

MATHESIS

세계 수학과 / 내용 중심 개정판

고대 오리엔트관

기록에서 출발해 직접 계산하는 수학의 역사

차례

본문의 흐름에 따라 편집한 실제 PDF 쪽번호다.

그림으로 다시 읽는 보충 탐구	4
기록의 재료에서 계산의 구조로	5
흙과 종이에 남은 계산	6
60을 묶음으로 세는 법	14
역수표와 나눗셈의 기술	22
곱셈표에서 넓이 계산으로	31
직사각형 속에 숨은 미지수	39
정사각형 대각선의 정밀도	49
플림프턴 322와 직각삼각형	58
이집트의 수와 두 배 계산	68
한 조각씩 나누는 분수	77
가정한 값에서 답으로	86
경사와 원과 발의 넓이	96
잘린 피라미드와 남겨진 질문	106
참고 자료와 자료 읽기	115

READING THE WORLD

이 책을 여는 질문

이 책은 같은 분량으로 잘라 놓은 전시실이 아니라 서로 다른 질문을 지닌 여덟 권의 책에서 출발한다. 계산을 남긴 재료와 해결해야 했던 문제를 함께 읽으면 비슷한 수식 뒤에 있는 차이가 드러난다. 한 지역을 오늘의 국가 경계에 가두거나 다른 지역을 한 줄의 발전 순서에 놓지 않는다.

읽는 순서는 자유롭다. 수를 기록하는 방법이 궁금하다면 산가지와 자리값 및 키푸를 오가면 된다. 도형의 이유를 묻고 싶다면 넓이의 보존과 완전제곱 및 증명을 이어 읽을 수 있다. 서로 닮은 계산을 발견했을 때에는 구조의 공통점과 역사적 전파의 증거를 따로 살핀다.

이번 개정에서는 원고 단위마다 페이지를 끝내던 방식을 없앴다. 문장과 그림이 차지하는 실제 길이에 따라 다음 페이지로 이어지며 짧은 해설만 남는 쪽을 줄이도록 장 사이의 흐름도 연결했다. 빈 공간을 만들기 위해 본문을 늘리거나 일정한 쪽수를 맞추기 위해 설명을 나누지 않았다.

탐구 문제의 수치와 문자식은 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 재구성이다. 먼저 조건을 읽고 직접 계산한 뒤 풀이를 비교한다. 역사적 사실을 판단할 때에는 본문의 출처와 유물 설명을 함께 확인한다.

고대 오리엔트관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이 장은 개정판에 새로 붙인 보충 탐구다. 본문의 각 장이 계산의 결과나 조건을 말로 설명하고 지나간 자리에서 그림을 하나 더 그려 그 이유를 눈으로 확인하도록 구성했다. 단원마다 이어 읽을 본문의 장을 표시했으므로 해당 장을 읽은 뒤 펼치면 흐름이 자연스럽다.

여기에 실은 도해와 수치는 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 현대 재구성이다. 옛 자료가 실제로 이런 그림을 남겼다는 뜻은 아니며 자료가 말하는 범위는 각 단원 끝의 출처에서 따로 확인할 수 있다. 이번 개정에서는 본문에서 표로만 보여 주던 일부 도해도 실제 그림으로 다시 그렸다.

고대 오리엔트관 / 01

기록의 재료에서 계산의 구조로



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

점토판을 누르는 흔적과 종이에 남긴 기록은 지식을 보존하는 서로 다른 방식이다. 오늘날의 독자는 완성된 수식에 익숙하지만 옛 계산을 읽을 때에는 수를 적는 순서와 단위 및 생략된 자릿값을 먼저 확인해야 한다. 같은 모양의 숫자도 문제의 맥락에 따라 크기가 달라질 수 있다. 재료와 표기 관습은 계산의 바깥 장식이 아니다.

이 관은 역수와 넓이 및 분수의 문제를 통해 계산이 어떻게 조직되는지 살핀다. 표에서 값을 찾는 일과 새로운 값을 만드는 절차를 구별하고 정확한 관계와 편리한 근삿값을 나누어 읽는다. 아래 삽화는 여러 주제를 한 화면에 모은 현대의 시각적 해석이다. 실제 유물의 문자 판독이나 특정 장소의 배치를 대신하는 자료로 사용하지 않는다.

고대 오리엔트관 / 02

흙과 종이에 남은 계산

손바닥 위의 수학 교실

작은 점토판에도 계산을 배우고 가르친 흔적이 남아 있다.

메트로폴리탄미술관의 서기관 연습판은 썰기 모양 글자를 익히던 학습 자료다. 부드러운 흙을 눌러 글자를 남기는 일에는 손의 움직임과 기호의 구별이 함께 필요했다. 숫자를 읽는 능력도 이런 문자 학습과 떨어져 있지 않았다.

오늘의 독자는 완성된 답만 보고 옛 학습자를 평가하기 쉽다. 그러나 한쪽의 모범 문장과 반복된 글자와 지워진 자리는 학습 과정을 생각하게 한다. 계산 결과가 맞는지 살피는 일과 누가 어떤 과제로 연습했는지 묻는 일은 서로 다른 질문이다.

이 관에서는 실제 유물의 설명과 오늘의 학습용 계산을 구별한다. 뒤에 나오는 창고 장부와 수량 예제는 원리를 설명하기 위해 새로 구성한 것이다. 익숙한 생활 장면으로 읽되 실제 고대 장부의 번역이라고 받아들이지 않는다.

모범 글자 읽기

반복해서 쓰기

수정 흔적 살피기

서기관 연습판을 읽는 순서. 개념도.

탐구

연습판에서 답 이외에 살퍼볼 흔적을 두 가지 골라 보자.

풀이와 확인

글자의 반복 횟수와 수정 흔적을 볼 수 있다. 모범 글자와 학습자가 쓴 글자의 위치도 비교한다. 다만 이런 흔적 하나만으로 학습자의 나이나 성적을 확정할 수는 없다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

어디에서 나온 자료인가

계산식이 같은 유물도 발견 맥락에 따라 다른 질문을 던진다.

유물의 출처를 읽을 때는 제작 장소와 발견 장소와 현재 소장 장소를 나눈다. 세 장소가 모두 같다고 가정하면 이동 과정이 사라진다. 특히 시장에서 구입한 유물은 정확한 발굴 위치가 알려지지 않을 수 있으므로 빈칸을 상상으로 채우지 않는다.

예를 들어 같은 곱셈표가 주거지의 여러 학습판과 함께 발견됐다면 교육 활동을 검토할 근거가 늘어난다. 출토 맥락이 없는 곱셈표는 숫자의 배열을 분석할 수 있어도 그 방의 수업 모습을 복원하는 데에는 더 큰 제한이 있다.

출처표에는 관찰된 정보와 추정된 정보를 따로 적는다. 연대도 단일 연도보다 범위로 제시되는 경우가 많다. 범위를 제시하는 것은 설명의 실패가 아니라 남아 있는 증거가 허용하는 정확도를 드러내는 방식이다.

제작 장소

발견 장소

현재 소장 장소

세 장소는 서로 다른 정보다.

탐구

현재 소장처가 뉴욕인 점토판을 뉴욕에서 제작된 계산판이라고 소개해도 될까?

풀이와 확인

안 된다. 소장처는 현재 보관 장소다. 제작지와 발굴지는 별도 기록으로 확인해야 한다. 알려지지 않은 항목에는 미상이라고 적고 확인된 소장처만 정확히 제시한다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

장부의 수와 문제의 수

현실을 기록하는 숫자와 학습을 위해 고른 숫자를 구별한다.

학습용 창고 장부를 만들어 보자. 처음 보리가 84자루 있고 27자루를 내보낸 뒤 18자루가 들어왔다. 남은 수는 $84-27+18=75$ 다. 여기에 낱짜와 거래 이유를 덧붙이면 수량 계산은 물건의 이동을 확인하는 기록으로 바뀐다.

반면 문제집은 84와 27과 18을 계산하기 알맞게 선택할 수 있다. 같은 덧셈과 뺄셈이라도 실제 장부와 교육용 문제는 만들어진 목적이 다르다. 문서 안의 수가 깔끔하다는 이유만으로 실제 거래가 언제나 그렇게 이루어졌다고 단정하지 않는다.

검산에는 다른 순서를 쓸 수 있다. 들어온 것을 먼저 합하면 102자루다. 여기서 나간 27자루를 빼면 역시 75자루가 된다. 연산 순서는 달라도 입고와 출고의 방향을 정확히 지키면 전체 수량은 일치한다.

처음

출고

입고

재고

84

-27

+18

75

가상의 창고 장부. 수량 변화의 검산.

탐구

마지막 재고가 73자루였다면 기록과 실물의 차이는 얼마인가?

풀이와 확인

기록상 재고는 75자루이므로 2자루가 모자란다. 이 차이만으로 원인을 정할 수는 없다. 입고 수량과 출고 수량과 처음 재고를 각각 다시 확인해야 한다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

눈에 보이는 것부터 적기

자료를 읽는 첫 단계는 해석보다 관찰을 앞세우는 것이다.

가상의 계산판에 세 줄의 수가 있고 마지막 줄 아래에 선이 그어져 있다고 하자. 세 줄과 밑줄은 관찰이다. 밑줄 아래 수가 합계일 것이라는 말은 해석이다. 앞의 수를 더해 일치하는지 확인하면 그 해석을 지지하는 근거가 생긴다.

그러나 합계가 맞지 않을 때 바로 필자의 실수라고 쓰면 안 된다. 일부 기호가 깨졌거나 단위가 다르거나 앞줄이 별도 항목일 수 있다. 눈에 보이는 수와 읽기 어려운 수를 구별한 뒤 가능한 설명을 몇 가지 세워야 한다.

학습용 판에 12와 18과 30을 적고 맨 아래에 60을 둔다. 이때 합계 해석은 잘 맞는다. 맨 아래가 1로 보인다면 60진법의 자리값이나 기호 판독을 다시 검토할 수 있다. 계산은 해석을 시험하는 도구가 된다.

$$12 + 18 + 30 = 60$$

$$60 = 1 \times 60$$

합계 해석을 시험하는 학습용 계산판.

탐구

자료에서 읽기 어려운 숫자를 자신 있게 하나로 정하면 무엇을 잃는가?

풀이와 확인

판독의 불확실성을 잃는다. 뒤의 계산이 맞아도 처음 읽은 수가 틀렸을 수 있다. 가능한 판독을 나란히 적고 각각이 다른 줄과 맞는지 비교하는 편이 타당하다.

[01] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [02] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

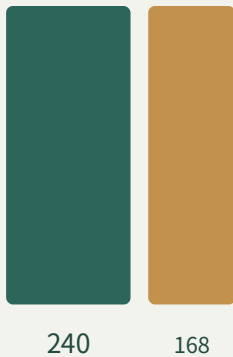
매체가 바꾸는 계산의 모습

점토판과 파피루스는 같은 수학을 서로 다른 형태로 남긴다.

흙에 눌러 새긴 자국과 붓으로 적은 선은 모양과 배치가 다르다. 작은 판에서는 줄의 길이가 제한되고 긴 두루마리에서는 여러 문제를 이어 적을 수 있다. 이런 물리적 조건은 계산을 놓는 공간을 바꾸지만 사고의 우열을 곧바로 말해 주지는 않는다.

종이에 24×17 의 풀이를 써 보자. 한쪽에는 세로 계산을 적고 다른 쪽에는 17×16 과 17×8 의 합을 적는다. 결과는 408로 같다. 배치가 달라도 중간 수를 어떻게 만들고 합치는지 읽으면 절차를 비교할 수 있다.

유물을 재현한 그림에서는 원래의 크기와 재료를 별도 설명으로 제공하는 것이 좋다. 화면에 크게 보이는 글자가 실제로도 컸다고 오해할 수 있기 때문이다. 확대 기능은 기호를 자세히 읽게 하지만 원래 물체의 크기를 대신하지 않는다.



17×24 를 10×24 와 7×24 로 나눈 현대 도해.

탐구

계산판의 확대 이미지에 원래 크기를 함께 적어야 하는 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

확대 화면만으로 실제 크기를 판단할 수 없기 때문이다. 기호의 세부를 읽는 목적과 물체의 크기를 이해하는 목적을 나누면 자료를 더 정확히 볼 수 있다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

단위를 잃어버린 답

수량의 단위는 숫자와 함께 보존해야 할 계산의 일부다.

보리 3자루와 보리 5되를 아무 설명 없이 더해 8이라고 적을 수는 없다. 자루와 되가 서로 다른 크기를 나타내기 때문이다. 학습용 약속으로 한 자루를 12되로 정하면 3자루는 36되이므로 전체는 41되가 된다.

이 약속은 고대의 실제 도량형을 재현한 것이 아니다. 단위를 맞추는 원리를 보이기 위한 예시다. 역사 자료의 단위는 시대와 지역과 물품에 따라 달라질 수 있으므로 오늘의 리터나 킬로그램으로 바꿀 때에도 근거가 필요하다.

41되는 같은 약속 아래에서 3자루와 5되다. 단위를 작게 바꾸면 수는 커지지만 실제 양은 그대로다. 단위 변환은 물건을 더 만드는 일이 아니라 같은 양을 다른 기준으로 세는 일이라는 점을 기억하자.

$$\begin{aligned} 3\text{자루} &= 36\text{되} \\ 36\text{되} + 5\text{되} &= 41\text{되} \end{aligned}$$

한 자루를 12되로 정한 학습용 단위 변환.

탐구

한 상자를 8묶음으로 정할 때 5상자와 3묶음은 모두 몇 묶음인가?

풀이와 확인

5상자는 40묶음이다. 여기에 3묶음을 더하면 43묶음이다. 답에 묶음이라는 단위를 써야 수 43이 무엇을 세는지 분명해진다.

[01] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [02] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

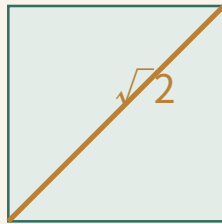
전시 설명문을 고쳐 쓰기

좋은 수학사 설명은 확인된 사실과 흥미로운 추론을 함께 구별한다.

어떤 전시문이 이 판을 쓴 학생은 모든 직각삼각형의 비밀을 완벽히 알았다고 말한다고 하자. 한 유물에 특정 계산이 남아 있다는 사실만으로 모든 경우의 지식이나 필자의 이해 수준을 확인하기는 어렵다. 문장을 증거가 있는 범위로 줄여야 한다.

이 판에는 정사각형과 대각선에 관련된 수가 적혀 있다라는 문장은 관찰에 가깝다. 그 수가 매우 정확한 근삿값이라는 설명은 계산으로 검토할 수 있다. 특정 알고리즘을 사용했다는 주장은 다른 문헌과 비교해 따로 논의해야 한다.

과장된 설명을 줄이면 이야기가 빈약해지는 것이 아니다. 남은 수 몇 개에서 얼마나 많은 질문이 나오는지 보여 줄 수 있다. 관람자가 스스로 검산하고 해석의 차이를 살펴보게 하는 전시가 오히려 더 깊은 이해를 만든다.



한 변 1

$$\text{대각선}^2 = 1^2 + 1^2$$

$$\text{대각선} = \sqrt{2}$$

계산으로 확인하는 관계

정사각형의 변과 대각선 관계를 검산한 현대 도해. 유물의 원도는 아니다.

탐구

어떤 절차로 계산했는지 확실하지 않을 때 설명문은 어떻게 쓰는가?

풀이와 확인

가능한 계산법 가운데 하나를 소개한다고 밝힌다. 그 절차로 같은 값이 나온다는 사실과 실제 필자가 그 절차를 썼다는 역사적 주장을 구별한다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

자료 읽기의 네 질문

대상과 절차와 목적과 한계를 차례로 묻는 습관을 만든다.

새로운 수학 유물을 만나면 무엇이 남아 있는지 먼저 묻는다. 다음에는 적힌 수들이 어떤 계산으로 연결되는지 확인한다. 이어서 누가 무엇을 하려고 이 자료를 만들었는지 검토한다. 마지막으로 현재 증거로는 무엇을 알 수 없는지 적는다.

가상의 표에 4와 8과 12가 적혀 있다면 4의 배수라는 관계는 쉽게 확인된다. 하지만 이 표가 물건 네 개씩을 포장한 기록인지 곱셈 연습인지 수만 보고 결정할 수는 없다. 제목과 단위와 주변 문서가 해석에 필요하다.

이 네 질문은 고대 자료에만 적용되지 않는다. 현대의 통계표와 그래프도 측정 대상과 계산 과정과 작성 목적과 자료의 한계를 함께 읽어야 한다. 수학의 정확성과 자료 해석의 신중함은 서로 보완하는 능력이다.



4개씩 묶은 배열은 4와 8과 12의 관계를 보여 준다. 기록의 목적까지 정하지는 않는다.

탐구

수의 관계를 맞게 찾았으면 문서의 목적도 자동으로 알아낸 것일까?

풀이와 확인

그렇지 않다. 같은 수열은 여러 상황에 나타날 수 있다. 수학적 관계는 계산으로 확인하고 문서의 목적은 제목과 출토 맥락과 다른 자료를 통해 검토한다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

고대 오리엔트관 / 03

60을 묶음으로 세는 법

기수가 달라지면 자리도 달라진다

60진법에서는 한 자리가 60개 모일 때 다음 자리로 올라간다.

십진법의 243은 $2 \times 100 + 4 \times 10 + 3$ 이다. 같은 자리 원리를 60을 기준으로 적용하면 두 자리 수 2:43은 $2 \times 60 + 43$ 이 된다. 따라서 십진법으로 163이다. 이 책의 쌍점은 60진법의 자리를 나누기 위해 덧붙인 현대의 학습용 표시다.

한 자리에 들어가는 값은 0부터 59까지다. 자리 안에서 43을 표시하는 방법과 자리 전체가 60배씩 커지는 원리를 혼동하지 말자. 고대 바빌로니아의 기호는 1과 10을 나타내는 기본 모양을 조합해 자리 안의 수를 표현했다.

먼저 숫자의 모양을 읽고 그다음 위치가 주는 값을 읽어야 한다. 같은 2라는 묶음도 가장 오른쪽에서는 2가 되지만 한 칸 왼쪽에서는 120이 된다. 기호와 자리값이라는 두 층이 함께 작동한다.

60의 자리	1의 자리
2	43
120	

2:43은 $120 + 43$ 이다. 현대 자리값 해설. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

60진법의 3:12는 십진법으로 얼마인가?

풀이와 확인

$3 \times 60 + 12 = 192$ 다. 312라고 이어 읽으면 십진법의 자리값을 잘못 적용한 것이다. 자리를 나누어 각각의 값부터 계산하면 오류를 막을 수 있다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

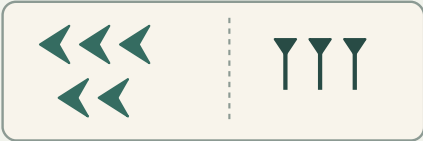
한 자리 안의 두 기호

기본 기호를 합해 수를 만들고 그 수를 다시 자리 안에 놓는다.

바빌로니아 수 표기에서는 1을 나타내는 기호와 10을 나타내는 기호의 조합이 중요하다. 예를 들어 23은 열을 나타내는 모양 두 개와 하나를 나타내는 모양 세 개로 읽을 수 있다. 실제 배열에는 관계가 있으므로 현대의 점 그림은 원리 설명에만 사용한다.

이 구조는 기수 60과 모순되지 않는다. 한 자리의 값을 구성하는 방식은 십 단위 묶음을 이용하지만 자리 사이의 배수는 60이다. 두 층의 규칙을 각각 살펴보면 혼합되어 보이는 표기도 일관되게 이해할 수 있다.

53을 읽는 학습 카드에는 열 묶음 다섯 개와 날개 세 개를 놓는다. 그 카드가 오른쪽 끝에 있으면 53이다. 왼쪽으로 한 자리 옮기면 53×60 이 된다. 카드 안의 모습은 같아도 전체 값은 달라진다.



열 기호 5개 하나 기호 3개

$50 + 3 = 53$

60의 자리	1의 자리	
	53	= 53
53		= 3180

같은 카드를 한 자리 왼쪽으로: $53 \times 60 = 3180$

열 기호 다섯과 하나 기호 셋이 만드는 자리 값 53과 자리 이동

탐구

열 기호 네 개와 하나 기호 일곱 개로 만든 자리의 값은 얼마인가?

풀이와 확인

그 자리 안의 값은 47이다. 전체 수에서 얼마를 뜻하는지는 위치에 따라 달라진다. 일의 자리라면 47이고 60의 자리라면 2820이다.

[03] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

자리 올림을 눈으로 보기

합이 60을 넘으면 큰 묶음과 남은 수로 다시 나눈다.

$47+28$ 을 계산하면 75다. 이를 60진법 두 자리로 쓰려면 75를 60과 15로 나누어 1:15로 나타낸다. 60개짜리 묶음 하나와 날개 15개라는 뜻이다. 이때 75라는 십진법 표기를 그대로 한 자리에 넣으면 자리 규칙을 어기게 된다.

두 자리 계산 $1:47+2:28$ 에서는 오른쪽 합이 75이므로 15를 남기고 1을 왼쪽으로 올린다. 왼쪽은 $1+2+1=4$ 가 되어 답은 4:15다. 십진법으로 계산하면 $107+148=255$ 이며 $4 \times 60+15$ 와 일치한다.

십진법 덧셈의 받아올림과 원리는 같다. 달라진 것은 새 묶음을 만드는 기준이 10에서 60으로 바뀐 점이다. 익숙한 절차를 무작정 외우기보다 어느 크기의 묶음을 만들고 있는지 말로 설명해 보자.

$$47 + 28 = 75$$

$$75 = 1 \times 60 + 15$$

$$1:47 + 2:28 = 4:15$$

오른쪽 자리에서 60개를 묶어 왼쪽으로 올린다.

탐구

2:38과 1:45를 더해 보자.

풀이와 확인

$38+45=83$ 이므로 23을 남기고 1을 올린다. 왼쪽은 $2+1+1=4$ 다. 답은 4:23이며 십진법으로 263이다.

[03] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

빌려오는 수는 60

뿔셈에서 왼쪽 한 묶음은 오른쪽 60개로 바뀐다.

3:10에서 1:25를 빼려면 오른쪽 10이 부족하다. 왼쪽의 한 묶음을 풀어 오른쪽에 60을 더한다. 3:10은 2:70으로 다시 생각할 수 있다. 이 표기는 계산 중의 상태이며 최종 표기는 각 자리가 60보다 작아야 한다.

오른쪽은 $70-25=45$ 다. 왼쪽은 $2-1=1$ 이므로 답은 1:45다. 십진법으로 바꾸면 $190-85=105$ 이며 $1 \times 60 + 45$ 와 같다. 자리를 빌릴 때 10을 더하면 십진법 습관을 잘못 옮긴 것이 된다.

이 과정을 물건 묶음으로 표현하면 더 분명하다. 큰 상자 한 개를 작은 물건 60개로 푸는 것이므로 전체 물건 수는 줄지 않는다. 뿔셈은 같은 양을 다른 묶음으로 다시 놓은 다음 수행한다.

$$3:10 \rightarrow 2:70$$

$$2:70 - 1:25 = 1:45$$

왼쪽 한 묶음을 오른쪽 60개로 푼다.

탐구

4:05에서 2:48을 빼면 얼마인가?

풀이와 확인

4:05를 3:65로 풀어 쓴다. $65-48=17$ 이며 $3-2=1$ 이다. 답은 1:17이다. 검산하면 $168+77=245$ 로 처음 수를 얻는다.

[03] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

소수점 아래에도 같은 규칙

60진 분수의 첫 자리는 60분의 몇을 나타낸다.

이 책에서는 정수 부분과 분수 부분을 세미콜론으로 나눈다. 0;30은 $30/60$ 이므로 $1/2$ 이다. 0;15는 $15/60$ 이므로 $1/4$ 이며 0;20은 $20/60$ 이므로 $1/3$ 이다. 이런 구분 표시는 옛 점토판의 기호를 그대로 옮긴 것이 아니라 독해를 돕는 현대 표기다.

분수 자리가 하나 더 이어지면 그 자리는 3600분의 몇이 된다. 0;01:30은 $1/60+30/3600$ 으로 읽으며 값은 $1/40$ 이다. 두 자리를 130으로 붙여 읽거나 두 번째 자리도 60으로 나누면 다른 값이 된다.

자리값을 줄로 적어 두면 계산이 간단해진다. 정수 첫 자리는 1이고 그다음은 $1/60$ 이며 그다음은 $1/3600$ 이다. 오른쪽으로 한 칸 이동할 때 값이 60분의 1로 줄어든다는 규칙을 계속 적용한다.

표기	분수	약분
0;30	$30/60$	$1/2$
0;20	$20/60$	$1/3$
0;15	$15/60$	

60진 분수 첫 자리의 크기. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

0;45를 보통분수로 바꾸고 약분해 보자.

풀이와 확인

$45/60=3/4$ 이다. 반대로 $3/4$ 에 60을 곱하면 45이므로 60진 분수 한 자리로 정확하게 표시된다.

[03] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

표기되지 않은 크기를 판단하기

기호의 배열만으로 전체 크기가 완전히 정해지지 않는 경우가 있다.

고바빌로니아 계산 표기는 오늘날의 소수점처럼 수의 절대 크기를 항상 명시하지 않았다. 30이라는 기호가 문맥에 따라 30이나 $1/2$ 을 뜻할 수 있다는 점이 대표적이다. 실제 해석에서는 단위와 문제의 조건과 함께 읽어야 한다.

