

MATHESIS

세계 수학관 / 내용 중심 개정판

고대 아메리카관

기록에서 출발해 직접 계산하는 수학의 역사



차례

본문의 흐름에 따라 편집한 실제 PDF 쪽번호다.

그림으로 다시 읽는 보충 탐구	4
돌에 남긴 시간과 끈에 남긴 수량	5
서로 다른 땅에서 자란 수학	6
점과 막대와 영의 자리	13
스무 개씩 묶는 계산	23
장기력으로 긴 시간을 세다	34
두 달력이 맞물리는 날	44
하늘의 반복을 표에 담다	55
매듭이 담는 수량	64
합계와 분류의 수학	73
계산판을 새로 구성하다	82
산비탈을 바꾸는 기하	89
길과 다리를 연결하는 수학	99
살아 있는 지식과 우리의 전시	108
참고 자료와 자료 읽기	116

READING THE WORLD

이 책을 여는 질문

이 책은 같은 분량으로 잘라 놓은 전시실이 아니라 서로 다른 질문을 지닌 여덟 권의 책에서 출발한다. 계산을 남긴 재료와 해결해야 했던 문제를 함께 읽으면 비슷한 수식 뒤에 있는 차이가 드러난다. 한 지역을 오늘의 국가 경계에 가두거나 다른 지역을 한 줄의 발전 순서에 놓지 않는다.

읽는 순서는 자유롭다. 수를 기록하는 방법이 궁금하다면 산가지와 자리값 및 키푸를 오가면 된다. 도형의 이유를 묻고 싶다면 넓이의 보존과 완전제곱 및 증명을 이어 읽을 수 있다. 서로 닮은 계산을 발견했을 때에는 구조의 공통점과 역사적 전파의 증거를 따로 살핀다.

이번 개정에서는 원고 단위마다 페이지를 끝내던 방식을 없앴다. 문장과 그림이 차지하는 실제 길이에 따라 다음 페이지로 이어지며 짧은 해설만 남는 쪽을 줄이도록 장 사이의 흐름도 연결했다. 빈 공간을 만들기 위해 본문을 늘리거나 일정한 쪽수를 맞추기 위해 설명을 나누지 않았다.

탐구 문제의 수치와 문자식은 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 재구성이다. 먼저 조건을 읽고 직접 계산한 뒤 풀이를 비교한다. 역사적 사실을 판단할 때에는 본문의 출처와 유물 설명을 함께 확인한다.

고대 아메리카관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이 장은 개정판에 새로 붙인 보충 탐구다. 본문의 각 장이 계산의 결과나 조건을 말로 설명하고 지나간 자리에서 그림을 하나 더 그려 그 이유를 눈으로 확인하도록 구성했다. 단원마다 이어 읽을 본문의 장을 표시했으므로 해당 장을 읽은 뒤 펼치면 흐름이 자연스럽다.

여기에 실은 도해와 수치는 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 현대 재구성이다. 옛 자료가 실제로 이런 그림을 남겼다는 뜻은 아니며 자료가 말하는 범위는 각 단원 끝의 출처에서 따로 확인할 수 있다. 이번 개정에서는 본문에서 표로만 보여 주던 일부 도해도 실제 그림으로 다시 그렸다.

고대 아메리카관 / 01

돌에 남긴 시간과 끈에 남긴 수량



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

왼쪽과 오른쪽의 장면은 메소아메리카와 안데스를 구별해 놓은 것이다. 점과 막대 및 날짜 기록을 읽는 문제와 끈의 위치와 매듭을 통해 수량을 읽는 문제는 필요한 증거가 다르다. 서로 다른 재료를 곧바로 하나의 숫자 체계로 번역하기 전에 어디에서 단위가 정해지고 어떤 정보가 함께 기록되는지 살핀다.

달력의 주기를 계산할 때에는 주기의 길이와 기준 날짜를 구분한다. 합계가 남은 매듭 기록을 읽을 때에는 분류의 순서와 빠진 자료를 구분한다. 경사면과 길의 모형에서는 지형의 조건을 확인한다. 이 세 활동은 모두 주어진 수를 계산하기에 앞서 그 수가 무엇을 세는지 묻는 과정으로 이어진다.

서로 다른 땅에서 자란 수학

하나의 대륙에 하나의 수학은 없다

마야와 잉카를 구분하는 일에서 탐구를 시작한다.

마야의 문화권은 오늘날 멕시코 남부와 중앙아메리카의 여러 지역에 걸쳐 있다. 잉카를 중심으로 살필 안데스의 기록 전통은 남아메리카 서부와 연결된다. 두 이름을 고대 아메리카라는 제목 아래 놓더라도 같은 장소에서 같은 방식으로 발전한 하나의 문화처럼 읽어서는 안 된다.

이 책의 앞부분은 점과 막대로 수를 나타내는 방법과 마야의 달력을 살핀다. 뒤에서는 끈에 정보를 담은 키푸와 안데스의 공간 문제를 다룬다. 두 전통 사이의 직접적인 전파를 가정하지 않고 각각의 자료에서 확인할 수 있는 내용을 비교한다.

비교의 기준은 누가 먼저 정답을 알았는지가 아니다. 무엇을 기록해야 했는지와 어떤 재료를 썼는지를 물어야 한다. 돌에 새긴 날짜와 끈에 남긴 수량은 같은 숫자라도 읽는 순서와 보존되는 조건이 다르다. 그 차이가 계산 방법의 형태를 바꾼다.

비교 항목	마야를 살필 때	안데스를 살필 때
지역	메소아메리카	남아메리카 서부
대표 자료	달력과 수 표기	키푸와 공간 시설
주의점	여러 공동체 구별	여러 시대 구별

탐구

두 전통을 비교하는 표에는 어떤 항목이 필요할까?

풀이와 확인

장소와 시대 범위부터 나누고 기록 재료와 수의 밀을 적는다. 마야의 점막대 표기와 잉카 시기의 수량 키푸를 구별한 뒤 각각 확인된 기능만 적으면 된다. 자료가 없는 칸을 추측으로 채우지 않는 것이 비교의 출발점이다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time / [A2] Museo Larco | Inca Quipus

연표를 겹치지 않게 읽기

비교할 대상의 시간 폭부터 맞춘다.

연표에서 가로선이 길다는 이유만으로 하나의 국가가 그 기간 내내 유지되었다고 볼 수는 없다. 문화의 지속과 정치 조직의 존속은 다른 종류의 정보다. 마야의 역사를 잉카 제국의 존속 기간과 곧바로 나란히 놓으면 비교 대상의 크기가 달라진다.

수업에서는 실제 역사 연대와 별도로 연표 읽기 연습을 할 수 있다. 가상 공동체 가의 기록 기간을 200년부터 800년까지로 정하고 나의 기록 기간을 600년부터 950년까지로 정해 보자. 두 기록이 겹치는 기간은 600년부터 800년까지이며 길이는 200년이다.

겹치는 기간이 있다는 사실만으로 두 공동체가 만났다는 결론은 나오지 않는다. 교류를 말하려면 이동 경로와 물품의 맥락 같은 추가 자료가 필요하다. 반대로 기간이 겹치지 않더라도 나중 사람이 이전 자료를 읽었을 가능성은 따로 검토할 수 있다. 시간 관계와 인과 관계를 분리하자.

가와 나 공통
600-800



750-800
세 기록 공통

실제 역사 연대가 아닌 가상 연표의 교집합

가상 기록	시작	끝
가	200년	800년
나	600년	950년
다	750년	900년

탐구

가상 공동체 다의 기간이 750년부터 900년이라면 세 기록의 공통 구간은?

풀이와 확인

세 시작점 가운데 가장 늦은 750년과 세 끝점 가운데 가장 이른 800년을 고르면 된다. 공통 구간의 길이는 50년이다. 이는 가상 연표의 집합 계산이며 실제 마야나 잉카의 연대를 제시한 것이 아니다.

돌과 종이와 끈의 정보

기록 재료는 저장 방식의 일부다.

돌에 새긴 표시를 읽을 때는 닳은 자국과 원래의 선을 구별해야 한다. 종이책의 색이 번졌다면 숫자의 일부가 사라질 수 있다. 끈 기록에서는 매듭뿐 아니라 끈이 붙은 순서와 갈라지는 관계도 관찰 대상이 된다. 내용만 옮긴 텍스트가 원자료의 모든 정보를 보존하지는 않는다.

가상 기록에 항목 셋과 수량 셋이 있다고 하자. 종이 표에는 이름 옆에 숫자를 적을 수 있지만 이름표가 떨어진 끈 세 가닥은 수량을 읽어도 무엇을 센 것인지 알기 어렵다. 이때 수의 해석이 가능하다는 사실과 기록 전체가 해독되었다는 주장을 구분해야 한다.

자료를 다시 그릴 때는 색과 크기를 아름답게 통일하기 전에 어떤 차이가 의미를 가질 수 있는지 살핀다. 편집자가 중요하지 않다고 생각해 지운 간격이 실제로는 자릿수를 구별하는 단서일 수 있다. 복원 그림과 원본 사진을 같은 종류의 증거로 취급하지 않는 이유다.

확인한 정보	가능한 판단
수량 표기	수 자체의 판독
항목 이름	대상의 종류
연결 관계	묶음과 위계

탐구

수량 12와 15와 18을 읽었지만 항목명이 사라졌다면 무엇을 말할 수 있을까?

풀이와 확인

합이 45라는 산술적 사실은 말할 수 있다. 그러나 그것이 곡물량인지 사람 수인지 또는 서로 더해도 되는 같은 단위인지까지는 알 수 없다. 계산 결과와 자료 해석의 범위를 따로 적어야 한다.

[A2] Museo Larco | Inca Quipus

그림에서 본 것과 추측한 것

관찰 문장과 해석 문장은 역할이 다르다.

유물 사진에서 가로줄 세 개와 점 두 개가 보인다고 적는 문장은 형태의 관찰이다. 그 표기가 17을 나타낸다고 읽는 문장은 표기 규칙을 적용한 해석이다. 그 숫자가 특정한 의례의 횟수라고 말하려면 주변 글과 출토 맥락이 더 필요하다.

학습 기록장을 세 칸으로 나누면 판단의 단계가 드러난다. 첫 칸에는 눈으로 확인한 형태를 적고 둘째 칸에는 적용한 규칙을 적는다. 셋째 칸에는 아직 확인하지 못한 의미를 적는다. 이렇게 하면 확실한 계산과 불확실한 배경이 한 문장 안에서 섞이는 일을 줄일 수 있다.

같은 사진을 본 두 사람이 점을 두 개와 세 개로 다르게 세었다면 표기 체계의 논쟁보다 이미 지 상태를 먼저 점검해야 한다. 확대 사진과 다른 조명 사진이 도움이 될 수 있다. 자료의 판독 단계에서 생긴 오차를 거창한 역사 해석으로 덮지 않는 태도가 중요하다.

단계	기록 예
관찰	막대 셋과 점 둘이 보임
규칙 적용	$5 \times 3 + 2 = 17$
추가 해석	무엇을 센 수인지는 미정

탐구

막대 세 개와 점 두 개가 확실히 보이며 손상 부분에 점 하나가 더 있었을 가능성이 있다면 어떻게 기록할까?

풀이와 확인

확실히 보이는 점이 두 개이고 손상 부분에 점 하나가 더 있었을 가능성이 있다면 17 또는 18로 기록할 수 있다. 어느 쪽인지 결정할 근거와 필요한 추가 사진을 함께 남긴다. 불확실성을 지우고 18로 단정하지 않는다.

자릿값을 비교하는 공통 언어

같은 수를 다른 묶음으로 표현할 수 있다.

열 개씩 묶는 방식에서 43은 10이 네 묶음이고 1이 세 개다. 스무 개씩 묶는 방식에서는 20이 두 묶음이고 1이 세 개다. 두 표기는 다르지만 물건의 개수는 같다. 수의 값과 수를 적는 모양을 나누어 생각하면 낯선 표기를 읽기 쉬워진다.

이 책에서는 순수한 이십진법 연습과 마야 장기력의 단위를 명확히 구별한다. 순수한 이십진법의 자리 무게는 1과 20과 400으로 커진다. 장기력은 날짜를 세는 별도의 단위 규칙을 갖기 때문에 셋째 자리의 무게가 360이다. 겉모양이 닮아도 같은 표로 계산하면 안 된다.

키푸의 수량 표기에서 살필 십진 자릿값도 막연히 현대 숫자와 같다고 끝내지 않는다. 숫자를 선으로 쓰는 방식과 매듭을 공간에 배치하는 방식은 서로 다르다. 공통된 수학 구조를 찾으면서도 자료의 물리적 차이를 남겨 두는 것이 비교의 목적이다.

체계	분해	값
십진법	$4 \times 10 + 3$	43
순수 이십진법	$2 \times 20 + 3$	43
확인할 점	자리의 무게	표기 전에 결정

탐구

순수 이십진법에서 아래부터 3과 2가 놓인 수는 얼마인가?

풀이와 확인

일의 자리에 3이 있고 스무 묶음의 자리에 2가 있으므로 $3 + 2 \times 20 = 43$ 이다. 같은 43을 십진법으로 적으면 $4 \times 10 + 3$ 이 된다. 23이라고 읽는 것은 자리의 무게를 확인하지 않았기 때문에 생긴 오류다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time / [A4] Smithsonian NMAI | The Calendar System

수학 모형과 역사 복원

잘 작동하는 모형이 곧 과거의 실제 방법은 아니다.

교실에서 돌멩이를 옮겨 덧셈하는 판을 만들 수 있다. 그 판으로 모든 예제를 정확히 풀었다고 하더라도 옛사람들이 같은 규칙으로 계산했다고 증명한 것은 아니다. 계산 가능성은 모형의 성질이며 역사적 사용 여부는 별도의 자료가 필요한 주장이다.

모형을 소개할 때는 원자료에서 확인한 부분과 수업을 위해 정한 부분을 다른 색으로 표시해 보자. 기록의 배열을 본떠 칸을 나눈 것은 자료와 연결될 수 있다. 하지만 칸마다 1과 10과 100을 부여한 규칙을 우리가 정했다면 그 사실을 설명해야 한다.

이 구분은 상상력을 막지 않는다. 오히려 여러 모형을 공정하게 비교할 수 있게 한다. 같은 수를 나타내는 데 필요한 돌의 수와 자리 바꿈 횟수를 측정하면 편리함을 논할 수 있다. 편리하다는 결과를 곧 역사적 진실로 바꾸지만 않으면 탐구는 충분히 풍부해진다.

전시를 읽을 때에도 자료의 종류와 제작 공동체 및 확인된 기능을 차례로 묻는다. 후대 그림을 현장 사진처럼 읽지 않으며 수량을 판독했다는 사실을 모든 의미를 해독했다는 주장으로 넓히지 않는다. 오늘의 공동체가 그 자료를 설명하는 목소리도 함께 찾는다.

판단 대상	필요한 근거
계산의 정확성	정의한 규칙과 계산
계산의 편리함	작업 시간과 이동 수
역사적 사용	당시 자료와 맥락

탐구

두 계산판이 모두 37+48을 맞췄다면 어느 쪽이 역사적으로 옳을까?

풀이와 확인

답이 85라는 사실만으로는 결정할 수 없다. 그림과 물건의 형태를 얼마나 잘 설명하는지와 당시 기록에 어떤 규칙이 남아 있는지를 추가로 검토해야 한다. 수업에서는 두 판의 이동 횟수를 비교하는 별도 실험을 할 수 있다.

[A5] Royal Danish Library | The Guaman Poma Website

단위 없는 숫자는 무엇을 놓칠까

계산을 시작하기 전에 대상과 단위를 적는다.

수량을 나타내는 30이라는 기록만으로는 창고의 규모를 알 수 없다. 자루가 서른 개인지 무게가 서른 단위인지에 따라 뜻이 달라진다. 더구나 자루 하나의 크기가 일정하지 않다면 자루 수와 곡물의 총량도 같은 비율로 변하지 않을 수 있다.

수업용 창고에서 가 자루는 4킬로그램이고 나 자루는 6킬로그램이라고 정하자. 각각 다섯 자루가 있다면 자루 수는 같아도 무게는 20킬로그램과 30킬로그램이다. 같은 항목끼리 더한다는 말에는 숫자뿐 아니라 측정 기준이 같아야 한다는 조건이 들어 있다.

이 책의 미터와 킬로그램 예제는 현대의 계산 연습을 위한 것이다. 해당 단위를 고대 마야나 잉카가 그대로 사용했다는 뜻이 아니다. 역사 자료에 나타난 단위를 설명하는 문장과 오늘날의 단위로 만든 모형 문제를 구별하면 불필요한 오해를 피할 수 있다.

수업용 자루	개수	무게
가	5	20킬로그램
나	5	30킬로그램
합계	10	50킬로그램

탐구

두 종류의 자루를 합쳐 열 자루라고 적을 때 무엇을 덧붙이면 좋을까?

풀이와 확인

가 자루 다섯 개와 나 자루 다섯 개라는 구성과 각각의 단위 무게를 적는다. 그러면 총무게가 50킬로그램이라는 계산을 검증할 수 있다. 자루 수 열 개만 남기면 나중에 무게를 다시 구할 수 없다.

점과 막대와 영의 자리

한 점과 한 막대의 약속

작은 기호의 조합으로 여러 수를 만든다.

마야 수 표기의 기본을 배우는 그림에서는 점 하나를 1로 읽고 막대 하나를 5로 읽는다. 막대 두 개와 점 세 개를 함께 놓으면 $5+5+3$ 으로 13이다. 여기서 점과 막대는 꾸밈이 아니라 수량을 구별하는 기호다. 선의 길이 자체를 재어 값을 정하지 않는다.

이 책의 도해는 원유물의 모든 글자 모양을 복제한 것이 아니다. 원리를 익히기 위해 형태를 단순화한 수업용 표기다. 실제 자료를 읽을 때는 기호의 방향과 주변 글과 숫자 변형을 함께 살펴야 한다. 쉬운 도해 하나를 배웠다고 모든 비문을 읽을 수 있는 것은 아니다.

다섯 개의 점을 막대 하나로 바꾸면 같은 수량을 더 적은 기호로 나타낼 수 있다. 이 교환 규칙을 직접 실행해 보면 모양이 달라져도 값이 유지된다는 사실을 알 수 있다. 수를 읽는 활동과 기호를 정리하는 활동을 번갈아 하면 계산의 보존 원리가 드러난다.

1의 자리



13

위치와 자리의 무게를 함께 읽는다

13을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

기호 구성	계산	값
점 셋	$1+1+1$	3
막대 하나와 점 셋	$5+3$	8
막대 둘과 점 셋	$10+3$	13

탐구

점 여덟 개를 기본 규칙에 맞게 정리하면?

풀이와 확인

점 다섯 개를 막대 하나로 바꾸고 점 세 개를 남긴다. 따라서 막대 하나와 점 세 개가 된다. 정리 전의 값 8과 정리 뒤의 값 $5+3$ 이 같으므로 교환이 수량을 바꾸지 않았음을 확인할 수 있다.

[A12] Smithsonian NMAI | Maya Math Game

0부터 19까지의 표 만들기

기호를 읽는 규칙은 표 전체에서 일관되어야 한다.

0부터 19까지를 한 줄씩 적어 보면 점의 개수는 0부터 4까지 반복된다. 막대의 개수는 다섯 수마다 하나씩 늘어난다. 7은 막대 하나와 점 둘이며 14는 막대 둘과 점 넷이다. 이때 한 자리 안에서 막대 네 개를 그대로 두지 않고 다음 자리로 묶는 규칙을 나중에 배운다.

수를 5로 나누었을 때의 몫은 막대 개수이고 나머지는 점 개수다. 18을 5로 나누면 몫이 3이고 나머지가 3이므로 막대 셋과 점 셋이 된다. 기호를 외우는 대신 나눗셈으로 만드는 방법을 알면 처음 보는 수에도 같은 원리를 적용할 수 있다.

0은 막대도 점도 없다는 상태를 분명하게 표시하는 기호로 다룬다. 단순히 종이를 비워 두면 아직 쓰지 않은 자리와 값이 0인 자리를 구별하기 어렵다. 빈자리의 의미를 기록하는 일은 큰 수를 표현할 때 더욱 중요해진다.

7의 막대값



5

7의 점값



2

14의 막대값



10

14의 점값



4

표기 요소의 값을 비교한 수업용 막대그래프

수	막대 수	점 수
7	1	2
14	2	4
18	3	3

탐구

17과 19는 어떤 부분이 같고 어떤 부분이 다를까?

