도가 비슷한 다른 문제 묶음을 사용한다.

문제의 독자가 다음 저자가 된다

책 끝의 도전 문제는 계산 지식을 공개적인 연구 과제로 바꾸었다.

일본 국립국회도서관은 진검기의 수학적 영향에서 도전 문제인 유제의 역할을 설명한다. 생활 계산을 익히던 독자는 답이 쉽게 보이지 않는 문제를 만나게 되었다. 뒤따른 수학서들은 더 어려운 문제를 제시하며 서로 응답했다. 책은 정답을 전달하는 매체이면서 새로운 질문을 유통하는 장소였다.

세키의 생전 간행물인 발미산법은 사와구치 가즈유키의 고금산법에 실린 문제 열다섯 개의 해답을 제시했다. 이 연결을 읽으면 한 수학자의 업적이 앞선 책과 독자의 요구 속에서 형성되었음을 알 수 있다. 사후에는 제자들의 편집과 출판이 다른 연구를 독자에게 전했다.

이 문화를 수업에서 재구성하려면 정답만 숨기는 것으로 끝내지 않는다. 출제자는 조건과 질문을 공개하고 풀이자는 필요한 가정을 확인한 뒤 해설을 제출한다. 출제자가 의도하지 않은 다른 풀이가 나오면 어떤 관계를 새로 발견했는지 함께 기록한다. 다음 문제는 그 차이에서 출발할 수 있다.

예를 들어 합이 12인 두 양수의 곱을 최대화하는 문제에서 시작하자. 풀이자가 $36-d^2$ 이라는 식을 제시하면 출제자는 양의 정수라는 제한을 추가하거나 합을 홀수로 바꿀 수 있다. 문제의 변형이 새 검토를 요구하는지 살피는 활동이다. 이 수치 예제는 역사적 유제의 번역이 아니라 독서 문화를 체험하기 위한 창작이다.

역할	남길 기록
출제자	범위와 조건
풀이자	계산과 증명
다음 독자	조건을 바꾼 새 질문

탐구

합이 13인 두 양의 정수의 곱은 언제 가장 큰가?

풀이와 확인

두 수의 차이가 가장 작은 6과 7에서 곱 42가 최대이다. 실수라면 6.5와 6.5에서 42.25가 되지만 정수 제한에서는 그 값을 택할 수 없다.

동아시아관 / 11

세키와 다케베의 탐구

기호를 바꾸면 보이는 관계

표현의 개선은 다룰 수 있는 문제의 범위를 넓힌다.

세키 다카카즈는 1708년에 세상을 떠난 일본의 수학자이다. 출생 연도는 확정된 것으로 다루지 않는 편이 안전하다. 그의 연구는 식의 표현과 미지수의 소거를 발전시키는 데 중요한 역할을 했다. 제자들의 편집과 출판도 연구가 전해지는 데 기여했다.

다케베 가타히로는 세키의 연구를 해설하고 자신의 계산 방법도 발전시켰다. 스승 한 사람의 이름만으로 성과를 묶으면 기록을 정리하고 계산을 검토하며 책으로 만든 여러 사람의 역할이 보이지 않는다.

이 장의 예제는 당시 책의 문제를 그대로 옮긴 것이 아니라 표현과 근사의 원리를 배우기 위해 새로 만든 것이다. 비슷한 공식이 나온다는 이유만으로 당시 와산이 현대 미적분 전체와 같았다고 말하지 않는다.

연구자가 식과 절차를 작성

제자가 해설과 검산을 보완

편집자가 원고를 정리

출판된 책을 새 독자가 해석

연구가 책으로 전해지는 일반적인 역할 모형. 특정 원고의 실제 계보를 재현한 것은 아니다.

탐구

연구자와 저술의 관계를 읽을 때 저자 이름 외에 무엇을 확인하는가?

풀이와 확인

작성 시기와 출판 시기와 편집자와 해설자를 확인한다. 사후에 출판된 책이라면 어떤 원고를 바탕으로 누가 정리했는지도 중요하다. 하나의 책이 한 번에 완성되었다고 가정하지 않는다.

[EA10] National Diet Library. Seki Takakazu

두 조건을 한 수로 판별하기

소거가 가능한지 계수의 관계부터 살필 수 있다.

두 방정식 $ax+by=e$ 와 $cx+dy=f$ 를 생각하자. 첫 식에 d 를 곱하고 둘째 식에 b 를 곱한 뒤 빼면 $(ad-bc)x=ed-bf$ 가 된다. 여기에서 $ad-bc$ 가 0이 아니면 x 를 하나로 결정할 수 있다.

$2x+y=7$ 과 $x+3y=11$ 에서는 $ad-bc=6-1=5$ 이다. $x=(21-11)/5=2$ 이며 $y=3$ 이다. 계수로 만든 하나의 수가 두 조건이 독립적으로 작용하는지 알려 준다.

이 페이지는 행렬식의 가장 작은 경우를 현대 기호로 설명한다. 세키의 소거 연구와 연결하여 생각할 수 있지만 현재의 행렬 표기까지 그가 사용했다고 주장하지 않는다. 역사적 아이디어와 오늘의 설명 도구를 구별한다.

$$\begin{aligned} ax+by &= e & cx+dy &= f \\ (ad-bc)x &= ed-bf \\ ad-bc \neq 0 &\rightarrow x \text{가 결정된다.} \end{aligned}$$

두 방정식 소거에서 나타나는 계수 조합

탐구

$x+2y=8$ 과 $2x+4y=16$ 에서는 $ad-bc$ 가 얼마인가?

풀이와 확인

$1 \times 4 - 2 \times 2 = 0$ 이다. 둘째 식은 첫 식의 두 배이므로 새 조건을 주지 않는다. 한 가지 수쌍이 아니라 첫 식을 만족하는 많은 수쌍이 해가 된다.

[EA10] National Diet Library. Seki Takakazu

같은 방향의 두 조건

계수가 비례해도 오른쪽 값에 따라 해의 존재가 달라진다.