학습용 기록에 사람 2와 보리 30과 한 사람 몫 15가 있다고 하자. 30과 15의 관계는 두 배다. 그러나 단위가 없으면 보리의 실제 양을 30리터와 15리터로 확정할 수 없다. 계산 비율이 맞다는 사실과 크기를 안다는 사실은 다르다.

이런 표기를 단순히 불완전하다고만 평가하면 계산 관행을 놓친다. 맥락이 충분한 환경에서는 크기를 따로 조절하면서 같은 숫자 배열로 여러 계산을 처리할 수 있다. 오늘날의 독자는 그 맥락을 복원해야 하므로 더 주의가 필요하다.

$$30 \div 60 = 1/2$$

$$30 \div (1/2) = 60$$

같은 기호 배열도 문맥에 따라 60배 다른 값을 가리킬 수 있다.

탐구

같은 기호 30이 30과 $1/2$ 을 모두 나타낼 수 있다면 두 값의 비는 얼마인가?

풀이와 확인

$30 \div (1/2) = 60$ 이다. 두 해석은 60배 차이가 난다. 자리의 위치가 한 단계 달라진 것으로 이해할 수 있다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

시간 표기와 비교하기

익숙한 분과 초는 60이라는 묶음을 이해하는 좋은 출발점이다.

2분 35초와 1분 48초를 더하면 초의 합은 83이다. 이를 1분 23초로 바꾸어 분에 더하면 전체는 4분 23초다. 앞에서 계산한 60진법의 자리 올림과 같은 묶음 원리를 확인할 수 있다.

하지만 오늘의 시계 표기를 고대 수 표기와 완전히 같은 체계라고 말하면 지나치다. 시간에는 시와 분과 초라는 단위 이름이 있고 날짜와 시각을 표현하는 별도 약속도 있다. 짧은 계산 원리를 배우되 사용 목적과 표기 관행의 차이를 남겨 두자.

비교 학습에서는 무엇이 같은지와 무엇이 다른지를 모두 적는다. 묶음이 60이라는 점은 같다. 고대 자료에 현대의 쌍점과 소수점을 그대로 그려 넣는 것은 재현이 아니라 설명이다. 이런 표시를 덧붙였음을 독자에게 알려야 한다.

2분 35초 = 155초



1분 48초 = 108초



합계 263초 = 4분 23초



같은 초 단위 눈금에서 두 시간을 합친다. 60초마다 분의 경계가 생긴다.

탐구

1분 20초를 1.20분이라고 쓰면 같은 시간인가?

풀이와 확인

같지 않다. 1.20분은 1분과 0.20분이므로 1분 12초다. 1분 20초는 1+20/60분으로 계산해야 한다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

60진법 변환 실험실

나누어 얻은 몫과 나머지를 연결해 수를 다시 써 본다.

십진법 202을 60으로 나누면 몫은 3이며 나머지는 22다. 따라서 60진법으로 3:22다. 더 큰 수 3725는 60으로 나누어 몫 62와 나머지 5를 얻는다. 다시 62를 나누면 몫 1과 나머지 2가 되어 1:02:05로 나타낸다.

검산은 왼쪽부터 한다. $1 \times 3600 + 2 \times 60 + 5 = 3725$ 다. 가운데 자리가 2라는 사실을 놓치지 않도록 02로 적었지만 앞의 0은 학습 편의를 위한 것이다. 각 자리의 의미를 먼저 읽으면 표기의 길이에 흔들리지 않는다.

같은 절차를 다른 기수에도 적용할 수 있다. 기준 수로 계속 나누어 나머지를 기록한 뒤 역순으로 읽는 방식이다. 60진법은 낯선 기호의 전시물이면서 동시에 우리가 쓰는 자리값 체계를 새롭게 바라보게 하는 거울이다.

자리	값	기여량
맨 왼쪽	2	7200
가운데	1	60
맨 오른쪽	1	1

탐구

십진법 7261을 60진법 세 자리로 나타내 보자.

풀이와 확인

$7261 = 2 \times 3600 + 1 \times 60 + 1$ 이므로 2:01:01이다. 마지막 두 자리가 모두 1이지만 하나는 60이고 다른 하나는 1을 뜻한다.

[03] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

고대 오리엔트관 / 04

역수표와 나눗셈의 기술

나눗셈을 곱셈으로 바꾸기

곱해서 1이 되는 짝을 알면 나누는 계산을 다시 쓸 수 있다.

24를 8로 나누는 일은 24에 $1/8$ 을 곱하는 일과 같다. 8과 $1/8$ 은 서로 곱해 1이 되므로 역수의 짝이다. 역수표는 이런 짝을 모아 놓은 계산 도구로 읽을 수 있다. 실제 문제에서는 수의 크기와 단위를 함께 맞춰야 한다.

60진법에서 $1/8$ 은 $0;07:30$ 이다. $7/60+30/3600$ 을 통분하면 $450/3600$ 이며 약분하면 $1/8$ 이다. 따라서 $24 \times 0;07:30$ 의 값은 3이다. 표를 찾는 일과 찾은 값을 적용하는 일을 구별해 연습해 보자.

역수를 쓰면 계산의 구조가 선명해진다. 나누는 수를 곱하는 수로 바꾸었으므로 절차가 바뀌어도 답은 보존되어야 한다. $24 \div 8=3$ 이라는 쉬운 예제로 원리를 확인한 뒤 더 큰 수와 분수로 확장할 수 있다.

$$24 \div 8 = 24 \times 1/8$$

$$8 \times 1/8 = 1$$

역수로 바꾼 나눗셈의 학습 모형.

탐구

36을 12로 나누는 계산을 역수로 쓰면 어떻게 되는가?

풀이와 확인

$36 \times 1/12=3$ 이다. $1/12$ 은 60진법으로 $0;05$ 이므로 $36 \times 0;05$ 라고도 쓸 수 있다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

끝나는 분수와 끝나지 않는 분수

어떤 역수는 60진법에서 유한한 자리로 표현된다.

$1/3$ 은 십진법에서 $0.333\cdots$ 으로 이어지지만 60진법에서는 $0;20$ 으로 끝난다. 60이 3으로 나누어지기 때문이다. 반면 $1/7$ 은 60의 거듭제곱을 분모로 삼아도 정수 분자가 되지 않으므로 유한한 60진 분수가 되지 않는다.

어떤 수가 정규수인지 판단할 때는 소인수를 살핀다. 양의 정수의 소인수가 2와 3과 5뿐이면 그 역수는 유한한 60진 분수로 나타난다. $60=2^2 \times 3 \times 5$ 이므로 충분히 큰 60의 거듭제곱 안에 그 수의 인수를 모두 포함할 수 있다.

이 설명은 현대 수학으로 원리를 정리한 것이다. 표를 실제로 사용하는 사람은 소인수분해의 일반 명제를 쓰지 않고도 익숙한 역수의 목록을 활용할 수 있다. 계산 관행과 오늘의 이론적 설명은 서로 연결되지만 동일한 문장은 아니다.

수	소인수	유한 여부
45	$3^2 \times 5$	유한
49	7^2	

60의 소인수와 역수의 유한 표현. 현대 수학적 설명. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

45와 49 가운데 역수가 유한한 60진 분수가 되는 수는 무엇인가?

풀이와 확인

$45=3^2 \times 5$ 이므로 유한하게 끝난다. $49=7^2$ 에는 7이 들어 있으므로 유한한 60진 분수로 나타나지 않는다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

쉬운 역수 여섯 쌍

표의 각 줄을 외우기 전에 곱셈으로 맞는지 확인한다.

2의 역수는 0;30이며 3의 역수는 0;20이다. 4의 역수는 0;15이고 5의 역수는 0;12다. 6과 10의 역수는 각각 0;10과 0;06이다. 이 여섯 쌍은 첫 분수 자리만으로 표현되므로 변환 원리를 확인하기 좋다.

검산은 각 수에 분자 역할을 하는 값을 곱해 60이 되는지 보는 방식으로 할 수 있다. $5 \times 12 = 60$ 이므로 $5 \times 12 / 60 = 1$ 이다. 마찬가지로 $6 \times 10 = 60$ 이며 $10 \times 6 = 60$ 이다. 표의 대칭적인 짝도 눈에 들어온다.

모든 수의 역수를 한 자리로 쓸 수는 없다. 8의 역수에는 다음 자리가 필요하고 7의 역수는 끝나지 않는다. 쉬운 표를 전체 체계로 오해하지 않도록 표에 없는 수가 왜 빠졌는지도 함께 질문해 보자.

수	역수
2	0;30
3	0;20
4	0;15
5	

곱해서 1이 되는 간단한 짝. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

15의 역수를 60진 분수 한 자리로 쓰고 검산하자.

풀이와 확인

$15 \times 4 = 60$ 이므로 역수는 0;04다. $15 \times 4 / 60 = 1$ 이 되어 역수의 조건을 만족한다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

두 자리 역수를 만드는 법

첫 자리에 들어가지 않는 나머지를 다시 60배하여 계산한다.

$1/16$ 을 60진법으로 바꾸어 보자. $60 \div 16$ 은 몫 3과 나머지 12다. 첫 분수 자리는 3이며 남은 부분은 $12/16$ 이다. 이를 다시 60배하면 45이므로 두 번째 자리는 45다. 따라서 $1/16 = 0;03:45$ 다.

분수로 검산하면 $3/60 + 45/3600 = 225/3600 = 1/16$ 이다. 첫 자리만 써서 $0;03$ 으로 멈추면 $1/20$ 이 되므로 원래 값보다 작다. 남은 부분이 0이 될 때까지 계속해야 정확한 유한 표현을 얻는다.

이 변환법은 십진 소수를 구할 때 나머지에 10을 곱하는 과정과 같다. 여기서는 60을 곱한다. 기수의 차이를 의식하면 복잡해 보이는 숫자도 하나의 일정한 절차로 만들어 낼 수 있다.

$$\begin{aligned} 60 &= 16 \times 3 + 12 \\ 12 \times 60 &= 16 \times 45 \\ 1/16 &= 0;03:45 \end{aligned}$$

나머지를 60배 하여 다음 분수 자리를 구한다.

탐구

$1/25$ 를 같은 방식으로 나타내 보자.

풀이와 확인

$60 \div 25$ 는 몫 2와 나머지 10이다. $10 \times 60 \div 25 = 24$ 이므로 $1/25 = 0;02:24$ 다.
 $2/60 + 24/3600 = 144/3600 = 1/25$ 로 확인된다.

[O4] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

역수표로 분배하기

분배 문제에서는 전체 양과 한 몫의 단위를 끝까지 유지한다.

학습용 곡식 225단위를 15명에게 똑같이 나누어 준다고 하자. 15의 역수 0;04를 사용하면 $225 \times 4/60 = 15$ 가 된다. 한 사람은 15단위를 받는다. 사람 수가 계산에 들어가더라도 답의 단위는 곡식의 단위라는 점을 놓치지 않는다.

전체가 240단위로 바뀌면 같은 역수를 적용해 16단위를 얻는다. 나누는 수가 같을 때 표의 같은 줄을 재사용할 수 있다. 여러 거래와 분배를 처리하는 환경에서 표가 유용한 이유를 이 작은 예제로 이해할 수 있다.

검산은 한 사람의 몫에 사람 수를 곱하는 것이다. $16 \times 15 = 240$ 이 되어야 한다. 만약 16에 0;04를 다시 곱한다면 역수를 두 번 적용하는 오류가 된다. 어떤 단계에서 무엇을 구했는지 문장으로 적으면 혼동을 줄일 수 있다.

$$225 \times 4/60 = 15$$

$$15\text{명} \times 15\text{단위} = 225\text{단위}$$

역수 0;04로 15명에게 분배하는 현대 예제.

탐구

324단위를 18명에게 나누면 한 사람의 몫은 얼마인가?

풀이와 확인

18의 역수는 $1/18$ 이다. $324 \times 1/18 = 18$ 이므로 한 사람은 18단위를 받는다. $18 \times 18 = 324$ 로 검산한다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

일곱으로 나누기의 어려움

끝나지 않는 표기에도 계산 방법이 사라지는 것은 아니다.

$1/7$ 을 60진법으로 바꾸면 첫 자리는 8이고 나머지는 4다. 다음 자리는 34이며 나머지는 2다. 그다음 자리는 17이며 나머지는 다시 1이 된다. 처음 상태로 돌아왔으므로 8과 34와 17이 반복된다.

따라서 $1/7=0;08:34:17:08:34:17\cdots$ 이다. 세 자리까지만 적으면 정확한 값보다 조금 작다. 그렇다고 $21\div 7$ 을 계산하지 못하는 것은 아니다. $7\times 3=21$ 을 알면 몫은 바로 3이다. 역수의 유한 표기와 나눗셈 가능성은 같은 문제가 아니다.

근삿값을 쓸 때에는 정밀도가 필요한 목적을 생각해야 한다. 반복을 몇 자리에서 멈추었는지 밝히고 마지막에 원래 수를 곱해 오차를 확인한다. 어려운 수 하나가 계산 체계 전체를 무효로 만드는 것은 아니다.

단계	자리	나머지
1	8	4
2	34	2
3	17	

$1/7$ 의 나머지가 처음으로 돌아와 세 자리가 반복된다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

$1/7$ 의 첫 60진 분수 자리 0;08만 쓰면 실제 값보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

0;08은 $8/60=2/15$ 다. $2/15$ 와 $1/7$ 을 통분하면 $14/105$ 와 $15/105$ 이므로 근삿값이 $1/105$ 만큼 작다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

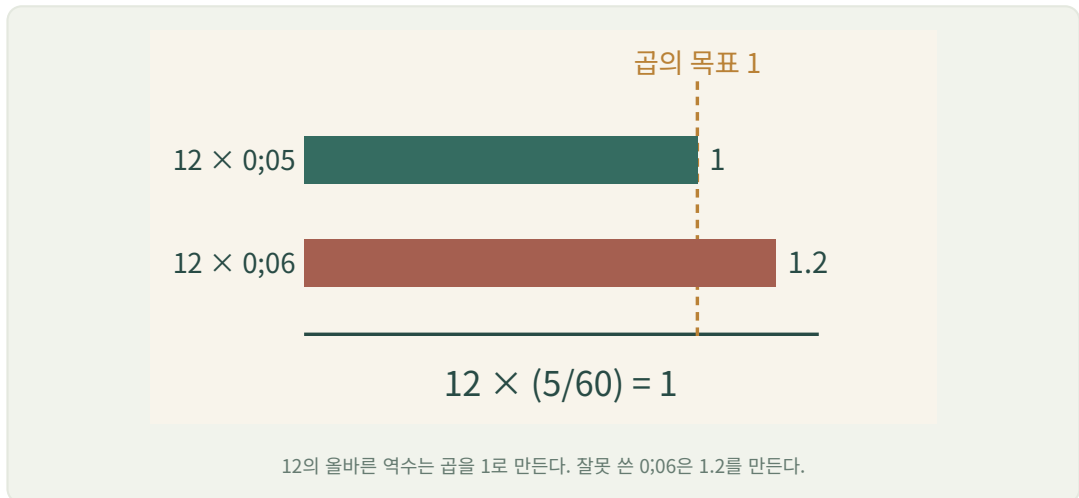
표의 오류를 찾아내는 검산

한 줄의 잘못된 수는 곱해서 1이 되는지 살펴보면 드러난다.

누군가 역수표에 12의 짝을 0;06으로 적었다고 하자. $12 \times 6/60 = 6/5$ 이므로 1이 되지 않는다. 0;06은 10의 역수다. 12의 역수는 0;05로 고쳐야 하며 $12 \times 5/60 = 1$ 로 확인할 수 있다.

단순한 자리 오류도 살펴보자. 16의 역수를 0;03:54라고 적으면 $3/60 + 54/3600$ 이 된다. 올바른 값 0;03:45보다 9/3600만큼 크다. 곱셈 결과가 1보다 커지는 방향까지 예측하면 오류 탐지가 더 쉬워진다.

역사 자료에 틀린 줄이 보인다고 곧바로 고대 필자의 실수라고 결론 내리지 않는다. 원래 기호의 손상과 현대 전사의 오류도 검토해야 한다. 여기의 가상 표는 검산 원리를 익히기 위한 것이며 실제 유물의 오류 목록이 아니다.



탐구

20의 역수를 0;30으로 적은 줄을 어떻게 고치는가?

풀이와 확인

$20 \times 30/60 = 10$ 이므로 틀렸다. $20 \times 3 = 60$ 이므로 0;03이 올바른 역수다. 3과 30의 기호를 혼동했을 가능성을 점검할 수 있다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

역수가 끝나는 데 필요한 자리 수

유한하게 끝난다는 판단에서 멈추지 않고 가장 짧은 표기 길이를 구한다.

양의 정수 n 의 역수가 60진법으로 k 자리 안에 끝나려면 60^k 을 n 으로 나눈 값이 정수여야 한다. 그러면 $1/n$ 을 분모 60^k 인 분수로 나타낼 수 있다. 약분한 분모에 2와 3과 5 이외의 소인수가 있으면 어떤 유한한 k 로도 이 조건을 만족시키지 못한다.

$n=2^a3^b5^c$ 로 쓰면 $60^k=2^{2k}3^k5^k$ 이다. 따라서 $2k \geq a$ 와 $k \geq b$ 와 $k \geq c$ 가 동시에 필요하다. 필요한 최소 자릿수는 a 의 절반을 올림한 값과 b 와 c 가운데 가장 큰 값이다. 이 식은 고대 표의 문장이 아니라 자리값 원리를 현대적으로 일반화한 것이다.

예를 들어 $32=2^5$ 이므로 $2k \geq 5$ 에서 최소 k 는 3이다. 실제 역수 $0;01:52:30$ 은 세 자리다.

$125=5^3$ 도 세 자리가 필요하지만 이유는 5의 지수 3에 있다. $1/125=0;00:28:48$ 로 쓰면 첫 분수 자리가 0이더라도 전체 자릿수는 셋임을 확인한다.

이렇게 최소 길이를 미리 알면 변환 도중 멈추어도 되는지 판단할 수 있다. 다만 끝자리에 불필요한 0을 덧붙인 표현도 가능하므로 실제 적힌 자리 수와 필요한 최소 자리 수는 다르다. 역사 자료의 줄 길이를 분석할 때 계산 원리와 필사상의 선택을 구별한다.

분모	소인수 구조	최소 분수 자리
16	2^4	2
32	2^5	3
45	$3^2 \times 5$	2
125	5^3	3

탐구

1/128은 최소 몇 자리의 유한한 60진 분수로 나타나는가?

풀이와 확인

$128=2^7$ 이다. $2k \geq 7$ 을 만족하는 가장 작은 정수 k 는 4다. 60^3 에는 2가 여섯 번만 들어 있어 부족하며 60^4 에는 여덟 번 들어 있어 충분하다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계 / [O4] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

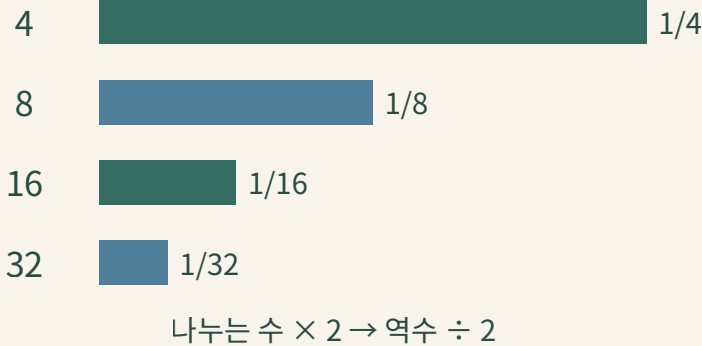
역수의 연결망 만들기

한 개의 역수를 알면 두 배와 절반의 관계로 다른 값을 구한다.

8의 역수가 $1/8$ 이면 16의 역수는 그 절반인 $1/16$ 이다. 반대로 4의 역수는 $1/8$ 의 두 배인 $1/4$ 이다. 나누는 수가 커질 때 같은 전체를 나누어 얻는 한 몫은 작아진다는 관계를 수식으로 확인한 것이다.

60진 표기로 쓰면 0;07:30의 절반은 0;03:45다. 첫 자리 7을 절반으로 나누어 3을 남기고 남은 1을 다음 자리의 60으로 바꾸면 90의 절반 45를 얻는다. 자리 사이의 묶음을 풀어 나누는 과정이다.

직접 만든 역수표에서 2배로 연결되는 수들을 같은 색으로 묶어 보자. 숫자의 목록이 계산 관계의 지도처럼 보인다. 표를 외워서 쓰는 능력에 관계를 설명하는 능력을 더하면 낯선 수에서도 이미 아는 정보를 활용할 수 있다.



역수의 길이를 같은 눈금으로 비교했다. 4와 8과 16과 32에 대응하는 몫은 차례로 절반이 된다.

탐구

$1/32$ 를 $1/16$ 의 표기에서 구해 보자.

풀이와 확인

0;03:45의 절반은 0;01:52:30이다. 분수로 확인하면 $1/60 + 52/3600 + 30/216000 = 1/32$ 가 된다.

[O4] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

곱셈표에서 넓이 계산으로

곱셈표가 저장하는 규칙

표는 따로 떨어진 답의 모음이 아니라 일정한 증가를 담은 구조다.

메트로폴리탄미술관에는 고바빌로니아 시대의 곱셈표 점토판이 소장되어 있다. 여기서는 실제 표를 그대로 번역하지 않고 18의 배수로 학습용 표를 만든다. 18과 36과 54와 72는 한 줄 내려갈 때마다 18씩 커진다.

표의 네 번째 줄 72를 60진법으로 쓰면 1:12다. 세 번째 줄 54에서 18을 더할 때 60을 넘어 받아올림이 생긴다. 표를 읽는 연습은 곱셈과 자리값의 두 기능을 함께 익히게 한다.

열 번째 줄은 180이며 60진법으로 3:00이다. 여기서 마지막 00은 자리를 분명하게 하는 현대 표기다. 원자료의 표기 관행과 설명용 표의 표기를 구별하면서 일정한 증가가 유지되는지 확인하자.

1배		18
2배		36
3배		54
4배		72

18의 배수표를 나타낸 학습 그래프.

탐구

18의 배수표에서 여덟 번째 값은 얼마이며 60진법으로 어떻게 쓰는가?

풀이와 확인

$18 \times 8 = 144$ 이므로 2:24다. 일곱 번째 값 126에 18을 더해도 144가 되어 같은 규칙을 확인할 수 있다.

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

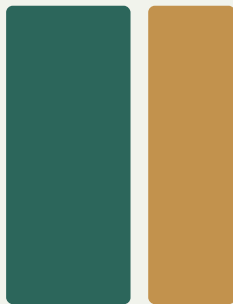
큰 곱을 작은 곱으로 나누기

한 수를 더하기 쉬운 부분으로 나누면 곱셈표의 범위를 넓힐 수 있다.

24×17 을 24×10 과 24×7 의 합으로 계산해 보자. 두 부분은 240과 168이며 합은 408이다. 17을 $10+7$ 로 나누었으므로 같은 24를 열 번 센 것과 일곱 번 센 것을 합한 셈이다.

다른 분해도 가능하다. 17을 $20-3$ 으로 보면 $480-72=408$ 이다. 어떤 분해가 편한지는 이미 알고 있는 배수와 계산 도구에 따라 달라진다. 하나의 문제에 반드시 하나의 계산 경로만 있는 것은 아니다.

직사각형 도식에서는 가로 17을 10과 7로 나누고 세로 24를 유지한다. 두 부분의 넓이를 합하면 전체 넓이가 된다. 이 그림은 분배법칙을 오늘의 기호로 설명한 학습 도해이며 특정 점토판의 도식을 복원한 것은 아니다.



240

168

가로 17의 분해와 넓이의 합.

탐구

36×19 를 20배와 한 배의 차이로 계산하자.

풀이와 확인

$36 \times 20 - 36 = 720 - 36 = 684$ 다. 36×10 과 36×9 의 합으로 계산해도 $360 + 324 = 684$ 가 된다.

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

넓이와 길이를 혼동하지 않기

길이를 두 배로 늘리는 방향이 하나인지 둘인지 살핀다.

가로 12와 세로 8인 직사각형의 넓이는 96이다. 가로만 두 배로 하면 $24 \times 8 = 192$ 로 넓이도 두 배다. 가로와 세로를 모두 두 배로 하면 $24 \times 16 = 384$ 로 넓이는 네 배가 된다. 바뀐 방향의 수가 결과에 영향을 준다.

점토판의 토지 문제를 읽을 때 길이 단위와 넓이 단위를 구별하는 이유도 여기에 있다. 길이 숫자 둘을 곱해 얻은 것은 길이가 아니라 넓이다. 실제 옛 단위의 환산은 별도 근거가 필요하므로 이 예제는 단위 없는 학습 모형으로 다룬다.

그림에서 단위 정사각형을 직접 세어 보면 넓이의 배율이 드러난다. 모든 작은 정사각형이 가로 두 칸과 세로 두 칸으로 바뀌어 네 칸을 차지한다. 곱셈은 두 방향의 변화를 함께 담는 연산이다.

길이 배율	넓이 배율
한 방향 2배	2배
두 방향 2배	4배
두 방향 3배	

길이의 배율과 넓이의 배율을 구별한다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

가로와 세로를 각각 세 배로 늘리면 넓이는 몇 배가 되는가?