풀이와 확인

둘 다 막대 세 개를 사용한다. 17은 점 두 개를 더하고 19는 점 네 개를 더한다. 따라서 차이 2는 점의 개수 차이에서 드러난다. 막대의 길이나 간격을 바꾸어 차이를 나타낼 필요는 없다.

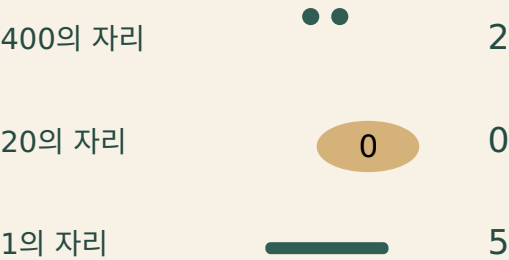
영은 빈 종이와 다르다

없음을 표시해야 다른 자리의 값이 보존된다.

일의 자리가 0이고 스무 묶음의 자리가 1인 수는 20이다. 아래 자리를 지워 버리고 점 하나만 남기면 그것이 1인지 20인지 읽는 사람이 판단하기 어렵다. 자릿값 표기에서 0은 값이 없는 자리를 표시하여 다른 기호의 위치를 보존한다.

현대 십진법에서도 205에서 0을 빼고 25라고 적으면 값이 바뀐다. 두 표기의 공통점은 빈 묶음의 자리를 따로 기록한다는 데 있다. 다만 이 비교는 개념을 설명하기 위한 것이며 서로의 기호가 직접 전해졌다는 역사적 주장을 포함하지 않는다.

수업에서는 세 칸의 표에 400의 자리와 20의 자리와 1의 자리를 붙여 보자. 위 칸에 2를 쓰고 가운데에 0을 쓴 뒤 아래에 5를 쓰면 805다. 가운데를 비워 놓아도 칸이 남아 있으면 읽을 수 있지만 칸까지 사라진 기록에서는 0의 표시가 큰 역할을 한다.



위치와 자리의 무게를 함께 읽는다

805을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

자리	세 자리 표기	기여하는 값
400의 자리	2	800
20의 자리	0	0
1의 자리	5	5

탐구

순수 이십진법의 위부터 2와 0과 5를 2와 5로 줄이면 어떤 값이 될까?

풀이와 확인

세 자리 표기는 $2 \times 400 + 0 \times 20 + 5 = 805$ 다. 두 자리로 줄인 표기는 $2 \times 20 + 5 = 45$ 가 된다. 값의 차이는 760이다. 숫자 자체를 옮기지 않은 것처럼 보여도 자리 수가 바뀌면 기호의 무게가 달라진다.

세로 배열을 읽는 방향

위치에 붙은 무게를 먼저 확인한다.

순수 이십진법 연습에서는 맨 아래 자리를 1의 자리로 정한다. 그 위는 20의 자리이고 다시 위는 400의 자리다. 아래에서 위로 이동할 때마다 같은 기호의 값이 스무 배가 된다. 표기된 기호를 읽기 전에 어느 자리인지 확인하는 습관이 필요하다.

위에 3이 있고 아래에 7이 있는 두 자리 수를 생각해 보자. 아래의 7은 그대로 7이며 위의 3은 스무 묶음 세 개를 뜻한다. 전체는 67이다. 위에서 아래로 기호의 모양만 이어 읽어 37이라고 말하는 것은 현대 십진법의 읽기 습관을 잘못 적용한 것이다.

수를 다른 표기로 바꾸는 과정은 번역과 닮았다. 기호 모양을 일대일로 치환하는 것이 아니라 전체 구조를 해석해야 한다. 67을 다시 만들 때도 먼저 20으로 나누어 묶음 수와 남은 수를 구하면 3과 7을 되찾을 수 있다.

20의 자리

3

1의 자리

7

위치와 자리의 무게를 함께 읽는다

67을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

위 자리	아래 자리	값
3	7	67
7	3	143
차이	자리 무게 19	76

탐구

위가 7이고 아래가 3인 표기는 앞의 수와 얼마나 다를까?

풀이와 확인

$7 \times 20 + 3 = 143$ 이므로 67과의 차이는 76이다. 자리 교환은 값을 보존하지 않는다. 두 자리에 놓인 숫자의 차이 4에 자리 무게의 차이 19를 곱해도 76을 얻을 수 있다.

19에서 20으로 넘어가기

한 자리의 한계에서 새 묶음이 생긴다.

19는 막대 셋과 점 넷으로 나타낼 수 있다. 여기에 점 하나를 더하면 점 다섯 개를 막대 하나로 바꿀 수 있다. 막대가 네 개가 되므로 전체 값은 20이다. 순수 이십진법의 표준 자리 표현에서는 이를 위 자리의 1과 아래 자리의 0으로 바꾼다.

두 번의 교환을 구별해 보자. 첫 교환은 점 다섯 개와 막대 하나 사이에서 일어난다. 두 번째 교환은 한 자리의 20과 다음 자리의 1 사이에서 일어난다. 둘 다 모양을 바꾸지만 적용되는 묶음의 크기와 위치 변화가 다르다.

올림을 단순히 숫자 하나를 위에 쓰는 절차로 외우면 왜 그런지 놓치기 쉽다. 실제 말 스무 개를 모아 큰 고리 하나로 교환해 보면 값이 보존되는 이유가 분명해진다. 아래 자리에 남은 양이 없다는 사실도 0으로 함께 기록해야 한다.

20의 자리



1

1의 자리



0

위치와 자리의 무게를 함께 읽는다

20을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

단계	아래 자리	위 자리
39 표시	19	1
1 추가	20	1
정리	0	2

탐구

39에 1을 더할 때 어느 자리에서 교환이 일어날까?

풀이와 확인

39는 20의 자리 1과 1의 자리 19다. 아래 자리에 1을 더하면 20이 되어 위 자리로 1을 올린다. 결과는 위 자리 2와 아래 자리 0으로 40이다. 위 자리의 값은 기존 20과 새로 올라온 20의 합이다.

같은 값을 여러 모습으로 놓기

표준화 전후에 무엇이 유지되는지 살핀다.

값이 12인 기호 묶음은 점 열두 개로도 만들 수 있다. 막대 하나와 점 일곱 개로 바꿀 수도 있으며 막대 둘과 점 둘로 정리할 수도 있다. 교환 과정의 모든 상태는 같은 수를 나타낸다. 계산 중간 상태와 최종 표준 표현을 구별하면 실수를 찾기 쉽다.

표준 표현은 읽는 사람이 기호를 매번 오래 세지 않도록 돕는다. 그러나 중간 상태를 틀렸다고만 말하면 계산의 과정을 잃는다. 예를 들어 덧셈 직후에 점이 여섯 개 보이는 것은 아직 정리하지 않았다는 뜻일 수 있다. 먼저 값을 계산하고 다음에 규칙에 맞게 정돈하자.

표기의 경제성을 비교할 수도 있다. 12를 점만으로 나타내면 기호 열두 개가 필요하다. 막대 둘과 점 둘이면 네 개로 줄어든다. 이 비교에서는 점과 막대를 각각 기호 하나로 세었다는 기준을 밝혀야 한다. 막대를 긋는 시간까지 비교하려면 별도의 측정이 필요하다.

1의 자리



12

위치와 자리의 무게를 함께 읽는다

12를 순수 이십진법으로 나타낸 단순화된 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

12의 표현	기호 수
점 열두 개	12
막대 하나와 점 일곱 개	8
막대 둘과 점 둘	4

탐구

18을 점만으로 표시한 상태에서 막대 셋과 점 셋으로 정리하면 기호가 몇 개 줄어들까?

풀이와 확인

점 열여덟 개에서 막대 셋과 점 셋인 여섯 개로 줄어든다. 줄어든 기호 수는 12개다. 이 결과는 기호 개수에 대한 비교이며 기록 시간이 정확히 3분의 1로 줄어든다는 뜻은 아니다.

표기의 오류를 찾아 고치기

오답의 원인을 값과 규칙으로 나누어 설명한다.

한 학생이 16을 막대 두 개와 점 여섯 개로 나타냈다고 하자. 값은 $10+6$ 으로 16이 맞지만 기본 정리 규칙을 끝내지는 않았다. 점 다섯 개를 막대 하나로 바꾸면 막대 셋과 점 하나가 된다. 값을 잘못 나타낸 경우와 표준화를 덜 한 경우는 피드백이 달라야 한다.

다른 학생은 막대 셋과 점 둘을 32라고 읽었다. 이는 점과 막대의 개수를 현대 숫자의 두 자리처럼 붙인 오류다. 이 경우에는 기호 하나의 값을 다시 확인하고 $5 \times 3 + 2$ 를 계산하도록 안내해야 한다. 표기를 예쁘게 다시 그리는 것만으로는 읽기 규칙의 혼동이 해결되지 않는다.

세 번째 학생이 아래 자리의 0을 생략했다면 위치 정보가 유지되는지 살펴야 한다. 자릿값 표가 남아 있으면 값은 분명할 수 있다. 칸 없는 그림으로 옮기는 순간 모호해질 수 있으므로 전사 과정에서 필요한 정보를 별도로 표시하도록 하자.

사례	문제의 종류	수정 방향
막대 둘과 점 여섯	미완성 정리	5개를 1막대로 교환
막대 셋과 점 둘을 32로 읽음	규칙 혼동	$15+2$ 로 계산
아래 자리 삭제	위치 손실	자리와 0 복원

탐구

막대 두 개와 점 다섯 개를 15로 읽은 학생에게 어떤 설명이 적절할까?

풀이와 확인

값의 판독은 맞았다고 인정한 뒤 점 다섯 개를 막대 하나로 바꾸면 막대 셋으로 더 간단히 쓸 수 있다고 설명한다. 정답과 표준 표현을 서로 다른 기준으로 확인하는 피드백이 적절하다.

고대 아메리카관 / 04

스무 개씩 묶는 계산

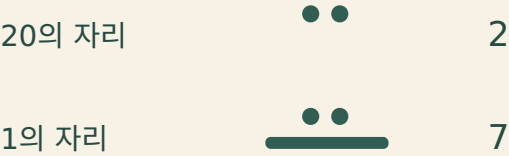
47을 두 자리로 바꾸기

나눗셈의 몫과 나머지가 표기의 구조가 된다.

47개의 말을 스무 개씩 묶으면 두 묶음이 되고 일곱 개가 남는다. 따라서 순수 이십진법에서는 위 자리 2와 아래 자리 7로 나타낼 수 있다. 이 과정을 식으로 쓰면 $47=2 \times 20+7$ 이다. 나머지가 20보다 작다는 조건이 표현을 하나로 정해 준다.

나머지를 27로 두고 위 자리를 1로 적어도 합은 47이다. 그러나 아래 자리에 스무 개가 더 있으므로 아직 묶기 작업이 끝나지 않은 상태다. 표준 표현을 만들려면 아래 자리의 20을 위로 옮겨야 한다. 자릿값 규칙은 값의 보존과 정리의 기준을 함께 제공한다.

큰 수에서도 같은 방법을 반복한다. 먼저 20으로 나눈 나머지를 가장 아래에 적고 몫을 다시 20으로 나눈다. 더 이상 묶음이 남지 않을 때까지 진행하면 각 자리가 정해진다. 낮은 자리부터 만들어 가지만 읽을 때는 큰 자리의 무게를 확인하며 합산한다.



위치와 자리의 무게를 함께 읽는다

47을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

전체	20의 묶음	남은 수
47	2	7
87	4	7
107	5	7

탐구

87을 두 자리로 나타내고 계산해 보자.

풀이와 확인

87을 20으로 나누면 몫은 4이고 나머지는 7이다. 따라서 위 자리 4와 아래 자리 7이다. 계산은 $4 \times 20 + 7 = 87$ 로 한다. 아래의 7은 막대 하나와 점 둘로 표현할 수 있다.

올림이 없는 덧셈

자리별로 더한 뒤 전체 값으로 확인한다.

수업용 순수 이십진법에서 26은 위 자리 1과 아래 자리 6이다. 31은 위 자리 1과 아래 자리 11이다. 두 수를 더할 때는 같은 무게의 자리끼리 모은다. 아래 자리 합은 17이고 위 자리 합은 2이므로 결과는 $2 \times 20 + 17 = 57$ 이다.

아래 자리 합이 20보다 작으므로 새 묶음을 위로 올릴 필요가 없다. 이 경우에는 자리별 계산을 독립적으로 진행할 수 있다. 그러나 결과를 위 2와 아래 17이라고 적은 뒤에도 각 자리의 허용 범위를 확인해야 한다. 단순한 예제일수록 올림 조건을 명확히 말해 두면 다음 문제로 이어진다.

점막대 그림을 겹쳐 놓았다면 아래 자리의 기호도 정리한다. 6은 막대 하나와 점 하나이며 11은 막대 둘과 점 하나다. 합치면 막대 셋과 점 둘로 17이 된다. 숫자식과 기호 그림이 같은 과정을 표현하는지 서로 대조해 보자.

수	20의 자리	1의 자리
26	1	6
31	1	11
합	2	17

탐구

25와 32를 같은 방법으로 더하면 어떤 자리 표현이 될까?

풀이와 확인

25는 위 1과 아래 5이며 32는 위 1과 아래 12다. 자리별 합은 위 2와 아래 17로 57이다. 다른 두 수의 덧셈이 같은 결과를 만들 수 있음을 확인할 수 있다.

올림이 있는 덧셈

20을 넘은 아래 자리에서 새 묶음이 생긴다.

38과 27을 더해 보자. 38은 20의 자리 1과 1의 자리 18이고 27은 위 1과 아래 7이다. 아래 자리 합은 25이므로 20 한 묶음과 5로 나눈다. 위 자리에는 기존 두 묶음과 새 묶음 하나가 합쳐져 3이 놓인다.

결과는 위 자리 3과 아래 자리 5이며 값은 65다. 올림을 표시하지 않고 위 자리 2와 아래 자리 25로 남겨도 값 자체는 65지만 표준 표현은 아니다. 계산 중간의 기록을 지우지 않고 두 상태를 나란히 두면 올림이 값을 보존하는 교환임을 확인할 수 있다.

십진법 덧셈과 비교하면 올림의 기준만 다르고 구조는 닮았다. 십진법에서는 일의 자리 10을 십의 자리 1로 바꾼다. 여기서는 20을 다음 자리 1로 바꾼다. 어떤 밑을 쓰든 자리의 무게에 맞게 교환해야 한다는 원리를 일반화할 수 있다.



계산 단계	20의 자리	1의 자리
38+27의 원합	2	25
20 한 묶음 이동	3	5
값 확인	60	5

탐구

49와 36의 합을 순수 이십진법으로 나타내 보자.

풀이와 확인

49는 위 2와 아래 9이며 36은 위 1과 아래 16이다. 아래 합 25에서 20을 올리면 위는 4가 되고 아래는 5가 된다. $4 \times 20 + 5 = 85$ 이며 십진법 덧셈 $49 + 36$ 으로도 계산된다.

빌림이 필요한 뺄셈

큰 묶음을 풀어도 전체 수량은 변하지 않는다.

62에서 28을 빼려면 62를 위 자리 3과 아래 자리 2로 놓는다. 28은 위 1과 아래 8이다. 아래 자리 2에서는 8을 뺄 수 없으므로 위의 스무 묶음 하나를 푼다. 그러면 위 자리 2와 아래 자리 2가 되고 전체 값은 여전히 62다.

이제 아래에서는 $22-8=14$ 를 계산하고 위에서는 $2-1=1$ 을 계산한다. 결과는 위 자리 1과 아래 자리 14이므로 34다. 빌림이라는 표현이 실제로 수를 새로 가져오는 것처럼 들릴 수 있지만 전체 안에서 단위를 바꾸어 표현한 것이다.

틀린 풀이를 분석할 때는 빌린 뒤 위 자리를 줄였는지 확인한다. 아래에 20을 더하고 위를 그대로 3으로 두면 원래 수가 82가 되어 버린다. 각 단계에서 위 자리 값과 아래 자리 값을 합산하는 검산은 이런 실수를 빠르게 드러낸다.

62의 상태	20의 자리	1의 자리
처음	3	2
묶음 풀기	2	22
28 빼기	1	14

탐구

81-37을 같은 방법으로 계산하면?

풀이와 확인

81은 위 4와 아래 1이다. 위에서 한 묶음을 풀면 위 3과 아래 21이다. 37의 위 1과 아래 17을 빼면 위 2와 아래 4가 남는다. $2 \times 20 + 4 = 44$ 이며 $44 + 37 = 81$ 로 확인된다.

세 자리 수 843

400의 자리를 더하면 표현 범위가 넓어진다.

순수 이십진법의 세 자리 무게는 아래부터 1과 20과 400이다. 843은 400 두 묶음을 빼면 43이 남고 다시 20 두 묶음을 빼면 3이 남는다. 따라서 위부터 2와 2와 3으로 나타낼 수 있다. 각 자리의 기여는 800과 40과 3이다.

세 자리 수를 읽을 때 위의 2와 가운데 2가 같은 값을 갖지 않는다는 점을 강조하자. 기호의 개수는 같지만 자리가 다르므로 각각 800과 40을 나타낸다. 자릿값 표기는 적은 기호로 큰 수를 다루는 대신 위치를 정확하게 보존해야 한다는 조건을 가진다.

이 예제의 400은 순수 이십진법 연습에서 나온 값이다. 다음 장에서 배울 장기력의 셋째 자리 360과 혼동하면 위부터 같은 기호를 놓아도 전체가 달라진다. 제목과 자리 이름을 함께 적는 것은 설명을 위한 장식이 아니라 계산 체계를 구별하는 정보다.

400의 자리

● ●

2 × 400

=

800

20의 자리

● ●

2 × 20

=

40

1의 자리

● ● ●

3 × 1

=

3

}

843

843을 400과 20과 1의 자리 점으로 놓고 자리별 기여를 더한다.

자리	기호값	전체에 더하는 값
400	2	800
20	2	40
1	3	3

탐구

위부터 1과 5와 9인 순수 이십진법 수를 읽어 보자.

풀이와 확인

1×400+5×20+9=509다. 같은 숫자 배열을 장기력의 세 단위로 읽으면 469일이 되므로 체계를 먼저 밝혀야 한다. 이 차이는 기호의 문제가 아니라 셋째 자리 무게가 400인지 360인지의 차이다.

이어 읽기 / 스무 개씩 묶는 계산

반복 나눗셈으로 큰 수를 세 자리에 놓기

20으로 나누는 일을 되풀이하면 큰 수의 자리가 아래부터 하나씩 정해진다.

3장은 47과 843처럼 비교적 작은 수를 순수 이십진법으로 바꾸었다. 같은 방법을 5000이라는 큰 수에 적용해 보자. 5000을 20으로 나누면 몫은 250이고 나머지는 0이다. 이 첫 나머지 0이 가장 아래인 1의 자리에 놓인다.

다음에는 몫 250을 다시 20으로 나눈다. 몫은 12이고 나머지는 10이므로 20의 자리에 10이 놓인다. 마지막 몫 12는 20보다 작아 더 나눌 수 없으므로 그대로 400의 자리가 된다. 따라서 5000은 위부터 12와 10과 0으로 나타낸다.

검산은 자리 무게를 곱해 더하는 방향으로 한다. $12 \times 400 + 10 \times 20 + 0$ 은 4800+200으로 5000이다. 점막대 그림에서는 위 자리에 막대 둘과 점 둘, 가운데 자리에 막대 둘, 아래 자리에 0의 표시가 들어간다. 나눗셈은 아래 자리부터 답을 주지만 읽을 때는 위 자리의 큰 무게부터 확인한다는 점이 3장의 설명과 같다.

세 자리로 나타낼 수 있는 가장 큰 수도 이 구조에서 바로 구할 수 있다. 세 자리에 모두 19를 놓으면 $19 \times 400 + 19 \times 20 + 19 = 7999$ 다. 여기에 1을 더하면 모든 자리에서 올림이 이어져 8000에는 넷째 자리가 필요하다. 십진법에서 999 다음에 1000이 오는 것과 같은 구조이며 이 계산은 순수 이십진법의 학습용 모형이다.

20으로 거듭 나누기

$$5000 \div 20 = 250$$

0 → 1의 자리로



400

$$250 \div 20 = 12$$

10 → 20의 자리로



20

12 < 20이므로 멈춤

12 → 400의 자리로



1

$$12 \times 400 + 10 \times 20 + 0 = 4800 + 200 + 0 = 5000$$

5000을 20으로 거듭 나눈 나머지가 아래 자리부터 채워진다.

탐구

순수 이십진법으로 2400을 나타내면 각 자리에 무엇이 놓일까?