$x+2y=8$ 과 $2x+4y=16$ 은 같은 조건이다. 첫 식의 두 배가 둘째 식이므로 하나의 직선을 두 번 적은 셈이다. 그러나 둘째 식의 오른쪽이 17로 바뀌면 두 식을 동시에 만족하는 수는 없다.

첫 식을 두 배 하여 $2x+4y=16$ 을 얻은 뒤 17이라는 조건과 비교하면 모순이 드러난다. 계수의 행렬식이 0이라는 사실만으로 해가 무한히 많다고 결론 내릴 수 없는 이유이다. 해가 전혀 없을 수도 있다.

계산 절차에서 어떤 수로 나누기 전에는 그 수가 0인지 확인해야 한다. 0인 경우는 계산이 귀찮아진 예외가 아니라 문제의 구조가 달라지는 지점이다. 조건의 독립성과 모순을 문장으로 설명해 보자.

조건 묶음

결론

$$x+2y=8 / 2x+4y=16$$

같은 조건

$$x+2y=8 / 2x+4y=17$$

서로 모순

계수 비례와 해의 존재를 구분하기

탐구

$3x+6y=24$ 는 $x+2y=8$ 에 새로운 정보를 주는가?

풀이와 확인

주지 않는다. 모든 항을 3으로 나누면 같은 식이 된다. 반면 $3x+6y=25$ 라면 앞의 식과 충돌하므로 함께 만족할 수 없다.

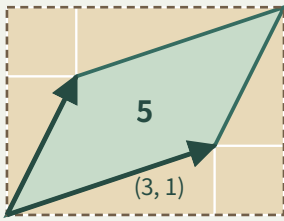
평행사변형의 넓이로 읽기

대수식 하나가 기하학적인 크기로 나타난다.

두 벡터가 가로 세로 방향으로 각각 (3과 1)과 (1과 2)를 나타낸다고 하자. 두 벡터가 만드는 평행사변형의 넓이는 $|3 \times 2 - 1 \times 1| = 5$ 이다. 2×2 행렬식의 절댓값이 넓이를 준다.

두 벡터가 같은 방향이면 평행사변형은 선분으로 눌러 넓이가 0이 된다. 이는 연립방정식에서 두 조건의 계수가 비례할 때 행렬식이 0이 되는 모습과 연결된다. 대수와 도형이 같은 관계를 다른 언어로 설명한다.

벡터의 순서를 바꾸면 행렬식의 부호는 바뀌지만 넓이는 바뀌지 않는다. 부호는 방향 정보를 담고 절댓값은 크기를 담는다. 이 해석은 현대의 설명이며 역사적 원문에 그대로 적힌 정의로 취급하지 않는다.



두 벡터 (3, 1)과 (1, 2)

바깥 직사각형 $4 \times 3 = 12$

열은 조각 $1.5 + 1 + 1 + 1.5 + 1 + 1 = 7$

넓이 $12 - 7 = 5$

행렬식 $3 \times 2 - 1 \times 1 = 5$

벡터 (3, 1)과 (1, 2)가 만드는 평행사변형의 넓이는 $12 - 7 = 5$ 이다.

탐구

벡터 (2와 0)과 (0과 4)가 만드는 넓이는?

풀이와 확인

$|2 \times 4 - 0 \times 0| = 8$ 이다. 가로 2와 세로 4의 직사각형이므로 보통의 넓이 계산과 일치한다. 두 벡터의 순서를 바꾸면 행렬식은 -8 이지만 넓이는 여전히 8이다.

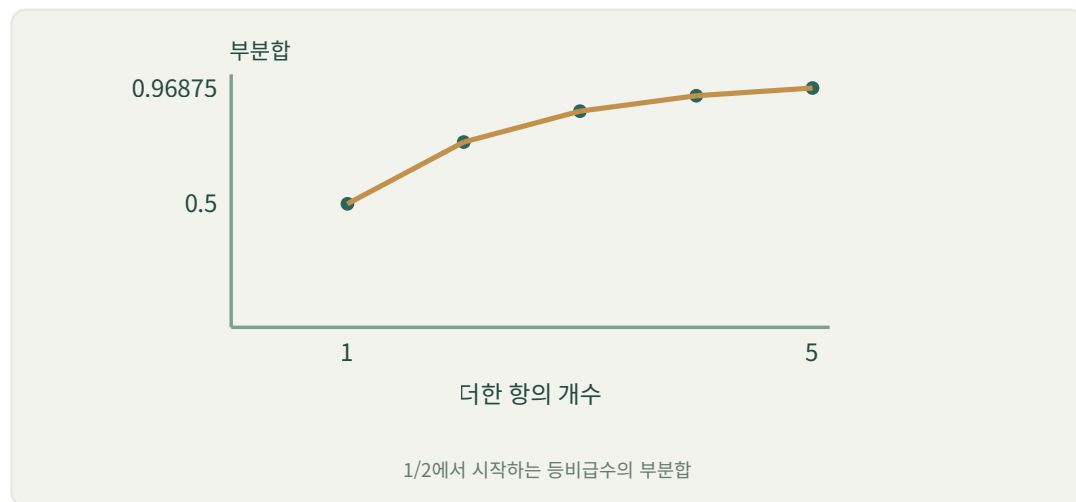
계산값의 규칙을 추측하기

정밀한 수치 표는 새로운 관계를 발견하는 출발점이 될 수 있다.

다케베의 연구를 읽을 때에는 수치 계산을 단순한 보조 작업으로만 보지 않는 것이 좋다. 많은 자릿수를 계산하고 결과의 규칙을 살피는 일은 수학적 탐구의 한 방식이다. 이 페이지에서는 간단한 분수 표로 그 태도를 연습한다.

$1/2$ 와 $1/4$ 와 $1/8$ 을 차례로 더하면 0.5와 0.75와 0.875를 얻는다. 합은 1보다 작지만 점점 가까워진다. n 번째 합과 1의 차는 $1/2^n$ 이다. 차이의 규칙을 보면 합의 움직임이 더 분명해진다.

유한한 표는 추측을 돕지만 무한한 결론의 증명은 따로 필요하다. 이 경우 등비급수의 유한 합을 계산하면 정확한 오차식을 얻는다. 수치 실험으로 찾은 규칙을 대수적 관계로 설명하는 흐름을 익혀 보자.