풀이와 확인

$3 \times 3 = 9$ 배다. 둘레는 세 배지만 넓이는 아홉 배이므로 두 양의 배율을 같은 것으로 생각하면 안 된다.

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

둘레가 같아도 넓이는 달라진다

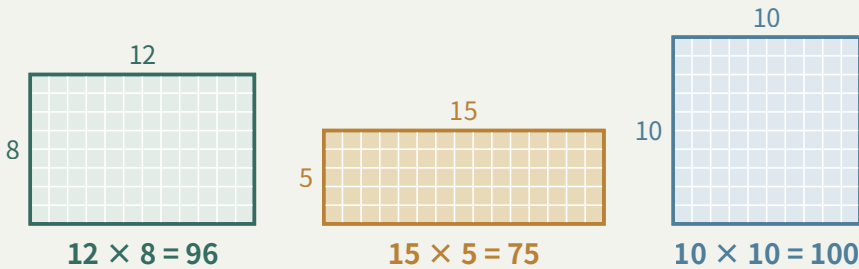
같은 길이의 경계 안에 들어가는 넓이는 모양에 따라 달라진다.

가로 12와 세로 8인 직사각형의 둘레는 40이며 넓이는 96이다. 가로 15와 세로 5도 둘레는 40이지만 넓이는 75다. 가로 10과 세로 10인 정사각형은 같은 둘레에서 넓이가 100이다.

두 변의 합이 20이면 10을 기준으로 한쪽은 늘고 다른 쪽은 같은 만큼 줄어든다. 두 변을 $10+d$ 와 $10-d$ 로 쓰면 넓이는 $100-d^2$ 이다. 길이 차이가 커질수록 빼는 양이 커져 넓이가 줄어든다.

이 설명은 뒤에서 볼 직사각형 문제의 바탕이 된다. 합을 고정한 뒤 가운데 값에서 얼마나 벗어났는지 찾는 방식이다. 고대의 절차를 이해할 때 현대 기호를 사용할 수 있지만 당시 문장이 그대로 이런 식이었다고 말하지는 않는다.

둘레가 모두 40인 세 직사각형 (같은 축척)



두 변을 $10 + d$ 와 $10 - d$ 로 쓰면 넓이는 $100 - d^2$

둘레 40인 세 직사각형을 같은 축척의 단위 격자로 비교

탐구

둘레 40인 직사각형의 한 변이 13이면 다른 변과 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

두 변의 합이 20이므로 다른 변은 7이다. 넓이는 91이며 $100-3^2=91$ 로도 확인된다.

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

나머지를 버리면 생기는 변화

나눗셈의 나머지는 문제의 목적에 따라 다른 의미를 가진다.

곡식 100단위를 12명에게 나누면 한 사람에게 8단위씩 주고 4단위가 남는다. 곡식을 더 잘게 나눌 수 있다면 남은 4단위를 다시 12명에게 나누어 각자 $1/3$ 단위를 받는다. 최종 몫은 8과 $1/3$ 이다.

물건이 자를 수 없는 단단한 상자라면 같은 계산의 해석이 달라진다. 각자 8상자를 받고 4상자가 남는다고 보고할 수 있다. 수학적 나눗셈은 같아도 나머지의 처리는 물건의 성질과 분배 규칙에 달려 있다.

60진 분수로 $1/3$ 은 $0;20$ 이므로 몫을 $8;20$ 으로 쓸 수 있다. 이 값에 12를 곱하면 100이다. 8만 답으로 적으면 96만 배분한 것이 되므로 남은 4의 행방을 설명해야 한다.

$$100 = 12 \times 8 + 4$$

$$100 \div 12 = 8 + 1/3$$

나머지 4를 다시 12몫으로 나누면 $1/3$ 씩이다.

탐구

100명을 한 대에 12명씩 타는 차량에 모두 태우려면 최소 몇 대가 필요한가?

풀이와 확인

8대에는 96명만 탈 수 있으므로 9대가 필요하다. 몫 8과 나머지 4를 보고 상황에 맞게 올림해야 한다.

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

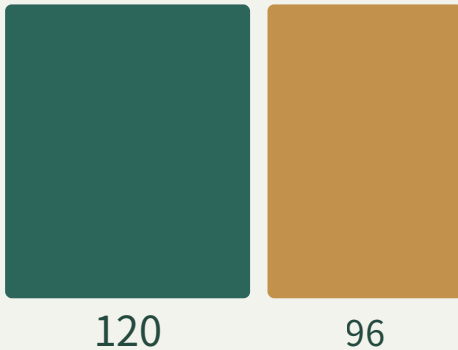
같은 넓이를 다른 식으로

도형을 잘라 옮기는 활동은 계산식 사이의 관계를 보여 준다.

가로 18과 세로 12인 직사각형을 세로선으로 10과 8로 나누면 넓이는 $120+96=216$ 이다. 가로선으로 6과 6으로 나누면 $108+108=216$ 이다. 조각의 모양은 달라도 겹치거나 빠지는 부분이 없으면 전체 넓이는 보존된다.

조각을 다시 붙일 때에는 길이뿐 아니라 붙이는 변의 대응을 확인한다. 아무 조각이나 늘어 맞추면 넓이 보존을 설명할 수 없다. 잘라 옮기는 도해는 조각을 변형하지 않고 위치만 바꾸는 약속을 지켜야 한다.

이 관의 넓이 그림에서는 같은 조각에 같은 색을 사용한다. 색은 장식이면서 논증의 안내다. 어떤 항이 어디에서 왔는지 도형과 계산식을 번갈아 읽으면 분배법칙을 기계적인 전개 이상으로 이해할 수 있다.



18×12의 직사각형을 두 조각으로 나눈다.

탐구

18×12를 20×12에서 두 줄을 빼는 방식으로 구해 보자.

풀이와 확인

$20 \times 12 - 2 \times 12 = 240 - 24 = 216$ 이다. 가로 20인 직사각형에서 가로 2인 띠를 떼어 내는 도형과 대응한다.

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

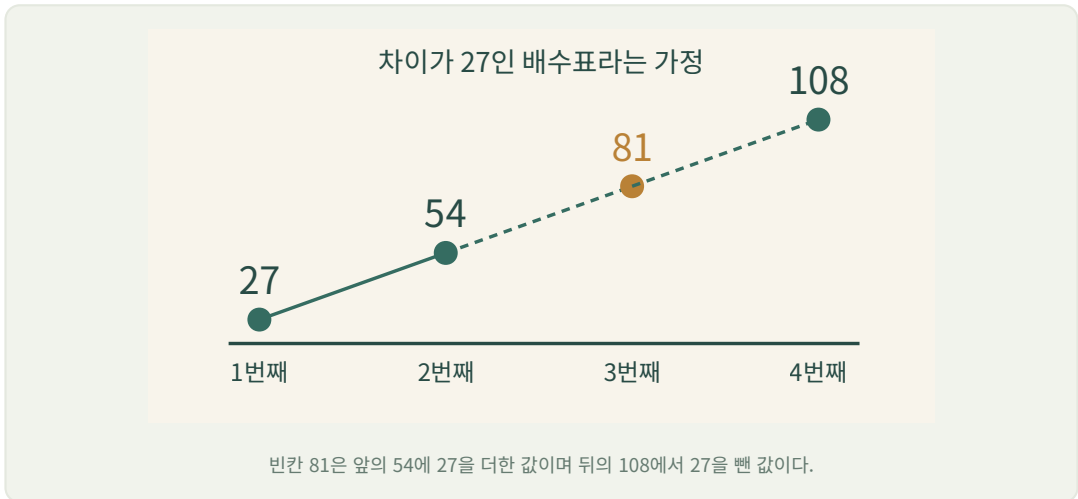
계산표의 빈칸 복원

이웃한 수의 관계를 이용하면 사라진 값을 합리적으로 추정할 수 있다.

학습용 표에 27과 54와 빈칸과 108이 차례로 적혀 있다. 일정한 배수표라는 가정을 세우면 빈칸은 81이 된다. 54에 27을 더해도 81이고 108에서 27을 빼도 81이므로 양쪽 관계가 일치한다.

그러나 수 네 개만으로 모든 문서의 규칙을 확정할 수는 없다. 제목이 27의 배수표라고 알려주면 추정의 근거가 강해진다. 제목 없이 숫자만 남아 있다면 가능한 복원이라고 표현하는 것이 더 정확하다.

복원 과정에서는 가정과 결과를 함께 기록한다. 일정한 차이가 27이라는 가정 아래 빈칸을 81로 채웠다고 적는 식이다. 새로운 조각이 발견되어 다른 수가 확인되면 가정을 고쳐야 한다. 좋은 해석은 수정 가능성을 열어 둔다.



탐구

6과 12와 빈칸과 24의 빈칸을 18로 채우는 데 사용한 가정은 무엇인가?

풀이와 확인

각 줄이 6의 연속한 배수라는 가정이다. 앞뒤의 차이가 모두 6이라는 조건을 적용했다. 규칙의 근거가 문서 전체에서도 유지되는지 확인해야 한다.

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

두 방법으로 같은 답 얻기

서로 다른 풀이를 비교하면 계산의 핵심과 실수를 함께 찾을 수 있다.

45×28 을 분배법칙으로 계산하면 $45 \times 20 + 45 \times 8 = 900 + 360 = 1260$ 이다. 두 배와 절반의 관계를 쓰면 $90 \times 14 = 180 \times 7 = 1260$ 이다. 한 수를 두 배로 하고 다른 수를 절반으로 할 때 곱은 변하지 않는다.

두 번째 방법은 모든 경우에 정수만으로 끝나는 것은 아니다. 절반으로 나누는 수가 홀수이면 분수가 생길 수 있다. 따라서 계산을 편리하게 만드는 선택인지 따져야 한다. 같은 원리가 언제나 같은 편리함을 주지는 않는다.

검산을 독립적으로 하는 것이 중요하다. 처음 풀이를 그대로 반복하면 같은 실수를 반복할 수 있다. 다른 분해나 역연산이나 대략적인 크기 비교를 이용하면 결과를 더 신뢰할 수 있다.

한 번 $\times$ 2 다른 번 $\div$ 2



45×28



90×14

두 넓이는 모두 1260

같은 길이 축척으로 그린 두 직사각형. 한 번을 두 배로 하고 다른 번을 절반으로 하면 넓이는 유지된다.

탐구

$1260 \div 45$ 가 28인지 30배와의 차이를 이용해 확인할 수 있는가?

풀이와 확인

$45 \times 30 = 1350$ 이며 1260은 여기서 90만큼 작다. 90은 45의 두 배이므로 뺀 30-2=28이다. 정확한 차이를 이용한 확인이다.

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

고대 오리엔트관 / 06

직사각형 속에 숨은 미지수

두 변의 합과 넓이

길이를 직접 주지 않아도 합과 곱이 모양을 결정할 수 있다.

두 변의 합이 14이고 넓이가 45인 직사각형을 생각하자. 가로와 세로를 각각 알 수 없지만 두 수의 가운데는 7이다. 두 변이 같다면 넓이는 49이므로 주어진 넓이는 그보다 4만큼 작다. 이 차이가 길이의 차이를 찾는 실마리다.

7에서 같은 양을 더하고 빼서 두 변을 만든다. 그 양을 d 라고 쓰면 두 변은 $7+d$ 와 $7-d$ 다. 두 수를 곱한 값은 $49-d^2$ 이므로 $d^2=4$ 이며 $d=2$ 다. 따라서 길이는 9와 5다. 현대의 기호로 옛 직사각형 문제의 계산 구조를 읽는 학습 예제다.

넓이 45만으로는 15와 3도 가능하다. 합이 14라는 조건을 함께 확인해야 답이 정해진다. 이처럼 조건은 따로 장식처럼 붙는 문장이 아니라 가능한 도형을 차례로 좁히는 역할을 한다. 마지막으로 합과 곱을 모두 검산한다.



합이 14인 두 변과 가운데 값의 정사각형 비교.

탐구

합이 20이고 곱이 96인 두 양수를 찾아 보자.

풀이와 확인

가운데 값은 10이다. $100-96=4$ 이므로 차이의 절반은 2다. 두 수는 12와 8이며 합 20과 곱 96을 모두 만족한다.

[O6] 스톨니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

반으로 나눈 차이

합이 아니라 두 변의 차이를 알아도 같은 중심을 찾을 수 있다.

길이 차이가 6이고 넓이가 40인 직사각형을 구해 보자. 두 변의 가운데 값을 m 이라 두면 긴 변은 $m+3$ 이고 짧은 변은 $m-3$ 이다. 곱은 m^2-9 이므로 $m^2=49$ 다. 양의 길이를 다루므로 $m=7$ 이며 두 변은 10과 4가 된다.

계산 순서는 차이를 반으로 나누기에서 시작한다. 그 값의 제곱을 넓이에 더한 뒤 제곱근을 구한다. 마지막에는 반차를 더하고 빼서 두 변을 얻는다. 각 단계가 어떤 길이 또는 넓이에 대응하는지 설명하면 절차가 기억에 남는다.

이 문제를 x 와 $x+6$ 의 곱이 40이라고 적을 수도 있다. 두 표현은 같은 조건을 담지만 가운데 값을 사용하는 표현은 대칭을 드러낸다. 역사적 절차를 오늘의 식과 연결할 때에는 원문에 없던 기호를 우리가 보탰다는 점을 밝힌다.

$$\begin{aligned} 6 \div 2 &= 3 \\ 40 + 3^2 &= 49 \\ \sqrt{49} \pm 3 &\rightarrow 10 \text{과 } 4 \end{aligned}$$

반차를 이용해 두 변을 되찾는 현대 해설.

탐구

차이가 4이고 곱이 45인 두 양수는 무엇인가?

풀이와 확인

반차는 2다. $45+4=49$ 의 제곱근은 7이므로 두 수는 9와 5다. 차이 4와 곱 45를 각각 확인한다.

[O6] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

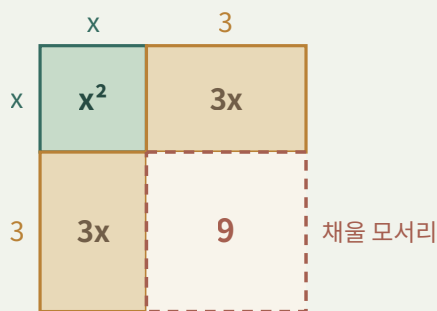
정사각형을 채우는 이유

빠진 모서리를 채우면 복잡한 넓이를 한 개의 정사각형으로 묶을 수 있다.

$x^2+6x=16$ 을 넓이로 읽어 보자. 한 변 x 인 정사각형에 폭 3인 띠 두 개를 이웃한 변에 붙인다. 두 띠의 넓이는 각각 $3x$ 다. 바깥 윤곽을 정사각형으로 만들려면 모서리에 한 변 3인 작은 정사각형이 더 필요하다.

추가한 넓이 9를 양쪽에 더하면 $x^2+6x+9=25$ 다. 왼쪽은 한 변 $x+3$ 인 정사각형이므로 $x+3=5$ 가 되고 $x=2$ 를 얻는다. 도형에서 더한 조각을 식의 오른쪽에서도 더해야 같은 관계가 유지된다.

현대 대수에서는 음의 해도 다룰 수 있다. 이 식의 다른 해는 -8 이지만 여기의 길이 모형에는 맞지 않는다. 계산 가능한 수의 범위와 그림이 표현하는 대상의 범위를 구별하면 그림의 장점과 한계를 함께 이해할 수 있다.



$$x^2 + 6x = 16$$

모서리 9를 양쪽에 더함

$$x^2 + 6x + 9 = 25$$

$$(x + 3)^2 = 25$$

$$x + 3 = 5, x = 2$$

$x=2$ 일 때 한 변 5인 정사각형

$x^2 + 6x = 16$ 의 조각에 모서리 9를 채워 한 변 5인 정사각형 만들기

탐구

$x^2+4x=12$ 에서 채워야 할 작은 정사각형의 넓이와 양의 해는 얼마인가?

풀이와 확인

4의 절반이 2이므로 넓이 4를 더한다. $(x+2)^2=16$ 에서 $x+2=4$ 를 택하면 양의 해는 $x=2$ 다.

[O6] 스토티브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

이어 읽기 / 직사각형 속에 숨은 미지수

차와 넓이 문제를 자르고 붙여 보기

반차를 제공해 넓이에 더하는 절차를 실제 조각 옮기기로 확인한다.

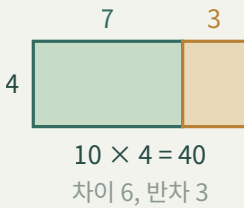
5장의 「반으로 나눈 차이」에서는 길이 차이가 6이고 넓이가 40인 직사각형을 반차 3으로 풀었다. 반으로 하고 제공해 더한 뒤 제공근을 구하는 순서는 기억하기 쉽지만 왜 그 순서가 맞는지는 식만으로 잘 보이지 않는다. 여기서는 직사각형을 실제로 자르고 붙이는 현대 재 구성으로 같은 절차를 다시 읽는다. 그림의 조각들은 학습용 모형이며 특정 점토판의 그림을 옮긴 것이 아니다.

가로 10과 세로 4인 직사각형에서 긴 변의 남은 부분 6을 반으로 나누어 폭 3인 띠 하나를 잘라 낸다. 남은 부분은 가로 7과 세로 4이고 잘라 낸 띠는 3×4 다. 이 띠를 돌려 남은 조각의 위쪽에 붙이면 한 변 7인 정사각형에서 모서리 하나가 빠진 7자 모양이 된다. 조각을 옮겼을 뿐이므로 넓이는 여전히 40이다.

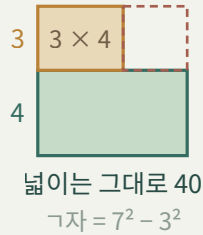
빠진 모서리는 한 변 3인 정사각형이므로 넓이 9를 채우면 $40+9=49$ 인 온전한 정사각형이 생긴다. 49의 제공근 7은 이 정사각형의 한 변이며 원래 두 변의 가운데 값이다. 처음 잘라 낸 반차 3을 7에 더하면 긴 변 10을 얻고 7에서 빼면 짧은 변 4를 얻는다. 반으로 하라와 제공하라와 더하라와 뿌리를 구하라라는 네 지시가 각각 자르기와 모서리 채기와 채우기와 한 변 읽기에 대응한다.

일반적으로 두 변을 $m+h$ 와 $m-h$ 로 쓰면 ㄱ자 모양의 넓이는 m^2-h^2 이고 모서리를 채운 정사각형은 m^2 이다. 따라서 넓이에 h^2 을 더하면 언제나 가운데 값의 제곱이 된다. 그림은 양의 길이만 다루므로 음수 해가 끼어들 자리가 없다. 같은 그림을 합과 넓이 문제에 거꾸로 쓰면 큰 정사각형에서 모서리를 덜어 내는 과정이 된다.

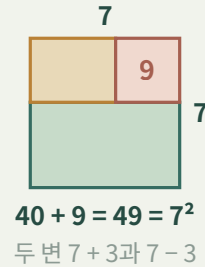
① 반차 3만큼 잘라 내기



② 띠를 돌려 붙이기



③ 모서리 9 채우기



가로 10, 세로 4인 직사각형의 띠를 옮겨 한 변 7인 정사각형 만들기

탐구

차이가 4이고 넓이가 21인 직사각형을 같은 방식으로 자르고 붙이면 채울 모서리와 두 변은 무엇인가?

풀이와 확인

반차는 2이므로 폭 2인 띠를 잘라 옮기고 한 변 2인 모서리 넓이 4를 채운다. $21+4=25$ 이므로 큰 정사각형의 한 변은 5다. 두 변은 $5+2=7$ 과 $5-2=3$ 이며 $7 \times 3=21$ 과 $7-3=4$ 로 두 조건을 모두 확인한다.

[O6] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

음수가 없는 그림과 오늘의 식

대수 기호가 허용하는 답과 고대 길이 문제의 답은 다를 수 있다.

$x^2-5x=14$ 를 오늘의 식으로 풀면 $(x-7)(x+2)=0$ 이므로 $x=7$ 또는 $x=-2$ 다. 두 값은 모두 식에 대입해 맞는지 검사할 수 있다. 그러나 원래 질문이 밭의 길이를 묻는 것이라면 음수인 -2 를 길이로 받아들이지 않는다.

옛 문제를 소개하며 그 시대의 수학자가 음의 해까지 당연히 사용했다고 쓰면 현대의 개념을 과거에 옮기는 셈이다. 반대로 음의 해가 나오지 않는다는 이유만으로 절차가 잘못되었다고 평가할 필요도 없다. 무엇을 수로 인정하고 어떤 대상을 계산했는지 살핀다.

현대식의 해 집합은 $\{7$ 과 $-2\}$ 라고 설명하고 길이 조건 아래의 답은 7 이라고 덧붙일 수 있다. 같은 방정식도 문제의 문맥에 따라 허용되는 답이 달라진다. 이 구분은 오늘의 속도나 인원 수 문제에서도 유용하다.

후보	식 만족	양의 길이
7	예	예
-2	예	아니오

식의 해와 길이 조건에 맞는 해를 구별한다.

탐구

$x^2=9$ 의 대수적 해와 양의 길이 해를 나누어 쓰자.

풀이와 확인

대수적 해는 3 과 -3 이다. 양의 길이만 허용하면 3 만 남는다. 식을 만족하는지와 상황에 맞는지는 서로 다른 검사다.

[06] 스톨니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

답이 존재하지 않는 조건

조건을 주었다고 언제나 실제 직사각형을 만들 수 있는 것은 아니다.

두 양의 변의 합이 10인 직사각형에서 넓이가 30일 수 있을까. 가운데 값 5를 기준으로 두 변을 $5+d$ 와 $5-d$ 라 쓰면 넓이는 $25-d^2$ 다. 제곱은 음수가 아니므로 넓이는 25를 넘을 수 없다. 따라서 30이라는 조건은 실현되지 않는다.

그림에서는 같은 둘레를 가진 직사각형들을 정사각형에 가까워지게 바꾸어 본다. 넓이가 커지다가 두 변이 같을 때 최대가 된다. 이 설명은 양의 실수 길이라는 조건을 사용한다. 조건을 말하지 않으면 어떤 범위에서 결론이 성립하는지 흐려진다.

불가능한 문제를 찾아내는 능력도 계산 능력의 일부다. 공식을 반복 적용하다 음수의 제곱근이 나오면 먼저 자료의 조건을 다시 읽는다. 숫자의 전사 오류인지 의도적인 불가능 문제인지 또는 다른 대상을 다루는지 살펴볼 수 있다.



탐구

두 변의 합이 18일 때 가능한 최대 넓이와 그때의 두 변은 무엇인가?

풀이와 확인

가운데 값은 9이며 최대 넓이는 81이다. 두 변이 모두 9일 때 그 값을 얻는다. 넓이 82라는 조건은 양의 실수 변으로 만들 수 없다.

[O6] 스톨니브룩대학교 바빌로니아의 직사각형과 방정식

같은 문제를 비율로 줄이기

크기를 바꾸어도 유지되는 구조를 이용하면 계산이 단순해진다.

두 변의 합이 70이고 넓이가 1125인 직사각형을 생각하자. 모든 길이를 5로 나누면 새 두 변의 합은 14가 되고 넓이는 25로 나누어 45가 된다. 앞에서 푼 작은 문제로 바뀌었으므로 새 길이는 9와 5다.

원래 길이는 각각 5배인 45와 25다. 합은 70이며 곱은 1125다. 길이를 5로 나누면서 넓이도 5로만 나누면 다른 문제를 만들게 된다. 길이의 배율과 넓이의 배율을 구별하는 것이 축소 계산의 핵심이다.

이 방법은 원문에 적힌 특정 절차라고 주장하는 대신 현대의 학습용 변환으로 사용한다. 큰 수의 계산에 가려진 구조를 드러내고 이미 푼 문제와 관계를 찾는 데 유용하다. 도면의 축척을 읽을 때에도 같은 생각이 적용된다.

대상	큰 도형	축소 도형
길이 합	70	14
넓이	1125	45
두 변	45와 25	9와 5

길이를 5로 나누면 넓이는 25로 나눈다.

탐구

길이를 모두 3배로 한 직사각형의 넓이가 540이라면 원래 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

넓이는 9배가 되었으므로 $540 \div 9 = 60$ 이다. 길이 배율 3을 넓이에 그대로 적용해 180이라 하면 틀린다.

[O6] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

풀이의 문장을 재구성하기

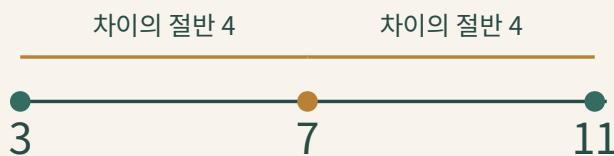
계산 지시를 읽을 때 생략된 대상을 다시 써 보면 논리가 드러난다.

반으로 하라. 제공하라. 더하라. 뿌리를 구하라라는 짧은 지시만 있으면 무엇을 반으로 하는지 알기 어렵다. 길이의 차이를 반으로 하고 그 결과를 제공한 뒤 넓이에 더한다고 대상을 붙이면 계산의 흐름이 명확해진다.

차이 8과 넓이 33을 예로 들면 반차는 4다. 제공 16을 넓이에 더하면 49다. 제곱근 7은 두 변의 가운데 값이다. 마지막에 4를 더하고 빼면 11과 3이 된다. 각 중간값에 이름을 붙이면 서로 다른 양을 바꾸어 쓰는 실수를 줄인다.