풀이와 확인

2400 ÷ 20은 몫 120과 나머지 0이고 120 ÷ 20은 몫 6과 나머지 0이다. 따라서 위부터 6과 0과 0이 놓인다. 6 × 400 = 2400으로 검산되며 아래 두 자리가 모두 비어 있으므로 0의 표시를 두 번 남겨야 값이 6으로 줄어들지 않는다.

[A12] Smithsonian NMAI. Maya Math Game

곱셈을 묶음의 반복으로 보기

한 묶음을 여러 번 더하면 곱셈을 설명할 수 있다.

수업용 기록에서 물건 27개를 담은 바구니가 세 개 있다고 하자. 전체 수량은 27×3 이다. 27을 $20+7$ 로 나누면 스무 묶음 세 개와 작은 말 스물한 개가 된다. 작은 말 21개는 다시 스무 묶음 하나와 말 하나로 바뀐다.

따라서 전체는 스무 묶음 네 개와 말 하나로 81이다. 이 설명은 분배법칙 $3 \times (20+7) = 60+21$ 을 기호의 이동으로 나타낸 것이다. 곱셈을 한 번에 외운 답으로 처리하지 않고 묶음 구조로 분해하면 올림이 어디에서 생기는지 분명해진다.

바구니 수가 커지면 같은 방식으로 반복하면 된다. 다만 계산 과정을 실제 고대의 곱셈 알고리즘이라고 소개하지는 않는다. 여기서는 점막대 표기에서 출발해 오늘의 학습자가 자릿값과 분배법칙을 탐구하는 수업용 계산 방법을 구성하고 있다.

$$27 \times 3 = (20+7) \times 3$$

$$60+21=80+1$$

$$81=4 \times 20+1$$

분배법칙을 이용한 현대의 수업용 풀이

구성	수량
20을 세 번	60
7을 세 번	21
합계	81

탐구

18개씩 담긴 바구니가 다섯 개라면 스무 묶음은 몇 개이고 나머지는 얼마인가?

풀이와 확인

$18 \times 5 = 90$ 이며 $90 = 4 \times 20 + 10$ 이다. 스무 묶음 네 개와 나머지 열 개가 된다. 점막대 표기에서는 위 자리 4와 아래 자리 10을 사용한다. 아래의 10은 막대 두 개로 나타낼 수 있다.

나눗셈과 남은 수

몫을 구한 뒤 나머지의 조건까지 확인한다.

83개의 말을 네 사람에게 같은 수로 나누어 보자. 각자 스무 개씩 주면 80개를 나누고 3개가 남는다. 몫은 20이며 나머지는 3이다. 나머지가 나누는 수 4보다 작으므로 더 이상 모든 사람에게 하나씩 줄 수 없다.

각자 19개씩 주었다면 7개가 남는다. 합계는 여전히 83이지만 같은 수로 더 나눌 수 있으므로 최종 몫은 아니다. 나눗셈의 답은 전체 수를 맞추는 식만으로 완성되지 않는다. 나머지가 0 이상이며 나누는 수보다 작다는 조건이 함께 필요하다.

수업에서는 나머지를 실제로 무엇으로 처리할지도 이야기할 수 있다. 나눌 수 없는 물건이라면 세 개를 남겨 둘 수 있다. 곡물처럼 더 작게 나눌 수 있는 양이라면 한 사람에게 4분의 3 단위를 더 줄 수 있다. 산술과 실제 대상의 성질을 연결하는 지점이다.

전체	사람 수	몫	나머지
83	4	20	3
95	6	15	5
확인	나누는 수 $\times$ 몫 + 나머지	전체와 같음	나누는 수보다 작음

탐구

95개를 여섯 사람에게 같은 수로 나누면 어떻게 될까?

풀이와 확인

한 사람에게 15개씩 주면 90개를 나누고 5개가 남는다. $95 = 6 \times 15 + 5$ 이며 5는 6보다 작다. 물건을 쪼갤 수 있는지에 따라 남은 다섯 개의 처리 방법은 달라지지만 정수 나눗셈의 몫과 나머지는 같다.

두 체계로 교차 검산하기

표기의 변환은 답을 확인하는 또 하나의 방법이다.

계산을 마친 뒤 같은 결과를 십진법으로 바꾸어 확인하면 서로 다른 단계의 오류를 찾을 수 있다. 예를 들어 순수 이십진법의 위 4와 아래 5는 85다. 원래 문제 $49+36$ 을 십진법으로 계산한 값과 같다면 적어도 최종 수량은 일치한다.

다만 같은 잘못을 두 번 적용하면 검산도 통과할 수 있다. 처음부터 자리 무게를 10으로 잘못 읽고 결과도 같은 방식으로 읽으면 계산이 맞아 보일 수 있다. 검산에서는 원래 물건 수를 직접 세거나 다른 표현으로 분해하는 등 독립적인 확인 방법을 택하는 것이 좋다.

검산 기록에는 결과뿐 아니라 확인한 관계를 적는다. 덧셈은 합에서 한 수를 빼는 방법으로 확인할 수 있다. 뺄셈은 차에 뺀 수를 더하면 된다. 곱셈은 반복 덧셈이나 나눗셈으로 대조한다. 표기법을 배우는 활동이 연산 사이의 관계를 이해하는 활동으로 이어진다.

연산	독립적인 확인
덧셈	합에서 한 수 빼기
뺄셈	차에 뺀 수 더하기
곱셈	같은 수의 반복 합으로 대조

탐구

위 3과 아래 12라는 덧셈 결과를 어떻게 검산할 수 있을까?

풀이와 확인

먼저 $3 \times 20 + 12 = 72$ 로 변환한다. 원래 두 수의 합을 별도로 계산해 72인지 확인하고 72에서 한 수를 빼서 다른 수가 나오는지도 살핀다. 원래 피연산자가 없으면 결과의 표기만 읽을 수 있을 뿐 덧셈 전체의 정답 여부는 판단할 수 없다.

장기력으로 긴 시간을 세다

하루를 묶는 다섯 단위

장기력의 자리를 순수 이십진법과 구별한다.

마야 장기력을 계산할 때는 각 자리의 무게를 먼저 적는다. 킨은 하루이며 위날은 20일이다. 툰은 위날 열여덟 묶음이므로 360일이다. 카툰은 툰 스무 묶음으로 7200일이며 박툰은 다시 스무 묶음으로 144000일이다.

주의할 곳은 위날에서 툰으로 올라가는 경계다. 모든 자리가 스무 배라고 가정하면 툰을 400일로 잘못 계산한다. 날짜를 기록하는 체계의 규칙을 일반적인 이십진법의 규칙보다 먼저 적용해야 한다. 같은 점막대 기호를 사용해도 자리의 뜻은 달라질 수 있다.

여기서 툰의 360일을 오늘의 한 해와 같다고 부르지 않는다. 태양의 계절 주기를 근사하는 365일 달력과 장기력의 묶음 단위는 목적이 다르다. 단위 이름 옆에 일수를 함께 쓰면 두 체계가 섞이는 오류를 줄일 수 있다.

단위	킨	위날	툰	카툰
일수	1	20	360	7200

장기력의 단위 무게

탐구

2툰과 3위날과 4킨은 며칠인가?

풀이와 확인

$2 \times 360 + 3 \times 20 + 4 = 784$ 일이다. 2툰을 800일로 바꾸면 안 된다. 각 자리의 기여를 따로 계산한 뒤 합하면 예외적인 묶음 규칙을 놓치지 않는다.

기록을 일수로 펼치기

여러 단위의 합을 하나의 기준으로 바꾼다.

가상의 기간 기록을 1카톤 2톤 3위날 4킨으로 정해 보자. 이는 특정 비문의 날짜를 옮긴 것이 아니라 장기력의 단위를 배우는 예제다. 각 항목을 일수로 환산하면 7200과 720과 60과 4가 된다. 합계는 7984일이다.

자리 이름을 생략한 숫자열만 적으면 어느 쪽이 큰 자리인지 혼동하기 쉽다. 이 책의 예제는 가장 큰 단위를 먼저 쓴다. 처음에는 숫자 아래에 단위를 붙여 적고 익숙해진 뒤에 간단한 표기로 바꾸는 편이 안전하다. 간단한 표기는 규칙을 공유하는 독자에게만 편리하다.

합산 뒤에는 역순으로 묶어 보며 검산한다. 7984에서 카톤 한 묶음을 덜면 784가 남는다. 여기서 톤 둘과 위날 셋과 킨 넷을 차례로 찾을 수 있다. 읽기와 쓰기가 반대 방향의 계산이라는 점이 드러난다.

$$\begin{array}{c} 7200+720+60+4 \\ 7984\text{일} \\ 7984-7200=784 \end{array}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

1톤 17위날 19킨은 며칠인가?

풀이와 확인

$360+340+19=719$ 일이다. 여기에 하루를 더하면 720일이 되어 정확히 2톤이 된다. 각 자리의 최댓값 근처에서 계산하면 올림이 여러 단계로 이어지는 모습을 볼 수 있다.

일수를 다시 묶는 방법

큰 단위부터 묶고 나머지를 구한다.

1000일을 장기력의 작은 단위로 바꾸어 보자. 360으로 나누면 툰 두 묶음과 280일이 남는다. 남은 280일을 20으로 나누면 위날 열네 묶음이 된다. 따라서 1000일은 2툰 14위날 0킨이다.

이때 위날의 숫자는 0부터 17까지 놓일 수 있다. 18이 되면 툰 하나로 교환되기 때문이다. 킨은 0부터 19까지 허용된다. 자리마다 가능한 숫자의 범위를 적어 두면 표기 결과가 정리된 상태인지 곧바로 확인할 수 있다.

역변환은 전체 일수를 재구성하는 과정이다. $2 \times 360 + 14 \times 20 + 0$ 이 1000과 같아야 한다. 같은 수를 표현하는 중간 상태는 여러 개일 수 있지만 각 자리 범위까지 만족하는 정리된 표현은 하나로 정해진다.



$$1000 = 2 \times 360 + 14 \times 20 + 0$$

1000일을 툰 두 묶음과 위날 열네 묶음으로 나눈 비례 막대

탐구

1500일을 툰과 위날과 킨으로 나타내면?

풀이와 확인

$1500 = 4 \times 360 + 60$ 이므로 4툰 3위날 0킨이다. 3위날은 60일이며 전체는 $1440 + 60 = 1500$ 일이다. 위날이 18보다 작으므로 더 올릴 묶음은 없다.

서로 다른 두 올림

킨과 위날의 경계는 같은 크기가 아니다.

17위날 19킨에 하루를 더하면 킨이 20이 된다. 이것을 위날 하나로 교환하면 18위날이 된다. 다시 18위날을 툰 하나로 바꾸므로 결과는 1툰 0위날 0킨이다. 한 번의 덧셈이 두 종류의 올림을 일으킨다.

십진수처럼 매번 같은 기준으로 올리면 틀리기 쉽다. 첫 경계의 교환 수는 20이며 다음 경계는 18이다. 연산 알고리즘은 실제로 각 단위의 교환표를 따라 움직인다. 단순히 큰 자리로 하나 올린다고 외우는 것보다 조건을 적어 보자.

달력과 시계에도 비슷한 구조가 있다. 오늘의 시간 표기에서 60초와 60분과 24시간은 서로 다른 묶음 규칙을 갖는다. 이는 구조를 이해하기 위한 비교이며 두 체계가 역사적으로 연결되었다는 뜻은 아니다.

단계	툰	위날	킨
처음	0	17	19
하루 추가	0	18	0
다시 교환	1	0	

단위 경계가 다른 두 번의 올림 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

1툰 17위날 18킨에 3일을 더하면?

풀이와 확인

킨은 21이므로 1위날을 올리고 1킨을 남긴다. 위날은 18이 되어 1툰을 올린다. 결과는 2툰 0위날 1킨이며 721일이다.

이어 읽기 / 장기력으로 긴 시간을 세다

빌림이 두 번 이어지는 장기력 뺄셈

자리마다 교환 크기가 다른 빌림을 한 단계씩 따라간다.

4장의 낱 차이 단원은 빌림이 필요하면 전체 일수로 먼저 바꾸는 편이 편리하다고 했다. 여기서는 일수로 바꾸지 않고 자리별로 빼는 방법을 직접 따라가 본다. 예제는 같은 기준점에서 켄 가상의 두 기록 3톤 2위날 5킨과 1톤 15위날 12킨이다. 앞의 값에서 뒤의 값을 빼면 두 기록 사이의 상대 기간이 나온다.

먼저 킨의 자리에서는 5에서 12를 뺄 수 없다. 위날 하나를 풀면 20킨이 되므로 위날은 1이 되고 킨은 25가 된다. $25-12=13$ 이 킨 자리의 결과다. 다음으로 위날의 자리에서도 1에서 15를 뺄 수 없으므로 톤 하나를 풀어야 한다.

이때 톤 하나는 20위날이 아니라 18위날이다. 위날은 $1+18=19$ 가 되고 $19-15=4$ 가 남으며 톤은 $2-1=1$ 이 된다. 결과는 1톤 4위날 13킨이다. 톤 하나를 20위날로 잘못 풀면 위날이 6으로 나와 답이 40일 커진다.

검산은 전체 일수로 한다. 앞의 기록은 $3 \times 360 + 2 \times 20 + 5 = 1125$ 일이고 뒤의 기록은 $360 + 15 \times 20 + 12 = 672$ 일이다. 차는 453일이며 1톤 4위날 13킨도 $360 + 80 + 13 = 453$ 일이다. 두 경로가 같은 답을 주면 빌림 과정에서 교환 크기를 바르게 썼다는 것을 확인할 수 있다.

툰

위날

킨

1툰 → 18위날

1위날 → 20킨

처음	3	2	5
푼 뒤	2	19	25
빼는 수	1	15	12
결과	1	4	13

1툰 4위날 13킨 = 360 + 80 + 13 = 453일

킨에서 한 번, 위날에서 한 번 묶음을 풀어 빼는 과정

단계	툰	위날	킨
처음	3	2	5
위날 하나를 킨으로	3	1	25
툰 하나를 위날로	2	19	25
1툰 15위날 12킨을 뺀 결과	1	4	13

탐구

2툰 0위날 3킨에서 0툰 17위날 9킨을 빼면 어떻게 될까?

풀이와 확인

킨 3에서 9를 빼려면 위날을 풀어야 하는데 위날이 0이므로 먼저 톤 하나를 18위날로 푼다. 그다음 위날 하나를 20킨으로 풀면 1툰 17위날 23킨이 되고 빼면 1툰 0위날 14킨이 남는다. 전체 일수로는 $723 - 349 = 374$ 일이며 $360 + 14 = 374$ 로 일치한다.

[A13] Smithsonian NMAI. Maya Calendar Converter

[A4] Smithsonian NMAI. The Calendar System

날짜의 차이 구하기

기간은 두 누적 일수의 차로 계산할 수 있다.

가상의 두 기록을 같은 기준점에서 쟀 3톤 2위날 5킨과 3톤 5위날 12킨으로 놓자. 앞의 기록은 1125일이며 뒤의 기록은 1192일이다. 두 값의 차는 67일이다. 기준점이 같다는 조건을 확인해야 뺄셈이 의미를 가진다.

자리별로 계산해도 같은 답이 나와야 한다. 톤의 차는 없고 위날은 셋 늘었으며 킨은 일곱 늘었다. $3 \times 20 + 7 = 67$ 이다. 작은 자리에서 빌림이 필요한 예제라면 전체 일수로 먼저 바꾸는 방법이 특히 편리하다.

실제 비문의 날짜를 현대 달력의 연월일로 바꾸는 일에는 추가적인 대응 기준이 필요하다. 여기서는 두 기록 사이의 상대 기간만 계산한다. 상대적인 차를 구하는 문제와 절대 날짜를 정하는 문제를 분리하면 해석의 조건이 선명해진다.

$$1192 - 1125 = 67$$

$$3 \times 20 + 7 = 67$$

상대 기간은 67일

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

2톤 1위날 2킨에서 1톤 17위날 18킨을 빼면?

풀이와 확인

앞은 742일이며 뒤는 718일이다. 차이는 24일로 1위날 4킨이다. 단위별로 빌려 계산할 때도 톤 하나가 18위날이라는 규칙을 적용해야 한다.

큰 자리의 변화가 뜻하는 것

자리의 전환을 시간 전체의 끝으로 읽지 않는다.

큰 자리의 숫자가 바뀌는 순간은 체계 안의 경계다. 자동차 거리계가 여러 자리를 한꺼번에 바꾸더라도 이동이 끝나는 것은 아니다. 장기력의 큰 단위가 전환되는 사건도 숫자 구조와 역사적 의미를 구별하여 해석해야 한다.

예를 들어 19카톤과 그 아래의 마지막 날 다음에는 박톤의 수가 하나 늘어난다. 이는 카톤 스무 묶음을 박톤 하나로 교환한 결과다. 계산 규칙에서 곧바로 세계가 끝난다는 결론을 얻을 수는 없다. 그런 주장을 하려면 독립적인 문헌과 맥락이 필요하다.

숫자 경계가 문화적으로 중요할 수 있다는 점은 인정하면서도 특정한 의미를 단정하지 않는 태도가 필요하다. 기념일은 산술적으로 정의할 수 있지만 그 날에 사람들이 부여한 의미는 별도의 역사적 질문이다. 수학은 해석의 일부를 도와줄 뿐 전부를 대신하지 않는다.

$$20 \times 7200 = 144000$$

19카톤 19톤 17위날 19킨
다음 날은 1박톤

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

19카톤 19톤 17위날 19킨에 하루를 더하면?

풀이와 확인

작은 자리부터 교환하면 모두 0이 되고 박톤이 하나 늘어난다. 전체 일수는 144000일이다. 이 답은 묶음 규칙의 결과이며 미래 사건을 예언하는 내용은 아니다.

단위 표가 틀렸을 때

계산 실수와 체계 선택의 오류를 구별한다.

학생이 2톤 3위날을 860일이라고 계산했다면 덧셈만 다시 시켜서는 원인이 해결되지 않는다. $2 \times 400 + 3 \times 20$ 으로 계산했기 때문이다. 문제는 더하기가 아니라 톤의 무게를 400으로 선택한 데 있다.

올바른 식은 $2 \times 360 + 3 \times 20$ 이며 결과는 780일이다. 두 답의 차이 80일은 톤 한 단위의 오차 40일을 두 번 적용한 값이다. 오류의 크기를 분석하면 어느 자리의 규칙이 잘못 쓰였는지 추적할 수 있다.

검산 질문을 단계별로 만들면 효과적이다. 먼저 단위 이름을 적었는지 묻고 다음에는 환산 값을 확인한다. 마지막에 곱셈과 합산을 살핀다. 처음부터 답 숫자만 비교하면 개념의 혼동과 단순 실수가 같은 오답으로 보인다.

올바른 2톤		720
잘못 쓴 2톤		800
차이		80

400과 360을 혼동했을 때 생기는 오차

탐구

같은 오류로 5톤을 계산하면 실제 값과 얼마나 차이 날까?

풀이와 확인

틀린 값은 2000일이며 올바른 값은 1800일이다. 차이는 200일로 5×40 이다. 톤의 숫자에 비례해 오차가 커지므로 단위 표를 먼저 고쳐야 한다.

장기력 계산표를 설계하기

입력 조건까지 적어야 계산 가능한 도구가 된다.

종이에 장기력 계산표를 만든다면 첫 줄에는 단위 이름을 적고 둘째 줄에는 각 단위의 일수를 적는다. 셋째 줄에 입력값을 쓴 뒤 넷째 줄에서 자리별 곱을 구한다. 마지막으로 곱들을 모두 더하면 누적 일수가 나온다.

표에는 허용 범위도 붙여 두자. 킨은 20보다 작아야 하고 위날은 18보다 작아야 한다. 톤과 카톤도 큰 자리로 교환하기 전에는 20보다 작아야 한다. 범위를 벗어난 값은 곧바로 삭제하기보다 아직 정리되지 않은 입력인지 살핀다.

완성한 도구에는 알려진 예제 두 개를 넣어 시험한다. 1톤이 360일로 계산되는지와 1카톤이 7200일이 되는지를 확인하면 핵심 단위의 오류를 찾을 수 있다. 도구의 디자인과 계산 규칙을 함께 검토하는 작은 제작 과제다.

단위	톤	위날	킨
일수	360	20	1
입력	2	3	4
자리의 값	720	60	

입력과 환산을 분리한 계산표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

입력값에 0톤 18위날 3킨이 들어오면 어떻게 처리할까?

풀이와 확인

값을 보존하며 1톤 0위날 3킨으로 정리한다. 총일수는 363일이다. 범위 오류라는 안내만 보여 주는 대신 무엇을 교환해야 하는지 알려 주면 학습자가 규칙을 이해할 수 있다.