탐구

처음 여섯 항의 합과 1의 차는 얼마인가?

풀이와 확인

차는 $1/64$ 이며 합은 $63/64$ 이다. 소수로는 0.984375이다. 아직 1과 같지 않으며 여섯 항만 더한 값이라는 점을 분명히 표시한다.

[EA11] University of St Andrews. Takebe Katahiro

오차를 지우는 조합

오차의 모양을 알면 두 근삿값을 결합하여 개선할 수 있다.

어떤 계산값 $A(h)$ 가 참값 L 에 ch^2 만큼의 오차를 더한 것이라고 가정하자. 간격을 절반으로 줄이면 $A(h/2)=L+ch^2/4$ 가 된다. 작은 간격의 값을 네 배 한 뒤 큰 간격의 값을 빼면 주된 오차가 사라진다.

따라서 $[4A(h/2)-A(h)]/3=L$ 을 얻는다. 실제 계산에 더 높은 차수의 오차가 있다면 완전히 정확해지는 대신 주된 오차가 줄어든다. 이 방법의 효과는 오차가 어떤 규칙을 따르는지라는 가정에 달려 있다.

예를 들어 참값 10에 대해 $A(h)=10.4$ 와 $A(h/2)=10.1$ 이면 조합값은 10이다. 두 값을 단순히 평균하는 것과 다르다. 역사적 근사 연구와 비교할 수 있는 현대적 실험으로 제시한다.

$$\begin{aligned} A(h) &= L+ch^2 \\ A(h/2) &= L+ch^2/4 \\ [4A(h/2)-A(h)]/3 &= L \end{aligned}$$

주된 오차가 제곱에 비례한다고 가정한 결합

탐구

$A(h)=3.2$ 와 $A(h/2)=3.05$ 일 때 조합값은?

풀이와 확인

$(4 \times 3.05 - 3.2)/3 = 3$ 이다. 두 값의 오차가 정확히 네 배 관계라는 가정 아래 주된 오차가 상쇄된다. 어떤 숫자 두 개에나 적용하면 정확해지는 공식은 아니다.

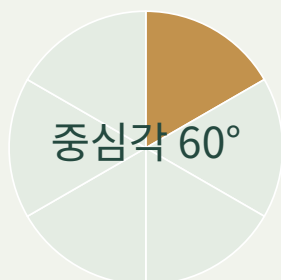
작은 호와 현의 차이

가까워 보이는 두 길이도 같다는 결론을 서두르면 안 된다.

원 위의 두 점을 직선으로 연결한 길이는 현이다. 원을 따라가는 길이는 호이다. 같은 두 점을 잇더라도 현이 더 짧다. 중심각이 작아지면 두 길이의 차이가 줄어들지만 유한한 각에서는 보통 같지 않다.

반지름 1인 원에서 중심각 θ 를 라디안으로 나타내면 호의 길이는 θ 이고 현의 길이는 $2\sin(\theta/2)$ 이다. 예를 들어 $\theta=\pi/3$ 이면 현은 1이며 호는 약 1.0472이다. 작은 차이가 여러 조각에 걸쳐 누적될 수 있다.

원의 둘레를 내접다각형으로 근사할 때 이 차이가 중요하다. 변의 수를 늘리면 각 현이 호에 더 가까워진다. 그림에서 거의 같아 보인다는 관찰과 오차가 어느 정도라는 수치적 주장을 구분해야 한다.



단위원을 여섯 부분으로 나눈 교육용 도식

탐구

단위원의 내접 정육각형 둘레는 얼마이며 원 둘레와 비교하면?

풀이와 확인

각 변이 1이므로 둘레는 6이다. 원 둘레 $2\pi \approx 6.2832$ 보다 작다. 현 여섯 개를 합한 길이이므로 원의 호를 따라간 둘레보다 짧다.

비슷한 공식과 다른 이론

많은 계산을 발견해도 개념과 증명의 체계까지 살펴야 한다.

서로 다른 수학 전통에서 같은 수치나 비슷한 공식이 발견될 수 있다. 그러나 그것만으로 연구자들이 같은 개념 체계를 사용했다고 말할 수는 없다. 어떤 문제를 풀려고 했는지와 무엇을 근거로 삼았는지까지 읽어야 한다.

와산의 근사 계산을 현대의 극한이나 미적분으로 설명하면 오늘의 독자에게 도움이 된다. 동시에 그 설명이 해석이라는 사실을 밝혀야 한다. 현대 기호로 번역한 식을 역사적 원문의 직접 인용처럼 제시해서는 안 된다.

비교표를 만들 때에는 문제의 대상과 사용한 표현과 계산 절차와 정당화 방법을 따로 적는다. 비슷한 점과 다른 점이 같은 표 안에서 드러난다. 어느 지역이 먼저였는지만 묻는 경쟁에서 벗어나 수학적 생각이 자라난 조건을 살필 수 있다.

비교할 층위	확인할 질문
결과	같은 값이나 공식인가
문제	무엇을 구하려고 했는가
절차	어떤 계산을 했는가
근거	왜 옳다고 설명했는가

결과가 닮았다는 관찰을 개념과 증명 체계의 비교로 확장한다.

탐구

역사적 계산을 현대 프로그램으로 재현하면 무엇까지 확인할 수 있는가?

풀이와 확인

주어진 절차가 어떤 수치 결과를 내는지 확인할 수 있다. 그러나 프로그램이 실행되었다는 사실만으로 옛 연구자가 같은 개념이나 같은 세부 절차를 사용했다는 역사적 증거가 생기지는 않는다.

[EA10] National Diet Library. Seki Takakazu

동아시아관 / 12

산가쿠의 원과 도형

문제를 걸어 두는 장소

수학은 책뿐 아니라 사람들이 모이는 공간에서도 공유되었다.

산가쿠는 수학 문제와 도형 등을 적어 신사나 사찰에 봉납한 판이다. 에도 시대의 와산에서 연구 성과를 보여 주고 다른 사람의 관심을 끄는 통로가 되었다. 현존하는 판의 그림은 장식인 동시에 문제의 조건을 전달하는 자료이다.