번역에서도 같은 태도가 필요하다. 원문의 간결한 지시를 풀어 설명하는 것은 유용하지만 설명자가 덧붙인 내용을 원문 그대로라고 제시해서는 안 된다. 번역문과 해설문을 분리하면 독자는 자료와 해석을 각각 살펴볼 수 있다.

가운데 길이 7



$$7^2 - 4^2 = 49 - 16 = 33$$

두 길이 3과 11은 가운데 7에서 각각 4만큼 떨어져 있다. 곱 33은 가운데 제공에서 반차의 제곱을 뺀 값이다.

탐구

위 풀이에서 49는 길이인가 넓이인가? 7은 무엇을 뜻하는가?

풀이와 확인

49는 가운데 길이를 한 번으로 하는 정사각형의 넓이다. 7은 두 변 11과 3의 가운데 길이다. 단위를 적으면 두 중간값의 역할이 더 분명해진다.

[O6] 스톨니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

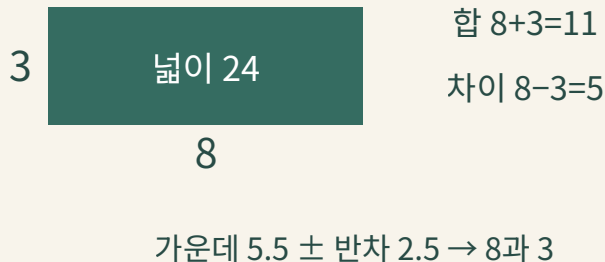
조건을 스스로 만드는 연습

답부터 정해 문제를 만들면 조건 사이의 관계를 깊이 이해할 수 있다.

길이 8과 3을 먼저 골라 보자. 합은 11이며 차이는 5이고 넓이는 24다. 이제 합과 넓이만 알려 주는 문제 또는 차이와 넓이만 알려 주는 문제를 만들 수 있다. 두 문제는 겉모습이 다르지만 같은 직사각형을 가리킨다.

답이 정수가 되도록 문제를 만드는 활동은 교육용 표의 수들이 왜 계산하기 좋은지 생각하게 한다. 다만 오늘 우리가 문제를 만들 수 있다는 사실이 특정 점토판도 정확히 같은 절차로 작성되었다는 증거는 아니다. 가능성과 역사적 확인을 나누어 적는다.

친구에게 조건만 건네고 풀이를 받아 보자. 다른 두 변이 나왔다면 합과 곱을 비교해 어떤 조건을 놓쳤는지 찾는다. 정답을 맞히는 것에 더해 조건을 설계하고 검증하는 활동까지 하면 문제의 구조가 더 선명해진다.



8과 3으로 만든 직사각형은 합 11과 차이 5와 넓이 24를 동시에 만족한다.

탐구

두 변 12와 7로 차이와 넓이를 주는 문제를 만들고 가운데 값을 구하자.

풀이와 확인

차이는 5이고 넓이는 84다. 반차 2.5의 제곱 6.25를 더하면 90.25이며 제곱근은 9.5다. 여기서 2.5를 더하고 빼면 12와 7을 되찾는다.

[O6] 스톨니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

고대 오리엔트관 / 07

정사각형 대각선의 정밀도

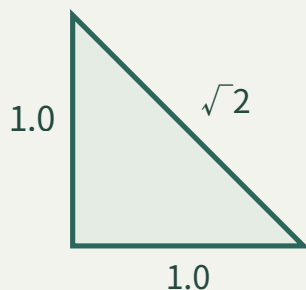
YBC 7289를 읽는 출발점

정사각형과 그 위의 수들은 도형과 계산이 만나는 작은 기록이다.

YBC 7289는 예일 바빌로니아 컬렉션의 점토판이다. 정사각형 그림과 대각선에 관련된 수가 남아 있어 제곱근 2의 근삿값을 설명할 때 자주 소개된다. 이 책의 깨끗한 선 그림은 유물 사진이 아니라 읽기 쉽도록 다시 그린 학습 도해다.

핵심 수를 현대의 60진 표기로 $1;24:51:10$ 이라 적는다. 이는 $1+24/60+51/3600+10/216000$ 이다. 십진법으로 약 1.41421296이 되어 제곱근 2에 매우 가깝다. 자리를 하나씩 풀어 쓰면 낮선 기호 뒤의 값이 보인다.

정밀한 값이 적혀 있다는 사실과 그 값을 처음 계산한 절차가 무엇인지는 별개의 질문이다. 그림 자체에 모든 계산 과정이 기록된 것은 아니다. 이어지는 평균 반복법은 정밀한 근삿값을 만드는 원리를 이해하도록 현대적으로 재구성한 활동이다.



한 변 1인 정사각형을 대각선으로 나눈 현대 학습 도해.

탐구

1;24까지만 읽으면 값은 얼마인가? 제곱근 2보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

$1+24/60=1.4$ 다. $1.4^2=1.96$ 으로 2보다 작으므로 양의 제곱근 2보다 작다. 뒤의 자리들이 이 부족한 값을 보충한다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독 / [O15] 제곱근 2의 근삿값이 계산된 방법에 관한 연구

세 자리 분수의 크기

작아 보이는 마지막 자리는 전체 오차를 크게 줄일 수 있다.

1;24:51:10에서 분수 자리는 각각 $24/60$ 과 $51/3600$ 과 $10/216000$ 이다. 첫 항은 0.4이고 둘째 항은 약 0.0141667이다. 마지막 항은 약 0.0000463이다. 자리가 오른쪽으로 갈수록 기준 단위가 60분의 1로 작아진다.

앞의 세 부분만 합한 1;24:51은 약 1.4141667이다. 마지막 부분까지 넣으면 약 1.41421296이 된다. 두 값의 차이는 작지만 제곱근 2와의 거리에서는 큰 개선이다. 정밀도는 눈에 보이는 자릿수의 길이보다 목표값과의 차이로 평가한다.

유효숫자를 설명할 때 근삿값과 정확한 값을 같은 등호로 연결하지 않는다. 분수로 전개한 수는 해당 60진 표기와 정확히 같지만 제곱근 2와는 근사 관계다. 기호 하나가 계산의 성격을 드러내므로 $\approx$ 와 $=$ 를 구분해서 쓴다.

정수

첫 자리

둘째 자리

셋째 자리

1

$24/60$

$51/3600$

$10/216000$

1;24:51:10을 네 부분의 합으로 읽는다.

탐구

마지막 분수 자리가 1만큼 바뀌면 전체 값은 얼마만큼 바뀌는가?

풀이와 확인

$1/216000$ 만큼 바뀐다. 십진법으로 약 0.00000462963이다. 마지막 자리가 10인 항은 이 단위 열 개를 더한 값이다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

한 변 30의 대각선

비율을 알고 있으면 같은 모양의 모든 크기에 적용할 수 있다.

한 변이 1인 정사각형의 대각선 길이는 제곱근 2다. 한 변을 30으로 키우면 대각선도 30배가 된다. 따라서 근삿값 1;24:51:10에 30을 곱하면 42;25:35를 얻는다. 이 두 수의 연결이 점토판의 수를 읽는 중요한 단서다.

십진 분수로 직접 확인할 수 있다. $30 \times 1 = 30$ 이며 $30 \times 24/60 = 12$ 다. 나머지 두 항은 $1530/3600$ 과 $300/216000$ 이다. 모두 합하면 약 42.4263889이며 $42 + 25/60 + 35/3600$ 과 일치한다.

대각선과 변의 비율이 일정한 까닭은 정사각형들이 서로 닮았기 때문이다. 크기를 바꾸어도 각도와 변의 비는 유지된다. 여기서 30은 길이의 값이며 근삿값 1.41421296은 단위가 없는 비율이라는 점도 함께 읽는다.

$$30 \times 1;24:51:10 = 42;25:35$$

$$42;25:35 \approx 42.4263889$$

유한 소수 근삿값에는 $\approx$ 를 쓴다.

점토판의 두 수를 연결하는 30배 계산.

탐구

한 변이 60인 정사각형에서 같은 근삿값을 사용한 대각선은 60진법으로 얼마인가?

풀이와 확인

30일 때 값의 두 배이므로 84;51:10이다. 정수 부분 84를 60진 자리로 다시 쓰면 1:24:51:10으로 나타낼 수 있다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

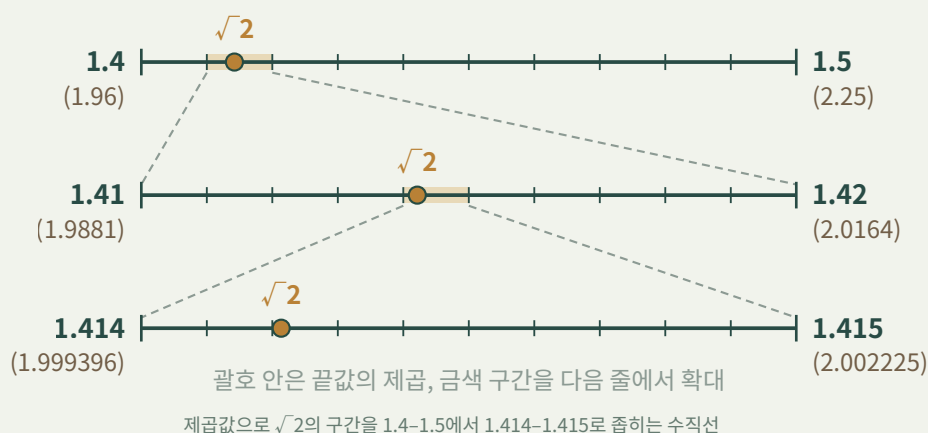
사이에서 제곱근 찾기

제곱을 비교하면 정답을 몰라도 근삿값의 범위를 좁힐 수 있다.

$1.4^2=1.96$ 이고 $1.5^2=2.25$ 이므로 제곱근 2는 1.4와 1.5 사이에 있다. 다시 $1.41^2=1.9881$ 과 $1.42^2=2.0164$ 를 계산하면 범위를 1.41과 1.42 사이로 좁힐 수 있다. 양수의 제곱이 크기 순서를 유지한다는 성질을 이용한다.

다음에는 $1.414^2=1.999396$ 과 $1.415^2=2.002225$ 를 비교한다. 범위가 더 작아진다. 이렇게 간격을 나누며 시험하는 방법은 이해하기 쉽지만 원하는 자릿수가 늘어날수록 계산 횟수도 많아진다. 이어지는 설명에서는 더 빠르게 중심으로 접근하는 방법을 살펴본다.

이 활동은 옛 필자가 실제로 이렇게 자리별 탐색을 했다고 주장하는 재현이 아니다. 역사 자료의 근삿값이 얼마나 좋은지 독자가 직접 판단할 수 있게 하는 현대의 검산이다. 계산 과정의 출처와 교육적 목적을 분명히 구분한다.



탐구

$1.73^2=2.9929$ 이고 $1.74^2=3.0276$ 이라면 제곱근 3의 범위는 어디인가?

풀이와 확인

양의 제곱근 3은 1.73보다 크고 1.74보다 작다. 두 제곱값이 3을 사이에 두고 있기 때문이다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

평균으로 균형 잡기

넓이가 일정한 직사각형을 정사각형에 가깝게 바꾸어 본다.

넓이 2인 직사각형의 한 변을 1.5로 잡으면 다른 변은 $2 \div 1.5 = 4/3$ 이다. 두 길이는 각각 제곱근 2보다 크고 작다. 두 변의 평균을 새 추정값으로 택하면 $(3/2 + 4/3)/2 = 17/12$ 가 된다.

$17/12$ 는 약 1.4166667이므로 처음 1.5보다 제곱근 2에 가깝다. 이 새 값과 2를 이 값으로 나눈 값을 다시 평균하면 $577/408$ 을 얻는다. 같은 원리를 반복하면서 두 변의 차이를 줄이는 것이다. 나눗셈과 평균만으로 근삿값이 빠르게 개선된다.

평균 반복은 제곱근을 구하는 유용한 방법이다. 여기의 분수 전개는 현대의 설명이며 YBC 7289에 이 모든 단계가 쓰여 있는 것은 아니다. 특정 결과를 재현하는 알고리즘과 특정 유물의 실제 제작 과정을 동일시하지 않는다.

$$(3/2 + 4/3) / 2 = 17/12$$

$$(17/12 + 24/17) / 2 = 577/408$$

평균 반복으로 제곱근 2에 접근하는 현대 재구성.

탐구

제곱근 9를 찾으며 추정값을 4로 잡으면 평균 반복의 다음 값은 얼마인가?

풀이와 확인

다른 변은 $9/4$ 다. 평균은 $(4 + 9/4)/2 = 25/8 = 3.125$ 다. 처음 추정값 4보다 실제 제곱근 3에 가깝다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

제공의 오차와 길이의 오차

넓이에서 보이는 차이를 길이의 차이로 그대로 읽지 않는다.

근삿값 x 가 제곱근 2보다 크면 x^2-2 는 넓이의 초과량이다. 길이의 오차는 $x-\sqrt{2}$ 다. 두 양은 같지 않다. 곱의 차이 공식을 쓰면 $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$ 이므로 넓이 오차는 길이 오차에 두 길이의 합을 곱한 값이다.

예를 들어 $x=1.42$ 이면 제공의 오차는 0.0164다. 길이의 오차는 약 0.005786으로 더 작다. 도형에서 가느다란 띠의 넓이는 폭뿐 아니라 길이에도 영향을 받는다는 점을 떠올리면 두 오차가 다른 이유를 이해할 수 있다.

정확도를 말할 때 무엇의 오차인지 명시해야 한다. 수의 차이를 제시하는 절대 오차와 기준 값에 대한 비율을 제시하는 상대 오차도 서로 다르다. 작은 오차라는 표현만 쓰기보다 비교 대상과 단위를 함께 적는 습관이 필요하다.

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

넓이 오차 $\neq$ 길이 오차

두 종류의 오차는 단위와 값이 다르다.

탐구

근삿값 1.4의 제공 오차는 어느 방향으로 얼마인가?

풀이와 확인

$1.4^2=1.96$ 이므로 2보다 0.04만큼 작다. 이는 넓이의 부족량이다. 길이 부족량이 0.04라는 뜻은 아니다.

[07] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

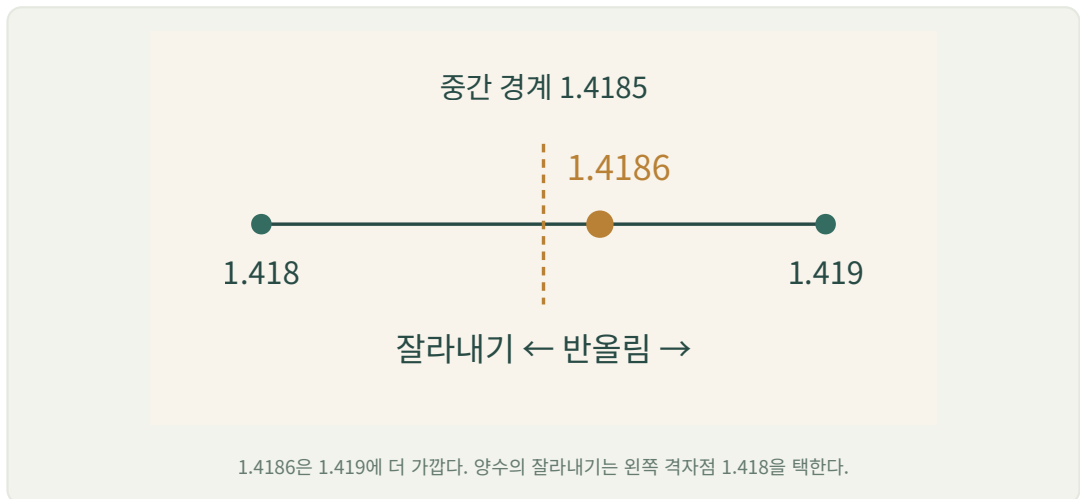
반올림과 잘라내기의 차이

마지막 자리를 정하는 규칙이 근삿값의 방향을 바꾼다.

십진 근삿값 1.41421356을 소수 셋째 자리까지 나타내자. 잘라내면 1.414다. 넷째 자리가 2이므로 반올림해도 이번에는 1.414다. 그러나 소수 둘째 자리까지 나타낼 때도 1.41인 반면 다른 수에서는 두 방식의 결과가 달라질 수 있다.

1.4186을 셋째 자리에서 잘라내면 1.418이고 반올림하면 1.419다. 반올림은 가장 가까운 격자점을 선택하는 규칙이며 잘라내기는 양수에서 항상 원래 값 이하를 만든다. 옛 표의 끝자리만 보고 사용한 반올림 관행을 단정하지 않는다.

60진법에도 같은 문제가 있다. 마지막으로 남길 자리 다음 값이 30 이상이면 올리는 현대 규칙을 쓸 수 있다. 기준이 10이 아니라 60이므로 절반은 5가 아니라 30이다. 먼저 표기 체계를 정한 다음 정밀도 규칙을 적용한다.



탐구

0;12:40을 분수 첫 자리까지 현대식으로 반올림하면 얼마인가?

풀이와 확인

다음 자리 40이 30 이상이므로 0;13이 된다. 잘라내면 0;12다. 두 결과의 차이는 1/60이다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

평균 반복이 위쪽 경계를 만드는 이유

빠른 계산 절차의 뒤에 있는 오차 관계를 직접 전개한다.

양수 A 의 제곱근을 찾기 위해 양의 추정값 x 를 고른다. 다음 추정값을 $y=(x+A/x)/2$ 로 정한다. 앞에서는 작은 수로 계산을 따라 했다. 이제 어떤 양의 x 에서 시작해도 y 가 제곱근 아래로 내려가지 않는 이유를 살핀다.

y^2-A 를 통분하면 $(x^2+2A+A^2/x^2-4A)/4$ 가 된다. 이는 $(x-A/x)^2/4$ 와 같다. 제곱은 음수가 아니므로 $y^2 \geq A$ 다. y 도 양수이므로 $y \geq \sqrt{A}$ 가 된다. 처음 x 가 작았어도 한 차례 평균 뒤에는 위쪽 경계가 만들어진다.

새 추정값 y 가 위쪽 경계이면 A/y 는 아래쪽 경계다. 둘의 곱이 A 이기 때문이다. 따라서 $A/y \leq \sqrt{A} \leq y$ 라는 검증 가능한 구간을 얻는다. y 를 다시 평균하면 같은 방식으로 더 좁은 구간을 만들 수 있다. 단 반올림을 섞을 때에는 경계 방향을 보존하도록 따로 검사해야 한다.

$A=2$ 와 $x=3/2$ 에서는 $y=17/12$ 이며 아래쪽 값은 $24/17$ 이다. 위쪽 값의 제곱과 2의 차이는 $1/144$ 다. 이 증명은 현대 대수로 계산의 성능을 설명하며 YBC 7289의 필자가 같은 문자 논증을 기록했다는 뜻은 아니다. 결과의 검산과 역사적 절차의 확인을 끝까지 나누어 읽는다.

단계	아래쪽 경계	위쪽 경계
첫 평균 뒤	24/17	17/12
둘째 평균 뒤	816/577	577/408

탐구

$A=9$ 와 $x=4$ 를 사용한 첫 평균값과 그에 따른 아래쪽 경계를 구하라.

풀이와 확인

평균값은 $25/8$ 이다. 아래쪽 값은 $9 \div (25/8) = 72/25$ 다. 따라서 $72/25 \leq 3 \leq 25/8$ 이다. 소수로는 $2.88 \leq 3 \leq 3.125$ 가 되어 양쪽에서 제곱근을 감싼다.

[07] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

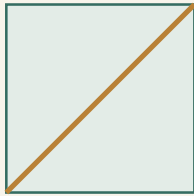
유물 한 점에서 질문 넓히기

하나의 뛰어난 계산을 문명 전체의 순위로 바꾸지 않는다.

YBC 7289의 수를 읽으며 정밀한 계산의 힘을 볼 수 있다. 하지만 이 유물 한 점만으로 모든 사람이 같은 정확도로 계산했다거나 모든 분야가 동일한 수준이었다고 결론 내리기는 어렵다. 남은 자료는 전체 활동의 일부이며 보존과 수집의 영향을 받는다.

이 관의 활동에서는 수의 전개와 곱셈과 오차를 직접 검산했다. 이런 확인은 유물의 중요성을 더 구체적으로 설명하게 한다. 아주 발전했다는 막연한 평가 대신 어느 값이 얼마나 정확하고 어떤 관계를 보여 주는지 말할 수 있다.

나만의 전시 라벨을 쓴다면 대상의 이름과 관찰 가능한 수와 현대적 검산을 차례로 담아 보자. 마지막에는 계산 절차의 복원에 한계가 있다는 문장을 넣는다. 흥미와 신중함은 함께 있을 수 있으며 오히려 서로를 보완한다.



변 1

1;24:51:10

≈ 1.414212963

$\sqrt{2} \approx 1.414213562$

차이의 크기 ≈ 0.000000599

YBC 7289의 대표 근삿값과 제곱근 2를 현대 십진 표기로 비교했다. 오차는 약 0.000000599다.

탐구

유물 설명에서 직접 계산으로 확인할 수 있는 주장 하나와 추가 자료가 필요한 주장 하나를 골라 보자.

풀이와 확인

적힌 수가 제곱근 2에 가깝다는 주장은 검산할 수 있다. 필자가 어떤 알고리즘으로 그 수를 처음 얻었는지는 다른 문헌과 연구가 필요하다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

고대 오리엔트관 / 08

플림프턴 322와 직각삼각형

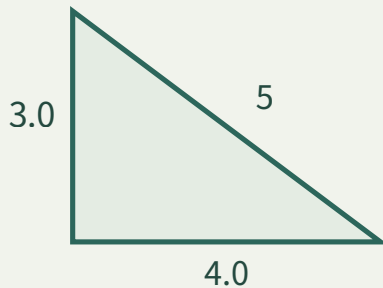
표가 남긴 수의 관계

플림프턴 322는 유명한 결론보다 먼저 표 자체를 살펴보게 한다.

컬럼비아대학교가 소장한 플림프턴 322에는 여러 행과 열의 수가 남아 있다. 이 수들이 직각삼각형의 변 관계와 연결된다는 점은 수학사에서 잘 알려져 있다. 다만 표의 원래 목적과 작성 방법에 대해서는 서로 다른 해석이 제시되어 왔다.

이 관에서는 실제 표의 모든 숫자를 복원하는 대신 작은 정수 삼각형을 통해 관련 원리를 익힌다. 3과 4와 5는 $3^2+4^2=5^2$ 를 만족한다. 이 관계는 삼각형을 그린 뒤 길이를 재는 것보다 정확한 수의 검산을 가능하게 한다.

표를 세계 최초의 삼각함수표라고 단정하는 소개는 논쟁을 감춘다. 교육용 계산표와 직각삼각형 문제와 관련된 해석도 검토해야 한다. 확실한 수의 관계와 자료의 목적에 관한 가설을 나누어 읽는 태도가 중요하다.



3과 4와 5의 제곱 관계를 보여 주는 학습 삼각형.

탐구

3과 4와 5가 직각삼각형의 변이 될 수 있는지 계산으로 확인하자.

풀이와 확인

$3^2+4^2=9+16=25$ 이며 $5^2=25$ 다. 가장 긴 변을 빗변으로 두면 직각삼각형의 변 관계를 만족한다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

피타고라스 수라는 오늘의 이름

이름이 붙은 시대와 관계가 알려진 시대는 반드시 같지 않다.

양의 정수 a 와 b 와 c 가 $a^2+b^2=c^2$ 를 만족하면 오늘날 피타고라스 수라고 부른다. 이 용어는 현대 독자가 관계를 알아보기 위한 이름이다. 고바빌로니아 자료를 이 이름으로 설명하더라도 해당 관계가 그리스에서만 존재했다는 뜻은 아니다.

5와 12와 13을 계산하면 $25+144=169$ 다. 8과 15와 17에서는 $64+225=289$ 다. 모두 같은 제곱 관계를 만족하지만 두 짧은 변의 비율은 다르다. 숫자의 크기보다 비율을 살펴보면 서로 다른 삼각형 모양이 보인다.

기호와 이름은 비교를 돕지만 원자료의 언어를 덮지 않도록 주의한다. 옛 문서가 변과 대각선 또는 직사각형을 어떤 말로 다루었는지 별도로 읽어야 한다. 현대 용어는 안내 표지이며 원문의 정확한 번역을 대신하지 않는다.



$5^2+12^2=13^2$ 을 만족하는 다른 정수 삼각형.

탐구

7과 24와 25도 같은 관계를 만족하는가?

풀이와 확인

$7^2+24^2=49+576=625$ 이며 $25^2=625$ 다. 따라서 같은 유형의 정수 삼각형을 만든다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

이어 읽기 / 플림프턴 322와 직각삼각형

네 삼각형으로 확인하는 직각 관계

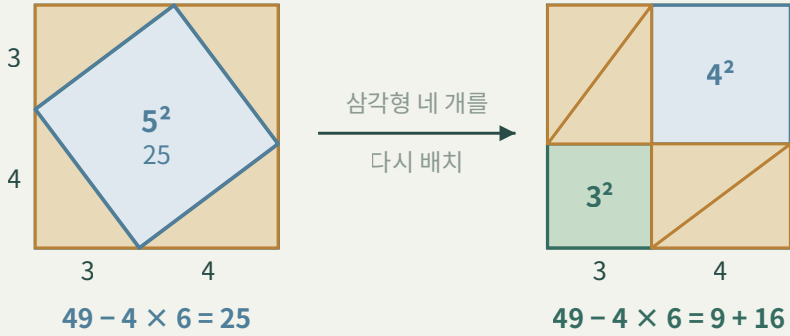
같은 정사각형 안에서 삼각형 네 개를 옮기면 $3^2+4^2=5^2$ 이 넓이의 관계로 드러난다.