두 달력이 맞물리는 날

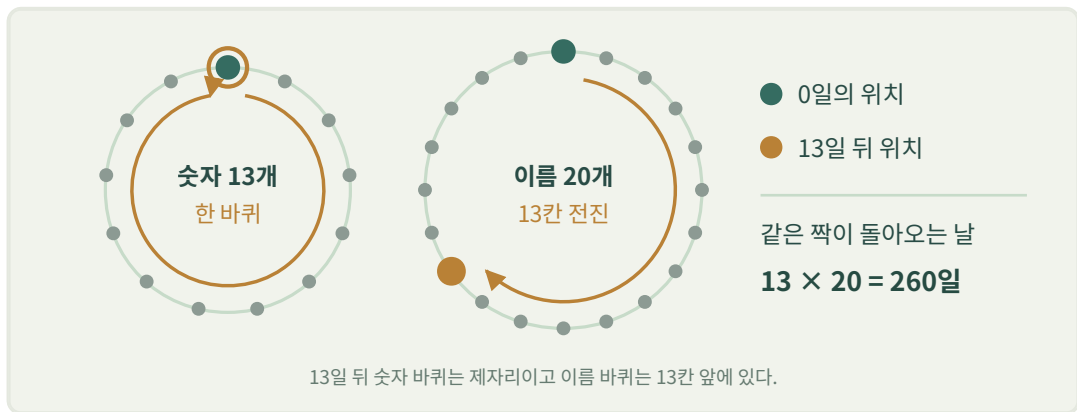
13과 20의 두 순환

서로 다른 주기가 낱자의 짝을 만든다.

260일 순환을 이해하는 수학 모형으로 숫자 열세 개와 이름 스무 개가 각각 반복된다고 생각하자. 하루마다 두 목록을 한 칸씩 함께 전진시킨다. 숫자 목록이 한 바퀴 돌아도 이름 목록은 아직 처음으로 돌아오지 않는다.

두 목록이 같은 짝으로 돌아오려면 경과한 날수가 13의 배수이면서 20의 배수여야 한다. 두 수는 공약수가 1뿐이므로 가장 작은 양의 공배수는 260이다. 그래서 열세 숫자와 스무 이름의 조합을 차례로 따라가면 긴 순환을 만들 수 있다.

실제 달력의 이름과 의례적 의미는 단순한 번호 이상의 지식을 담는다. 이 페이지에서는 그 의미를 임의로 번역하지 않고 반복 구조만 분석한다. 숫자 모형이 문화적 설명의 전체를 대신하지 않는다는 범위를 분명히 한다.



탐구

13일 뒤에 두 목록의 상태는 어떻게 달라질까?

풀이와 확인

숫자 목록은 시작 위치로 돌아온다. 이름 목록은 시작점에서 13칸 전진한 상태다. 두 목록이 동시에 돌아오는 것은 260일 뒤이므로 한 목록의 반복과 낱자 짝의 반복을 구별해야 한다.

365일을 나누는 방식

18묶음의 스무 날에 다섯 날을 더한다.

365일 순환은 스무 날짜리 묶음 열여덟 개와 추가 다섯 날로 계산할 수 있다. 18×20 은 360이며 여기에 5를 더하면 365가 된다. 앞에서 배운 톤의 360일과 숫자가 겹치더라도 두 단위의 쓰임은 따로 설명해야 한다.

원형 그림을 그릴 때 모든 부분을 같은 크기로 나누면 추가 다섯 날이 스무 날 한 묶음과 같은 길이처럼 보일 수 있다. 기간의 비율을 표현하려면 조각의 크기를 실제 일수에 맞추거나 일정한 길이의 칸으로 표시해야 한다.

달력을 공간에 배치하는 일에는 편집상의 선택이 들어간다. 이름을 잘 읽게 만드는 도표와 기간의 비율을 정확히 보여 주는 도표는 목적이 다를 수 있다. 그림을 보기 전에 어떤 정보가 보존되어 있는지 설명문을 확인하자.

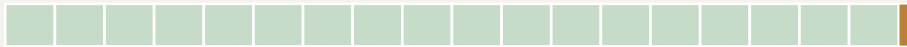
같은 크기 칸으로 그린 경우

5일이 20일처럼 보인다



일수에 비례해 그린 경우

5일 = 365일의 약 1.37%



$18 \times 20 = 360$ 일

+ 5일

365일을 같은 칸과 일수 비례 칸으로 그렸을 때의 차이

탐구

추가 다섯 날은 전체 365일 중 어느 정도인가?

풀이와 확인

비율은 $5/365$ 이며 약 1.37퍼센트다. 스무 날 한 묶음의 4분의 1 길이이므로 같은 크기의 달 조각으로 그리면 기간이 과장된다. 단순한 칸 배치는 실제 기간 비율과 다를 수 있다.

[A4] Smithsonian NMAI | The Calendar System

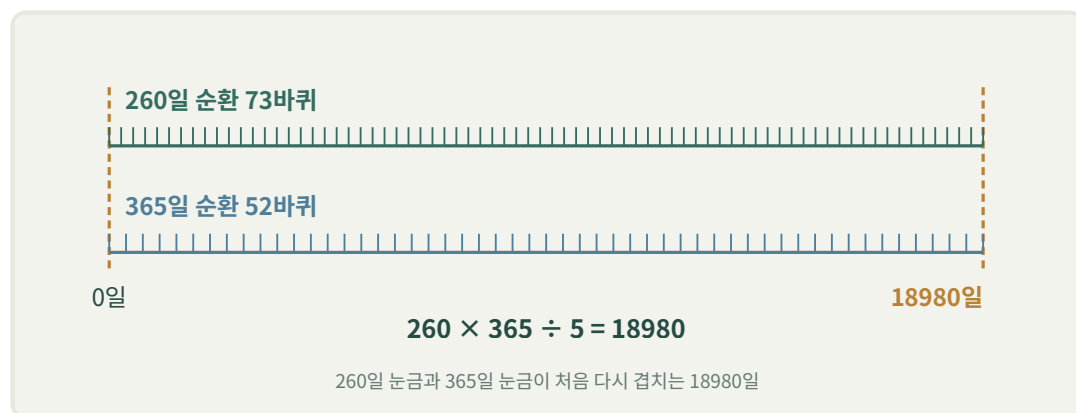
260과 365의 첫 만남

동시에 반복되는 시점은 최소공배수다.

260일 순환과 365일 순환이 함께 출발했다고 하자. 두 달력의 날짜 짝이 처음으로 다시 같아지는 날을 찾으려면 두 수의 최소공배수를 구한다. 260과 365의 최대공약수는 5이므로 두 수의 곱을 5로 나눈다.

$260 \times 365 \div 5$ 는 18980이다. 이 기간에 260일 순환은 73번 돌고 365일 순환은 52번 돈다. 흔히 달력 라운드로 설명하는 결합 주기의 산술 구조다. 한 달력의 이름만 같아지는 날과 두 날짜의 짝이 모두 같아지는 날은 다르다.

실제 날짜 이름을 외우지 않아도 반복의 논리를 탐구할 수 있다. 다만 계산한 52를 곧바로 현대 윤년을 포함한 52년과 완전히 같은 기간이라고 말해서는 안 된다. 여기서는 한 해를 365일로 센 순환을 비교하고 있다.



탐구

18980일이 두 순환의 공배수인지 계산해 보자.

풀이와 확인

$18980 \div 260 = 73$ 이며 $18980 \div 365 = 52$ 다. 두 몫이 모두 정수다. 또한 최대공약수 5로 나눈 곱이므로 가장 작은 양의 공배수라는 점까지 확인할 수 있다.

나머지로 오늘의 위치 찾기

긴 기간을 모두 펼치지 않아도 현재 위치를 알 수 있다.

0일을 출발점으로 정한 수업용 순환에서 1000일 뒤의 위치를 구해 보자. 260으로 나누면 세 바퀴를 돌고 220일이 남는다. 365로 나누면 두 바퀴를 돌고 270일이 남는다. 따라서 위치의 짝은 220과 270이다.

이 숫자는 실제 달력 날짜의 이름이 아니다. 이름 목록을 생략한 계산용 위치 번호다. 0부터 세는지 1부터 세는지에 따라 표시 숫자가 달라지므로 출발 규칙을 먼저 정해야 한다. 같은 날을 두고 답이 하나 차이 나는 이유가 여기에 있을 수 있다.

계산 과정에서는 몫과 나머지를 함께 기록하면 검산하기 좋다. $3 \times 260 + 220$ 과 $2 \times 365 + 270$ 이 모두 1000이 되어야 한다. 서로 다른 주기의 시계가 같은 경과 기간을 다르게 표현하는 것이다.

경과	260으로 나눈 나머지	365로 나눈 나머지
500일	240	135
1000일	220	

0일을 기준으로 정한 학습용 위치 번호 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

500일 뒤의 두 나머지는 얼마인가?

풀이와 확인

500을 260으로 나눈 나머지는 240이며 365로 나눈 나머지는 135다. 따라서 수업용 위치 짝은 240과 135다. 실제 날짜 이름으로 바꾸려면 각 달력의 기준 이름도 알아야 한다.

가능한 짝과 불가능한 짝

두 나머지는 공통 약수에 대한 조건을 만족한다.

같은 경과 일수를 260과 365로 나눈 두 나머지를 비교해 보자. 두 나머지의 차는 반드시 5의 배수다. 두 주기가 모두 5의 배수이므로 원래 일수에서 두 종류의 완전한 바퀴를 빼도 5로 나눈 나머지는 같기 때문이다.

예를 들어 위치 10과 15는 이 조건을 만족하지만 10과 12는 만족하지 않는다. 조건을 만족하지 않는 날짜 짝을 입력했다면 계산표가 잘못되었거나 기준점이 다르게 설정되었을 수 있다. 오류를 발견하는 빠른 검사 규칙으로 쓸 수 있다.

이 논리는 모든 두 주기에 적용된다. 주기가 6과 8이라면 두 나머지는 짝홀성이 같아야 한다. 공통 약수는 순환이 만들 수 있는 조합의 범위를 제한한다. 단순한 경우로 먼저 연습하면 큰 달력 수에서도 관계가 보인다.

$$260 = 5 \times 52$$

$$365 = 5 \times 73$$

나머지의 차는 5의 배수

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

나머지 37과 102는 같은 경과 일수에서 나올 수 있는 조건을 만족할까?

풀이와 확인

차이가 65로 5의 배수이므로 필요한 호환 조건을 만족한다. 두 수를 각각 5로 나누면 나머지가 2로 같다. 실제 경과 일수를 찾으려면 한쪽 주기의 배수를 더하며 다른 조건을 맞추면 된다.

이어 읽기 / 두 달력이 맞물리는 날

도달하는 짝은 전체 조합의 몇 분의 1인가

두 순환이 함께 움직일 때 실제로 지나는 짝과 지나지 않는 짝을 격자에서 센다.

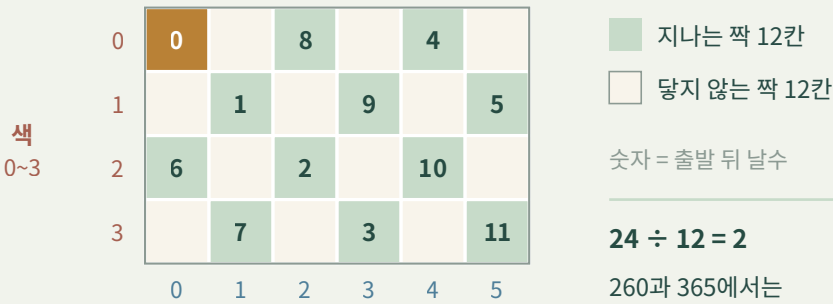
5장은 길이 4와 6인 작은 순환을 실험하며 처음 짝이 12번 이동한 뒤에 돌아온다고 설명했다. 이 실험을 세로 4칸과 가로 6칸의 격자에 옮기면 다른 질문이 보인다. 색 넷과 도형 여섯을 짝짓는 방법은 모두 24가지다. 그러나 하루에 한 칸씩 함께 움직이는 순환은 그 가운데 일부만 지난다.

0일의 짝을 색 0과 도형 0으로 놓고 날마다 두 번호를 하나씩 늘리면 12일 동안 서로 다른 짝 12개를 지난 뒤 출발점으로 돌아온다. 격자에서 이 칸들을 칠하면 정확히 절반만 채워진다. 칠해진 칸은 두 번호의 차가 짝수인 칸이며 차가 홀수인 칸에는 한 번도 도착하지 않는다. 5장에서 주기 6과 8의 두 나머지는 짝홀성이 같아야 한다고 한 조건과 같은 종류의 제한이다.

일반적으로 두 주기 a 와 b 의 순환이 지나는 짝의 수는 두 수의 최소공배수와 같다. 전체 조합 $a \times b$ 를 최소공배수로 나누면 최대공약수가 나오므로 지나는 짝은 전체의 $1/\text{최대공약수}$ 다. 4와 6에서는 $24 \div 12 = 2$ 이므로 절반이다. 4와 7처럼 최대공약수가 1이면 28가지 짝을 모두 지난다.

260일과 365일 순환에 적용하면 전체 조합은 94900가지이고 실제로 나타나는 짝은 18980가지다. $94900 \div 18980 = 5$ 이므로 가능한 조합의 5분의 1만 달력 위에 나타난다. 나머지 5분의 4는 계산표를 잘못 만들었을 때 생기는 짝이며 5장의 호환 조건이 이를 걸러 낸다. 이 분석은 반복 구조에 대한 현대 수학 모형이며 실제 날짜 이름의 의미를 다루지 않는다.

도형 순환 (나머지 0~5)



4칸과 6칸 순환은 24가지 짝 가운데 절반인 12칸만 지난다.

두 주기	전체 조합	지나는 짝	비율
4와 6	24	12	1/2
4와 7	28	28	1
260과 365	94900	18980	1/5

탐구

주기 6과 9인 두 순환은 전체 조합 가운데 몇 가지 짝을 지날까?

풀이와 확인

전체 조합은 $6 \times 9 = 54$ 가지다. 두 수의 최대공약수가 3이므로 최소공배수는 18이고 순환이 지나는 짝은 18가지다. $54 \div 18 = 3$ 이므로 전체의 3분의 1이며 두 나머지를 3으로 나눈 나머지가 같은 짝만 나타난다.

[A4] Smithsonian NMAI. The Calendar System

작은 달력으로 원리를 실험하기

큰 숫자의 구조를 작은 순환에서 관찰한다.

길이가 4인 색 순환과 길이가 6인 도형 순환을 만들어 하루에 한 칸씩 옮겨 보자. 두 목록의 처음 짝은 12번 이동한 뒤에 돌아온다. 4×6 인 24번까지 기다릴 필요가 없는 까닭은 두 주기에 공통 약수 2가 있기 때문이다.

종이에 0부터 12까지의 경과 횟수를 쓰고 각 수를 4와 6으로 나눈 나머지를 적는다. 같은 짝이 처음으로 반복되는 행을 찾으면 최소공배수를 눈으로 확인할 수 있다. 두 목록을 그린 종이 바퀴를 사용해도 같은 결과가 나온다.

이 실험은 마야 달력의 실제 크기를 축소한 복제품이 아니라 반복 수학의 모형이다. 작은 예제에서는 모든 상태를 나열할 수 있다는 장점이 있다. 실험 결과를 일반적인 식과 연결한 뒤 260과 365의 경우로 돌아가 보자.

이동	0	4	6	8	12
4순환	0	0	2	0	0
6순환	0	4	0	2	

작은 주기를 이용한 교실 실험 / 움직이는 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

주기가 4와 7이라면 동시에 처음으로 돌아오는 이동 횟수는?

풀이와 확인

최대공약수가 1이므로 $4 \times 7 = 28$ 번이다. 주기가 4와 6일 때의 12번과 비교하면 공통 약수가 있는지에 따라 조합이 반복되는 시점이 달라짐을 알 수 있다.

여러 번 돌아도 남는 기록

순환 위치와 누적 시간은 서로 다른 정보다.

달력의 위치 짝이 같더라도 실제로 같은 순간은 아닐 수 있다. 18980일이 지난 뒤에는 두 순환의 날짜 짝이 다시 나타난다. 위치 정보만 기록하면 어느 반복 회차에 해당하는지 별도로 알 수 없다.

시계가 3시를 가리킨다는 말에 날짜가 없으면 오늘인지 내일인지 모르는 것과 비슷하다. 순환식 표기는 반복되는 활동을 조직하는 데 편리하지만 긴 기간의 앞뒤 관계에는 누적 정보를 덧붙여야 한다. 두 표현은 경쟁하기보다 다른 질문에 답한다.

기록을 설계할 때는 나중에 무엇을 알고 싶은지 생각해야 한다. 의례의 순환 위치만 필요한지 두 사건 사이의 일수까지 계산해야 하는지에 따라 필요한 항목이 달라진다. 숫자를 더 많이 적는 것이 항상 좋은 것이 아니라 목적에 맞는 정보가 필요하다.

0일과 18980일 순환의 위치는 같다 경과한 시간은 다르다

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

같은 날짜 짝이 적힌 두 기록 사이의 기간을 하나로 확정할 수 있을까?

풀이와 확인

순환 위치만으로는 확정할 수 없다. 기간은 0일일 수도 있고 18980일의 양의 배수일 수도 있다. 누적 연대나 사건의 순서를 알려 주는 별도 자료가 있어야 회차를 구분할 수 있다.

두 나머지에서 날짜를 되찾기

주기를 앞으로 세는 계산을 거꾸로 풀어 본다.

같은 0일에서 출발한 두 순환을 생각한다. 260으로 나눈 나머지는 37이며 365로 나눈 나머지는 102라고 하자. 앞에서 두 나머지의 차가 5의 배수라는 호환 조건을 확인했다. 이제 그 조건을 만족하는 실제 경과 일수 가운데 가장 작은 음이 아닌 값을 구한다.

첫 조건을 만족하는 수는 $37 + 260k$ 로 쓸 수 있다. 둘째 조건까지 맞추려면 260k를 365로 나눈 나머지가 65여야 한다. 양쪽과 주기를 5로 줄이면 52k를 73으로 나눈 나머지가 13인 문제다. 이 변형은 세 수가 모두 5의 배수이기 때문에 가능하다.

$52 \times 7 = 364$ 는 73의 다섯 배보다 1 작다. 따라서 52에 -7 을 곱하면 73으로 나눈 나머지가 1이다. 필요한 13을 곱하면 k 는 -91 과 같은 나머지를 가져야 한다. 여기에 73을 두 번 더하면 가장 작은 음이 아닌 k 는 55가 된다.

경과 일수는 $37 + 260 \times 55 = 14337$ 일이다. 실제로 $365 \times 39 + 102$ 도 14337이다. 다른 해는 18980일씩 더한 값이며 이 계산은 실제 마야 날짜 이름을 판독한 것이 아니다. 오늘의 합동식으로 달력의 순환 구조를 탐구한 예다.

조건	검산
260일 순환	$14337 = 260 \times 55 + 37$
365일 순환	$14337 = 365 \times 39 + 102$
다음 같은 위치	$14337 + 18980 = 33317$

탐구

주기 6과 8에서 나머지가 각각 1과 3이면 가장 작은 음이 아닌 경과 수는?

풀이와 확인

6으로 나눈 나머지가 1인 수 1과 7과 13과 19를 차례로 확인하면 19가 8로 나눈 나머지 3을 준다. 두 주기의 최소공배수가 24이므로 다음 해는 43이다.

[A4] Smithsonian NMAI | The Calendar System

달력 전시의 설명문 쓰기

수학적 관계와 살아 있는 전통을 함께 보여 준다.

달력 전시의 첫 문장은 260과 365의 두 순환이 있다는 사실을 간명하게 설명할 수 있다. 다음 문장에서는 두 순환이 18980일 뒤에 같은 짝으로 돌아오는 관계를 보여 준다. 독자는 계산의 핵심을 따라갈 수 있어야 한다.

그러나 달력을 거대한 퍼즐로만 다루면 그것을 사용하고 해석하는 사람들의 활동이 사라진다. 스미스소니언의 교육 자료는 오늘의 마야 공동체가 시간을 이해하는 목소리도 함께 소개한다. 수학을 설명하는 전시에서도 누가 지식을 이어 가는지 밝혀야 한다.

설명문에 불필요한 신비화는 넣지 않는다. 매우 큰 수를 사용했다는 사실이 초자연적인 예언의 근거는 아니다. 계산 원리와 자료의 맥락을 나란히 제시하면 감탄을 유지하면서도 검증 가능한 지식으로 읽을 수 있다.

전시 요소	전달할 내용
반복 도식주기의 맞물림	
계산 예제	최소공배수
당사자의 목소리	

전시 설명의 세 층위 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

달력 라운드를 설명하는 두 문장을 만들어 보자.