이 장의 도형은 특정 산가쿠의 원본을 복제한 것이 아니라 접하는 원과 직각삼각형의 원리를 배우기 위해 새로 구성한 예제이다. 원본의 출처가 없는 그림을 실물 산가쿠라고 소개하지 않는다.

문제판을 읽을 때에는 그림만 보지 말고 크기와 접촉 조건을 적은 문장도 읽어야 한다. 보기에는 접해 보여도 문장에 그 조건이 없으면 증명에서 사용할 수 없다. 시각적인 매력과 논리적인 정확성이 함께 필요하다.

판에 적힌 길이와 조건 읽기

그림에서 해당 대상을 찾기

중심과 접점을 표시하기

보조선을 넣어 수량 관계 찾기

산가쿠의 도형과 문장을 함께 읽기 위한 관찰 순서

탐구

새 문제판을 만들 때 그림 외에 어떤 정보를 적어야 하는가?

풀이와 확인

주어진 길이와 원의 접촉 관계와 구하려는 양을 적는다. 직접 만든 문제임을 밝히고 해설에는 사용한 정리를 제시한다. 축척이 정확하지 않다면 도식임을 표시한다.

[EA12] National Diet Library. Master Institution and Mathematical Tablets

점점으로 향하는 반지름

원의 접선은 접점에서 반지름과 직각을 이룬다.

반지름 r 인 원이 수평선에 접하면 원의 중심은 그 선에서 높이 r 인 곳에 있다. 가장 짧은 거리인 수선이 접점을 향하기 때문이다. 접선과 반지름의 직각 관계는 접하는 원 문제의 핵심 출발점이다.

한 직선 위에 반지름이 다른 두 원을 놓으면 중심 높이도 각각의 반지름과 같다. 두 원이 서로 바깥에서 접할 때 중심 사이 거리는 두 반지름의 합이다. 서로 겹치거나 안쪽에서 접하는 상황과 구별해야 한다.

복잡한 그림에서도 먼저 원의 중심을 표시하고 접점까지 선분을 그어 보자. 부드러운 곡선들 사이에 직각삼각형이 드러나는 경우가 많다. 곡선을 직접 계산하기 전에 중심과 거리의 관계로 바꾸는 전략이다.

직선에 접한 중심 높이 = 반지름

바깥 접촉: 중심 거리 = $R+r$

안쪽 접촉: 중심 거리 = $R-r$

접촉 방식에 따른 중심 거리

탐구

반지름 3과 5인 두 원이 바깥에서 접하면 중심 사이 거리는?

풀이와 확인

$3+5=8$ 이다. 두 중심과 접점이 한 직선 위에 놓인다. 큰 원 안에서 작은 원이 안쪽으로 접하는 경우라면 중심 거리는 차 2가 되므로 상황을 구분해야 한다.

두 원 사이의 수평 거리

직각삼각형을 찾으면 곡선 문제를 제곱식으로 바꿀 수 있다.

반지름 R 과 r 인 두 원이 같은 수평선에 접하고 서로 바깥에서 접한다고 하자. 중심의 높이 차는 $R-r$ 이고 중심 사이 거리는 $R+r$ 이다. 두 중심의 수평 거리를 x 라고 놓는다.

피타고라스 정리를 쓰면 $x^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$ 이다. 양쪽의 제곱을 전개하여 빼면 $x^2 = 4Rr$ 이 남는다. 따라서 $x = 2\sqrt{Rr}$ 이다. 길이는 양수이므로 양의 제곱근을 택한다.

이 결과는 수평 거리가 단순히 반지름의 합이 아니라 기하평균과 관련됨을 보여 준다. 두 원의 크기가 같을 때에는 $2R$ 이 되어 익숙한 지름 관계로 돌아온다. 특수한 경우로 검산하면 식의 의미를 이해하기 쉽다.



반지름 9와 4인 접하는 원의 중심이 만드는 직각삼각형

탐구

$R=9$ 와 $r=4$ 이면 두 중심의 수평 거리는?

풀이와 확인

$2\sqrt{36}=12$ 이다. 높이 차는 5이고 중심 거리는 13이므로 $5^2 + 12^2 = 13^2$ 로 다시 확인할 수 있다. 같은 선에 접한다는 조건이 이 직각삼각형을 만든다.

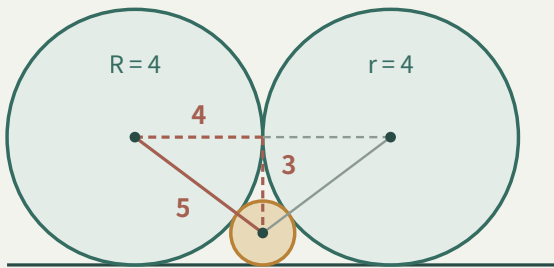
사이에 들어가는 작은 원

작은 원의 위치를 따져야 접촉 조건을 올바르게 합칠 수 있다.

반지름 R 과 r 인 두 원 사이의 아래쪽 빈틈에 반지름 t 인 작은 원이 같은 직선과 두 원에 모두 접한다고 하자. 앞에서 구한 수평 거리 공식을 세 쌍의 원에 각각 적용할 수 있다.

작은 원 중심이 큰 두 원 중심 사이에 있으므로 $2\sqrt{(Rt)}+2\sqrt{(rt)}=2\sqrt{(Rr)}$ 이 성립한다. 양변을 정리하면 $1/\sqrt{t}=1/\sqrt{R}+1/\sqrt{r}$ 이다. 따라서 $t=Rr/(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2$ 이다.

그림에서 작은 원의 위치가 달라지면 수평 거리를 더하는 방식도 바뀔 수 있다. 공식만 외우지 말고 어떤 선분의 길이를 합쳤는지 확인해야 한다. 이 식은 같은 직선에 접하는 아래쪽 틈의 배치를 전제로 한다.



$$\begin{aligned} 1/\sqrt{t} &= 1/\sqrt{4} + 1/\sqrt{4} \\ &= 1/2 + 1/2 = 1 \end{aligned}$$

$$t = 1$$

$$\text{검산: } 3^2 + 4^2 = 5^2$$

반지름 4인 두 원 사이에서 직선에 접하는 작은 원의 반지름은 1이다.