7장은 3과 4와 5에서 $9+16=25$ 가 성립함을 수로 확인하고 그 배수와 생성 공식을 다루었다. 그러나 두 짧은 변의 제곱을 더하면 왜 빗변의 제곱이 되는지는 계산 결과로만 받아들였다. 여기서는 한 변 7인 정사각형 두 개를 이용한 현대 학습용 증명으로 그 관계를 넓이로 보여 준다. 이 증명은 오늘날의 설명 방식이며 플림프턴 322의 필자가 이런 그림을 썼다는 뜻은 아니다.

왼쪽 정사각형의 네 모서리에 짧은 변이 3과 4인 직각삼각형을 하나씩 놓는다. 각 변 위에서 3과 4가 차례로 이어지므로 한 변은 7이 되고 가운데에는 네 빗변으로 둘러싸인 기울어진 사각형이 남는다. 삼각형의 두 예각을 합하면 직각이므로 이 사각형의 네 각도 모두 직각이고 네 변은 모두 5다. 따라서 가운데는 넓이 25인 정사각형이며 전체 49에서 삼각형 네 개의 넓이 24를 뺀 값과도 일치한다.

오른쪽 정사각형에서는 같은 삼각형 네 개를 두 쌍으로 묶어 3×4 직사각형 두 개를 만든다. 두 직사각형을 서로 마주 보는 모서리에 놓으면 남는 자리는 한 변 3인 정사각형과 한 변 4인 정사각형이다. 두 그림은 같은 49에서 같은 24를 뺐으므로 남은 넓이도 같다. 따라서 $9+16=25$ 가 수의 계산이 아니라 넓이의 이동으로 확인된다.

짧은 변을 a 와 b 로 바꾸어도 논증은 그대로다. 한 변 $a+b$ 인 정사각형에서 삼각형 네 개의 넓이 $2ab$ 를 빼면 한쪽 배치에서는 c^2 이 남고 다른 쪽 배치에서는 a^2+b^2 이 남는다. 배수 삼각형 6과 8과 10을 넣으면 한 변 14인 정사각형에서 같은 그림이 네 배의 넓이로 다시 나타난다. 수표의 검산과 그림의 증명은 서로 다른 종류의 확인이므로 함께 놓고 읽으면 좋다.



한 변 7인 정사각형에서 삼각형 네 개를 옮겨 $25 = 9 + 16$ 확인

탐구

짧은 변이 5와 12인 직각삼각형으로 같은 그림을 그리면 큰 정사각형과 가운데 정사각형의 넓이는 각각 얼마인가?

풀이와 확인

큰 정사각형의 한 변은 17이므로 넓이는 289다. 삼각형 하나의 넓이는 30이고 네 개는 120이다. $289 - 120 = 169 = 13^2$ 이며 오른쪽 배치에서도 $25 + 144 = 169$ 로 같은 값을 확인한다.

[09] 스톨니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

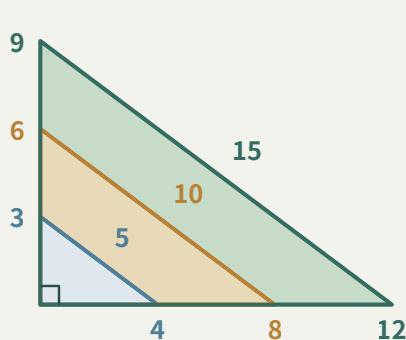
배수를 만들어도 모양은 같다

변을 같은 비율로 늘리면 직각 관계와 각도가 유지된다.

3과 4와 5를 모두 두 배로 하면 6과 8과 10이다. 제곱의 합은 $36+64=100$ 이므로 직각 관계가 유지된다. 모든 길이에 k 를 곱하면 식의 양쪽에 k^2 이 곱해지기 때문에 같은 관계가 성립한다.

그러나 6과 8과 10은 새로운 비율의 삼각형이 아니다. 각 변을 최대공약수 2로 나누면 원래 3과 4와 5를 얻는다. 공통 인수가 없는 정수 삼각형과 그 배수들을 구별하면 표에 어떤 모양이 포함되어 있는지 비교하기 편하다.

같은 모양이라도 실제 길이와 넓이는 다르다. 길이가 두 배이면 넓이는 네 배다. 지도에서 같은 각도를 유지한 채 크기를 바꾸는 확대와 닮은 도형의 관계가 정수 삼각형에서도 나타난다. 이 활동은 표의 구조를 이해하기 위한 현대의 분류다.



배율	세 변	넓이
$\times 1$	3, 4, 5	6
$\times 2$	6, 8, 10	24
$\times 3$	9, 12, 15	54

빗변은 모두 평행, 넓이는 1 : 4 : 9

3, 4, 5 삼각형을 2배와 3배로 늘려 직각을 공유하도록 겹친 그림

탐구

9와 12와 15를 가장 작은 정수 비율로 줄여 보자.

풀이와 확인

세 수의 최대공약수는 3이다. 모두 3으로 나누면 3과 4와 5가 된다. 길이 비율이 같으므로 두 삼각형은 닮았다.

[O8] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [O9] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

두 수로 세 변 만들기

제곱의 차이와 두 배의 곱을 묶으면 직각 관계가 나타난다.

$m > n > 0$ 인 두 정수를 골라 $a=m^2-n^2$ 와 $b=2mn$ 과 $c=m^2+n^2$ 를 만든다. $m=3$ 과 $n=2$ 를 쓰면 세 수는 5와 12와 13이다. 숫자를 임의로 세 개 고르는 대신 관계가 성립하도록 만드는 현대적 생성 공식이다.

왜 가능한지 식을 펼쳐 보자. $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$ 에서 가운데 항 $-2m^2n^2$ 와 $4m^2n^2$ 가 합쳐져 $2m^2n^2$ 이 된다. 전체는 $m^4+2m^2n^2+n^4$ 로 $(m^2+n^2)^2$ 과 같다. 계산 과정 자체가 직각 관계를 보장한다.

이 공식으로 표와 관련된 정수쌍을 만들 수 있다고 해서 옛 필자가 그대로 사용했다고 단정할 수는 없다. 실제 표의 순서와 표기와 계산에 사용한 수를 함께 설명하는지 비교해야 한다. 수학적 가능성은 역사적 입증의 한 부분이다.

$$\begin{aligned} m &= 3 \quad n = 2 \\ m^2 - n^2 &= 5 \\ 2mn &= 12 \quad m^2 + n^2 = 13 \end{aligned}$$

두 매개수에서 정수 세 변을 만드는 현대 공식.

탐구

$m=4$ 와 $n=1$ 을 넣어 세 변을 만들고 검산하자.

풀이와 확인

세 수는 15와 8과 17이다. $225+64=289$ 이며 17^2 과 같다. 짧은 두 변의 순서는 바뀌어도 같은 삼각형이다.

[O8] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [O9] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

역수쌍으로 보는 다른 경로

같은 관계를 만드는 방법이 하나뿐이라는 생각에서 벗어난다.

1보다 큰 수 t 와 그 역수 $1/t$ 를 생각하자. 두 수의 반합을 $c=(t+1/t)/2$ 로 두고 반차를 $a=(t-1/t)/2$ 로 두면 $c^2-a^2=1$ 이다. 따라서 $a^2+1=c^2$ 라는 직각 관계를 얻는다. 역수표의 계산과 삼각형이 만나는 지점이다.

$t=2$ 이면 반합은 $5/4$ 이며 반차는 $3/4$ 다. 따라서 $3/4$ 와 1 과 $5/4$ 가 한 삼각형의 세 변이다. 모두 4배하면 익숙한 3 과 4 와 5 가 된다. 정수 생성 공식과 다른 모습으로 같은 결과를 얻는다.

60진법에서 역수가 유한하게 끝나는 수를 쓰면 중간 계산도 다루기 쉽다. 이것은 플림프턴 322를 이해하려는 여러 연구에서 주목하는 관계다. 이 책의 작은 예제는 원리 설명이며 실제 표의 모든 행을 그대로 재현한 목록은 아니다. $t=1$ 이면 반차가 0 이 되어 삼각형이 납작해진다. $0<t<1$ 을 사용할 때에는 반차의 절댓값을 변의 길이로 삼아야 한다.

$$\begin{aligned} t &= 2 \quad 1/t = 1/2 \\ \text{반차} &= 3/4 \quad \text{반합} = 5/4 \\ (3/4)^2 + 1 &= (5/4)^2 \end{aligned}$$

역수쌍의 반합과 반차를 이용한 관계.

탐구

$t=3$ 에서 반합과 반차를 구하고 정수 세 변으로 바꾸자.

풀이와 확인

반합은 $5/3$ 이고 반차는 $4/3$ 이다. $4/3$ 과 1 과 $5/3$ 을 모두 3배하면 4 와 3 과 5 가 된다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

비율의 제곱을 읽기

표의 값이 길이인지 비율인지 비율의 제곱인지 구별한다.

3과 4와 5인 삼각형에서 빗변이 아닌 변 4를 기준으로 하면 빗변 비율은 $5/4$ 다. 그 제곱은 $25/16$ 이며 다른 변 비율의 제곱 $9/16$ 보다 정확히 1만큼 크다. 길이 세 개가 하나의 기준으로 나누어지면 비율 관계로 바뀐다.

기준을 3으로 바꾸면 빗변 비율은 $5/3$ 이고 제곱은 $25/9$ 다. 같은 삼각형도 어떤 변을 기준으로 잡느냐에 따라 표에 적힐 숫자가 달라진다. 제목과 열의 의미를 먼저 읽어야 숫자 배열을 올바르게 비교할 수 있다.

소수로 바꾸면 계산이 익숙해지지만 분수는 정확한 관계를 더 잘 드러낼 때가 있다.

$25/16 - 9/16 = 1$ 은 즉시 확인된다. 전시에서는 원래 표기와 현대 분수와 그림을 연결해 보여 주되 각각이 무엇을 뜻하는지 표시한다.

비율	제곱
$5/4$	$25/16$
$3/4$	$9/16$
제곱의 차이	1

기준 변을 4로 정규화하면 두 제곱 비율의 차이는 1이다.

탐구

5와 12와 13에서 12를 기준으로 한 두 제곱 비율의 차이를 구하자.

풀이와 확인

$13^2/12^2 - 5^2/12^2 = (169 - 25)/144 = 1$ 이다. 두 제곱 비율은 $169/144$ 와 $25/144$ 다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

틀린 한 행을 고쳐 보기

계산 오류를 찾는 것과 원래 표를 복원하는 것은 다른 작업이다.

학습용 표에 8과 15와 18이 적혀 있다고 하자. 짧은 두 변의 제곱 합은 $64+225=289$ 다. 18^2 은 324이므로 직각 관계가 맞지 않는다. 앞의 두 수가 맞다는 가정 아래 빗변은 17이어야 한다.

그러나 실제 손상된 문서에서는 어느 수가 잘못 읽혔는지 먼저 확인해야 한다. 무조건 마지막 수를 고치면 다른 가능성을 놓친다. 기호의 남은 흔적과 표의 다른 행과 제목을 함께 비교해야 복원의 근거가 생긴다.

교정 결과를 제시할 때에는 원래 읽은 값과 고친 값과 수정 이유를 함께 적는다. 독자는 어떤 가정을 받아들이면 그 복원이 성립하는지 확인할 수 있다. 수학적 일관성은 강한 단서지만 유물의 흔적을 대신하지는 않는다.

세 변	짧은 두 변의 제곱 합	빗변의 제곱
8과 15와 18	289	324
20과 21과 29	841	841

탐구

20과 21과 29가 적힌 행은 직각 관계를 만족하는가?

풀이와 확인

$400+441=841$ 이며 $29^2=841$ 이다. 이 행은 관계를 만족한다. 검산이 맞다는 사실만으로 표의 제작 목적까지 확정되는 것은 아니다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

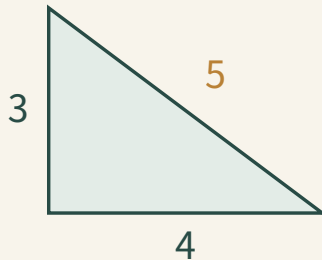
논쟁을 전시하는 방법

서로 다른 해석을 비교할 때에는 각 주장과 그 근거를 연결한다.

어떤 연구는 플림프턴 322를 삼각법의 관점에서 설명하고 다른 연구는 교육용 수표와 계산 관행을 더 중시한다. 독자는 어느 설명이 더 흥미로운지보다 무엇을 설명하고 어떤 가정을 추가하는지 비교해야 한다. 해석의 차이를 숨기지 않는 것이 정확한 안내다.

비교표에는 숫자의 관계와 행의 순서와 제목의 번역과 사용 상황을 구분해 적을 수 있다. 같은 수학적 관계를 인정하면서도 목적의 해석은 달라질 수 있다. 논쟁이 있다는 말이 모든 사실이 불확실하다는 뜻은 아니다.

이 장에서는 작은 정수 예제로 제곱 관계와 닮음과 생성법을 검산했다. 이 부분은 독자가 직접 확인할 수 있다. 실제 유물의 목적에 대해서는 연구사와 언어 자료를 더 읽도록 안내한다. 확실한 계산과 열린 질문이 한 전시 안에 함께 남는다.



$$5^2 - 3^2 = 4^2$$

$$\begin{aligned} 25/16 - 9/16 \\ = 1 \end{aligned}$$

3과 4와 5의 예제에서 제곱 비율의 차는 1이다. 이 검산 자체가 플림프턴 322의 사용 목적을 결정하지는 않는다.

탐구

두 해석이 같은 수 관계를 설명한다면 무엇을 더 비교해야 하는가?

풀이와 확인

표의 제목과 배열과 작성 관행을 얼마나 자연스럽게 설명하는지 비교한다. 추가 가정의 수와 다른 동시대 문헌과의 일치 여부도 중요한 판단 자료다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

이집트의 수와 두 배 계산

기호를 더해서 수를 읽기

십진 묶음을 나타내는 기호는 자리값 표기와 다른 방식으로 작동한다.

고대 이집트의 상형문자 수 표기는 1과 10과 100 같은 크기를 나타내는 기호를 반복해 수를 표현했다. 이 책에서는 기호의 세부 모양을 복제하지 않고 크기별 카드로 원리를 설명한다. 백 카드 두 장과 십 카드 세 장과 일 카드 네 장이면 234다.

십진 묶음을 사용한다는 점은 오늘의 표기와 같지만 위치만으로 값이 바뀌는 자릿수 체계는 아니다. 숫자 2가 백의 자리에 놓여 200이 되는 오늘의 방식과 백 기호를 두 번 쓰는 방식을 구별한다. 같은 수를 적는 방법에도 서로 다른 규칙이 있다.

실제 자료에서는 상형문자와 필기용 서체의 수 표기를 구분해야 한다. 모든 파피루스에 기념비의 그림 문자가 그대로 쓰였다고 상상하지 않는다. 재료와 쓰기 목적과 서체가 함께 달라지므로 표기 체계를 소개할 때 문서의 종류도 밝힌다.

크기	개수	합
100	2	200
10	3	30
1	4	4

상형 수 표기의 묶음 원리를 카드로 바꾼 학습 도해.

탐구

백 카드 세 장과 십 카드 일곱 장과 일 카드 두 장의 합은 얼마인가?

풀이와 확인

$300+70+2=372$ 다. 카드를 놓는 순서보다 각 카드가 나타내는 묶음의 크기와 개수가 중요하다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

아흐메스의 파피루스

린드 파피루스는 계산 절차를 전하는 중요한 문헌이다.

대영박물관의 린드 수학 파피루스는 서기관 아흐메스가 쓴 문헌으로 알려져 있다. 분배와 분수와 도형을 다루는 여러 계산이 남아 있다. 현대에 붙은 이름은 수집가 린드에서 왔으므로 저자의 이름과 문헌의 통칭을 구별해 읽는다.

하나의 문헌을 모든 이집트 수학의 완전한 목록으로 취급해서는 안 된다. 어떤 문제가 선택되어 전해졌는지와 실제로 어떤 수학 활동이 있었는지는 범위가 다르다. 남은 문서의 내용을 꼼꼼히 살피면서 자료의 공백도 인정해야 한다.

이 장의 두 배 표와 분배 예제는 원리를 익히도록 새로 구성했다. 원문 문제를 다루는 경우에는 번호를 따로 밝힌다. 유물 설명과 현대 활동을 구분하면 재미있는 계산을 하면서도 어느 부분이 역사 자료에서 직접 온 것인지 알 수 있다.

문헌의 통칭: 린드

고대 서기관: 아흐메스

새 예제: 학습용 재구성

문헌 이름과 저자와 편집 내용을 구별한다.

탐구

문헌 이름에 붙은 린드와 서기관 아흐메스는 같은 인물인가?

풀이와 확인

아니다. 린드는 문헌의 통칭에 이름이 남은 근대 수집가다. 아흐메스는 문헌을 쓴 고대 서기관으로 알려져 있다.

[O16] 대영박물관 린드 수학 파피루스 소장 기록

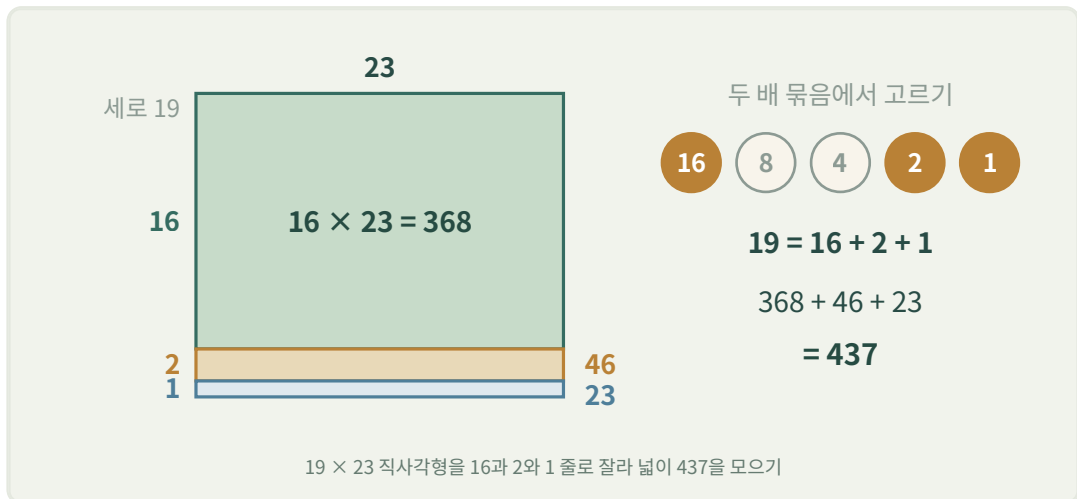
두 배 표로 곱하기

큰 곱셈을 덧셈과 선택의 과정으로 바꾸어 본다.

19×23 을 계산하기 위해 왼쪽에 1과 2와 4와 8과 16을 적는다. 오른쪽에는 23과 46과 92와 184와 368을 적는다. 각 줄은 바로 위 줄의 두 배다. 이제 19를 $16+2+1$ 로 나누어 해당하는 오른쪽 값을 고른다.

선택한 수는 368과 46과 23이다. 합하면 437이므로 $19 \times 23 = 437$ 이다. 19번을 한 번씩 더하는 대신 묶음의 크기를 빠르게 늘린 뒤 필요한 묶음만 합친다. 표를 만드는 과정과 줄을 고르는 과정을 분리하면 계산이 단순해진다.

오늘의 눈으로 보면 이 절차는 수를 2의 거듭제곱의 합으로 나타내는 방식과 연결된다. 그러나 고대 서기관이 현대 컴퓨터의 이진 표기법을 사용했다고 말하는 것은 지나친 연결이다. 같은 수학적 구조와 같은 역사적 개념은 구별해야 한다.



탐구

13×21 을 두 배 표로 계산하면 어떤 줄을 고르는가?

풀이와 확인

$13 = 8 + 4 + 1$ 이므로 168과 84와 21을 고른다. 합은 273이다. 선택하지 않은 2배 줄은 더하지 않는다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

왜 원하는 수를 만들 수 있을까

두 배 묶음은 이전 묶음들의 합보다 하나씩 더 크다.

1과 2와 4와 8을 모두 더하면 15다. 다음 묶음 16은 그보다 1 크다. 0부터 15까지 만들 수 있다면 16을 더해 16부터 31까지도 만들 수 있다. 이런 구조가 반복되므로 두 배 묶음으로 모든 자연수를 표현할 수 있다.

29를 만들 때 가장 큰 16을 먼저 고르면 13이 남는다. 다음 8을 고르면 5가 남고 4를 고르면 1이 남는다. 마지막 1을 고르면 끝난다. 따라서 $29=16+8+4+1$ 이다. 각 묶음은 한 번씩만 사용해도 충분하다.

이 설명은 현대적인 논증으로 계산법의 보편성을 보여 준다. 특정 서기관이 같은 증명을 글로 적었다는 뜻은 아니다. 실제 절차를 익히는 것에 더해 왜 언제나 작동하는지 묻는 활동을 통해 역사와 수학을 함께 탐구할 수 있다.

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$\text{다음 묶음} = 16$$

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1$$

두 배 묶음은 자연수를 빠짐없이 구성할 수 있다.

탐구

1과 2와 4와 8과 16을 모두 사용하면 얼마인가? 다음 묶음은 무엇인가?

풀이와 확인

합은 31이다. 다음 묶음은 32이며 앞의 모든 묶음의 합보다 1 크다. 이 관계가 수를 빠짐없이 만드는 바탕이다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

두 배 표를 거꾸로 읽기

나눗셈에서는 목표량을 만드는 줄을 찾은 뒤 묶음 수를 더한다.

$391 \div 17$ 을 구해 보자. 두 배 표의 오른쪽에는 17과 34와 68과 136과 272가 놓인다. 391은 $272+68+34+17$ 이므로 왼쪽에서 16과 4와 2와 1을 고른다. 합은 23이며 이것이 몫이다.

곱셈에서는 왼쪽 수를 먼저 분해했지만 나눗셈에서는 오른쪽 목표량을 분해했다. 표의 관계는 그대로이며 읽는 방향만 바뀐다. 이런 역방향 읽기는 곱셈과 나눗셈이 서로 연결된 연산임을 보여 준다.

목표량이 정확히 만들어지지 않으면 나머지를 따로 처리한다. 표에서 가까운 값이 나왔다고 그대로 답으로 쓰면 전체 양이 맞지 않는다. 남은 양을 단위분수로 표현하거나 나머지로 보고 할지는 문제의 물건과 분배 규칙에 따라 정한다.

$$391 = 272 + 68 + 34 + 17$$

$$\text{몫} = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$$

나눗셈에서는 목표량을 만드는 오른쪽 줄을 고른다.

탐구

$270 \div 18$ 을 같은 방법으로 풀 때 몫은 얼마인가?

풀이와 확인

$270=144+72+36+18$ 이다. 왼쪽 묶음 수는 $8+4+2+1=15$ 이므로 몫은 15다. $18 \times 15=270$ 으로 검산한다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

이어 읽기 / 이집트의 수와 두 배 계산

두 배로 늘리기와 절반으로 줄이기 비교

왼쪽 수를 절반으로 줄여 가는 현대 계산법이 두 배 표와 같은 줄을 고른다는 것을 확인한다.

8장의 두 배 표는 19를 $16+2+1$ 로 나눈 뒤 해당 줄의 오른쪽 값을 더해 $19 \times 23=437$ 을 얻었다. 오늘날 학습 자료에는 한쪽 수를 절반으로 줄이고 다른 쪽 수를 두 배로 늘리는 계산법도 자주 소개된다. 이 절차는 고대 이집트 문헌의 방법으로 소개하는 것이 아니라 두 배 표의 구조를 다른 방향에서 비교하기 위한 현대 학습용 모형이다. 두 방법이 같은 줄을 고르는 이유를 따라가 본다.

왼쪽에는 19에서 시작해 반으로 나누고 나머지를 버린 9와 4와 2와 1을 적는다. 오른쪽에는 23에서 시작해 46과 92와 184와 368을 적는다. 왼쪽 수가 홀수인 줄만 골라 오른쪽 값을 더 하면 $23+46+368=437$ 이다. 고른 줄은 두 배 표에서 1과 2와 16에 해당하는 줄과 정확히 같다.

이 절차가 맞는 까닭은 각 줄에서 남은 곱과 모은 값의 합이 변하지 않기 때문이다. 19×23 에서 홀수 19는 23 하나를 먼저 모으고 나머지 18×23 을 9×46 으로 바꿀 수 있다. 짝수 4는 $4 \times 92 = 2 \times 184$ 처럼 아무것도 모으지 않고 반으로 줄여도 곱이 같다. 그림 오른쪽 열의 식은 모든 줄에서 437을 유지하며 마지막 줄의 남은 곱 368이 모은 값 69와 합쳐지면서 계산이 끝난다.