풀이와 확인

260일 순환과 365일 순환은 18980일 뒤에 같은 날짜 짝으로 돌아온다. 이는 두 주기의 최소공배수이며 달력을 사용하는 공동체의 시간 경험은 이 산술 관계보다 풍부하다. 두 문장은 계산과 맥락의 역할을 나누어 보여 준다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time

고대 아메리카관 / 07

하늘의 반복을 표에 담다

드레스덴 사본의 금성표

반복 관찰을 기록하는 표의 구조를 살핀다.

드레스덴의 마야 사본에는 금성의 주기를 다루는 표가 있다. 소장 도서관의 설명은 584일 주기를 중심으로 이어지는 계산을 소개한다. 여기서 584일은 금성이 태양을 한 바퀴 도는 공전 기간을 뜻하지 않는다. 지구에서 관측한 상대적 배치의 반복과 연결된 수다.

관찰자가 어떤 곳에서 무엇을 기준으로 움직임을 재는지가 주기의 정의를 바꾼다. 운동장 안쪽과 바깥쪽 트랙을 도는 두 사람의 만남 간격이 각자의 한 바퀴 시간과 다른 것처럼 생각할 수 있다. 비유는 구조를 설명할 뿐 실제 행성 궤도의 세부를 재현하지 않는다.

이 장의 수열과 오차 계산은 사본의 모든 절차를 복원한 것이 아니다. 알려진 주기 수에서 출발해 표를 작성하고 검산하는 수학 활동이다. 역사 자료의 내용과 새로 만든 탐구 문제의 경계를 유지한다.

관측 위치를 먼저 정한다 공전 주기와 회합 주기 서로 다른 질문의 답

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

584일을 금성의 공전 기간이라고 쓴 문장을 어떻게 고칠까?

풀이와 확인

지구에서 보이는 금성의 상대적인 주기를 다루는 대표값이라고 고친다. 공전과 지구에서 관측한 회합 주기를 구별하면 같은 천체에 서로 다른 주기 수가 등장하는 이유를 설명할 수 있다.

[A6] SLUB Dresden | The Dresden Maya Codex Content

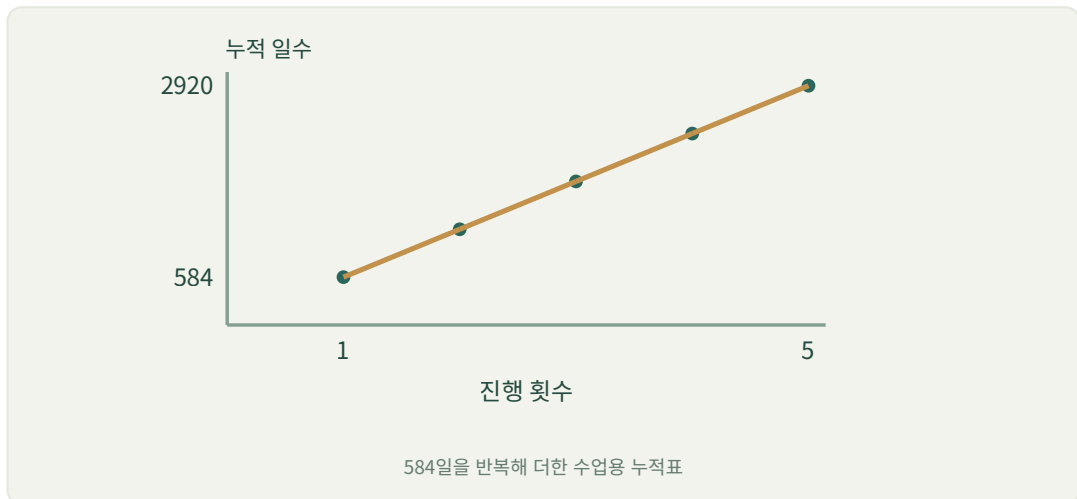
584를 반복해서 더하기

표의 행 사이 차이는 검산의 단서가 된다.

584일을 한 묶음으로 하여 누적표를 만들어 보자. 첫 다섯 값은 584와 1168과 1752와 2336과 2920이다. 이 수열에서 이웃한 두 행의 차이는 언제나 584다. 표 전체를 처음부터 다시 계산하지 않고도 차이를 이용해 오류를 찾을 수 있다.

넷째 행이 2346으로 잘못 적혔다면 앞 행과의 차이는 594가 되고 다음 행과의 차이는 574가 된다. 한 행의 오차가 양쪽 차이에 반대 방향으로 나타난다. 합계표를 읽을 때 변화량을 함께 살피면 오타의 위치를 좁힐 수 있다.

현대 계산기로 표를 만들더라도 검산 원리는 같다. 곱셈으로 만든 열과 앞값에 584를 더해 만든 열을 대조할 수 있다. 서로 다른 계산 경로를 이용하면 한 가지 수식의 잘못을 그대로 반복하는 위험을 줄인다.



탐구

여섯 번째 누적값과 다섯 번째 값의 차이는 얼마인가?

풀이와 확인

여섯 번째 값은 3504이며 다섯 번째 값 2920과의 차이는 584다. 일반적으로 n 번째 값은 $584n$ 이므로 이웃한 행의 차이는 항상 584가 된다.

다섯 주기와 여덟 해

서로 다른 반복의 근접 관계를 계산한다.

584일을 다섯 번 더하면 2920일이다. 한 해를 정확히 365일로 놓고 여덟 번 더해도 2920일이다. 따라서 이 두 정수 모형에서는 금성의 다섯 주기와 365일의 여덟 순환이 일치한다.

이 식은 주기 수를 정수로 정했을 때 정확하다. 실제 천체의 운동과 계절의 길이를 무한히 정확하게 표현한다는 뜻은 아니다. 계산 모형에서의 등식과 자연 현상의 근사 관계를 나누어 설명하는 것이 중요하다.

반복표에서 이런 관계를 찾으면 긴 기간을 묶는 데 도움이 된다. 584를 매번 다섯 번 더하는 대신 2920을 한 단위처럼 사용할 수 있다. 작은 주기와 큰 묶음을 오가며 표의 구조를 이해하는 방법이다.

584일 주기 5번

584	584	584	584	584
-----	-----	-----	-----	-----

365일 순환 8번

365	365	365	365	365	365	365	365
-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----	-----

0

$$584 \times 5 = 365 \times 8 = 2920$$

2920일

584일 다섯 칸과 365일 여덟 칸이 2920일에서 함께 끝난다.

탐구

2920일을 두 번 반복하면 365일 순환과 584일 순환은 각각 몇 번인가?

풀이와 확인

전체는 5840일이다. 365일 순환은 16번이며 584일 순환은 10번이다. 두 비율 8대5가 같은 배수로 확대 되었음을 확인할 수 있다.

이어 읽기 / 하늘의 반복을 표에 담다

365일 바퀴 위에 찍히는 584일 주기의 다섯 자리

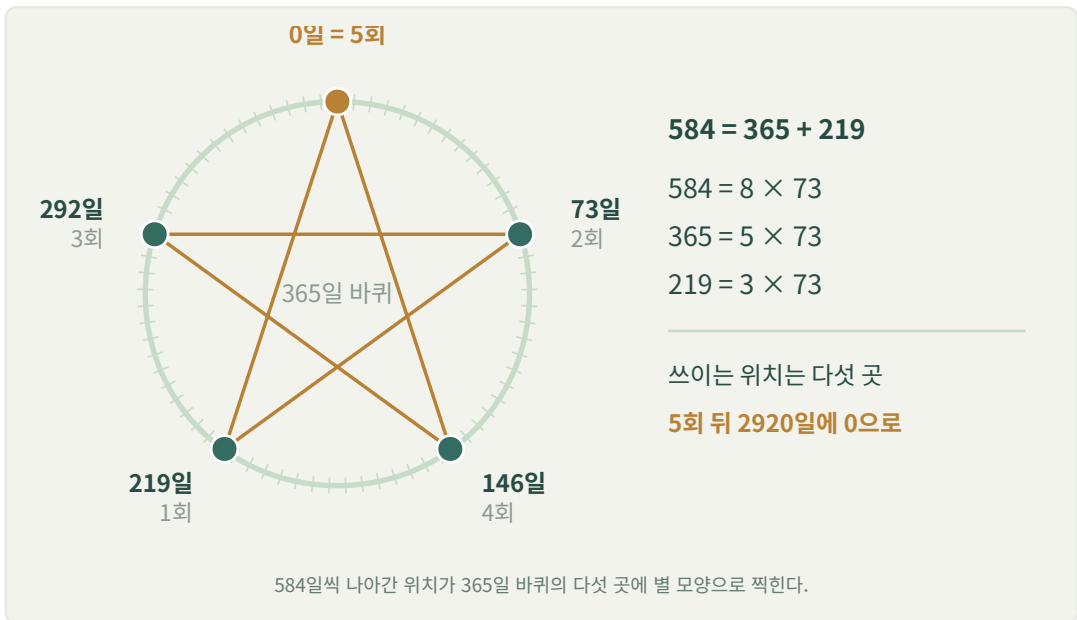
584일씩 나아가는 위치를 365로 나눈 나머지로 추적하면 별 모양이 나타난다.

6장은 $584 \times 5 = 365 \times 8 = 2920$ 이라는 정수 모형을 보였다. 이 관계를 365일 순환의 바퀴 위에 그려 보면 584일 주기의 시작점이 어디에 놓이는지 알 수 있다. 0일에서 출발해 584일씩 나아가며 매번 365로 나눈 나머지를 적는다. 이 나머지가 365일 순환 안에서의 위치 번호다.

584를 365로 나누면 나머지가 219이므로 첫 주기는 219번 위치에 닿는다. 이어서 1168과 1752와 2336과 2920의 나머지는 차례로 73과 292와 146과 0이다. 다섯 번째에 0으로 돌아오므로 쓰이는 위치는 다섯 곳뿐이다. 다섯 위치는 모두 73의 배수이며 바퀴를 정확히 다섯 등분한다.

다섯 자리만 나타나는 까닭은 최대공약수에 있다. $584=8 \times 73$ 이고 $365=5 \times 73$ 이므로 두 주기의 최대공약수는 73이다. 584를 더할 때마다 위치는 73의 배수 사이에서만 움직이고 $365 \div 73=5$ 개의 자리를 돈다. 한 번에 73의 세 배씩 건너뛰므로 순서대로 이르면 별 모양의 오각형이 그려진다.

2920일이 두 순환이 처음으로 함께 출발점에 돌아오는 시점이라는 사실도 이 그림에서 읽을 수 있다. $584 \times 365 \div 73=2920$ 이므로 5장의 최소공배수 계산과 같은 구조다. 다만 이것은 584와 365를 정확한 정수로 놓은 학습용 모형이다. 6장이 강조했듯이 실제 관측의 작은 차이는 이 정수 그림에 나타나지 않는다.



탐구

584일 주기를 일곱 번 진행하면 365일 바퀴의 어느 위치에 놓일까?

풀이와 확인

$584 \times 7=4088$ 이며 $4088=365 \times 11+73$ 이므로 위치는 73이다. 다섯 번마다 0으로 돌아오므로 일곱 번째는 두 번째와 같은 자리라는 점으로도 확인할 수 있다. 두 번째 위치 1168을 365로 나눈 나머지도 73이다.

작은 차이가 쌓이는 방식

근삿값의 오차는 반복 횟수와 함께 커진다.

오차를 이해하기 위해 실제 천문값과 무관한 가상 모형을 만들자. 표에서는 한 주기를 100일로 적었지만 관찰 평균은 99.8일이었다고 가정한다. 한 번의 차이는 0.2일이며 열 번 반복하면 누적 차이는 2일이다.

여기서 오차를 단순히 반복 횟수에 곱할 수 있는 것은 매회 같은 평균 차이가 있다고 가정했기 때문이다. 관찰 오차가 매번 같은 방향이 아니라면 실제 누적 양상은 달라질 수 있다. 계산에는 어떤 종류의 오차를 가정했는지 함께 적어야 한다.

근삿값은 틀린 숫자라서 쓸모없는 것이 아니다. 필요한 정확도와 사용 기간에 따라 충분히 좋은 도구가 될 수 있다. 다만 긴 기간에 사용할 때는 허용 오차를 넘는 시점과 보정 방법을 검토해야 한다.



주기당 0.2일의 일정한 차이가 있다는 가상 모형

탐구

같은 모형에서 허용 누적 오차가 1일이라면 몇 주기까지 허용할 수 있을까?

풀이와 확인

주기당 0.2일이므로 다섯 주기에서 1일이 된다. 오차가 1일 이하라는 조건이라면 다섯 주기까지 가능하다. 여섯 주기에서는 1.2일로 허용값을 넘는다.

관찰 간격의 평균

여러 기록을 모을 때 무엇을 평균내는지 확인한다.

가상의 반복 관측 간격이 583일과 585일과 584일과 584일이었다고 하자. 합은 2336일이며 네 간격의 평균은 584일이다. 평균은 각 기록을 대표하는 하나의 수지만 개별 기록이 모두 같았다는 뜻은 아니다.

관측 날짜 다섯 개로 네 간격을 계산했다면 자료의 개수와 간격의 개수를 혼동하지 않아야 한다. 처음과 마지막 날짜의 차를 네 번의 간격으로 나눈 값이 평균 간격이다. 날짜 다섯 개라는 이유로 5로 나누면 잘못된 답이 나온다.

이 예제의 숫자는 계산을 위해 만든 자료다. 사본의 실제 관측 행을 옮긴 것처럼 제시하지 않는다. 재구성 자료에는 가상이라는 표시와 사용한 단위를 붙여야 독자가 원자료와 활동지를 구분할 수 있다.



평균 계산을 위한 가상 관측 간격

탐구

관측 간격 582일과 586일을 앞의 네 간격에 더하면 평균은?

풀이와 확인

전체 합은 3504일이며 간격은 여섯 개다. $3504 \div 6 = 584$ 이므로 평균은 같다. 새 기록의 차이가 서로 상쇄되어 평균이 유지되었지만 자료의 분포는 달라졌다.

관찰하지 못한 날의 처리

자료가 없는 칸을 0으로 채우지 않는다.

구름 때문에 관측하지 못한 날을 생각해 보자. 이 날의 기록은 전체가 없었다는 뜻이 아니라 보지 못했다는 뜻이다. 표에서 빈칸을 0으로 바꾸면 실제 관측값과 결측 자료가 섞인다. 숫자의 의미를 구별하는 표시가 필요하다.

수업용 밝기 관측값이 3과 4와 미관측과 5라면 확인한 세 값의 평균은 4다. 미관측을 0으로 채워 네 값의 평균을 구하면 3이 되어 결과가 달라진다. 계산 규칙만 맞아도 입력의 뜻이 틀리면 해석이 잘못된다.

역사 기록의 빈칸에는 손상과 생략과 관측 실패 등 여러 원인이 있을 수 있다. 하나로 단정하기보다 자료 상태를 별도로 기록하자. 복원한 값이 있다면 원래 읽힌 값과 구분해 표시하는 편이 검증에 도움이 된다.

시점	1	2	3	4
기록	3	4	미관측	5
평균 대상	포함	포함	제외	

자료가 없는 상태와 값 0을 구별한다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

값 2와 미관측과 6의 평균을 구할 때 어떤 설명을 덧붙여야 할까?

풀이와 확인

확인된 두 관측의 평균은 4라고 적는다. 전체 세 시점의 평균을 정확히 안다는 뜻은 아니다. 빠진 시점의 값이 알려지지 않았으므로 관측된 자료의 범위 안에서 결론을 내려야 한다.

정렬된 건물과 하늘

방향의 일치는 출발점이며 해석의 끝이 아니다.

건물의 축이 특정 방향을 가리킨다는 사실을 측정할 수 있다. 그러나 그 방향이 어느 천체와 관련되는지 해석하려면 지형과 관측 위치와 제작 시기 등을 함께 살펴야 한다. 비슷한 각도가 나왔다는 이유만으로 설계 목적을 확정할 수 없다.

가상 조사에서 건물 방향을 89도와 91도와 90도로 측정했다고 하자. 평균은 90도지만 측정의 흔들림이 있다는 정보도 남겨야 한다. 각도를 소수점 여러 자리까지 적는다고 실제 측정의 정확도가 높아지는 것은 아니다.

이 페이지의 도형은 방향 측정의 원리를 설명하는 현대 활동이다. 특정 마야 건축물의 정밀 조사 결과를 대신하지 않는다. 수학적 일치가 역사적 의도의 증거가 되려면 얼마나 정밀하게 맞고 어떤 대안 설명을 배제할 수 있는지 따져야 한다.

측정	1차	2차	3차
방향각	89°	91°	90°
평균	90°		

방향과 오차를 생각하는 가상 조사

탐구

평균 90도를 얻었으니 정동향 의도를 증명했다고 말해도 될까?

풀이와 확인

측정 결과가 동쪽과 가까움을 보여 줄 수는 있다. 설계 의도까지 증명하려면 측정 오차와 주변 구조와 관련 자료가 필요하다. 수치의 일치와 의도의 해석은 서로 다른 단계다.

천문표를 읽는 탐구 보고서

자료와 모형과 해석을 세 문단으로 나눈다.

첫 문단에는 어떤 자료를 보았는지 쓴다. 소장 기관과 자료 이름을 밝히고 실제 자료에서 확인한 수나 표의 형태를 설명한다. 잘 읽히지 않는 부분을 임의로 채운 경우에는 복원임을 표시해야 한다.

둘째 문단에는 자신이 만든 계산을 적는다. 584의 누적합이나 365와의 공통 묶음을 계산했다면 식을 보여 주고 단위를 붙인다. 이 단계에서는 다른 사람이 같은 입력으로 같은 결과를 얻을 수 있어야 한다.

셋째 문단에는 계산이 말해 주는 범위와 남은 질문을 적는다. 정수 모형의 관계를 알았다고 실제 관측의 모든 세부가 해명된 것은 아니다. 관측 방법과 표의 수정과 사용 목적은 더 많은 자료를 필요로 하는 별도 주제다.

문단	답을 내용
자료	출처와 확인한 형태
계산	식과 단위와 검산
해석	결론의 범위와 남은 질문

탐구 보고서의 검증 가능한 구조

탐구

보고서에서 $584 \times 5 = 365 \times 8$ 뒤에 어떤 설명이 필요할까?

풀이와 확인

두 정수 주기 모형이 2920일에서 일치한다는 설명을 붙인다. 이 등식만으로 실제 천체 운동이 오차 없이 반복된다고 주장하지 않는다. 계산 결과의 정확성과 자연 모형의 정확성을 구별해야 한다.

고대 아메리카관 / 08

매듭이 담는 수량

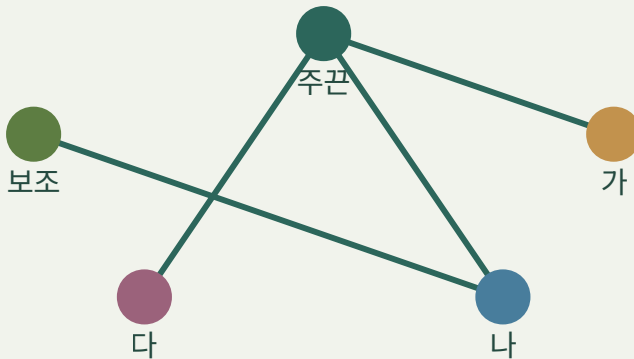
끈의 구조부터 읽기

숫자를 찾기 전에 연결 관계를 살핀다.

키푸는 주된 끈에 여러 끈이 달리고 다시 그 끈에 보조 끈이 이어질 수 있는 기록 장치다. 숫자만 종이에 옮기면 어느 끈이 어디에 붙어 있었는지 잃어버릴 수 있다. 원자료의 연결 구조를 함께 기록해야 한다.

가지가 있는 나무 모양의 도식으로 구조를 정리할 수 있다. 주된 끈을 출발점으로 놓고 매달린 끈을 가지로 나타낸다. 이 그림은 실제 매듭의 생김새를 복제한 것이 아니라 연결 정보만 추린 현대의 분석 도식이다.

끈의 개수와 매듭의 개수는 같은 항목이 아니다. 수량을 담지 않은 연결 끈이 있을 수 있으며 한 끈에 여러 자리의 매듭이 있을 수 있다. 기록표에서는 끈 번호와 부모 끈 번호와 관찰한 매듭을 분리해 적는 편이 좋다.



실물 형태가 아닌 연결 관계의 모형

탐구

주된 끈 하나에 매달린 끈 셋이 있고 그중 하나에 보조 끈 둘이 있다면 전체 끈 수는?