탐구

$R=r=4$ 이면 사이의 작은 원 반지름은 얼마인가?

풀이와 확인

$1/\sqrt{t}=1/2+1/2=1$ 이므로 $t=1$ 이다. 큰 두 원 중심 사이의 수평 거리 8은 작은 원까지의 거리 4와 4로 나뉜다.

반지름을 거꾸로 읽는 원의 사슬

접하는 원의 기하가 새로운 수의 덧셈 규칙으로 바뀐다.

같은 직선 위에 서로 접하는 두 원의 반지름을 R 과 r 라고 하자. 그 아래 빈틈에 끼는 작은 원의 반지름 t 는 $1/\sqrt{t}=1/\sqrt{R}+1/\sqrt{r}$ 을 만족한다. 앞에서 중심 사이의 수평 거리를 합하여 얻은 식이다. 이번에는 반지름 자체보다 그 제곱근의 역수에 주목한다.

각 원에 $u=1/\sqrt{r}$ 이라는 새 수를 붙이면 빈틈에 생긴 원의 수는 양옆 두 원의 수를 더한 값이다. 반지름 1인 두 원에서 시작하면 두 수는 1과 1이다. 가운데 원에는 2가 붙고 반지름은 $1/4$ 이 된다. 원의 반지름을 직접 더하는 것과 전혀 다른 규칙이다.

이제 반지름 1인 왼쪽 원과 반지름 $1/4$ 인 원 사이를 채우자. 새 수는 $1+2=3$ 이므로 반지름은 $1/9$ 이다. 그다음 왼쪽 틈에는 4가 붙는 반지름 $1/16$ 의 원이 들어간다. 같은 쪽 틈을 반복해서 채우면 반지름이 단위분수의 제곱으로 이어진다.

대수 규칙만 보고 모든 원이 모든 이웃과 접한다고 가정해서는 안 된다. 매 단계에서 선택한 두 원과 기준 직선에 접하도록 새 원을 정한다. 새 원은 그 사이의 빈틈에 들어가므로 이전 원과의 배치를 보존한다. 이 사슬은 산가쿠의 실제 판을 복원한 것이 아니라 앞선 공식을 확장한 현대적 탐구이다.

붙인 수 u	반지름 $1/u^2$
1	1
2	$1/4$
3	$1/9$
4	$1/16$

탐구

새 수가 2인 원과 3인 원이 서로 접한다면 그 사이의 원 반지름은 얼마인가?

풀이와 확인

새 수는 5이므로 반지름은 $1/25$ 이다. 기존 반지름 $1/4$ 와 $1/9$ 를 공식에 넣어도 같은 결과가 나온다.

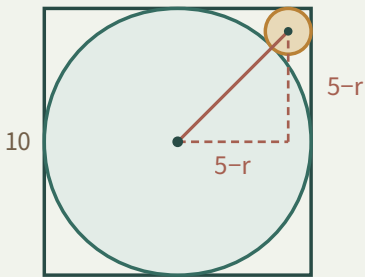
정사각형 안의 원

대칭을 이용하면 중심의 위치부터 결정할 수 있다.

한 변이 10인 정사각형에 내접한 원의 반지름은 5이다. 원이 네 변에 모두 접하므로 중심은 정사각형의 중심에 놓인다. 이 원과 오른쪽 위의 두 변에 접하는 작은 원을 모서리 빈틈에 넣는다고 하자.

작은 원의 반지름을 r 라 하면 중심은 모서리에서 가로와 세로로 각각 r 만큼 떨어진다. 큰 원 중심과의 가로 차이와 세로 차이는 모두 $5-r$ 이다. 중심 거리는 $\sqrt{2(5-r)}$ 이다.

두 원이 바깥에서 접하므로 이 거리는 $5+r$ 와 같다. 따라서 $r=5(3-2\sqrt{2})$ 이다. 대략 0.858이므로 그림에서 기대하는 작은 크기와의도 맞는다. 모서리의 직각과 두 원의 접축을 하나의 방정식으로 묶었다.



$$\text{중심 거리} = \sqrt{2(5-r)}$$

$$\text{바깥 접촉: 거리} = 5 + r$$

$$\sqrt{2(5-r)} = 5 + r$$

$$r = 5(3-2\sqrt{2}) \approx 0.858$$

한 변 10인 정사각형의 모서리 원은 반지름 $5(3-2\sqrt{2})$ 이다.

탐구

정사각형의 한 변을 두 배로 하면 작은 원의 반지름은?

풀이와 확인

모든 길이가 두 배가 되므로 반지름도 두 배이다. 새 반지름은 $10(3-2\sqrt{2})$ 이다. 넓이의 배율 네 배와 길이의 배율 두 배를 구분한다.

반원의 넓이를 비교하기

길이의 합이 같아도 넓이의 합은 달라질 수 있다.

지름이 $a+b$ 인 반원 아래에 지름 a 와 b 인 두 반원을 나란히 놓는 도형을 생각하자. 큰 반원의 넓이는 $\pi(a+b)^2/8$ 이다. 작은 두 반원의 넓이 합은 $\pi(a^2+b^2)/8$ 이다.

큰 반원에서 작은 반원 둘을 뺀 영역은 $\pi ab/4$ 가 된다. 전개에서 생긴 $2ab$ 가 넓이 차이를 결정한다. 지름의 합이 같으므로 넓이도 같을 것이라는 추측은 제곱의 구조를 무시한 것이다.

a 와 b 의 합을 일정하게 두면 이 영역은 ab 가 가장 클 때 넓어진다. 같은 합에서는 두 수가 같을 때 곱이 가장 크다. 그림의 모양을 바꾸어 보는 활동이 곱의 최대값 문제와 연결된다.

$$\begin{aligned} \text{큰 반원: } & \pi(a+b)^2/8 \\ \text{작은 두 반원: } & \pi(a^2+b^2)/8 \\ \text{차이: } & \pi ab/4 \end{aligned}$$

반원의 지름과 넓이를 연결한 현대식 탐구

탐구

$a=4$ 와 $b=6$ 일 때 남는 영역의 넓이는?