두 배 표 방법은 큰 묶음부터 빼 나가며 $16+2+1$ 을 찾고 절반 방법은 홀짝을 차례로 읽어 같은 분해를 작은 묶음부터 찾는다. 앞의 방법에는 뺄셈이 필요하고 뒤의 방법에는 반으로 나누기가 필요하므로 계산 비용의 성격이 다르다. 어느 쪽이든 오른쪽 열은 두 배만 하면 되므로 덧셈 중심의 계산이라는 공통점이 있다. 다만 같은 구조를 공유한다는 사실만으로 한쪽이 다른 쪽에서 나왔다고 말할 수는 없다.

절반 ($\div 2$)	두 배 ($\times 2$)	홀수?	모은 값	남은 곱 + 모은 값
19	23	●	23	$19 \times 23 + 0$
9	46	●	69	$9 \times 46 + 23$
4	92	○	69	$4 \times 92 + 69$
2	184	○	69	$2 \times 184 + 69$
1	368	●	437	$1 \times 368 + 69$

홀수 줄: $23 + 46 + 368 = 437$

모든 줄에서 437

19 × 23을 절반과 두 배로 계산할 때 홀수 줄만 모으는 과정

탐구

13×21을 절반으로 줄이는 방법으로 계산하면 어떤 줄을 고르는가?

풀이와 확인

왼쪽은 13과 6과 3과 1이고 오른쪽은 21과 42와 84와 168이다. 홀수인 13과 3과 1의 줄을 골라 $21+84+168=273$ 을 얻는다. 8장의 두 배 표에서 고른 1과 4와 8의 줄과 같으며 $13 \times 21 = 273$ 으로 확인된다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

절반을 표에 보태기

정수 줄만으로 부족한 양은 절반 줄과 작은 분수 줄로 채울 수 있다.

$95 \div 12$ 를 생각하자. 12의 네 배와 두 배와 한 배를 더하면 84이므로 정수 몫은 7이고 11이 남는다. 12의 절반은 6이며 4분의 1은 3이고 6분의 1은 2다. 이 세 양을 합하면 남은 11을 채운다.

따라서 몫은 $7 + 1/2 + 1/4 + 1/6$ 이다. 분수 합은 공통분모 12에서 $6/12 + 3/12 + 2/12 = 11/12$ 가 된다. 정수 두 배 표에 분수 배수를 덧붙이면 나누어떨어지지 않는 양도 정확하게 표현할 수 있다.

여기의 분해는 학습을 위한 한 가지 선택이다. 같은 분수는 다른 단위분수의 합으로도 나타낼 수 있다. 어떤 표현이 편리한지는 분모의 크기와 항의 개수와 다음 계산에서의 쓰임에 따라 달라진다. 하나만 정답이라고 외우지 않는다.

배수	12의 해당 부분
7	84
$1/2$	6
$1/4$	3
$1/6$	2

$84 + 6 + 3 + 2 = 95$ 이므로 몫은 $7 + 1/2 + 1/4 + 1/6$ 이다.

탐구

12의 $1/3$ 과 $1/4$ 를 더하면 얼마이며 원래 수의 어떤 분수인가?

풀이와 확인

$4 + 3 = 7$ 이다. 따라서 12의 $7/12$ 이며 $1/3 + 1/4 = 7/12$ 라는 관계를 확인할 수 있다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

행 선택의 실수를 찾기

표가 정확해도 잘못된 줄을 고르면 곱셈의 답이 달라진다.

27×14 의 두 배 표에서 27을 $16+8+2+1$ 로 나누어야 한다. 만약 $16+8+4+1$ 을 골랐다면 선택한 묶음 수는 29다. 오른쪽 합도 27×14 가 아니라 29×14 가 되어 실제 답보다 28만큼 커진다.

검산은 표의 각 줄을 확인하는 단계와 고른 줄의 합을 확인하는 단계로 나누면 좋다. 줄 자체가 틀렸는지 선택이 틀렸는지 구별할 수 있기 때문이다. 계산 과정에 표시를 남기면 실수의 위치를 더 쉽게 찾는다.

현대 계산기에서도 비슷한 구분이 필요하다. 연산 장치가 정확하게 작동해도 입력한 수가 잘못되면 결과는 문제의 답이 아니다. 정확한 도구를 사용하는 것과 올바른 조건을 입력하는 것은 함께 갖추어야 할 능력이다.

16	8	2	1	27
16	8	4	1	29

378 → 406

선택 차이 $2 \times 14 =$ 초과 28

27을 만드는 줄에서 2 대신 4를 고르면 합이 29가 된다. 오른쪽 값은 14의 두 배만큼 초과한다.

탐구

27×14 의 정확한 답과 잘못된 29×14 의 답을 구하자.

풀이와 확인

정확한 답은 378이다. 잘못 선택한 표의 합은 406이며 차이는 28이다. 두 묶음을 더 선택한 만큼 14의 두 배가 초과했다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

계산 방식의 비용 비교

어떤 방법이 빠른지는 수의 모양과 이미 가진 표에 따라 달라진다.

31×18 은 두 배 표에서 1과 2와 4와 8과 16의 모든 줄을 더하면 된다. 다른 방법으로는 32×18 에서 18을 빼면 된다. 32배를 이미 구했다면 두 번째 방법이 간단하다. 그러나 작은 표만 있다면 첫 방법이 자연스러울 수 있다.

계산 횟수만 세어 옛 방법의 가치를 판단하지 않는다. 종이와 기억과 표의 이용 가능성이 다르고 실수를 확인하는 방식도 다르다. 중간값을 다시 사용할 수 있는가와 절차를 가르치기 쉬운가도 실용성의 일부다.

두 방법의 결과는 모두 558이다. 독자는 같은 답에 도달한 경로를 비교하며 공통 원리인 분배법칙을 찾을 수 있다. 계산법의 역사는 하나의 최종 방법으로 곧장 가는 이야기가 아니라 다양한 조건에 맞춘 선택의 역사이기도 하다.



32에서 1을 덜어 낸 31

$$31 \times 18 = 32 \times 18 - 18 = 558$$

$1+2+4+8+16$ 과 $32-1$ 은 같은 31이다. 위아래 막대는 같은 단위 길이로 그렸다.

탐구

63×9 를 64배를 이용해 계산해 보자.

풀이와 확인

$64 \times 9 = 576$ 에서 9를 빼면 567이다. $63 = 64 - 1$ 이라는 수의 모양을 활용했다. 두 배 표를 길게 더하는 것과 같은 결과다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

한 조각씩 나누는 분수

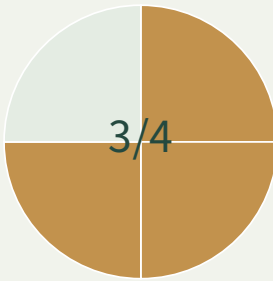
단위분수로 양을 표현하기

분자가 1인 분수들을 더해 여러 크기의 몫을 나타낼 수 있다.

단위분수는 $1/2$ 와 $1/3$ 과 $1/7$ 처럼 분자가 1인 분수다. 고대 이집트의 계산 자료에서는 단위분수의 합이 중요한 역할을 한다. 특별한 표기를 가진 $2/3$ 같은 예외도 있으므로 모든 분수가 반드시 같은 모양이었다고 단정하지 않는다.

오늘의 학습 예제로 $3/4$ 를 $1/2+1/4$ 로 나타내 보자. 한 덩이를 반으로 나눈 조각 하나와 네 등분한 조각 하나를 합하면 전체의 네 조각 중 세 조각이 된다. 같은 양을 다른 조각 구성으로 표현한 것이므로 전체 크기는 바뀌지 않는다.

이 책은 고대 분수 기호의 모양 대신 익숙한 분수선을 사용한다. 표기의 장벽을 낮추되 원리까지 오늘의 방식과 같다고 가정하지 않기 위해서다. 이어지는 설명에서는 서로 다른 분모를 골라 하나의 분수를 여러 방식으로 분해한다.



같은 전체의 $3/4$ 은 $1/2+1/4$ 과 같다.

탐구

$5/6$ 을 서로 다른 두 단위분수의 합으로 나타내 보자.

풀이와 확인

$1/2+1/3$ 이다. 공통분모 6으로 바꾸면 $3/6+2/6=5/6$ 이므로 정확히 같은 양이다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

분모를 맞추면 검산이 보인다

분수 조각의 크기가 다르면 공통된 작은 단위로 바꾸어 더한다.

$1/4$ 와 $1/6$ 을 더할 때 분모끼리 더해 $2/10$ 이라고 하면 안 된다. 두 분수는 서로 다른 크기의 조각이기 때문이다. 전체를 12등분하면 $1/4$ 은 세 조각이고 $1/6$ 은 두 조각이므로 합은 $5/12$ 다.

그림에서는 같은 길이의 띠를 사용해야 한다. 하나는 큰 전체를 네 등분하고 다른 하나는 작은 전체를 여섯 등분했다면 조각을 바로 비교할 수 없다. 분수는 언제나 무엇을 전체 1로 삼았는지와 함께 읽어야 한다.

고대 분수표의 등식을 확인할 때도 같은 원리가 적용된다. 우변의 단위분수를 공통분모로 바꾼 뒤 분자를 더해 좌변과 일치하는지 본다. 표의 역사적 작성법을 몰라도 제시된 관계가 맞는지는 독자가 직접 검산할 수 있다.

$$\begin{aligned} 1/4 &= 3/12 \\ 1/6 &= 2/12 \\ 1/4 + 1/6 &= 5/12 \end{aligned}$$

공통된 작은 조각으로 바꾸어 합한다.

탐구

$1/3 + 1/8$ 의 합을 공통분모로 구하자.

풀이와 확인

24를 공통분모로 쓰면 $8/24 + 3/24 = 11/24$ 다. $1/11$ 이 아니며 분모의 합은 전체를 나눈 공통 단위가 아니다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

두 개의 같은 분수를 바꾸기

같은 단위분수를 반복하지 않는 표현을 찾아 본다.

$2/7$ 은 $1/7$ 을 두 번 더한 양이다. 서로 다른 단위분수로 나타내려면 $1/4+1/28$ 을 쓸 수 있다. 두 분수를 28분의 몇으로 바꾸면 $7/28+1/28=8/28=2/7$ 이다. 서로 다른 분모를 써도 정확한 양을 유지한다.

홀수 n 에 대해 $2/n=1/((n+1)/2)+1/(n(n+1)/2)$ 라는 현대적 항등식을 사용할 수 있다. 첫 항은 $2/(n+1)$ 이고 둘째 항은 $2/(n(n+1))$ 이므로 합하면 $2/n$ 이 된다. 이 식은 몇몇 분해를 한꺼번에 설명하는 학습 도구다.

모든 역사적 분수표가 이 식 하나로 작성되었다고 볼 수는 없다. 실제 표에는 다른 기준을 따르는 분해도 있다. 하나의 일반 공식이 성립한다는 사실과 실제 계산자가 어떤 선택을 했는지에 관한 질문은 분리해서 다룬다.

$$2/7 = 8/28$$

$$1/4 + 1/28 = 7/28 + 1/28$$

서로 다른 단위분수로 바꾼 $2/7$.

탐구

위 식을 $n=9$ 에 적용해 $2/9$ 를 분해하자.

풀이와 확인

$1/5+1/45$ 다. $9/45+1/45=10/45=2/9$ 이다. 다른 분해 $1/6+1/18$ 도 가능하므로 표현은 하나만 있는 것이 아니다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

같은 양을 여러 길로 나누기

분수의 값은 같아도 조각의 개수와 크기는 달라질 수 있다.

$\frac{2}{3}$ 은 $\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$ 으로 나타낼 수 있다. 또 $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$ 로도 나타낼 수 있다. 첫 표현은 두 조각이고 둘째 표현은 세 조각이다. 공통분모 12로 바꾸면 둘 다 $\frac{8}{12}$ 가 되어 같은 양임을 확인할 수 있다.

어느 표현이 좋은지는 목적에 달려 있다. 두 종류의 조각만 만들 수 있는 상황에서는 첫 표현이 편하다. 이미 3등분과 4등분과 12등분 조각이 준비되어 있다면 둘째 표현이 자연스러울 수 있다. 수식의 길이만으로 계산의 편의를 모두 판단하지 않는다.

역사적 분수표를 볼 때에도 왜 이 분모들을 골랐는지 질문할 수 있다. 다만 현대의 효율 기준을 옛 필자에게 그대로 적용하지 않는다. 남은 문헌의 반복되는 선택과 계산 맥락을 비교해야 선택의 기준을 검토할 수 있다.

표현	12분의 몇
$\frac{1}{2} + \frac{1}{6}$	$\frac{6}{12} + \frac{2}{12}$
$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$	$\frac{4}{12} + \frac{3}{12} + \frac{1}{12}$

두 표현은 모두 $\frac{8}{12}$ 이며 값이 같다.

탐구

$\frac{1}{2}$ 를 서로 다른 두 단위분수로 바꾸는 표현을 하나 만들어 보자.

풀이와 확인

$\frac{1}{3} + \frac{1}{6}$ 이다. $\frac{2}{6} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ 다. 이를 $\frac{2}{3}$ 의 첫 표현에 대입하면 또 다른 분해를 만들 수 있다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

큰 조각부터 고르는 현대 활동

남은 양보다 크지 않은 가장 큰 단위분수를 차례로 선택한다.

$5/7$ 을 분해하는 학습 활동을 해 보자. $1/1$ 은 너무 크고 $1/2$ 는 $5/7$ 보다 작으므로 먼저 $1/2$ 를 고른다. 남은 양은 $5/7 - 1/2 = 3/14$ 다. 여기서 가장 큰 단위분수는 $1/5$ 이며 남은 양은 $1/70$ 이다.

따라서 $5/7 = 1/2 + 1/5 + 1/70$ 이다. 분모를 70으로 맞추면 $35 + 14 + 1 = 50$ 이므로 $50/70 = 5/7$ 이다. 각 단계에서 남은 양을 정확히 계산해야 다음 선택이 올바르게 이어진다. 처음부터 소수로 반올림하면 마지막 잔여량이 틀릴 수 있다.

이 절차는 오늘의 탐구 활동으로 제시한다. 고대 이집트의 모든 분수표가 가장 큰 조각부터 선택하는 동일한 알고리즘으로 만들어졌다는 뜻은 아니다. 같은 표현을 얻을 수 있다는 것과 역사적 작성 경로를 확인했다는 것은 다른 주장이다.

$$5/7 - 1/2 = 3/14$$

$$3/14 - 1/5 = 1/70$$

$$5/7 = 1/2 + 1/5 + 1/70$$

큰 단위분수부터 고르는 현대 학습 알고리즘.

탐구

$3/5$ 에서 가장 큰 단위분수 $1/2$ 를 빼면 무엇이 남는가?

풀이와 확인

$3/5 - 1/2 = 6/10 - 5/10 = 1/10$ 이다. 따라서 $3/5 = 1/2 + 1/10$ 으로 두 단계 만에 분해된다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

나눔의 공평함을 검산하기

각 사람이 받는 조각의 모양보다 전체 몫이 같은지 확인한다.

빵 5개를 6명에게 공평하게 나누라고 하자. 한 사람의 몫은 $5/6$ 개다. 이를 $1/2 + 1/3$ 으로 주면 반쪽 한 개와 3분의 1 조각 한 개가 된다. 전체적으로 반쪽 여섯 개에 빵 3개를 쓰고 3분의 1 조각 여섯 개에 빵 2개를 쓴다.

두 종류 조각을 합하면 빵 5개가 정확히 모두 배분된다. 사람마다 같은 조각 구성을 받으므로 공평함을 눈으로도 확인하기 쉽다. 분수 표현이 실제 자르는 작업과 연결될 때 계산은 수식 이상의 설명이 된다.

빵의 크기가 서로 다르면 같은 조각 개수만으로 공평함을 보장할 수 없다. 학습 모형에서는 모든 빵이 같은 크기라는 가정을 둔다. 현실을 단순화한 조건을 밝혀야 계산 결과가 어떤 상황에 적용되는지 분명해진다.

빵 3개를 반으로: 반쪽 6개



빵 2개를 셋으로: 3분의 1 조각 6개



번호는 받는 사람

$$\text{한 사람의 몫} = 1/2 + 1/3 = 5/6$$

$$6\text{명} \times 5/6 = 5\text{개, 빵이 남김없이 배분된다}$$

빵 3개는 반으로, 2개는 셋으로 잘라 6명이 $5/6$ 씩 받는 모습

탐구

빵 7개를 12명에게 나눌 때 $1/3 + 1/4$ 씩 주어도 되는가?

풀이와 확인

한 사람의 몫은 $4/12 + 3/12 = 7/12$ 다. 전체 12명에게 주면 빵 4개와 3개를 사용하므로 합계 7개가 정확히 배분된다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

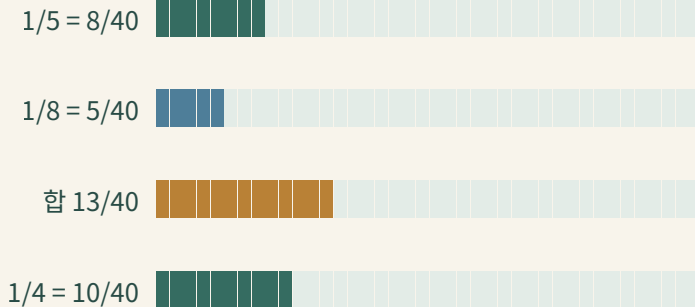
분모가 커질 때의 함정

분모가 큰 단위분수는 조각의 수가 아니라 조각 하나의 크기를 말한다.

$1/5$ 와 $1/8$ 을 비교하면 $1/5$ 가 더 크다. 같은 전체를 더 많이 나눌수록 조각 하나는 작아지기 때문이다. 분모 8이 5보다 크다는 이유로 $1/8$ 이 크다고 하면 분모의 역할을 거꾸로 읽은 셈이다.

$1/5+1/8$ 과 $1/4$ 을 비교하려면 공통분모 40을 쓸 수 있다. 앞의 합은 $8/40+5/40=13/40$ 이며 $1/4$ 은 $10/40$ 이다. 따라서 합이 더 크다. 개별 조각의 크기와 여러 조각을 더한 크기를 구별해야 한다.

그림에서는 모든 띠의 전체 길이를 맞추고 경계선을 분명히 그린다. 서로 다른 색의 조각을 같은 기준선 위에 놓으면 비교가 쉬워진다. 시각화는 계산을 대신하는 장식이 아니라 무엇을 같은 단위로 비교하는지 드러내는 도구다.



전체 길이를 같은 40조각으로 나누었다. $1/5$ 과 $1/8$ 의 합 $13/40$ 은 $1/4$ 인 $10/40$ 보다 크다.

탐구

$1/6+1/12$ 는 $1/4$ 보다 큰가 작은가 같은가?

풀이와 확인

$2/12+1/12=3/12=1/4$ 이므로 같다. 각 조각은 $1/4$ 보다 작지만 합은 정확히 $1/4$ 이 된다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

큰 단위분수부터 고르면 왜 끝나는가

남은 분수의 분자가 줄어드는 성질로 절차의 종료를 설명한다.

$0 < a/b < 1$ 인 양의 분수를 가장 큰 단위분수부터 분해한다고 하자. a 와 b 는 양의 정수이며 먼저 약분한다. a/b 가 이미 단위분수이면 끝난다. 그렇지 않으면 b/a 이상인 가장 작은 정수 n 을 고르고 $1/n$ 을 뺀다. 이 선택은 남은 양보다 크지 않은 가장 큰 단위분수다.

차이는 $a/b - 1/n = (an - b)/(bn)$ 이다. n 을 올림으로 정했으므로 $n-1 < b/a \leq n$ 이다. 양변에 a 를 곱하면 $a(n-1) < b \leq an$ 이다. 따라서 새 분자 $an - b$ 는 0 이상 a 미만이다. 약분하면 분자는 그대로이거나 더 작아진다.

분자는 음이 아닌 정수이며 매 단계 엄격하게 줄어든다. 그러므로 끝없이 양의 분수만 남을 수 없다. 이 논증은 결과의 분모가 작게 유지된다는 뜻은 아니다. 종료는 보장되어도 중간 분모가 매우 커져 계산하기 불편할 수 있다.

예를 들어 $4/13$ 에서 $1/4$ 을 빼면 $3/52$ 다. 이어 $1/18$ 을 빼면 $1/468$ 이 남아 끝난다. 분자는 4에서 3으로 줄고 마지막에 1이 된다. 이 알고리즘의 일반 성질은 현대의 학습 해설이며 고대 이집트 서기관이 모든 표를 이 방법으로 만들었다는 역사적 주장이 아니다.

남은 양	선택한 조각	다음 잔여
$4/13$	$1/4$	$3/52$
$3/52$	$1/18$	$1/468$
$1/468$	$1/468$	0

탐구

분자가 줄어든다는 사실만으로 이 알고리즘이 가장 짧은 분해를 준다고 말할 수 있는가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 이 증명은 유한 단계에 끝난다는 사실만 보여 준다. 항의 개수나 가장 큰 분모가 최소인지 판단하려면 다른 분해와 비교하는 별도 논증이 필요하다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

나만의 분수표를 편집하기

답을 나열하는 표에 검산 열을 붙여 계산의 신뢰성을 높인다.

학습용 표의 첫 열에 $2/5$ 와 $2/7$ 과 $2/9$ 를 적는다. 둘째 열에는 각각 $1/3+1/15$ 와 $1/4+1/28$ 과 $1/6+1/18$ 을 적는다. 마지막 열에는 공통분모 검산을 적어 각 등식이 맞는지 보이게 한다.

표의 분모는 순서대로 커지도록 정리하면 읽기 쉽다. 동일한 값을 다른 방식으로 나타낸 경우에는 별도 줄로 두고 같은 원래 분수를 연결한다. 한 표현만 유일하다고 보이지 않도록 편집하는 것이 수학적 의미를 정확히 전달한다.

역사 자료의 표를 옮길 때에는 원문 순서를 유지한 전사와 학습을 위해 재배열한 표를 구분한다. 독자가 원래 구조와 편집자의 도움을 혼동하지 않게 하기 위해서다. 표를 만드는 일에도 자료의 출처와 편집 원칙이 필요하다.

분수	단위분수 분해
$2/5$	$1/3 + 1/15$
$2/7$	$1/4 + 1/28$
$2/9$	$1/6 + 1/18$

참고

$2/11=1/6+1/66$ 이라는 줄을 검산해 보자.

풀이와 확인

$1/6$ 은 $11/66$ 이므로 합은 $12/66=2/11$ 이다. 두 단위분수의 분모가 서로 다르고 합도 정확하다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

가정한 값에서 답으로

맞지 않는 값도 출발점이 된다

계산하기 쉬운 수를 넣어 본 뒤 결과의 비율로 수정할 수 있다.

어떤 양에 그 양의 $\frac{1}{4}$ 을 더하면 25가 된다고 하자. 먼저 양을 4로 가정하면 $4+1=5$ 가 된다. 필요한 결과 25는 5의 다섯 배이므로 처음 가정한 양도 다섯 배로 바꾼다. 답은 20이며 $20+5=25$ 로 맞는다.

이 방법은 처음부터 정답을 찍는 것이 아니다. 계산하기 쉬운 시험값을 고른 뒤 결과가 어떻게 비례하는지 이용한다. 4를 택한 이유는 그 $\frac{1}{4}$ 이 정수 1이 되어 계산이 간단하기 때문이다. 시험값의 선택에도 목적이 있다.

이집트 수학의 일부 문제를 설명할 때 가정법 또는 가정한 값으로 푸는 방법을 소개한다. 이 책의 예제는 그 원리를 보여 주기 위한 현대 재구성이다. 이어지는 설명에서는 비례가 성립하는 조건과 성립하지 않는 경우를 나누어 본다.

$$\text{시험: } 4 + 1 = 5$$

$$\text{목표: } 25 = 5 \times 5$$

$$\text{답: } 4 \times 5 = 20$$

시험 결과와 목표의 비율을 입력에도 적용한다.

탐구

어떤 양에 그 $\frac{1}{3}$ 을 더해 32가 된다. 시험값 3으로 답을 구하자.

풀이와 확인

시험 결과는 $3+1=4$ 다. 32는 4의 8배이므로 답은 $3 \times 8=24$ 다. $24+8=32$ 로 검산한다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

시험값을 고르는 기준

분모들의 공배수를 택하면 중간 분수 계산을 줄일 수 있다.

어떤 양에 그 양의 $1/2$ 과 $1/3$ 을 더하면 55가 된다고 하자. 시험값을 1로 잡아도 되지만 분수가 나온다. 2와 3의 공배수 6을 택하면 $6+3+2=11$ 로 정수만 계산할 수 있다. 목표 55는 시험 결과의 다섯 배다.

따라서 원래 양은 30이다. 원문 형태를 현대 식으로 쓰면 $x+x/2+x/3=55$ 다. 분모를 통일하면 $11x/6=55$ 가 되어 같은 답을 얻는다. 두 풀이를 나란히 보면 시험값 6이 공통분모와 어떤 관계인지 드러난다.

편리한 시험값은 유일하지 않다. 12를 택하면 결과가 22이며 수정 비율은 $5/2$ 가 된다. 답은 여전히 30이다. 방법이 맞다면 출발값이 달라도 같은 문제의 답에 도달해야 한다. 이 성질을 독립적인 검산으로 사용할 수 있다.

$$\text{시험: } 6 + 3 + 2 = 11$$

$$\text{목표: } 55 = 11 \times 5$$

$$\text{답: } 6 \times 5 = 30$$

공배수 6을 고르면 분수 없이 시험할 수 있다.

탐구

$x+x/4+x/6=34$ 에서 편리한 시험값과 답은 무엇인가?