풀이와 확인

주된 끈을 포함하면 여섯 가닥이다. 주된 끈 1과 매달린 끈 3과 보조 끈 2를 더한다. 수량 값의 합과 끈 가닥 수의 합은 서로 다른 계산임을 밝혀야 한다.

[A2] Museo Larco | Inca Quipus

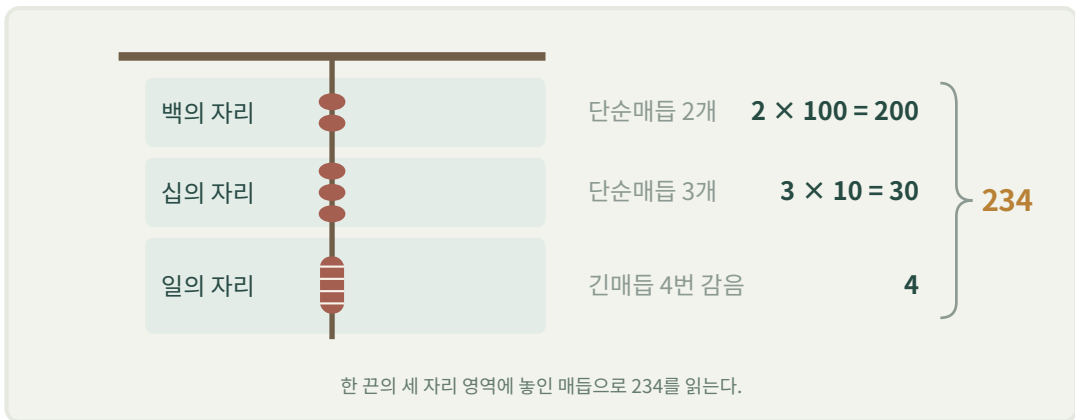
매듭의 위치와 십진 자리

같은 형태도 놓인 높이에 따라 값이 달라진다.

수량을 기록한 키푸의 널리 알려진 구조에서는 끈을 따라 십진 자릿값을 읽는다. 하나의 매듭 묶음이 일의 자리인지 십의 자리인지에 따라 기여하는 값이 달라진다. 정확한 판독에는 매듭의 종류와 다른 끈들의 배열도 함께 살핀다.

수업용 도식에서 백의 자리에 2와 십의 자리에 3과 일의 자리에 4를 놓아 보자. 각 기여는 200과 30과 4이며 전체는 234다. 실제 유물의 매듭을 단순한 숫자 칸으로 바꾼 그림이라는 점을 표시한다.

자리 구조는 현대 십진 숫자와 비교할 수 있지만 기호의 물리적 실현은 다르다. 잉크로 쓴 숫자와 손으로 만질 수 있는 매듭은 읽고 보존하는 방식에 차이가 있다. 공통된 원리를 찾되 재료의 차이를 지우지 않는다.



탐구

백의 자리 3과 십의 자리 0과 일의 자리 7은 어떤 수인가?

풀이와 확인

$300 + 0 + 7 = 307$ 이다. 가운데 자리가 비었다고 나머지 두 값을 붙여 37로 읽으면 위치 정보가 사라진다. 여러 끈의 자리 높이를 비교하는 것이 판독을 돕는 이유다.

[A3] NIST Museum | Standardizing an Empire

일의 자리에서 구별되는 매듭

매듭의 종류는 위치 판독을 돕는 정보다.

수량 키푸의 대표적인 설명에서는 일의 자리 1에 팔자매듭을 사용하며 2부터 9까지는 감은 수가 다른 긴매듭을 사용한다. 더 높은 자리에서는 단순매듭의 묶음으로 자릿값을 나타낸다. 모든 끈을 동일한 구슬 줄처럼 그리면 이런 차이가 사라진다.

이 페이지의 그림은 실제 매듭을 묶는 순서를 가르치는 공예 도면이 아니다. 기능의 차이를 표로 정리한 개념도다. 실제 유물에서는 꼬임과 매듭 방향과 손상 상태도 판독에 영향을 줄 수 있으므로 전문 기록과 대조해야 한다.

매듭의 유형이 일의 자리를 식별하는 단서라면 빈자리 문제를 해결하는 데도 도움이 된다. 단순히 가장 아래에 있는 매듭을 항상 일의 자리로 읽는 규칙은 충분하지 않다. 형태와 위치를 함께 읽는 것이 중요하다.

자리 기능	대표 유형
일의 자리 1	팔자매듭
일의 자리 2-9	긴매듭
더 높은 자리	단순매듭 묶음

대표적인 수량 표기의 기능 구분

탐구

가장 아래 매듭이 있다는 이유만으로 무조건 일의 자리라고 할 수 있을까?

풀이와 확인

그렇게 단정할 수 없다. 매듭의 유형과 다른 끈의 자리 배열을 확인해야 한다. 일의 자리가 0이면 실제 매듭이 없는 상태일 수 있으므로 맨 아래라는 위치만으로 값을 결정하지 않는다.

[A7] INALCO | Quechua oral numeration and its writing in quipus

아무것도 없는 자리의 의미

0은 형태보다 관계로 드러날 수 있다.

수업용 키푸 표에서 백의 자리에 4가 있고 십의 자리에는 매듭이 없으며 일의 자리에 2가 있다고 하자. 자리를 올바르게 정했다면 값은 402다. 비어 있는 영역은 십의 자릿값이 0임을 나타낸다.

그러나 손상으로 끈이 끊어진 경우와 원래 매듭이 없던 경우는 다르다. 기록자가 빈 영역을 0으로 읽었는지 판독 불가로 남겼는지 구분해야 한다. 자료의 부재를 숫자의 부재로 자동 변환하지 않는 원칙이다.

0을 별도 기호로 그리는 마야의 설명과 나란히 놓으면 흥미로운 비교가 된다. 두 방식 모두 자릿값을 유지해야 하지만 이를 물리적으로 표현하는 방법은 다르다. 한 방식이 더 발전했다는 서열보다 어떤 조건에서 읽기 쉬운지를 살펴보자.

$$4 \times 100 + 0 \times 10 + 2 = 402$$

$$4 \times 100 + 3 \times 10 + 2 = 432$$

증가한 값은 30

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

백 4와 십 0과 일 2의 배열에서 십 자리에 3이 추가되면 얼마나 증가할까?

풀이와 확인

값은 402에서 432가 되므로 30이 증가한다. 추가된 숫자 3은 십의 자리에 있으므로 3이 아니라 30을 뜻한다. 원래 빈 영역이 실제로 0이었다는 전제에서만 가능한 계산이다.

색을 곧바로 사전으로 만들지 않기

색 차이를 관찰하는 일과 뜻을 해독하는 일은 다르다.

끈의 색은 중요한 관찰 항목이다. 그러나 모든 키푸에서 한 색이 언제나 같은 물건을 뜻한다고 가정하면 안 된다. 특정 자료의 색 구분을 다른 자료에 그대로 옮기려면 연결 근거가 있어야 한다. 색이 의미를 가질 가능성과 그 의미를 확정했다는 주장은 다르다.

교실에서는 붉은 끈을 곡물로 정하고 푸른 끈을 옷감으로 정하는 분류 활동을 할 수 있다. 이때 색의 뜻은 수업에서 새로 정한 약속이라고 적는다. 역사적 색 사전을 복원한 것처럼 표현하지 않으면 분류의 원리를 안전하게 탐구할 수 있다.

퇴색도 고려해야 한다. 현재 보이는 색이 제작 당시와 다를 수 있으며 조명과 사진 보정에 따라 색감도 달라진다. 관찰 기록에는 색 이름뿐 아니라 촬영 조건이나 판독의 어려움도 남길 수 있다.

항목	확인 수준
붉게 보이는 색	관찰
세 끈의 값 12와 8과 10	수량 판독
곡물이라는 뜻이 근거 필요	

색의 관찰과 대상의 해석을 구별한다

탐구

붉은 끈 세 가닥의 수가 12와 8과 10이면 곡물 합계를 30이라고 말할 수 있을까?

풀이와 확인

붉은색이 곡물을 뜻하며 같은 단위를 쓴다는 근거가 있어야 한다. 수업에서 그렇게 약속했다면 합은 30이다. 실제 유물에서 색의 뜻이 미정이라면 붉은 끈에서 읽은 세 수의 합이라고 제한해 설명한다.

[A3] NIST Museum | Standardizing an Empire

수량 판독과 전체 해독

알려진 부분을 인정하면서 남은 문제를 남긴다.

일부 키푸의 십진 수량 구조를 이해한다고 해서 모든 키푸의 모든 의미를 읽을 수 있는 것은 아니다. 끈의 색과 연결과 꼬임 등이 어떤 정보를 담는지에 대해서는 연구가 이어진다. 숫자를 읽는 성취와 의미 해독의 한계를 함께 설명해야 한다.

예를 들어 세 끈에서 20과 30과 50이 읽힌다면 $20+30=50$ 이라는 관계를 확인할 수 있다. 하지만 앞의 두 끈이 어떤 항목이며 뒤의 끈이 총합을 뜻하는지는 배열과 맥락을 추가로 살펴야 한다. 우연히 합이 맞는 경우도 생각할 수 있다.

연구 가설은 여러 자료에서 반복되는 관계를 예측할 때 힘을 얻는다. 한 사례에 잘 맞는 설명이 다른 사례를 어떻게 다루는지 확인하는 과정이 필요하다. 흥미로운 가설을 소개할 때는 확정된 사실과 같은 문장으로 쓰지 않는다.

$$20+30=50$$

수학적 관계는 확인 가능
기록의 의미는 추가 검토

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

20과 30과 50의 관계만으로 무엇까지 주장할 수 있을까?

풀이와 확인

세 수가 덧셈 관계를 이룬다는 사실을 주장할 수 있다. 마지막 끈이 함께 끈이라는 해석은 연결 위치와 유사 사례가 뒷받침할 때 더 강해진다. 무엇을 센 것인지는 별도 증거가 필요하다.

[A8] Harvard Archaeology | Building Pathways into Khipu Research

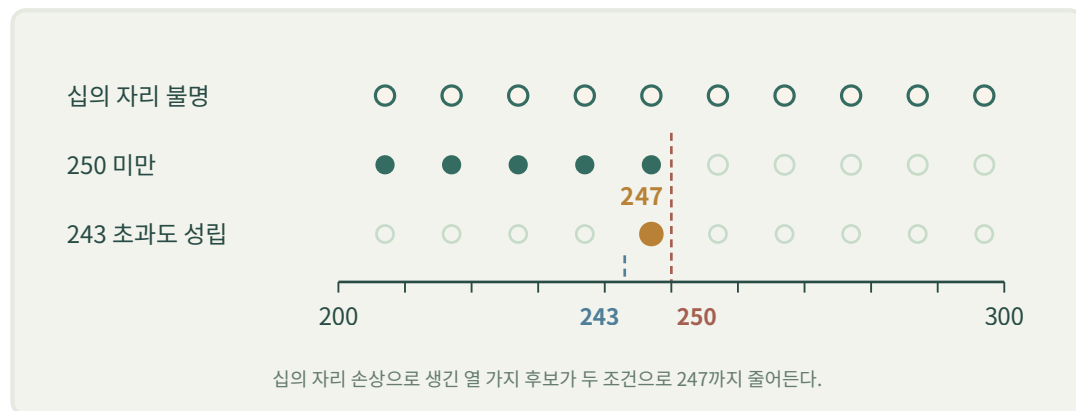
손상된 수의 가능한 범위

한 숫자를 읽지 못하면 답을 구간으로 나타낸다.

가상의 끈에서 백의 자리 2와 일의 자리 7이 읽히지만 십의 자리가 손상되었다고 하자. 십의 자리는 0부터 9까지 가능하므로 전체 값은 207에서 297 사이에 있다. 가능한 값은 10씩 증가하는 열 가지다.

가장 작은 값과 가장 큰 값만 적으면 그 사이의 모든 정수가 가능한 것처럼 보일 수 있다. 따라서 207과 217과 227처럼 간격이 10이라는 조건을 덧붙여야 한다. 범위와 가능한 값의 집합은 서로 다른 정보다.

다른 기록에서 전체가 250보다 작다는 조건을 얻었다면 가능한 값은 207과 217과 227과 237과 247로 줄어든다. 추가 증거가 불확실성을 어떻게 줄이는지 수학적으로 표현할 수 있다. 단서가 없는 자리를 느낌으로 채우지 않는다.



탐구

이 값이 다른 끈의 243보다 크다는 조건까지 알면 가능한 값은?

풀이와 확인

250보다 작다는 앞의 조건도 유지한다면 247만 남는다. 두 조건이 독립적인 근거에서 나왔는지 확인해야 한다. 같은 추측을 되풀이해 조건 두 개처럼 사용하면 확실성이 과장된다.

현대의 키푸는 무엇을 새로 약속하는가

전통에 바탕을 둔 창작과 역사 자료의 판독을 나눈다.

미국 국립표준기술연구소의 전시는 고고학자 제프리 스플릿스토서가 만든 국제단위계 키푸를 소개한다. 이 현대 작품은 측정 단위를 끈으로 나타내며 소수와 영 및 십의 거듭제곱을 표현하는 약속도 확장한다. 옛 키푸를 그대로 복제한 물건으로 읽어서는 안 된다.

새로운 기호가 필요한 이유를 간단한 학습 예로 살핀다. 125와 1.25와 0.0125는 같은 세 숫자를 포함하지만 값은 서로 다르다. 정수 자리만 나타낸 매듭 도식에 1과 2와 5를 놓으면 어느 수인지 결정되지 않는다. 소수점 위치나 별도의 축척 정보를 반드시 더해야 한다.

우리가 만드는 카드에서는 정수 부분 125와 축척 1/100을 별도 칸에 기록한다고 약속한다. 그러면 전체 값은 $125 \times 1/100 = 1.25$ 다. 이는 전시에 있는 작품의 구체적인 매듭 규칙을 복원한 것이 아니라 표현 확장이 왜 필요한지 설명하는 현대 활동이다.

창작 규칙을 역사 자료에 거꾸로 적용하면 안 된다. 지금 만든 축척 표지가 편리하다는 이유만으로 옛 끈의 비슷한 장식도 같은 뜻이라고 단정할 수는 없다. 새 도구의 설계는 공개한 약속으로 검증하며 유물의 해석은 그 자료의 맥락과 비교 증거로 검토한다.

정수 카드	축척 카드	복원한 값
125	1	125
125	1/100	1.25
125	1/10000	0.0125

탐구

정수 카드가 375이고 축척 카드가 1/1000이면 어떤 값을 나타내는가?

풀이와 확인

$375 \times 1/1000 = 0.375$ 다. 정수 카드만 남기면 축척 정보를 잃어버리므로 같은 값을 확정할 수 없다. 이 규칙은 학습자가 새로 정한 것이다.

[A3] NIST Museum | Standardizing an Empire

나만의 전사 기록 만들기

나중에 원자료로 돌아갈 길을 남긴다.

키푸를 표로 옮긴 전사에는 자료 식별자와 끈 번호가 필요하다. 각 끈의 부모 관계와 관찰한 색과 매듭 위치를 적고 읽어 낸 수량을 별도 칸에 둔다. 관찰 자료와 계산된 값이 섞이지 않도록 구성하는 것이 좋다.

숫자 칸에 0을 넣었을 때는 실제로 0을 판독한 것인지 아직 읽지 않은 것인지 구분한다. 미 판독 표시는 별도의 기호나 단어를 사용한다. 어느 날 새 사진으로 판독을 바꾸더라도 이전 기록과 바뀐 이유를 남길 수 있어야 한다.

이런 전사표는 특정 해독을 강요하지 않으면서 여러 가설을 비교할 토대가 된다. 같은 관찰에서 다른 해석이 나왔다면 어느 규칙이 다른지 추적할 수 있다. 디지털 자료를 만드는 일도 역사 연구의 일부다.

끈 ID	부모	관찰	판독
가1	주끈	세 자리 관찰	234
가2	주끈	가운데 손상	미확정
가2a	가2	일의 자리 관찰	7

실제 유물이 아닌 전사 형식의 예

탐구

전사표에 반드시 넣고 싶은 검증 항목 하나를 고르고 이유를 설명해 보자.

풀이와 확인

원자료의 끈 번호를 넣으면 전사된 숫자가 어느 위치에서 왔는지 다시 확인할 수 있다. 이 연결이 없으면 수량은 남아도 순서와 부모 관계를 복원하기 어렵다. 확인 가능한 기록은 원자료로 돌아가는 경로를 포함한다.

고대 아메리카관 / 09

합계와 분류의 수학

작은 창고의 수량표

합계를 내려면 항목과 단위가 같아야 한다.

수업용 창고 세 곳의 같은 규격 자루 수를 24와 36과 45로 정하자. 전체 자루 수는 105다. 이 합계는 세 창고의 기록이 같은 시점을 가리키고 같은 물건을 같은 단위로 썼다는 조건 아래에서 의미가 있다.

한 창고는 오늘 기록이고 다른 창고는 지난달 기록이라면 합이 현재 재고를 뜻하지 않을 수 있다. 단위가 같아도 시간 기준이 다르면 합산 전에 확인해야 한다. 숫자 연산의 정확성은 자료의 비교 가능성을 보장하지 않는다.

이 예제는 키푸의 행정적 수량 기록에서 착안한 현대 활동이다. 특정 유물에 적힌 창고 자료를 옮긴 것이 아니다. 수와 분류와 시간이라는 세 가지 기준을 함께 설계하는 연습으로 읽는다.



동일 규격 자루를 가정한 창고 모형

탐구

두 번째 창고의 36자루 중 6자루가 첫 창고에서 이동한 뒤 중복 기록되었다면?

풀이와 확인

중복된 6자루를 한 번 빼서 전체는 99자루가 된다. 창고별 숫자의 합이 맞더라도 이동 기록이 겹치면 전체 재고가 과대 계산될 수 있다. 기록 시점을 맞추는 일이 필요하다.

부분합으로 구조 찾기

여러 수를 묶는 방법을 비교한다.

가상 기록에 12와 18과 30이라는 세 수가 있고 다른 묶음에는 7과 9와 16이 있다고 하자. 각 묶음에서 앞의 두 수를 더하면 마지막 수가 된다. 반복되는 구조는 마지막 항목이 부분합일 가능성을 생각하게 한다.

그러나 합계 가설을 검토하려면 끈의 연결과 순서도 맞는지 보아야 한다. 숫자만 임의로 재 배열하면 합이 맞는 조합을 얼마든지 찾을 수 있다. 분석 규칙을 먼저 정하고 그 규칙이 자료 전체에 얼마나 일관되게 적용되는지 확인한다.

부분합은 계산을 빠르게 검산하는 데도 유용하다. 12와 18을 먼저 묶어 30으로 만든 뒤 7과 9의 16을 더하면 전체는 46이다. 묶는 순서가 달라도 합이 같다는 덧셈의 성질을 이용한다.

$$\begin{aligned} 12+18 &= 30 \\ 7+9 &= 16 \\ \text{총량은 } 30+16 &= 46 \end{aligned}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

12와 18과 30을 모두 더해 60을 총량이라 하면 어떤 문제가 있을까?

풀이와 확인

30이 앞의 두 수의 부분합이라면 같은 수량을 두 번 센 것이다. 항목인지 합계인지 구별한 뒤 더해야 한다. 수량표를 읽을 때 숫자의 역할을 표시하는 이유다.

행 합계와 열 합계

같은 자료를 두 방향으로 모아 계산한다.

두 마을의 수업용 자루 기록을 표로 만들자. 가 마을에는 곡물 20자루와 콩 15자루가 있고 나 마을에는 곡물 30자루와 콩 10자루가 있다. 자루 규격이 모두 같다고 가정하면 전체 자루 수는 75다.

마을별로 먼저 더하면 35와 40을 얻는다. 품목별로 먼저 더하면 50과 25를 얻는다. 두 방향의 합계가 모두 75로 일치해야 한다. 같은 데이터의 분류 축을 바꾸어 보는 교차 계산이다.

다만 서로 다른 물품의 무게가 자루당 다르면 이 합계는 자루 개수의 합일 뿐 총무게가 아니다. 어떤 양을 더하는지 정확하게 이름 붙여야 한다. 단위의 범위를 지키는 습관은 복잡한 표에서도 필요하다.

구분	곡물	콩	합
가	20	15	35
나	30	10	40
합	50	25	75

두 방향으로 계산하는 가상 수량표

탐구

가 마을의 콩이 15가 아니라 18이었다면 행과 열 합계는 어떻게 바뀔까?