풀이와 확인

$\pi \times 4 \times 6 / 4 = 6\pi$ 이다. 큰 반원 넓이 12.5π 에서 작은 반원 넓이 2π 와 4.5π 를 빼도 6π 가 된다. 넓이 단위는 길이 단위의 제곱이다.

그림에서 읽으면 안 되는 것

도형의 인상은 추측을 돕지만 주어진 조건을 대신하지 않는다.

그림에서 두 선분의 길이가 비슷해 보인다고 해서 같다고 쓸 수는 없다. 원이 가운데 놓인 듯 보여도 중심이라는 조건이 필요하다. 산가쿠처럼 복잡한 도형에서는 시각적인 인상과 논리적인 조건을 특히 분리해야 한다.

증명을 시작하기 전에 조건을 세 종류로 나누어 적어 보자. 문제에 명시된 조건과 이미 증명한 결과와 그림만 보고 추측한 내용이다. 마지막 종류의 내용은 사용하기 전에 별도의 근거가 필요하다.

도형을 일부러 길쭉하게 다시 그려도 풀이가 유지되는지 확인해 볼 수 있다. 조건을 만족하는 여러 그림에서 같은 논리가 작동하면 우연한 축척에 의존할 위험이 줄어든다. 정확한 도식은 도움을 주지만 증명의 책임을 대신 지지 않는다.

정보 종류	예	증명에 쓰는 방식
명시된 조건	두 반지름이 같다	그대로 사용
증명한 결과	두 중심의 거리	근거를 제시한 뒤 사용
눈으로 본 추측	선이 평행해 보임	추가 확인이 필요

그림의 인상과 주어진 조건과 증명한 결과를 구별한다.

탐구

그림에서 삼각형이 이등변처럼 보인다는 이유로 밑각이 같다고 해도 되는가?

풀이와 확인

안 된다. 두 변이 같다는 조건이나 그에 대한 증명이 먼저 필요하다. 각의 크기를 화면에서 재는 활동은 추측의 근거일 뿐 정확한 기하 증명이 아니다.

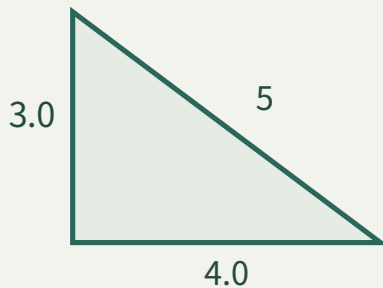
나만의 문제판 완성하기

아름다운 도형과 재현 가능한 해설을 함께 설계한다.

직접 만든 산가쿠 형식의 문제판에는 제목과 도형과 조건과 질문을 간결하게 배치한다. 도형의 색은 서로 다른 원이나 영역을 구별하는 데 사용한다. 색만으로 조건을 전달하면 흑백 인쇄에서 의미가 사라질 수 있으므로 이름이나 표식도 붙인다.

해설에는 중심을 잇는 보조선과 핵심 방정식을 보여 준다. 계산을 전부 한 줄에 몰아넣기보다 조건을 식으로 바꾸는 단계와 식을 푸는 단계를 구분한다. 독자가 그림과 식 사이를 오가며 따라갈 수 있어야 한다.

마지막에는 해의 크기가 도형에 맞는지 검사한다. 작은 원의 반지름이 큰 원보다 커졌다면 배치나 부호를 잘못 선택했을 수 있다. 직접 창작한 문제라는 표시와 사용한 개념을 남기면 역사에서 영감을 얻은 새로운 학습 자료가 된다.



반지름 4와 1인 접하는 두 원의 검사

탐구

반지름 4인 같은 두 원 사이의 작은 원 문제를 어떻게 검사하는가?

풀이와 확인

구한 반지름 1을 이용하면 큰 원과 작은 원의 중심 높이 차는 3이고 수평 거리는 4이다. 중심 거리는 5이므로 반지름 합 4+1과 일치한다. 두 쪽에 같은 검사를 적용한다.

동아시아관 / 13

바다를 건너고 책으로 남은 수학

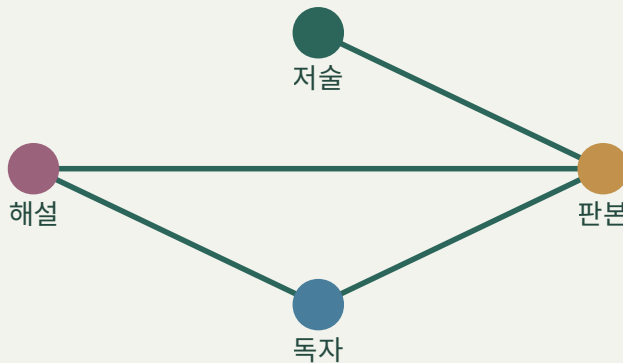
책이 이동하는 여러 경로

수학의 전파는 한 번의 전달로 끝나지 않는다.

중국의 산학서는 한반도와 일본 등에서 읽히고 다시 편집되었다. 일본 국립국회도서관의 와산 전시는 산학계몽이 일본의 방정식 연구에 끼친 영향을 설명한다. 책의 이동은 종이 묶음의 이동이면서 읽고 가르치는 방법의 변화이기도 하다.

같은 책이라도 독자마다 관심이 다를 수 있다. 상인은 계산에 주목하고 측량자는 도형에 주목하며 연구자는 어려운 문제를 확장한다. 수입한 책이 새로운 문제와 만날 때 내용은 다시 해석된다.

따라서 교류를 화살표 하나로 그리면 편리하지만 실제 과정이 단순해질 수 있다. 누가 책을 구했고 어떤 판본을 읽었으며 어디에서 가르쳤는지 같은 중간 고리를 찾아야 한다. 영향 관계는 님은 공식만으로 확정하지 않는다.



책이 다시 읽히고 편집되는 일반적인 관계 모형

탐구

같은 제목의 책을 두 지역에서 발견하면 직접 전파를 단정할 수 있는가?