풀이와 확인

공배수 12를 택하면 $12+3+2=17$ 이다. 목표 34는 두 배이므로 $x=24$ 다. $24+6+4=34$ 로 확인한다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

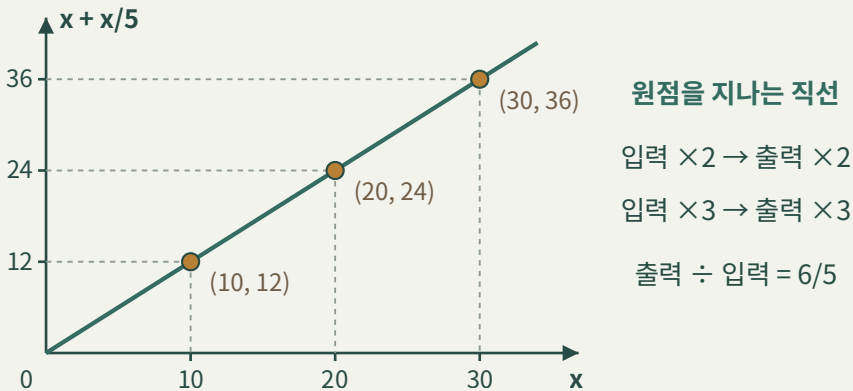
비례가 작동하는 까닭

입력을 두 배로 하면 출력도 두 배가 되는 구조를 찾는다.

$x+x/4$ 는 x 의 $5/4$ 배다. x 를 두 배로 바꾸면 두 항이 모두 두 배가 되어 전체도 두 배다. 따라서 시험 결과를 목표값에 맞추는 배율을 입력에도 똑같이 적용할 수 있다. 계산의 핵심은 이런 직접적인 비례 관계다.

일반적으로 $ax=b$ 에서 a 가 일정하고 0이 아니면 0이 아닌 시험값 t 의 결과는 at 다. b 가 at 의 k 배이면 답은 kt 다. 이 설명은 현대의 대수 기호로 원리를 정리한 것이다. 옛 계산 절차를 검토하면서 오늘의 일반화도 함께 배울 수 있다.

비례를 확인하려면 문제에 고정된 더하기 항이 없는지 살핀다. 양의 일정 비율을 더하는 것과 고정된 수를 더하는 것은 다르다. 문장 속에서 그 양의 $1/4$ 과 숫자 4를 혼동하면 전혀 다른 관계를 풀게 된다.



$x + x/5$ 의 값이 원점을 지나는 직선 위에 놓이는 직접 비례

탐구

$x+x/5$ 에서 x 가 10일 때와 30일 때의 결과를 비교하자.

풀이와 확인

각각 12와 36이다. 입력이 세 배가 되면 출력도 세 배가 된다. 이 비례 때문에 시험값을 같은 배율로 수정하는 방법이 작동한다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

고정된 수를 더하면 달라진다

모든 문제에 같은 수정 비율을 무조건 적용할 수는 없다.

$x+4=20$ 을 생각하자. 시험값 4를 넣으면 결과는 8이다. 목표 20이 8의 2.5배라고 해서 시험값 4도 2.5배로 바꾸면 $x=10$ 이 된다. 그러나 $10+4=14$ 이므로 틀린다. 고정된 4는 입력과 함께 늘어나지 않기 때문이다.

이 문제에서는 먼저 양쪽에서 4를 빼서 $x=16$ 을 구한다. 또는 시험값의 결과 8이 목표보다 12 작다는 점을 보고 x 를 12 늘릴 수 있다. 비율 수정이 아니라 차이 수정이 맞는 구조다. 문제의 연산 관계를 먼저 파악해야 한다.

하나의 역사적 알고리즘을 배웠다고 모든 문장 문제에 기계적으로 적용하지 않는다. 잘 작동하는 범위를 확인하는 것은 방법을 제대로 이해했다는 증거다. 반례를 직접 만드는 활동은 절차의 조건을 선명하게 드러낸다.

$$\text{시험: } 4 + 4 = 8$$

$$\text{잘못된 비율 수정: } x = 10$$

$$\text{정답: } x = 20 - 4 = 16$$

고정된 더하기 항이 있으면 단순 비율 수정이 실패한다.

탐구

$2x+3=15$ 에서 시험값 1의 결과 5를 세 배로 맞추면 $x=3$ 이 되는가?

풀이와 확인

아니다. $2 \times 3 + 3 = 9$ 다. 먼저 고정항 3을 빼면 $2x=12$ 이므로 $x=6$ 이다. 비례 부분과 고정항을 분리해야 한다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

이어 읽기 / 가정한 값에서 답으로

두 번 가정해 고정항 문제 풀기

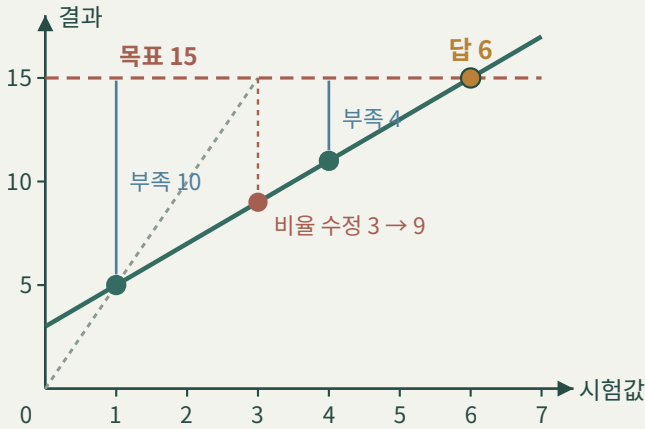
고정된 더하기 항이 있어도 시험값 두 개의 결과를 비교하면 답을 찾을 수 있다.

10장의 「고정된 수를 더하면 달라진다」는 $2x+3=15$ 에 시험값 하나의 비율 수정을 적용하면 틀린다는 것을 보였다. 시험값 1의 결과 5를 세 배로 맞추어 $x=3$ 을 택하면 실제 결과는 9이기 때문이다. 그러면 고정항을 먼저 빼는 방법 외에 시험값만으로 답을 찾는 길은 없을까? 여기서는 시험값을 두 번 넣는 현대 재구성을 학습용 모형으로 살펴본다.

시험값 1을 넣으면 결과는 5로 목표 15보다 10 부족하다. 시험값 4를 넣으면 결과는 11로 4 부족하다. 시험값을 3 늘렸더니 부족분이 6 줄었으므로 시험값을 1 늘릴 때마다 부족분은 2씩 준다. 남은 부족분 4를 없애려면 시험값을 2 더 늘려야 하므로 $x=6$ 이며 $2 \times 6 + 3 = 15$ 로 확인된다.

그래프에서 보면 $2x+3$ 의 값은 세로축의 3에서 출발하는 직선 위에 있다. 시험값 하나의 비율 수정은 원점과 시험 점을 잇는 점선을 따라가므로 실제 직선과 어긋난다. 두 시험 점을 잇는 직선은 실제 관계와 일치하므로 목표 높이 15와 만나는 곳이 곧 답이다. 비율 수정이 성공하려면 직선이 원점을 지나야 한다는 10장의 설명을 그림으로 다시 본 셈이다.

이 방법은 결과가 시험값에 따라 직선으로 변하는 문제, 곧 $ax+b$ 꼴에서만 정확하다. 결과가 x^2 처럼 휘어지는 관계라면 두 점을 잇는 직선은 근삿값만 준다. 한 번의 가정이 통하는 범위와 두 번의 가정이 통하는 범위를 구별하면 각 절차의 조건이 더 선명해진다. 두 번 가정하는 규칙의 역사적 출처는 이 책의 자료 범위를 넘어서므로 여기서는 계산 원리만 다룬다.



$$\text{결과} = 2x + 3$$

시험값 3 증가
→ 부족분 6 감소

1 늘릴 때마다 2 감소

부족 4 → 2 더 늘림

$$x = 4 + 2 = 6$$

$2x + 3 = 15$ 에서 두 시험 점을 잇는 직선이 목표와 만나는 6

탐구

$3x+5=26$ 에서 시험값 2와 5를 넣어 두 번 가정하는 방법으로 답을 구하라.

풀이와 확인

시험값 2의 결과는 11로 15 부족하고 시험값 5의 결과는 20으로 6 부족하다. 시험값을 3 늘릴 때 부족분이 9 줄었으므로 1 늘릴 때마다 3씩 준다. 남은 부족분 6을 없애려면 2를 더 늘려 $x=7$ 이며 $3 \times 7 + 5 = 26$ 으로 확인된다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

분배 비율을 합으로 바꾸기

몫의 비율을 알면 전체를 몇 개의 같은 단위로 볼지 정할 수 있다.

세 사람이 물건을 2대 3대 5의 비율로 나눈다고 하자. 비율의 합은 10이므로 전체를 같은 크기 10몫으로 생각할 수 있다. 전체가 180단위이면 한 몫은 18이며 세 사람은 36과 54와 90을 받는다.

처음에는 비율의 수 자체를 시험 몫으로 사용한 셈이다. 그 합 10을 실제 전체 180에 맞추기 위해 18배를 적용했다. 가정한 값에서 비례로 수정하는 생각이 분배 문제에도 이어진다. 단 비율의 순서와 사람의 대응을 유지해야 한다.

검산은 두 가지다. 세 몫을 더해 전체가 되는지 확인하고 각 몫을 해당 비율 수로 나눈 값이 모두 같은지 확인한다. 합계만 맞아도 비율이 틀릴 수 있으므로 두 조건을 함께 검사하는 것이 좋다.



전체 180을 2대 3대 5의 비율로 나눈다.

탐구

전체 84를 1대 2대 4로 나누어 보자.

풀이와 확인

비율 합은 7이며 한 몫은 12다. 분배량은 12와 24와 48이다. 합은 84이고 각 양을 1과 2와 4로 나누면 모두 12다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

일의 양과 사람 수

사람 수와 작업량의 관계에는 일정한 작업 속도라는 가정이 필요하다.

네 사람이 하루에 같은 속도로 각각 6단위를 처리한다고 하자. 하루 전체 작업량은 24단위다. 같은 조건에서 여섯 사람이 일하면 36단위다. 사람 수와 하루 작업량은 비례하지만 이것은 모든 사람이 같은 속도로 일한다는 학습 모형의 조건 아래 성립한다.

전체 작업량이 72단위라면 네 사람은 3일이 필요하고 여섯 사람은 2일이 필요하다. 사람 수가 늘 때 걸리는 시간은 줄어든다. 일정한 전체 작업량 아래에서는 사람 수와 시간이 반비례한다. 같은 문맥에서도 무엇을 고정하느냐에 따라 관계가 달라진다.

이 예제는 특정 고대 공사 기록의 번역이 아니다. 현실에서는 준비 시간과 역할 분담과 공간 제한이 있으므로 사람을 두 배로 늘렸다고 시간이 정확히 반이 되지 않을 수 있다. 모형의 가정을 밝혀야 계산 결과를 현실과 적절히 연결할 수 있다.

사람 수	하루 처리량	필요 일수
4	24	3
6	36	2

전체 72단위와 일정한 작업 속도를 가정한 학습 모형.

탐구

같은 속도의 세 사람이 8일 걸리는 일을 여섯 사람이 하면 모형상 며칠 걸리는가?

풀이와 확인

전체 일은 24사람일이다. 이를 여섯 사람으로 나누면 4일이다. 작업 속도와 조건이 같다는 가정이 필요하다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

해를 넣어 문장으로 검산하기

식을 만족하는 답인지 확인한 뒤 원래 말의 뜻에도 맞는지 살핀다.

어떤 양에서 그 양의 $1/5$ 을 빼면 28이라는 문제를 풀자. 시험값 5에서는 4가 남는다. 28은 4의 일곱 배이므로 답은 35다. 여기에 원래 문장을 적용하면 35의 $1/5$ 은 7이며 $35-7=28$ 이 된다.

답을 구한 뒤 다른 식에 넣어 확인하면 검산의 의미가 약해진다. 원래 문제의 말로 돌아가 무엇을 더하고 뺀는지 다시 확인해야 한다. 문제를 식으로 옮기는 단계에서 생긴 오류는 같은 잘못된 식 안에서는 잘 드러나지 않을 수 있다.

예를 들어 $1/5$ 을 빼라는 말을 5를 빼는 것으로 읽으면 답 33을 얻는다. $33-5=28$ 은 맞지만 원래 문제의 조건과 다르다. 숫자만 확인하지 않고 대상과 관계를 문장으로 복원하는 습관이 중요하다.

전체 35를 같은 다섯 묶으로



남은 네 묶 28

뺀 $1/5$

$$35 - 35/5 = 35 - 7 = 28$$

원래 양 35의 $1/5$ 은 7이다. 네 묶을 남긴 28이 원래 문장의 조건을 만족한다.

탐구

어떤 양에서 그 $1/4$ 을 빼면 45다. 답을 구하고 원래 문장으로 검산하자.

풀이와 확인

시험값 4에서는 3이 남으므로 목표에 맞추려면 15배다. 답은 60이며 그 $1/4$ 인 15를 빼면 45가 된다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

문제를 바꾸어 보는 편집실

숫자 하나를 바꿨을 때 해가 어떻게 달라지는지 예측해 본다.

$x+x/2=30$ 의 답은 20이다. 오른쪽 전체를 45로 바꾸면 전체가 1.5배이므로 답도 30이 된다. 반면 $x+x/3=30$ 으로 분수 부분을 바꾸면 같은 전체를 만드는 원래 양은 22.5다. 서로 다른 변경이 다른 효과를 낸다.

첫 변경은 같은 계수에서 목표량만 바꾼 것이다. 둘째 변경은 원래 양에 붙는 배율을 바꾼 것이다. 두 변화의 종류를 구별하면 문제를 풀기 전에 답이 커질지 작아질지 예상할 수 있다. 더하는 비율이 작아지면 같은 전체를 만들기 위한 원래 양은 커진다.

편집 활동에서는 원문을 고쳤다는 말 대신 새 학습 문제를 만들었다고 밝힌다. 역사 자료를 존중하면서도 원리를 여러 상황으로 확장할 수 있다. 마지막에는 만든 문제의 답과 검산을 함께 적어 다른 독자가 재사용할 수 있게 한다.

$$x + x/2 = 30$$

20

10

$$x + x/3 = 30$$

22.5

7.5

전체가 같아도 더하는 비율에 따라 x 가 달라진다

같은 전체 30을 만드는 두 분해. 금색 부분의 비율이 1/2에서 1/3으로 줄면 원래 양은 20에서 22.5로 늘어난다.

탐구

$x+x/4=40$ 에서 1/4을 1/2로 바꾸면 양의 해는 커지는가 작아지는가?

풀이와 확인

작아진다. 처음 해는 32이고 바꾼 해는 80/3이다. 원래 양에 더하는 비율이 커졌으므로 같은 전체 40을 만드는 x 는 줄어든다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

경사와 원과 발의 넓이

세케드가 재는 방향

수직으로 일정하게 올라갈 때 가로로 얼마나 이동하는지 나타낸다.

린드 파피루스의 피라미드 문제에는 세케드라는 경사량이 등장한다. 높이 한 큐빗에 대응하는 수평 이동을 손바닥 너비인 팜 단위로 나타내는 방식이다. 여기서는 한 큐빗을 7팜으로 두는 해당 도량 관계를 사용한다.

높이 10큐빗에 수평으로 5큐빗 이동한다면 높이 1큐빗당 수평 이동은 $1/2$ 큐빗이다. 이를 팜으로 바꾸면 세케드는 3.5팜이다. 오늘날의 경사도처럼 높이를 수평 거리로 나눈 값과는 비율의 방향이 반대이므로 혼동하지 않는다.

이 장의 간단한 수는 학습용으로 새로 골랐다. 실제 피라미드의 치수를 주장하는 예제가 아니다. 비율의 분자와 분모와 단위를 분명히 적으면 낯선 경사량도 일관된 계산으로 이해할 수 있다. 도해에는 수평과 수직을 각각 표시한다.



높이 10에 수평 이동 5인 단면. 세케드는 3.5팜이다.

탐구

높이 8큐빗에 수평 이동 6큐빗이면 세케드는 몇 팜인가?

풀이와 확인

수평과 높이의 비는 $6/8=3/4$ 다. 1큐빗당 $3/4$ 큐빗이며 $7 \times 3/4=5.25$ 팜이다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

밑변의 절반을 쓰는 까닭

피라미드 중심에서 한 면의 가운데까지 자른 단면을 생각한다.

정사각형 밑면의 한 변이 20이고 수직 높이가 16인 반듯한 피라미드를 그려 보자. 중심을 지나 한 면의 가운데로 향하는 단면에서 수평 거리는 밑면 전체 20이 아니라 절반인 10이다. 꼭대기는 밑면의 중심 바로 위에 있다고 가정한다.

따라서 수평과 수직의 비는 $10/16=5/8$ 이다. 한 큐빗을 7팜으로 환산하면 세케드는 $35/8$ 팜이다. 밑면 전체를 쓰면 경사량이 두 배가 되어 잘못된 값을 얻는다. 어떤 단면을 보고 있는지 먼저 정해야 한다.

중심에서 밑면의 꼭짓점으로 향하는 단면은 수평 거리가 다르다. 두 단면을 섞으면 같은 피라미드에서도 다른 비율이 나온다. 도형의 이름만으로는 계산이 정해지지 않으므로 기준선과 높이를 그림에 분명히 표시한다.



밑면 전체 20의 절반 10을 수평 거리로 사용한다.

탐구

밑면 한 변 18과 높이 12인 피라미드에서 면 가운데 단면의 수평과 수직 비는 얼마인가?

풀이와 확인

수평 거리는 9이므로 비는 $9/12=3/4$ 다. 밑면 18 전체를 높이 12로 나누는 것은 해당 단면의 세케드 계산이 아니다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

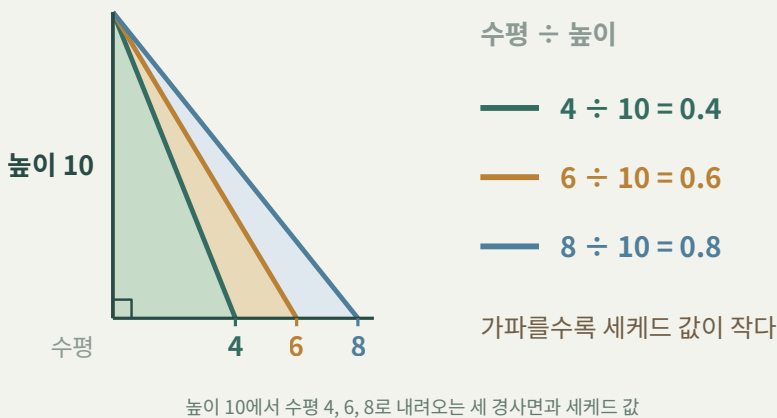
경사가 가파를수록 작아지는 수

어떤 비율을 택했는지에 따라 변화 방향도 달라진다.

높이를 10으로 고정하고 수평 이동을 4와 6과 8로 바꾸어 보자. 수평 이동이 작을수록 경사는 가파르다. 세케드에 대응하는 수평과 높이의 비는 각각 0.4와 0.6과 0.8이므로 가파를수록 값이 작아진다.

오늘의 익숙한 상승률은 높이를 수평 이동으로 나누므로 같은 세 경우가 2.5와 약 1.667과 1.25다. 여기서는 가파를수록 값이 커진다. 두 경사 표현은 서로 역수 관계이며 어느 쪽이 틀린 것이 아니라 기준이 다르다.

표를 만들 때 열 제목에 수평/높이인지 높이/수평인지 반드시 적는다. 경사 0.5라는 숫자만 있으면 어느 방향으로 읽어야 할지 모호하다. 단위와 비율의 방향을 보존하는 습관은 역사적 도량형뿐 아니라 현대의 그래프에서도 중요하다.



탐구

높이 12에 수평 이동 3인 경우와 수평 이동 6인 경우 중 어느 쪽이 더 가파른가?

풀이와 확인

수평 이동 3인 쪽이 더 가파르다. 수평/높이는 각각 $1/4$ 과 $1/2$ 이므로 가파른 쪽의 세케드가 더 작다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

세케드로 밀변 되찾기

경사량과 높이를 알면 피라미드의 수평 크기를 계산할 수 있다.

세케드가 5.25팜이면 큐빗 단위 비율은 $5.25/7=3/4$ 다. 높이가 24큐빗인 피라미드의 면 가운데 단면에서 수평 거리는 $24 \times 3/4=18$ 큐빗이다. 이것은 밀변의 절반이므로 전체 한 변은 36큐빗이다.

계산은 단위 변환과 비율 적용과 두 배의 세 단계다. 팜 값을 큐빗으로 바꾸지 않고 높이에 바로 곱하면 7배의 오류가 생긴다. 마지막에 절반 길이를 전체 밀변으로 바꾸는 단계도 빠뜨리지 않아야 한다.

답을 얻으면 역방향으로 검산한다. 밀변 36의 절반 18을 높이 24로 나누면 $3/4$ 이다. 이를 7팜에 곱하면 처음 세케드 5.25팜을 되찾는다. 계산 경로를 거꾸로 따라가는 검산은 단위 오류를 찾는 데 유용하다.

$$\begin{aligned} 5.25\text{팜} \div 7 &= 3/4 \\ 24 \times 3/4 &= 18 \\ \text{밀변} &= 18 \times 2 = 36 \end{aligned}$$

세케드와 높이에서 전체 밀변을 되찾는다.

탐구

세케드 3.5팜과 높이 30큐빗인 피라미드의 밀변 한 변을 구하자.

풀이와 확인

비율은 $3.5/7=1/2$ 다. 수평 반길이는 15큐빗이며 전체 밀변 한 변은 30큐빗이다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

원을 정사각형으로 가늠하기

지름에서 일부를 덜어 낸 길이의 제곱으로 원 넓이를 근사한다.

린드 파피루스의 원 넓이 계산과 관련해 지름의 $1/9$ 을 덜어 낸 뒤 남은 길이를 제곱하는 규칙이 알려져 있다. 지름이 9인 학습 그림에서는 1을 덜어 8을 만들고 넓이를 64로 계산한다. 이는 정확한 원 넓이 공식과는 다른 근사 규칙이다.

현대식으로 지름을 d 라 쓰면 근삿값은 $(8d/9)^2$ 이다. 원의 정확한 넓이 $\pi d^2/4$ 와 비교하면 이 규칙은 π 를 256/81로 사용하는 것과 같다. 약 3.16049이므로 오늘의 π 보다 조금 크다. 현대 기호는 규칙을 비교하는 해설에 사용한다.

옛 문헌이 오늘의 π 기호와 같은 상수 개념을 그대로 적었다고 말하지 않는다. 구체적 절차를 현대 공식으로 바꾸어 분석한 것이다. 계산의 수치적 효과와 원문이 사용한 표현을 나누어 설명하면 과장 없이 의미를 전할 수 있다.

$$d = 9$$

$$(d - d/9)^2 = 8^2 = 64$$

$$\pi \text{에 대응하는 값} = 256/81$$

원 넓이의 역사적 근사 규칙을 현대 기호로 해설한다.

탐구

지름 18인 원에 이 규칙을 적용하면 근사 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

18의 $1/9$ 인 2를 빼면 16이다. 이를 제곱하면 256이다. 지름 9일 때 값 64의 네 배이기도 하다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

이어 읽기 / 경사와 원과 발의 넓이

팔각형으로 다시 보는 원 넓이 규칙

한 변 9인 정사각형의 모서리를 잘라 낸 팔각형은 원의 넓이와 규칙의 값 64를 잇는 학습용 모형이 된다.

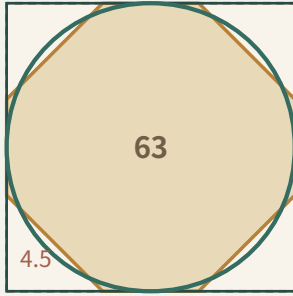
11장은 지름의 $1/9$ 을 덜어 낸 길이를 제공하는 규칙으로 지름 9인 원의 넓이를 64로 계산하고 정확한 값 약 63.6173과 비교했다. 그런데 왜 하필 8의 제곱이 원에 가까운 넓이가 되는지는 수치만으로는 잘 보이지 않는다. 여기서는 원을 둘러싼 정사각형에서 모서리를 잘라내는 학습용 모형으로 그 값을 가늠한다. 이 모형은 규칙이 실제로 이렇게 만들어졌다고 주장하는 것이 아니라 수치를 이해하기 위한 현대 재구성이다.

지름 9인 원은 한 변 9인 정사각형 안에 꼭 들어간다. 정사각형의 각 변을 3씩 세 부분으로 나누고 네 모서리에서 짧은 변이 3인 직각이등변삼각형을 잘라 내면 팔각형이 남는다. 잘라낸 삼각형 하나의 넓이는 4.5이므로 네 개의 합은 18이고 팔각형의 넓이는 $81-18=63$ 이다. 그림에서 팔각형은 비스듬한 변 쪽에서 원의 일부를 잘라 내고 곧은 변 쪽에서는 원 밖으로 조금 나간다.