풀이와 확인

가 마을 합은 38로 늘고 콩의 합은 28로 늘며 전체는 78이 된다. 나 마을 합과 곡물 합은 변하지 않는다. 하나의 입력 변화가 관련 합계에만 전파되는지 살피면 표의 구조를 이해할 수 있다.

분배의 기준을 명시하기

같이 나누는 방법도 기준에 따라 달라진다.

자루 120개를 세 공동체에 나누는 수업 문제를 생각하자. 공동체마다 같은 수를 주면 40개씩이다. 그러나 사람 수가 20명과 30명과 50명이라면 사람마다 같은 양을 주는 분배는 다른 결과를 만든다.

전체 사람 수는 100명이므로 한 사람당 1.2자루에 해당한다. 공동체별 몫은 24와 36과 60자루다. 두 분배는 모두 명확한 규칙을 따르지만 무엇을 같게 했는지가 다르다. 계산 전에 공정성의 기준을 토론해야 한다.

이 예제를 실제 잉카의 분배 제도라고 단정하지 않는다. 행정 기록이 담을 수 있는 수량 문제를 오늘의 언어로 탐구하는 활동이다. 역사적 제도의 해석에는 당시 노동과 의무와 권력 관계를 함께 살펴야 한다.



사람 수에 비례해 120자루를 나누는 모형

탐구

공동체마다 40자루를 주면 사람당 몫은 어떻게 되는가?

풀이와 확인

각각 2자루와 약 1.33자루와 0.8자루다. 공동체의 몫은 같지만 개인의 몫은 다르다. 어느 기준을 택했는지 밝히지 않은 채 공평하다고만 말하면 판단의 근거가 숨겨진다.

유입과 유출의 장부

남은 수는 시작량과 이동량으로 결정된다.

창고에 처음 80자루가 있고 35자루가 들어온 뒤 42자루가 나갔다면 남은 수는 73이다. 식은 $80+35-42$ 로 쓴다. 들어온 양과 나간 양을 구별하지 않고 모두 더하면 재고와 활동량이 혼동된다.

활동량을 따로 묻는다면 이동한 총자루 수는 $35+42=77$ 이다. 순증감은 $35-42=-7$ 이다. 세 숫자 73과 77과 -7 은 서로 다른 질문에 대한 답이다. 표의 제목이 계산 결과의 의미를 정한다.

실제 남은 자루를 세었더니 71이라면 장부와 실물 사이에 2자루 차이가 있다. 곧바로 원인을 특정하지 말고 누락 기록과 단위 차이와 계수 실수를 차례로 점검한다. 차이를 발견한 것과 원인을 밝힌 것은 다르다.

시작 80 + 유입 35 - 유출 42
최종 재고 73
순증감 -7

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

나간 수가 42가 아니라 45였다면 순증감과 최종 재고는?

풀이와 확인

순증감은 $35-45=-10$ 이며 최종 재고는 70이다. 기록 한 항목의 증가가 최종 재고를 반대로 감소시킨다. 이동 방향을 표시하면 이런 관계를 쉽게 계산할 수 있다.

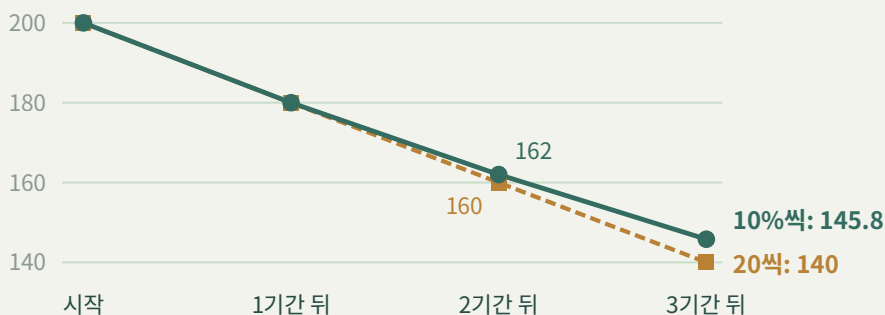
일정한 비율로 줄어드는 양

감소량과 감소율을 혼동하지 않는다.

보관 모형에서 200단위의 재료가 첫 기간에 10퍼센트 줄었다면 20단위가 감소하여 180이 남는다. 다음 기간에도 남은 양의 10퍼센트가 줄면 18이 감소하여 162가 남는다. 두 번째 감소량은 첫 번째와 같지 않다.

매번 20씩 줄어드는 모형이라면 두 기간 뒤에 160이 된다. 일정한 감소량 모형과 일정한 감소율 모형은 결과가 다르다. 현실에 어느 모형이 맞는지는 자료를 보고 판단해야 하며 계산의 편리함만으로 정할 수 없다.

이 수치는 고대 창고의 실제 손실률을 제시한 것이 아니다. 저장과 운송의 수량 문제를 이해하기 위한 가상 실험이다. 역사 자료에 비율이 적혀 있지 않다면 그 값을 임의로 만들어 실제 성과처럼 비교하지 않는다.



일정한 감소율과 일정한 감소량을 따른 200단위의 변화

탐구

남은 양의 10퍼센트가 한 번 더 줄면 얼마가 남을까?

풀이와 확인

$162 \times 0.9 = 145.8$ 이다. 처음 양에서 모두 54.2가 줄었다. 매번 최초 200의 10퍼센트를 빼는 계산과 다르므로 비율의 기준량을 문장에 분명히 적어야 한다.

합계가 맞아도 오류는 남는다

서로 상쇄되는 입력 오류를 찾는다.

두 항목 24와 36의 합계가 60이라고 하자. 첫 항목을 27로 잘못 옮기고 둘째를 33으로 잘못 옮겨도 합은 여전히 60이다. 전체 합계가 맞다는 사실만으로 각 항목이 정확하다고 결론 내릴 수 없다.

오류 하나가 더하고 다른 오류가 빼면 합계 검산을 통과할 수 있다. 그래서 원자료와 항목별 대조가 필요하다. 합계 검산은 유용한 도구지만 모든 오류를 잡아내는 만능 절차는 아니다.

자료 전사에서는 두 사람이 독립적으로 읽고 차이가 나는 항목을 다시 확인하는 방법을 쓸 수 있다. 같은 사람이 첫 기록을 보며 다시 적으면 기존 오류를 그대로 따라갈 가능성이 있다. 검산 절차의 독립성이 중요하다.

기록	항목 가	항목 나	합
원래	24	36	60
잘못 전사	27	33	60

합계만으로 발견할 수 없는 상쇄 오류

탐구

24와 36을 25와 35로 잘못 읽었을 때 합계 이외에 무엇을 확인할 수 있을까?

풀이와 확인

각 항목을 원자료의 해당 끈과 대조해야 한다. 항목의 순서와 색과 자리 판독을 따로 검토하면 합계에 드러나지 않은 이동 오류를 찾을 수 있다. 합이 같다는 이유로 원자료 확인을 생략하지 않는다.

합계 네 개로 빈칸을 복원할 수 있을까

정보가 충분한지 확인하는 것이 복원의 첫 계산이다.

키푸의 합계 구조에서 착안한 현대 표를 만든다. 두 행과 두 열의 네 칸에 수량이 들어 있다. 첫 행 합은 30이며 둘째 행 합은 40이다. 첫 열 합은 25이며 둘째 열 합은 45다. 네 합계가 있다고 네 빈칸이 자동으로 하나씩 정해지는지 묻는다.

왼쪽 위를 x 라 두면 오른쪽 위는 $30 - x$ 다. 왼쪽 아래는 $25 - x$ 이며 오른쪽 아래는 $15 + x$ 다. 어느 x 를 넣어도 나머지 합계가 맞는다. 행 합계의 합과 열 합계의 합이 모두 70이라는 조건 때문에 네 방정식 중 하나는 다른 세 식에 이미 들어 있다.

음이 아닌 정수만 허용하면 x 는 0부터 25까지다. 따라서 가능한 표가 스물여섯 개다. 합계가 빠짐없이 남았더라도 개별 항목을 복원할 정보는 부족할 수 있다. 아무 값이나 하나 고른 뒤 유일한 원래 표라고 부르면 남은 불확실성을 숨기는 셈이다.

새 사진에서 왼쪽 위가 12라고 판독되면 나머지는 18과 13과 27로 결정된다. 이때 계산으로 복원한 값은 직접 읽은 값과 표시를 달리한다. 실제 유물에서는 네 합계가 같은 단위와 같은 분류에 관한 값이라는 해석도 먼저 확인해야 한다.

구분	첫 열	둘째 열	행 합
첫 행	x	$30 - x$	30
둘째 행	$25 - x$	$15 + x$	40
열 합	25	45	70

탐구

왼쪽 위 값이 8이라는 독립적인 증거를 얻었다면 나머지 세 값은?

풀이와 확인

오른쪽 위는 22이며 왼쪽 아래는 17이고 오른쪽 아래는 23이다. 행 합은 30과 40이며 열 합은 25와 45로 모두 맞는다.

[A2] Museo Larco | Inca Quipus / [A3] NIST Museum | Standardizing an Empire

수량 기록의 책임

무엇을 세었는지와 누가 세었는지를 함께 묻는다.

행정 기록은 사회를 바라보는 창이지만 사회 전체를 그대로 비추는 거울은 아니다. 기록을 만든 목적에 따라 어떤 사람과 물건은 자세히 남고 다른 활동은 빠질 수 있다. 숫자가 있다는 이유만으로 중립적인 전체 모습이라고 가정하지 않는다.

수업용 노동 기록에 세 집단의 작업일이 10과 12와 8로 적혀 있다면 총작업일은 30이다. 그러나 개인이 얼마나 오래 일했는지와 누가 일을 결정했는지는 이 합계만으로 알 수 없다. 숫자의 단위와 집계 기준을 분명히 해야 한다.

통계를 읽는 질문은 역사 자료에도 도움이 된다. 기록 대상에 포함된 사람과 빠진 사람을 구별하고 누락 이유를 검토한다. 계산의 정밀함과 기록의 포괄성은 별개의 성질이며 둘 다 평가해야 한다.

10+12+8=30 작업일
작업일 ≠ 참여 인원
집계 단위를 먼저 확인한다

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

작업일 합계 30을 일한 사람 수 30명이라고 읽으면 왜 잘못된가?

풀이와 확인

한 사람이 여러 날 일했을 수 있기 때문이다. 작업일은 사람 수와 기간이 결합된 양이다. 참여 인원과 개인별 기간이 따로 기록되어야 사람 수를 구할 수 있다.

고대 아메리카관 / 10

계산판을 새로 구성하다

유파나를 대하는 출발점

사료의 그림과 오늘의 계산 규칙을 구분한다.

유파나와 관련된 역사 자료는 안데스의 계산 활동을 연구하는 중요한 단서다. 그러나 그림에 보이는 칸과 말의 배치만으로 모든 연산 규칙이 자동으로 결정되지는 않는다. 여러 해석이 가능한 부분에는 확정되지 않았다는 설명이 필요하다.

이 장에서는 세 열을 백과 십과 일의 자리로 정한 현대 학습용 판을 만든다. 이것은 특정 유파나의 유일한 역사적 사용법을 복원한 것이 아니다. 자리 교환과 연산 보존을 손으로 확인하기 위한 명시적인 모형이다.

모형의 규칙을 처음에 공개하면 활동을 검증할 수 있다. 한 열의 말 열 개를 왼쪽 열의 말 하나로 바꾼다. 말을 옮길 때 전체 값이 변하는지 매 단계 점검한다. 작동하는 계산판과 역사적으로 확인된 계산판은 구별하여 설명한다.

판의 안내서에는 백과 십과 일의 자리 이름을 적고 덧셈과 뺄셈 예를 각각 넣는다. 한 열의 말이 열 개 이상이면 왼쪽 자리로 교환하고 뺄 말이 모자라면 왼쪽 묶음을 푼다는 다음 행동도 안내한다. 제목에는 현대 학습용 판이라는 성격을 명시한다.

백	십	일
0	3	7

이 장에서 새로 정의한 십진 학습용 판

탐구

우리의 판이 $37+48$ 을 정확히 계산하면 무엇이 검증된 것인가?

풀이와 확인

정의한 십진 교환 규칙이 이 덧셈에서 값을 보존하며 답 85를 만든다는 사실이다. 그것만으로 과거 유파나의 실제 규칙을 증명한 것은 아니다. 역사적 주장은 다른 자료의 뒷받침이 필요하다.

[A5] Royal Danish Library | The Guaman Poma Website

한 수를 놓는 여러 상태

말의 위치와 개수를 함께 읽는다.

학습용 판에서 42를 놓으려면 십의 열에 말 네 개와 일의 열에 말 두 개를 둔다. 십의 말 셋과 일의 말 열두 개로 놓아도 전체 값은 42다. 정리 전과 정리 후의 상태를 비교하면 자리 교환의 뜻이 보인다.

표준 상태에서는 각 열의 말 수를 아홉 개 이하로 제한한다. 일의 말 열 개를 십의 말 하나로 교환하면 3과 12가 4와 2로 바뀐다. 숫자만 바뀌었을 뿐 전체 수량은 보존된다.

처음부터 정답 상태만 보여 주면 계산판은 숫자를 장식적으로 표시하는 도구가 된다. 중간 상태를 허용하고 교환을 설명하게 하면 연산의 원리를 탐구할 수 있다. 손으로 움직인 결과를 식으로 기록하는 활동을 덧붙인다.

$$30+12=42$$

일의 말 10개 ↔ 십의 말 1개

$$40+2=42$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

십의 말 다섯 개와 일의 말 열세 개를 정리하면?

풀이와 확인

일의 말 열 개를 십의 말 하나로 바꾸어 십 여섯 개와 일 세 개가 된다. 값은 63이다. 정리 전의 $50+13$ 과 정리 뒤의 $60+3$ 이 같음을 확인한다.

두 수를 합치는 덧셈

모으기와 교환을 서로 다른 단계로 진행한다.

37과 48을 각각 다른 색의 말로 놓아 보자. 십의 말은 셋과 넷을 합쳐 일곱 개다. 일의 말은 일곱과 여덟을 합쳐 열다섯 개다. 먼저 두 색을 한 판에 모으는 단계에서 값은 $70+15$ 가 된다.

다음에 일의 말 열 개를 십의 말 하나로 바꾼다. 십의 말 여덟 개와 일의 말 다섯 개가 남아 85가 된다. 색은 어느 수에서 온 말인지를 보여 주지만 최종 값은 색과 무관하다.

모으기와 교환을 나누어 기록하면 오류의 위치를 찾기 쉽다. 일의 말이 처음부터 열네 개였다면 합치는 단계의 계수 오류다. 열다섯 개를 제대로 모았지만 십의 말을 늘리지 않았다면 교환 단계의 오류다.

단계	십	일
37	3	7
48	4	8
합치기	7	15
정리	8	5

모으기와 교환을 분리한 $37+48$

탐구

56+27을 같은 판으로 계산하면 어떤 교환이 필요한가?

풀이와 확인

십의 말은 일곱 개이며 일의 말은 열세 개다. 일의 열 개를 십의 하나로 바꾸면 십 여덟 개와 일 세 개가 되어 83이다. 정리 전의 $70+13$ 과 정리 뒤의 $80+3$ 이 같은지 확인한다.

묶음을 풀어 빼기

빼기 전에 원래 값을 다른 모습으로 바꾼다.

학습용 판에서 $52-28$ 을 계산한다. 십의 말 다섯 개와 일의 말 두 개만으로는 일의 말 여덟 개를 제거할 수 없다. 십의 말 하나를 일의 말 열 개로 바꾸면 십 넷과 일 열둘이 된다.

이제 십의 말 두 개와 일의 말 여덟 개를 제거한다. 십 둘과 일 넷이 남으므로 차는 24다. 묶음을 푼 직후에 값이 $40+12=52$ 로 유지되는지 확인하는 것이 핵심이다.

계산판에서 빌림은 외부에서 수량을 가져오는 일이 아니다. 같은 전체를 다른 단위의 말로 바꾸는 일이다. 따라서 교환과 제거의 순서를 설명하게 하면 뺄셈 알고리즘을 기계적으로 외우는 부담이 줄어든다.

$$\begin{aligned} 52 &= 40 + 12 \\ (40 - 20) &+ (12 - 8) \\ 20 + 4 &= 24 \end{aligned}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

71-46을 계산하는 중간 상태는 어떻게 되는가?

풀이와 확인

71을 십 여섯 개와 일 열한 개로 바꾼다. 여기서 십 넷과 일 여섯 개를 제거하면 십 둘과 일 다섯 개가 남아 25다. 결과에 46을 더해 71이 되는지 검산한다.

반복 덧셈으로 곱하기

같은 묶음을 여러 번 놓고 정리한다.

24를 세 번 놓으면 십의 말 여섯 개와 일의 말 열두 개가 된다. 일의 말 열 개를 십의 말 하나로 교환하면 십 일곱 개와 일 두 개가 남는다. 따라서 $24 \times 3 = 72$ 다.

이 과정은 분배법칙을 눈에 보이게 한다. 24의 십 부분 20을 세 번 놓은 값 60과 일 부분 4를 세 번 놓은 값 12를 더한 것이다. 계산판의 움직임을 $3 \times (20 + 4) = 60 + 12$ 라는 식과 연결한다.

곱하는 수가 커지면 말의 수가 많아져 불편해질 수 있다. 편리한 계산 도구를 평가할 때 정확성뿐 아니라 필요한 동작 수와 공간도 고려할 수 있다. 어떤 상황에 적합한지 측정하는 것이 도구 비교의 구체적인 방법이다.

$$24 \times 3 = (20 + 4) \times 3$$

$$60 + 12 = 70 + 2$$

곱은 72

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

16을 다섯 번 놓으면 몇 번의 십진 교환이 필요한가?

풀이와 확인

일의 말이 30개이므로 열 개를 하나로 바꾸는 교환을 세 번 한다. 십의 말 다섯 개에 셋을 더해 여덟 개가 된다. 결과는 80이며 일의 말은 남지 않는다.

나눗셈을 공평한 묶음으로

묶음 수와 남은 말을 동시에 기록한다.

말 74개를 세 판에 똑같이 나누는 모형을 만들어 보자. 먼저 각 판에 십의 말 두 개씩 주면 60을 나누고 14가 남는다. 남은 14를 일의 말로 풀어 각 판에 네 개씩 주면 2가 남는다.

각 판에는 24가 놓였고 나머지는 2다. 검산은 $3 \times 24 + 2 = 74$ 로 한다. 나머지가 나누는 수 3보다 작아야 작업이 끝났다는 조건도 확인한다. 각 판에 23을 놓고 5를 남긴 상태는 아직 더 나눌 수 있다.

실제 물건을 나눌 때는 나머지를 쪼갤 수 있는지도 따져야 한다. 돌맹이는 정수 개로 남기지만 곡물처럼 분할 가능한 양은 분수로 나눌 수 있다. 같은 계산판이라도 문제의 대상에 따라 최종 답의 표현이 달라진다.

$$74 = 60 + 14$$

$$3 \times 24 + 2 = 74$$

묶 24와 나머지 2

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

86개를 네 판에 나누면 정수 묶과 나머지는?

풀이와 확인

각 판에 21개씩 놓으면 84개를 나누고 2개가 남는다. $4 \times 21 + 2 = 86$ 이다. 나머지 2가 나누는 수 4보다 작으므로 더 이상 한 개씩 똑같이 줄 수 없다.

움직임의 수로 도구 비교하기

빠르다는 인상을 측정 가능한 질문으로 바꾼다.

두 계산판으로 $38+47$ 을 풀 때 한 판은 말을 하나씩 옮기고 다른 판은 다섯 개 묶음 말을 쓴다고 하자. 어떤 동작을 한 번으로 셀지 먼저 정해야 비교가 가능하다. 잡기와 이동과 교환을 각각 셀 수도 있고 한 묶음 이동을 한 번으로 셀 수도 있다.

실험자는 같은 문제를 여러 번 풀고 수행 순서를 바꾸어 본다. 두 번째 판이 항상 나중에 등장하면 연습 효과 때문에 빨라질 수 있다. 도구의 효과와 사용자의 익숙함을 분리하려는 간단한 실험 설계다.

이 활동의 결론은 우리가 정한 조건에서의 편리함에 한정된다. 동작이 적다는 사실이 특정 판의 역사적 사용을 증명하거나 모든 사용자에게 더 낫다는 뜻은 아니다. 평가 기준을 명확히 하면 과장 없이 장단점을 설명할 수 있다.



동작 수 비교를 위한 가상 측정값

탐구

가 판의 동작 수가 18과 20과 19라면 평균은?

풀이와 확인

평균은 19회다. 나 판의 평균과 비교하되 같은 문제와 같은 동작 정의를 사용했는지 확인한다. 시간까지 비교하려면 별도로 측정해야 하며 동작 수가 곧 소요 시간은 아니다.