풀이와 확인

제목의 일치만 단서이지만 충분한 증거는 아니다. 판본의 특징과 기록된 소장 경로와 인용 내용 등을 함께 살펴야 한다. 공통의 다른 판본을 각자 읽었을 가능성도 있다.

[EA09] National Diet Library. Early Edo Period

같은 낱말과 다른 단위

수학 문장을 옮길 때 단위의 역사도 함께 읽어야 한다.

옛 문헌에 자나 척이나 리 같은 단위 이름이 나온다고 해서 오늘의 고정된 길이로 즉시 바꾸어서는 안 된다. 같은 이름의 단위도 시대와 지역과 제도에 따라 값이 달라질 수 있다. 단위 환산은 문맥에 근거해야 한다.

교육용 문제에서는 가상의 단위 관계를 명시할 수 있다. 한 큰 단위를 작은 단위 열 개로 정하면 3큰 단위와 4작은 단위는 34작은 단위이다. 이 약속은 계산 연습용이며 특정 시대의 실제 제도를 재현한 것은 아니다.

원문의 단위를 유지한 계산과 현대 단위로 바꾼 계산을 나란히 제시하면 독자가 가정을 확인하기 쉽다. 환산 근거가 불확실하다면 정확한 현대 길이를 꾸며 쓰기보다 범위나 원래 단위로 남기는 편이 낫다.

약속	3큰 단위+4작은 단위
큰 단위=10작은 단위	34작은 단위
큰 단위=12작은 단위	40작은 단위

환산 약속에 따라 달라지는 같은 문장의 값

탐구

가상의 큰 단위가 작은 단위 12개라면 3큰 단위와 4작은 단위는?

풀이와 확인

$3 \times 12 + 4 = 40$ 작은 단위이다. 십진법의 자릿수처럼 34로 붙이면 틀린다. 단위 사이의 묶음 크기가 10인지 12인지 먼저 확인해야 한다.

판본의 차이를 기록하기

오류처럼 보이는 차이도 먼저 자료로 남겨야 한다.

두 판본의 같은 문제에서 길이 하나가 12와 21로 다르게 적혀 있다고 하자. 어느 숫자가 맞는지 빨리 고치기 전에 두 독법을 각각 기록한다. 숫자 전도인지 편집 과정의 수정인지 문제 자체의 변형인지 확인할 필요가 있다.

수학적 검산은 판단을 도울 수 있다. 답이 60인 직사각형 문제에서 다른 변이 5라면 12가 넓이 조건에 맞는다. 그러나 이것만으로 21을 적은 판본의 제작 과정까지 알 수 있는 것은 아니다.

교정한 본문에는 무엇을 왜 고쳤는지 주석으로 남긴다. 독자가 원래 자료와 편집자의 판단을 구분할 수 있어야 한다. 디지털 자료에서도 원본 이미지와 판독문과 현대 해설을 별도로 보존하면 수정의 근거를 추적하기 쉽다.

원본 이미지

각 판본의 판독

수학적 검산

교정 이유 기록

자료와 편집 판단을 구분하는 작업 순서

탐구

두 판본의 숫자가 다르면 어느 쪽을 무조건 오래된 원문이라고 볼 수 있는가?

풀이와 확인

숫자만으로는 판단할 수 없다. 제작 시기와 판본 관계와 다른 문장의 특징을 함께 검토해야 한다. 수학적으로 자연스러운 값이 언제나 더 오래된 기록이라는 보장도 없다.

그림을 다시 그리는 책임

깨끗한 재현도 원자료에 없는 정보를 더할 수 있다.

옛 도형을 현대 프로그램으로 다시 그리면 선이 곧아지고 글자가 읽기 쉬워진다. 하지만 원본에 없던 직각 표식이나 길이 표시를 추가하면 독자는 그것을 원래 조건으로 오해할 수 있다. 재현과 해설의 경계를 분명히 해야 한다.

도형을 새로 만든 경우에는 교육용 재구성이라고 밝힌다. 실제 유물을 촬영한 사진과 상상하여 그린 표지 삽화도 구분한다. 역사적인 분위기를 전달하는 그림은 사실 확인용 도면과 역할이 다르다.

정확한 수학 그림에서는 길이와 각과 접촉을 계산으로 확인한다. 장식용 그림에서는 독자의 관심과 분위기를 고려하되 실제 유물의 형태를 증명하는 자료로 쓰지 않는다. 두 종류의 그림이 함께 있을 때에는 설명문이 오해를 막아 준다.

그림의 역할	확인할 내용
실물 사진	유물과 촬영 출처
교육용 재구성	원조건과 새 보조선의 구분
정확한 수학 도형	거리와 각도와 접촉 관계
상상 표지 삽화	역사적 실물로 오인하지 않을 설명

같은 그림이라도 용도에 따라 확인해야 할 정보가 달라진다.

탐구

새 도형에 보조선을 추가했다면 어떤 표시가 도움이 되는가?

풀이와 확인

보조선임을 설명하고 원래 조건을 나타내는 선과 시각적으로 구분한다. 예를 들어 가는 점선으로 그린 뒤 해설에서 왜 그었는지 적는다. 원본에 있던 선이라고 표현하지 않는다.

표가 남긴 계산의 흔적

결과값의 배열은 사용된 방법을 추측할 단서를 준다.

어떤 옛 계산표에서 간격이 같은 입력에 대한 출력이 남아 있다고 하자. 이웃 값의 차이를 구하면 계산법의 특징을 추측할 수 있다. 다만 같은 유한한 표를 만드는 규칙은 여러 개일 수 있다.

입력 1과 2와 3에 출력 2와 4와 6이 대응하면 $y=2x$ 가 자연스러운 후보이다. 그러나 $y=2x+(x-1)(x-2)(x-3)$ 도 이 세 입력에서는 같은 값을 준다. 다음 입력에서는 두 규칙이 달라진다.