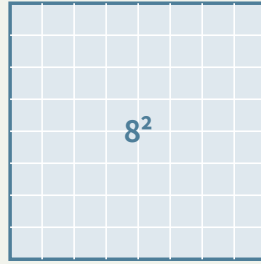
팔각형 63은 원의 넓이보다 약 0.6173 작고 규칙의 값 64는 약 0.3827 크다. 63에 가까운 제곱수를 찾으면 $8^2=64$ 이므로 한 변 8인 정사각형이 자연스러운 후보가 된다. 상대 오차로 보면 팔각형은 약 0.97퍼센트 부족하고 규칙은 약 0.60퍼센트 초과한다. 팔각형보다 규칙이 오히려 원에 더 가깝다는 점도 확인할 수 있다.

지름을 d 로 두면 같은 방법의 팔각형 넓이는 $d^2-2(d/3)^2=7d^2/9$ 이다. 이 값은 π 를 $28/9$, 곧 약 3.111로 쓰는 것과 같아서 규칙이 쓰는 $256/81$, 곧 약 3.160보다 오늘날의 π 에서 더 멀다. 두 근사의 차이는 지름 9에서 넓이 1이며 일반적으로 $d^2/81$ 이므로 지름의 제곱에 비례해 커진다. 근사 규칙을 평가할 때 같은 대상을 여러 모형으로 둘러싸 비교하면 판단 근거가 분명해진다.

지름 9인 원과 팔각형



$$81 - 4 \times 4.5 = 63$$



규칙의 정사각형 64

넓이 비교



팔각형 약 0.6173 부족

규칙 약 0.3827 초과

한 변 9인 정사각형의 팔각형 63과 원, 규칙의 정사각형 64 비교

탐구

지름 18인 원에 같은 팔각형 모형을 적용하면 넓이는 얼마이며 규칙의 값과 얼마나 다른가?

풀이와 확인

한 변 18인 정사각형의 넓이는 324이고 모서리 삼각형은 짧은 변이 6이므로 하나에 18, 네 개에 72다. 팔각형 넓이는 $324 - 72 = 252$ 다. 규칙의 값은 $16^2 = 256$ 이므로 차이는 4이며 지름 9일 때 차이 1의 네 배다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

근사 규칙의 오차를 비교하기

크기가 바뀌어도 상대적인 오차는 일정하게 유지될 수 있다.

지름 9인 원의 정확한 넓이는 $81\pi/4$ 로 약 63.6173이다. 앞의 규칙이 주는 64는 약 0.3827만큼 크다. 정확한 값에 대한 비율로 보면 약 0.60퍼센트의 초과다. 넓이의 차이와 비율의 차이를 구별해 적는다.

지름을 두 배로 하면 두 넓이는 모두 네 배가 된다. 절대 오차도 네 배가 되지만 상대 오차는 그대로다. 따라서 큰 원에서 숫자 차이가 커졌다고 규칙의 상대적 정확도가 나빠졌다고 말할 수는 없다. 비교 기준을 먼저 정해야 한다.

이 계산은 현대의 π 를 기준으로 한 평가다. 고대의 실제 측정 오차나 작업 목적까지 이 숫자 하나로 알 수는 없다. 규칙의 수학적 성능을 확인하되 현장 활용의 정밀도는 별도 자료가 필요한 문제로 남겨 둔다.



탐구

지름 18에서 절대 오차가 지름 9일 때의 몇 배가 되는가?

풀이와 확인

네 배다. 넓이와 근사 넓이가 모두 네 배가 되기 때문이다. 상대 오차의 비율은 변하지 않는다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

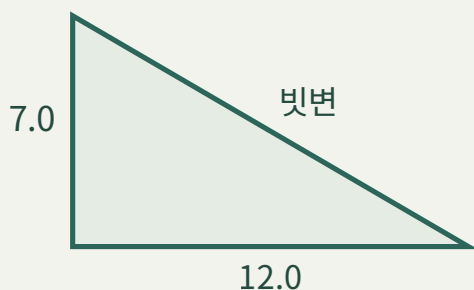
직사각형을 삼각형으로 나누기

같은 밑변과 높이를 가진 삼각형의 넓이는 사각형의 절반이다.

밑변 12와 높이 7인 삼각형의 넓이는 $12 \times 7 \div 2 = 42$ 다. 높이는 꼭짓점에서 밑변이 놓인 직선까지의 수직 거리다. 비스듬한 변의 길이를 높이라고 바꾸어 넣으면 다른 양을 계산하게 된다. 도형에 직각 표시를 넣는 이유가 여기에 있다.

같은 삼각형을 하나 더 만들어 뒤집어 붙이면 밑변 12와 높이 7인 평행사변형을 만들 수 있다. 전체 넓이는 84이며 원래 삼각형은 절반이다. 이 도해는 넓이 관계를 설명하는 현대 학습용 그림으로 제시한다.

꼭짓점을 밑변과 평행하게 움직이면 모양은 달라져도 높이는 7로 유지된다. 따라서 넓이는 계속 42다. 그림의 기울어진 모습만 보고 넓이가 커졌다고 판단하지 말고 계산에 들어가는 밑변과 수직 높이를 확인한다.



수직 높이 7과 밑변 12가 만드는 직각삼각형의 넓이는 42다.

탐구

밑변 15와 수직 높이 8인 삼각형의 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

$15 \times 8 \div 2 = 60$ 이다. 옆변 길이는 주어지지 않았지만 넓이를 구하는 데 꼭 필요하지 않다.

[012] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

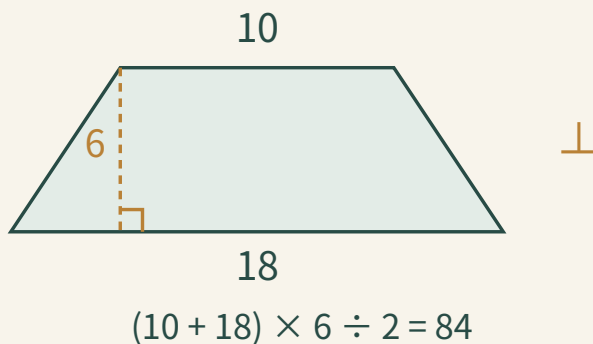
측량 그림에 조건 적기

지도처럼 보이는 도해도 실제로 주어진 조건을 확인해야 한다.

가상의 밭을 평행한 두 변이 10과 18인 사다리꼴로 그리자. 두 평행선 사이의 수직 거리가 6이면 넓이는 $(10+18) \times 6 \div 2 = 84$ 다. 짧은 변 10과 긴 변 18의 평균 14에 높이를 곱한 것과 같다.

모든 사각형에 두 마주 보는 변의 평균을 곱하는 공식을 무조건 적용할 수는 없다. 평행 여부와 높이의 의미가 달라지기 때문이다. 역사적 토지 문제에서도 그림이 대략 그려졌다는 이유만으로 모든 선이 정확히 직각 또는 평행이라고 가정하지 않는다.

학습 도해에는 평행 표시와 수직 높이를 넣어 사용할 공식을 정당화한다. 측정값을 소수 둘째 자리까지 썼다고 모양에 대한 가정이 자동으로 맞는 것은 아니다. 숫자의 정밀도와 모형의 타당성은 서로 다른 확인 항목이다.



평행한 두 변 10과 18 사이의 수직 높이가 6인 사다리꼴. 비스듬한 옆변을 높이로 쓰지 않는다.

탐구

위 사다리꼴을 같은 크기 하나와 붙여 평행사변형으로 만들면 밑변과 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

밑변은 $10+18=28$ 이며 높이는 6이다. 넓이는 168이고 원래 사다리꼴은 그 절반인 84다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

고대 오리엔트관 / 13

잘린 피라미드와 남겨진 질문

모스크바 파피루스의 입체 문제

작은 윗면과 큰 밑면을 가진 입체의 부피를 계산한 절차가 남아 있다.

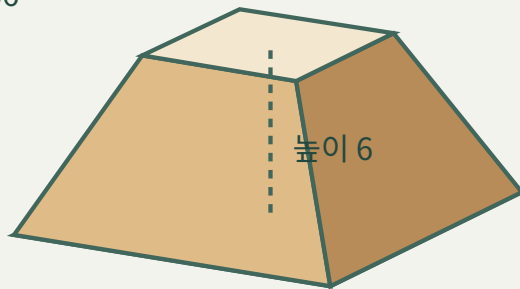
모스크바 수학 파피루스의 14번 문제는 정사각형 밑면을 가진 잘린 피라미드의 부피와 연결된다. 아래 한 변 4와 위 한 변 2와 수직 높이 6을 다루는 계산으로 널리 알려져 있다. 이 책의 입체 그림은 문제를 이해하도록 다시 그린 것이다.

절차는 아래 변의 제곱 16과 두 변의 곱 8과 위 변의 제곱 4를 더해 28을 만든다. 여기에 높이의 1/3인 2를 곱하면 부피 56을 얻는다. 세 항을 모두 더해야 하며 가운데 곱을 생략하면 다른 값이 나온다.

오늘의 기호로 $V=h(a^2+ab+b^2)/3$ 이라 정리할 수 있다. 고대 문헌에 현대 문자 공식이 그대로 적힌 것은 아니다. 특정 수의 계산이 일반식과 일치한다는 사실과 그 일반식의 역사적 증명 과정을 아는 것은 구별해야 한다.

부피 56

위 변 2



아래 변 4

문제의 치수를 설명하는 현대 개념도. 원본 유물의 그림을 복제한 것이 아니다.

탐구

아래 변 4와 위 변 2의 세 넓이 항은 각각 무엇이며 합은 얼마인가?

풀이와 확인

$4^2=16$ 과 $4 \times 2=8$ 과 $2^2=4$ 다. 합은 28이며 높이 6의 1/3을 곱하면 56이다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

두 피라미드의 차로 이해하기

잘려 나간 꼭대기를 되붙이면 큰 피라미드와 작은 피라미드를 비교할 수 있다.

아래 변 4와 위 변 2가 서로 닮은 정사각형이므로 잘려 나간 작은 피라미드는 큰 피라미드의 길이 절반 크기다. 잘린 부분 아래의 높이가 6이면 작은 피라미드 높이도 6이고 큰 피라미드 전체 높이는 12가 된다.

큰 피라미드의 부피는 $4^2 \times 12 / 3 = 64$ 다. 작은 피라미드는 $2^2 \times 6 / 3 = 8$ 이다. 두 값을 빼면 56으로 앞의 계산과 일치한다. 이 설명은 오늘날의 닮음과 피라미드 부피 공식을 이용한 검산이며 원문에 적힌 증명을 그대로 옮긴 것은 아니다.

입체를 비교할 때 작은 피라미드의 높이를 마음대로 정하면 안 된다. 두 정사각형의 변 비율이 높이 비율도 결정한다. 그림이 그럴듯한지보다 닮음 조건이 모든 길이와 일치하는지 확인해야 한다.

$$\text{큰 피라미드: } 16 \times 12 / 3 = 64$$

$$\text{작은 피라미드: } 4 \times 6 / 3 = 8$$

$$\text{잘린 입체: } 64 - 8 = 56$$

닮음을 이용한 현대 검산. 원문 증명의 복제가 아니다.

탐구

큰 피라미드의 길이가 작은 것의 두 배이면 부피는 몇 배인가?

풀이와 확인

길이의 세 방향이 모두 두 배가 되므로 부피는 여덟 배다. 위 예에서도 큰 부피 64는 작은 부피 8의 여덟 배다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

세 항의 대칭을 살펴보기

아래와 위의 이름을 바꾸어도 부피 식은 같은 값을 준다.

$V=h(a^2+ab+b^2)/3$ 에서 a 와 b 를 서로 바꾸면 세 항의 순서만 달라진다. 따라서 같은 두 정사각형을 위아래 뒤집어 놓아도 부피는 같다. 입체를 뒤집었다고 차지하는 공간이 달라지지 않는다는 직관과 식의 대칭이 일치한다.

아래 변 5와 위 변 3과 높이 6인 새 예제를 계산하면 $25+15+9=49$ 이며 부피는 98이다. 이 예제는 원자료의 수를 바꾼 현대 활동이다. 같은 절차가 다른 치수에서도 어떻게 작동하는지 확인하는 데 사용한다.

세 항 중 가운데 ab 는 양 끝 넓이 a^2 와 b^2 의 단순한 합만으로는 담기지 않는 변화의 효과를 포함한다. 아직 일반 증명을 배우지 않았더라도 항을 빠뜨렸을 때 특별한 경우와 맞지 않는지 검토하며 식의 필요성을 살펴볼 수 있다.

$$5^2 + 5 \times 3 + 3^2 = 49$$

높이 6 → 부피 98

위아래를 바꾸어도 같은 값

현대 창작 예제에서 공식의 대칭을 확인한다.

탐구

아래 변 6과 위 변 2와 높이 3이면 부피는 얼마인가?

풀이와 확인

$36+12+4=52$ 이며 높이의 $1/3$ 이 1이므로 부피는 52다. 위아래를 바꾸어도 값은 같다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

윗면이 같아질 때

특별한 경우를 대입하면 공식의 구조를 시험할 수 있다.

위아래 정사각형의 한 변이 모두 a 라면 입체는 곧은 정사각기둥이 된다. 식에 $b=a$ 를 넣으면 $V=h(a^2+a^2+a^2)/3=ha^2$ 다. 밑넓이와 높이를 곱하는 기둥의 부피와 일치한다. 세 항이 필요하다는 점도 여기서 확인된다.

반대로 윗면의 한 변 b 를 0으로 줄이면 꼭대기가 한 점인 피라미드가 된다. 식은 $V=ha^2/3$ 으로 바뀐다. 서로 다른 두 극단에서 익숙한 공식과 맞는지 보는 방법은 새 식의 오류를 찾는 데 유용하다.

특별한 경우가 맞다고 모든 경우의 증명이 완성되는 것은 아니다. 일부 값에서 맞고 다른 값에서 틀리는 식도 있을 수 있다. 이 검사는 강력한 검산이지만 일반적인 논증을 대신하지 않는다는 한계를 함께 기억한다.

윗면 변	입체	부피
$b = a$	정사각기둥	ha^2
$b = 0$	피라미드	$ha^2/3$

특별한 경우를 대입해 식의 구조를 검산한다.

탐구

$a=b=4$ 이고 높이가 5일 때 식이 주는 부피를 구하자.

풀이와 확인

$5 \times (16+16+16)/3=80$ 이다. 밑넓이 16인 정사각기둥의 높이 5를 곱한 값과 같다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

중간 넓이만 쓰면 생기는 오차

위아래 넓이의 평균에 높이를 곱하면 언제나 맞는 것은 아니다.

아래 변 4와 위 변 2인 입체의 끝면 넓이는 16과 4다. 평균 넓이 10에 높이 6을 곱하면 60이다. 하지만 정확한 부피는 56이므로 4만큼 크다. 단면의 한 변은 일정하게 줄어들어도 넓이는 제곱으로 변하기 때문이다.

중간 높이에서 한 변은 3이고 넓이는 9다. 끝면 넓이의 평균 10과 다르다. 길이의 평균을 먼저 제공하는 것과 제공한 값의 평균을 구하는 것은 같은 연산이 아니다. 이 차이가 단순 평균법의 오류를 설명한다.

입체의 부피를 층별로 생각하면 얇은 단면들이 어떻게 바뀌는지 살필 수 있다. 각 층의 넓이를 정확히 반영하는 것이 중요하다. 이 활동은 고대 공식을 현대적으로 이해하는 보조 설명이며 당시 미적분 개념이 있었다는 주장은 아니다.



제곱의 평균과 평균의 제곱은 서로 다르다.

탐구

4와 2의 평균을 제공한 값과 두 제곱의 평균을 비교하자.

풀이와 확인

평균 3의 제곱은 9다. 제곱 16과 4의 평균은 10이다. 두 값은 1만큼 다르다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

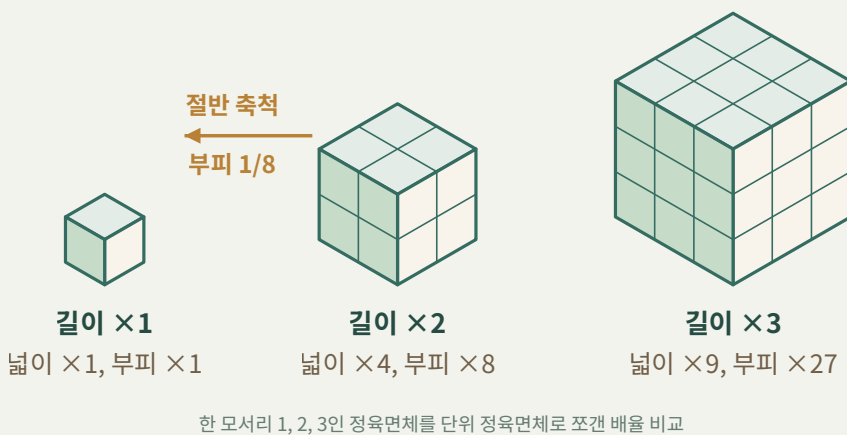
축척 모형의 재료를 계산하기

길이 배율을 세 번 적용해야 부피 배율이 나온다.

원래 입체와 닮은 모형을 모든 길이의 절반 크기로 만든다고 하자. 가로와 세로와 높이가 각각 절반이므로 부피는 $1/8$ 이 된다. 앞의 부피 56인 입체를 절반 축척으로 만들면 부피는 7이다. 필요한 재료의 양을 길이 배율 $1/2$ 만으로 줄이면 틀린다.

새 치수는 아래 변 2와 위 변 1과 높이 3이다. 공식에 넣으면 $3 \times (4+2+1)/3=7$ 로 확인된다. 일반 배율 원리와 직접 대입이 같은 값을 주므로 서로 독립적인 검산이 된다. 표에는 길이 배율과 넓이 배율과 부피 배율을 나란히 적는다.

빈 모형의 표면을 얇은 종이로 덮는 경우는 부피가 아니라 표면적이 중요하다. 같은 입체라도 무엇을 계산하는지에 따라 필요한 배율이 달라진다. 수학 문제를 현실 작업으로 옮길 때에는 재료가 내부를 채우는지 겉을 덮는지 먼저 확인한다.



탐구

모든 길이를 세 배로 만든 닮은 입체의 부피는 원래의 몇 배인가?

풀이와 확인

$3 \times 3 \times 3 = 27$ 배다. 표면적은 9배이므로 재료가 내부를 채우는지 표면을 덮는지에 따라 계산이 달라진다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

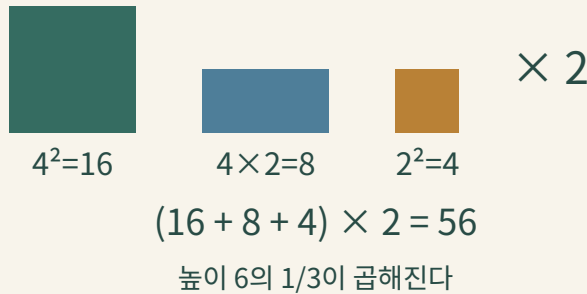
알고 있는 것과 모르는 것의 지도

정확한 계산이 남아 있어도 그 지식의 모든 경로가 함께 남은 것은 아니다.

모스크바 파피루스의 계산은 해당 치수에서 올바른 부피를 준다. 오늘날의 공식으로도 같은 결과를 확인했다. 그러나 어떤 그림과 논증을 거쳐 절차를 얻었는지에 대해서는 연구자들이 여러 복원 가능성을 검토한다. 결과의 정확성과 유래의 확실성은 별개다.

이 관의 도해는 독자가 원리를 이해하도록 만든 것이다. 보기 좋고 수학적으로 맞는 그림이라도 고대인이 실제로 그 그림을 사용했다는 증거가 되지는 않는다. 도해 설명에 현대 재구성이라는 말을 붙이면 학습 효과와 역사적 정직함을 함께 지킬 수 있다.

수학사를 읽는 일은 위대한 발견의 이름을 외우는 데서 끝나지 않는다. 남은 기록으로 무엇을 확인할 수 있고 어떤 질문은 더 열려 있는지 판단하는 능력을 기른다. 답이 분명한 계산과 답이 열려 있는 역사 질문을 함께 다룰 수 있어야 한다.



아래 변 4와 위 변 2의 세 넓이 항을 같은 축척으로 비교했다. 세 항의 합 28에 높이의 $\frac{1}{3}$ 인 2를 곱한다.

탐구

공식을 현대적으로 증명했다면 고대의 증명 방법도 알아낸 것인가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 현대 증명은 공식이 성립함을 보여 준다. 고대의 실제 논증 방식은 동시대 기록이나 다른 역사 자료로 따로 확인해야 한다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

세 단면을 결합해 부피를 되찾기

중간 단면에 적절한 무게를 주면 이차적으로 변하는 넓이를 정확히 반영한다.

정사각형 피라미드대의 아래 한 변을 a 와 위 한 변을 b 와 높이를 h 라고 하자. 밑면과 평행하게 자른 중간 높이의 정사각형은 한 변이 $(a+b)/2$ 다. 따라서 아래 넓이 $A_0=a^2$ 와 중간 넓이 $A_m=(a+b)^2/4$ 와 위 넓이 $A_1=b^2$ 를 구할 수 있다.

끝면 평균만 사용한 $h(A_0+A_1)/2$ 는 앞에서 과대 추정을 만들었다. 이번에는 세 단면에 1대 4대 1의 무게를 주어 $h(A_0+4A_m+A_1)/6$ 을 계산한다. 가운데 항을 대입하면 괄호 안이 $a^2+(a+b)^2+b^2$ 가 된다.

이를 전개하면 $2a^2+2ab+2b^2$ 다. 따라서 전체는 $h(a^2+ab+b^2)/3$ 으로 정리되어 피라미드대의 부피 공식과 일치한다. 단면 넓이가 높이에 따라 이차식으로 변하는 이 입체에서는 세 단면의 가중합이 정확한 부피를 준다.

$a=4$ 와 $b=2$ 와 $h=6$ 을 넣으면 세 넓이는 16과 9와 4다. 계산은 $6 \times (16+4 \times 9+4)/6=56$ 이다. 이것은 모스크바 파피루스의 결과를 다른 방식으로 검산하는 현대 설명이다. 같은 세 단면을 쓴다는 이유만으로 모양이 임의로 변하는 모든 입체에 정확히 적용해서는 안 된다.

단면	넓이	가중한 값
아래	16	16
중간	9	36
위	4	4
가중합	—	56

탐구

아래 한 변 5와 위 한 변 3과 높이 6이면 세 단면 방식의 부피는 얼마인가?

풀이와 확인

중간 변은 4이므로 세 넓이는 25와 16과 9다. $6 \times (25+4 \times 16+9)/6=98$ 이다. 원래 공식 $6 \times (25+15+9)/3=98$ 과 일치한다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

점토판에서 나의 계산책으로

기록하는 방식과 검산하는 태도를 오늘의 학습에 이어 본다.

이 관에서는 60진 자리값과 역수표에서 시작해 직사각형과 대각선과 분수와 입체를 살펴보았다. 각 주제의 계산법은 달랐지만 단위를 보존하고 중간값을 기록하고 다른 경로로 검산한다는 공통점이 있었다. 계산은 답을 내는 기술이면서 관계를 설명하는 언어다.

나만의 계산책 한 쪽을 만들 때에는 문제의 조건과 풀이와 그림과 검산을 모두 넣어 보자. 역사 자료에서 가져온 사실에는 자료 이름을 적고 새로 만든 예제에는 학습용이라고 표시한다. 읽는 사람이 수의 관계와 정보의 출처를 함께 확인할 수 있게 한다.

마지막 활동은 전시실 하나를 직접 편집하는 것이다. 가장 흥미로웠던 유물 하나와 계산 원리 하나를 고르고 두 내용이 어떻게 연결되는지 설명한다. 과장된 최초나 완벽이라는 말 대신 관찰과 계산으로 확인한 구체적인 문장을 써 보자.

학습용 문제 $x + x/4 = 25$

원래 양 20

5

전체 $25 \div 5$ 몫 = 한 몫 5

원래 양은 네 몫 $4 \times 5 = 20$

검산 $20 + 20/4 = 25$

나의 계산책에 넣을 현대 예제. 전체를 같은 다섯 몫으로 나누고 네 몫인 원래 양을 되찾는다.

탐구

완성한 계산책 한 쪽을 다른 사람이 검토할 때 확인할 세 가지는 무엇인가?

풀이와 확인

조건과 단위가 분명한지 확인한다. 계산과 검산이 일치하는지 살핀다. 역사 자료의 사실과 현대 재구성이 구별되어 있는지 확인한다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판

<https://www.metmuseum.org/art/collection/search/321878>

[O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

<https://www.loc.gov/item/2020741373/>

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

<https://www.open.edu/openlearn/mod/oucontent/view.php?id=1976§ion=1.3>

[O4] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

<https://www.open.edu/openlearn/mod/oucontent/view.php?id=1976&printable=1>

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

<https://www.metmuseum.org/art/collection/search/324587>

[O6] 스톤브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

<https://www.math.stonybrook.edu/~tony/whatsnew/oct20/square.html>

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

<https://personal.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/analysis.html>

[O8] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시

<https://exhibitions.library.columbia.edu/exhibits/show/plimpton/mathematics/page-2>

[O9] 스톤브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

<https://www.math.stonybrook.edu/~tony/whatsnew/oct20/square.html>

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_numerals/

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_papyri/

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

<https://www.britishmuseum.org/blog/learn-maths-egyptian-secrets-rhind-mathematical-papyrus>

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_mathematics/

[O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

<https://arxiv.org/abs/2207.04427>

[O15] 제곱근 2의 근삿값이 계산된 방법에 관한 연구

<https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086022000477>

[O16] 대영박물관 린드 수학 파피루스 소장 기록

https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057