따라서 표만으로 역사적 알고리즘을 유일하게 복원했다고 주장하면 안 된다. 절차를 설명한 문장이나 중간 계산 흔적이나 다른 표와의 관계가 추가 증거가 된다. 수학적으로 맞는 재구성과 역사적으로 확인된 방법은 구분해야 한다.

x	1	2	3	4
규칙 A	2	4	6	8
규칙 B	2	4	6	14

같은 처음 세 값에서 갈라지는 두 규칙

탐구

두 후보 식은 $x=4$ 에서 어떤 값을 주는가?

풀이와 확인

첫 식은 8이다. 둘째 식은 $8+3 \times 2 \times 1=14$ 이다. 세 관측값을 모두 만족한다는 사실만으로 다음 값이 하나로 정해지지 않는다.

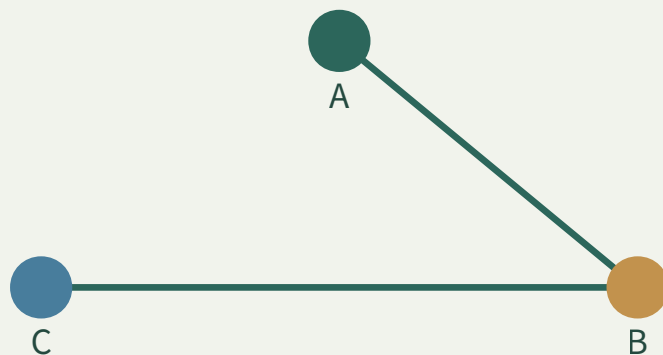
학습 관계를 선으로 나타내기

관계도는 무엇을 연결한 그림인지 밝혀야 읽을 수 있다.

수학자들의 관계를 그릴 때 한 선이 사제 관계인지 공동 저술인지 책의 인용인지 먼저 정해야 한다. 서로 다른 관계를 모두 같은 선으로 그리면 독자는 누구에게 무엇을 배웠는지 잘못 이해할 수 있다.

가상의 자료에서 A가 B를 가르쳤고 B가 C와 공동으로 책을 썼다면 두 선의 의미는 다르다. C가 A의 직접 제자라는 결론은 나오지 않는다. 관계를 따라갈 수 있다는 사실과 직접 연결되어 있다는 사실을 구분한다.

역사 자료가 부족한 부분은 빈칸으로 남길 수 있다. 그림을 보기 좋게 완성하려고 추측한 선을 사실처럼 추가하지 않는다. 추정 관계가 필요하면 다른 선 모양과 설명을 사용하고 근거 자료를 함께 적는다.



가상의 관계도에서는 선의 뜻을 별도로 정의해야 한다.

탐구

A가 B의 책을 읽고 B가 C의 제자였다면 A는 C의 제자인가?

풀이와 확인

그렇다고 말할 수 없다. 책을 통한 영향과 직접 가르침은 다른 관계이다. A가 C의 사상을 간접적으로 접했을 가능성은 논의할 수 있지만 별도의 증거가 필요하다.

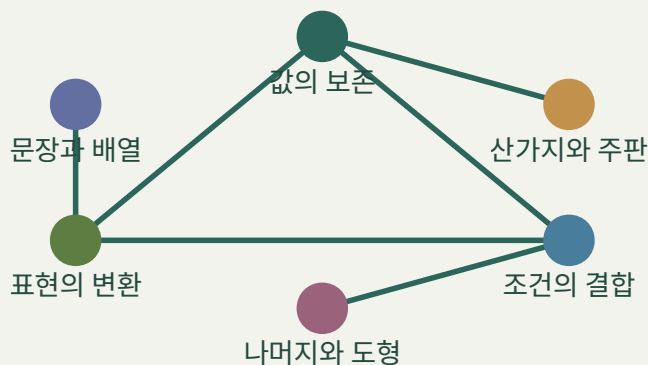
동아시아관을 나서며

답을 구하는 능력과 근거를 읽는 능력을 함께 가져간다.

이 책은 산가지의 자리에서 출발하여 나머지의 주기와 다항식의 배열과 접하는 원의 기하를 살펴보았다. 서로 다른 문제들이 값의 보존과 조건의 결합과 표현의 변환이라는 생각으로 연결된다. 각 장의 계산을 다시 보며 어떤 관계를 이용했는지 한 문장씩 적어 보자.

역사 읽기에서는 남아 있는 자료와 현대의 재구성을 구별하였다. 정확한 계산 결과가 나왔다고 역사적 경로까지 증명되는 것은 아니다. 반대로 자료가 불완전하다고 수학적 탐구 자체를 멈출 필요도 없다. 가정을 드러내고 검산 가능한 활동을 만들 수 있다.

마지막 과제로 한 도구나 한 문제를 골라 작은 전시를 구성해 보자. 역사적 근거 한 가지와 직접 계산한 예제 한 가지와 더 알고 싶은 질문 한 가지를 함께 담는다. 지식을 받아 적는 독자에서 근거를 확인하며 설명하는 독자로 한 걸음 나아가는 활동이다.



세 가지 공통 관점을 해당 장의 도구와 문제에 연결한 개념도

탐구

나머지 문제와 접하는 원 문제에 공통으로 필요한 태도는 무엇인가?

풀이와 확인

주어진 조건을 정확히 읽고 중간 관계를 설명하며 마지막 답을 원래 조건에 넣어 검산하는 태도이다. 계산 방식은 다르지만 어떤 가정 아래 결론이 나오는지 밝힌다는 원칙은 같다.

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Chinese_numerals/

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters/

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Liu_Hui/

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zu_Chongzhi/

[EA05] University of St Andrews. Sun Zi

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sun_Zi/

[EA06] University of St Andrews. Qin Jiushao

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Qin_Jiushao/

[EA07] University of St Andrews. Yang Hui

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Yang_Hui/

[EA08] University of St Andrews. Zhu Shijie

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zhu_Shijie/

[EA09] National Diet Library. Early Edo Period

<https://www.ndl.go.jp/math/e/s1/1.html>

[EA10] National Diet Library. Seki Takakazu

<https://www.ndl.go.jp/math/e/s1/2.html>

[EA11] University of St Andrews. Takebe Katahiro

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Takebe/>

[EA12] National Diet Library. Master Institution and Mathematical Tablets

<https://www.ndl.go.jp/math/e/s1/3.html>