고대 아메리카관 / 11

산비탈을 바꾸는 기하

계단식 땅을 평면으로 보기

입체 공간에서 어떤 면적을 재는지 정한다.

마추픽추의 유산 설명에는 농업용 계단식 경작지와 산지의 공간 구성이 등장한다. 이 장에서는 이런 산지 공간에서 떠올릴 수 있는 면적과 경사 문제를 살핀다. 실제 유적의 치수를 임의로 제시하지 않고 별도의 수업용 모형을 사용한다.

경사진 면의 넓이와 위에서 내려다본 수평 투영 면적은 같지 않을 수 있다. 계단의 평평한 경작면을 합하는 계산과 벽면까지 포함한 전체 표면 계산도 다르다. 무엇을 재는지 그림에 표시한 뒤 수를 넣어야 한다.

길이 12미터와 폭 4미터인 평평한 구획을 직사각형으로 단순화하면 면적은 48제곱미터다. 실제 경계가 휘어 있다면 이 값은 근삿값일 수 있다. 간단한 도형을 사용한 이유와 생략한 부분을 함께 설명한다.



12 m × 4 m

실제 유적 치수가 아닌 직사각형 경작면 모형

탐구

길이 12미터와 폭 4미터라는 값만으로 경작지의 정확한 면적을 알 수 있을까?

풀이와 확인

직사각형이라는 가정이 필요하다. 경계가 불규칙하면 같은 최대 길이와 폭을 가진 땅도 면적이 다를 수 있다. 이 예제의 48제곱미터는 정의한 직사각형 모형의 정확한 값이다.

[A10] UNESCO | Historic Sanctuary of Machu Picchu

여러 구획의 면적 합

겹침과 빠진 부분을 확인하며 분해한다.

가상의 직사각형 경작면 세 구획을 생각한다. 첫째는 길이 10 m와 폭 3 m이며 둘째는 길이 8 m와 폭 4 m다. 셋째는 길이 6 m와 폭 5 m다. 면적은 각각 30 m^2 와 32 m^2 및 30 m^2 이며 합은 92 m^2 다. 구획이 겹치지 않는다는 조건에서 더한다.

길과 배수 공간이 가운데 포함되어 있다면 경작 가능 면적에서는 빼야 할 수도 있다. 예를 들어 전체 92제곱미터 중 길이 8제곱미터를 차지하면 실제 심을 수 있는 면적은 84제곱미터다. 총면적과 순사용 면적의 이름을 구별한다.

분해 방법은 하나가 아니다. 같은 땅을 다른 직사각형으로 나누어 계산해 같은 결과가 나오는지 확인할 수 있다. 서로 다른 분해에서 답이 다르면 겹친 부분이나 빠진 부분을 찾아보자.



탐구

세 구획 중 둘째 구획의 폭이 4에서 5미터가 되면 합계는?

풀이와 확인

둘째 구획의 면적이 8제곱미터 늘어 전체는 100제곱미터가 된다. 폭의 증가 1미터에 길이 8미터를 곱한 값이다. 다른 두 구획이 변하지 않았다는 조건에서 계산한다.

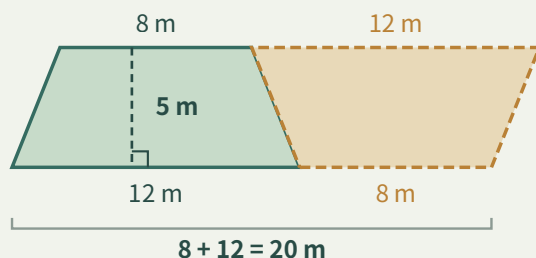
사다리꼴로 근사한 구획

양쪽 길이가 다른 땅을 계산한다.

서로 평행한 양 끝 경계의 길이가 다른 구획을 사다리꼴로 단순화한다. 평행한 두 변이 8미터와 12미터이며 두 변 사이의 수직 거리가 5미터라고 하자. 두 평행변의 평균 길이 10에 높이 5를 곱하면 면적은 50제곱미터다.

여기서 높이는 기울어진 옆변의 길이가 아니라 평행변 사이의 수직 거리다. 두 길이를 혼동하면 면적이 과대 계산될 수 있다. 도형에 직각 표시를 넣어 어떤 거리를 측정했는지 분명히 하자.

공식을 기억하기 어렵다면 같은 사다리꼴을 하나 더 뒤집어 붙여 평행사변형을 만들어 본다. 바닥 길이는 8+12이고 높이는 5다. 두 도형의 합이 100제곱미터이므로 원래 하나는 그 절반이다.



사다리꼴 두 개
 $= 20 \times 5 = 100 \text{ m}^2$

사다리꼴 하나
 $= 100 \div 2 = 50 \text{ m}^2$

$$8 + 12 = 20 \text{ m}$$

뒤집은 사다리꼴을 붙여 만든 평행사변형으로 넓이 50 m²를 구한다.

탐구

평행변 6미터와 10미터 사이의 수직 거리가 4미터라면?

풀이와 확인

$(6+10) \times 4 \div 2 = 32$ 제곱미터다. 평균 길이 8미터와 높이 4미터를 곱해도 같다. 옆변 길이가 별도로 주어 저도 면적식의 높이 자리에 그대로 넣지 않는다.

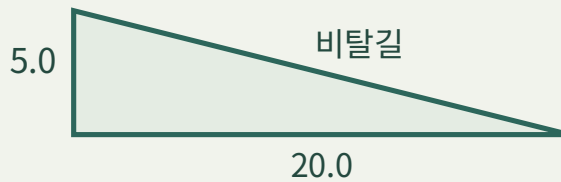
경사를 비율로 나타내기

높이 차와 수평 이동을 서로 나눈다.

수업용 비탈에서 수평으로 20미터 이동할 때 높이가 5미터 올라간다고 하자. 높이 변화와 수평 거리의 비는 $5/20$ 으로 $1/4$ 이다. 이를 백분율로 표현하면 25퍼센트 경사다.

25퍼센트와 25도는 같은 각도가 아니다. 백분율 경사는 두 길이의 비를 100배 한 값이며 각도는 회전의 크기를 다른 단위로 나타낸다. 서로 다른 표현을 숫자가 같다는 이유로 바꾸어 쓰면 안 된다.

경사를 비교할 때는 같은 기준 거리인지 확인한다. 수평 거리 대신 비탈을 따라 켜 길이를 분모에 넣으면 다른 비율이 된다. 현장에서 측정한 거리가 무엇인지 기록하는 것이 계산의 첫 단계다. 단위가 같은 두 길이를 비교해야 비율을 바로 해석할 수 있다.



수평 거리와 높이 차를 구분한 경사 모형

탐구

수평 거리 30미터에서 높이 차가 6미터라면 경사 비율은?

풀이와 확인

$6/30=1/5$ 이며 20퍼센트다. 앞의 25퍼센트 모형보다 완만하다. 두 예제 모두 수평 거리를 기준으로 했기 때문에 비율을 직접 비교할 수 있다.

이어 읽기 / 산비탈을 바꾸는 기하

비탈면의 넓이와 계단 발판의 넓이

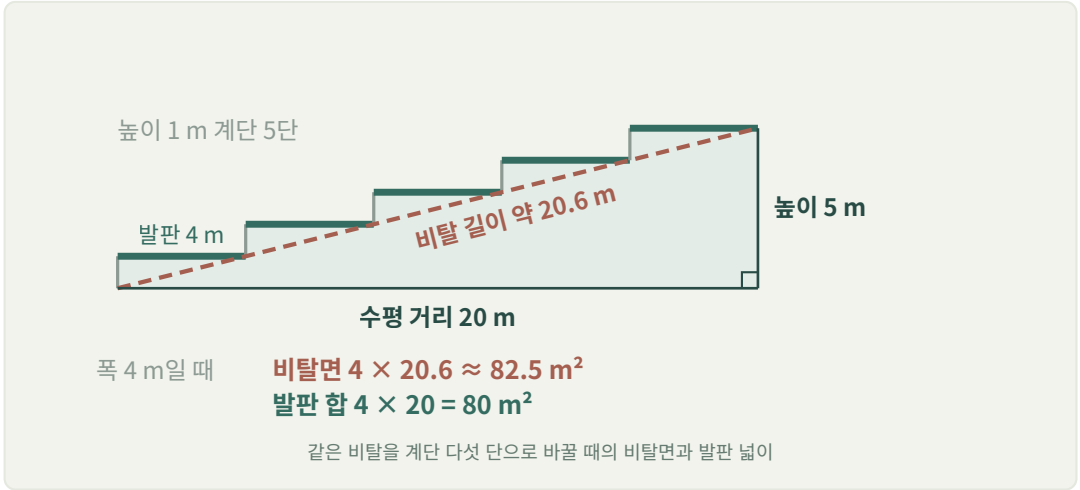
같은 비탈을 계단으로 바꾸면 경작할 수 있는 넓이가 어떻게 달라지는지 계산한다.

10장은 경사진 면의 넓이와 위에서 내려다본 수평 투영 면적이 같지 않을 수 있다고 지적했다. 그 차이를 피타고라스 정리로 직접 계산해 보자. 수업용 비탈은 수평 거리 20 m에서 높이가 5 m 올라가고 폭은 4 m라고 정한다. 이는 10장의 25퍼센트 경사 모형과 같은 비율이다.

비탈을 따라 잰 길이는 직각삼각형의 빗변이다. $20^2 + 5^2 = 425$ 이므로 빗변은 $\sqrt{425}$ 로 약 20.6 m다. 따라서 비탈면의 넓이는 $4 \times \sqrt{425}$ 로 약 82.5 m^2 다. 같은 땅을 위에서 내려다본 수평 투영 면적은 $4 \times 20 = 80 \text{ m}^2$ 다.

이 비탈을 높이 1 m와 수평 깊이 4 m인 다섯 단의 계단으로 바꾸었다고 하자. 다섯 발판의 수평 길이를 모두 합하면 20 m이므로 발판 넓이의 합은 80 m^2 로 수평 투영 면적과 같다. 계단의 벽면은 높이 합 5 m에 폭 4 m를 곱한 20 m^2 지만 이 면은 경작면이 아니다. 따라서 발판 넓이는 비탈면보다 약 2.5 m^2 작으며 비탈면의 약 97퍼센트다.

경사가 완만할수록 두 넓이의 차이는 작아진다. 수평 거리와 높이 차가 같은 100퍼센트 경사에서는 비탈면이 수평 투영 면적의 $\sqrt{2}$ 배인 약 1.41배가 된다. 그래서 넓이를 보고할 때는 비탈을 따라 잰 값인지 수평으로 잰 값인지 반드시 적어야 한다. 이 수치는 실제 유적의 치수가 아닌 학습용 모형이다.



경사	수평 투영 면적	비탈면 넓이	비율
20퍼센트 (30 m, 6 m)	120 m ²	약 122.4 m ²	약 1.02
25퍼센트 (20 m, 5 m)	80 m ²	약 82.5 m ²	약 1.03
100퍼센트 (20 m, 20 m)	80 m ²	약 113.1 m ²	약 1.41

탐구

수평 거리 30 m에서 높이 차가 6 m인 비탈에서 폭 4 m 비탈면의 넓이는 수평 투영 면적보다 얼마나 클까?

풀이와 확인

빗변은 $\sqrt{(30^2+6^2)}=\sqrt{936}$ 으로 약 30.6 m이고 비탈면 넓이는 약 122.4 m²다. 수평 투영 면적은 $4 \times 30=120 \text{ m}^2$ 이므로 차이는 약 2.4 m²다. 10장의 탐구에서 구한 20퍼센트 경사는 25퍼센트 모형보다 완만하므로 넓이의 비율도 약 1.02로 더 작다.

[A10] UNESCO. Historic Sanctuary of Machu Picchu

계단을 나누는 두 기준

같은 높이를 오르는 여러 설계를 비교한다.

전체 높이 차가 3미터인 모형 계단을 생각하자. 한 단의 높이를 0.15미터로 정하면 스무 단이 필요하다. 한 단의 높이가 0.2미터라면 열다섯 단이다. 같은 전체 높이에 도달해도 단 수와 발판 배치는 달라진다.

발판의 수평 깊이를 0.3미터로 고정한 단순 모형에서는 스무 단의 수평 길이가 6미터가 된다. 실제 계단의 시작과 끝 발판을 어떻게 셀지에 따라 계산 항목이 달라질 수 있으므로 모형의 정의를 적어 둔다.

이 수치는 실제 유적의 계단 규격도 안전한 건축 설계 지침도 아니다. 높이를 일정한 단위로 나누는 비례 관계를 배우는 문제다. 역사적 구조의 실제 쓰임과 편의성은 현장 자료와 사용 맥락을 함께 살펴야 한다.

0.20 m		15
0.15 m		20
0.12 m		25

전체 높이 3미터를 같은 단 높이로 나눈 모형

탐구

한 단 높이를 0.12미터로 정하면 3미터를 오르는 데 몇 단이 필요한가?

풀이와 확인

$3 \div 0.12 = 25$ 단이다. 단 높이가 작아지면 필요한 단 수가 늘어난다. 전체 높이를 고정했을 때 두 양의 곱이 일정하다는 관계를 확인할 수 있다.

물의 양과 단면

단면적과 길이를 곱하면 부피가 된다.

수업용 수로의 물이 차 있는 단면을 폭 0.4미터와 깊이 0.2미터인 직사각형으로 단순화하자. 단면적은 0.08제곱미터다. 이런 단면이 길이 10미터 동안 일정하다면 물의 부피는 0.8세제곱미터다.

단면적은 제곱미터이며 부피는 세제곱미터다. 단위를 함께 계산하면 무엇을 곱해야 하는지 확인할 수 있다. 면적에 길이를 한 번 더 곱해야 부피가 되는 이유가 단위의 차이에 드러난다.

이 계산만으로 흐르는 물의 양을 시간당 얼마라고 말할 수는 없다. 유량을 구하려면 속도나 시간 정보가 더 필요하다. 정지한 공간의 부피와 단위 시간에 지나가는 부피를 구별해야 한다.

$$0.4 \times 0.2 = 0.08 \text{ m}^2$$

$$0.08 \times 10 = 0.8 \text{ m}^3$$

$$\text{면적} \times \text{길이} = \text{부피}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

단면적 0.08제곱미터에서 평균 속도가 초당 0.5미터라고 가정하면 유량은?

풀이와 확인

$0.08 \times 0.5 = 0.04$ 세제곱미터 매초다. 단면에 수직인 평균 속도를 사용하며 흐름이 일정하다는 단순 모형이다. 이는 실제 역사 수로의 측정값이 아니다.

축소 모형의 길이와 면적

축척을 바꾸면 차원에 따라 비율이 달라진다.

실제 길이를 100분의 1로 줄이는 모형에서 20미터는 20센티미터가 된다. 길이 20미터와 폭 10미터인 직사각형은 모형에서 20센티미터와 10센티미터가 된다. 두 방향의 길이가 모두 줄어든다.

따라서 면적의 비율은 100분의 1이 아니라 10000분의 1이다. 길이 축척을 면적에 그대로 적용하면 큰 오차가 생긴다. 입체 모형의 부피라면 세 방향이 함께 줄어 1000000분의 1이 된다.

축척 모형을 전시할 때는 길이 축척을 명확히 표시하고 세로와 가로를 다르게 과장했는지도 밝힌다. 산지의 높이를 더 크게 표현하면 지형이 잘 보일 수 있지만 실제 경사각은 보존되지 않는다. 보기 좋은 그림과 측정 가능한 그림의 차이다.

길이 비율 1/100
면적 비율 1/10000
부피 비율 1/1000000

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

길이를 10분의 1로 줄인 모형의 면적과 부피 비율은?

풀이와 확인

면적은 100분의 1이며 부피는 1000분의 1이다. 축척이 두 번 또는 세 번 곱해지는 까닭을 생각하면 외우지 않고 구할 수 있다.

지형 모형의 가정을 점검하기

도형의 답과 실제 공간의 차이를 기록한다.

모형 보고서에는 계산에 사용한 모양과 치수를 적는다. 경작면을 직사각형으로 보았는지 수로 단면이 일정하다고 가정했는지 설명한다. 가정이 달라지면 답도 달라질 수 있으므로 결과 숫자만 제출하지 않는다.

다음에는 어떤 측정이 답에 가장 크게 영향을 주는지 살핀다. 길이 20미터와 폭 5미터인 땅에서 길이가 1미터 틀리면 면적 오차는 5제곱미터다. 폭이 1미터 틀리면 20제곱미터의 차이가 난다. 같은 길이 오차라도 영향은 다르다.

마지막으로 더 나은 자료가 생겼을 때 무엇을 바꿀지 적는다. 굵은 경계를 여러 작은 구획으로 나누거나 높이 차를 더 자주 재면 모형을 개선할 수 있다. 단순화의 한계를 아는 것이 계산을 버리는 뜻은 아니다.

길이 1 m 오차



5

폭 1 m 오차



20

20미터와 5미터인 모형의 면적 민감도

탐구

앞의 직사각형에서 폭 측정을 더 정밀하게 할 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

같은 1미터 오차가 생겼을 때 폭의 오차가 면적에 네 배 큰 영향을 주기 때문이다. 실제 측정의 난이도와 예상 오차도 고려해야 하지만 민감도를 비교하면 노력을 어디에 집중할지 판단할 수 있다.

고대 아메리카관 / 12

길과 다리를 연결하는 수학

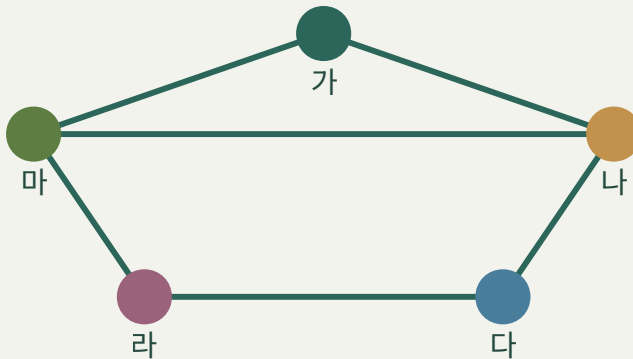
카팍난을 연결망으로 읽기

길은 한 줄이 아니라 장소 사이의 관계다.

카팍난은 안데스의 길과 관련 시설이 이어진 광범위한 체계다. 유네스코는 이를 여러 나라에 걸친 유산으로 소개한다. 길 자체만큼 거점과 저장과 이동의 관계를 함께 살펴야 전체 기능이 드러난다.

수학 활동에서는 장소를 점으로 나타내고 직접 이어진 길을 선으로 나타내는 그래프를 만들 수 있다. 이 도식은 실제 지리 지도가 아니다. 두 장소가 연결되어 있는지와 경로가 몇 가지인지에 집중하기 위해 거리와 방향을 생략한 모형이다.

같은 연결망도 점을 다른 위치에 배치하여 그릴 수 있다. 선의 모양이 달라도 어떤 점끼리 연결되는지가 같다면 같은 구조를 나타낸다. 지도에서 보이는 모양과 연결 관계를 구별하는 첫 단계다.



실제 도로 지도가 아닌 연결망 학습 모형

탐구

가와 나와 다가 각각 서로 연결된 모형에는 직접 연결선이 몇 개인가?

풀이와 확인

가와 나 사이와 나와 다 사이와 다와 가 사이의 세 개다. 방향을 구별하지 않는 길이라는 가정 아래에서 센다. 왕복 가능 여부가 다르면 모형에 방향 표시를 추가해야 한다.

[A9] UNESCO | Qhapaq Ñan Andean Road System

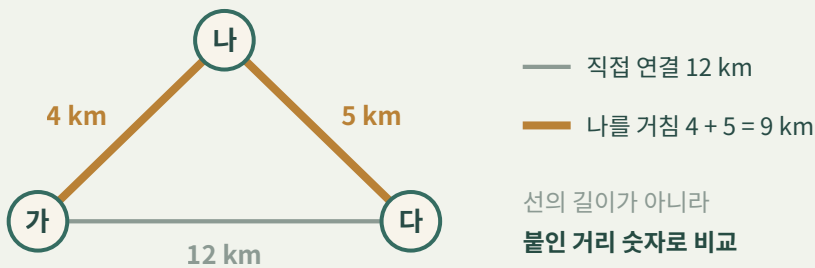
가장 짧은 길 찾기

직접 연결된 길이 언제나 최단 경로는 아니다.

가에서 다까지 직접 가는 길의 길이가 12킬로미터라고 하자. 가에서 나까지는 4킬로미터이며 나에서 다까지는 5킬로미터다. 나를 거쳐 가면 전체가 9킬로미터이므로 직접 연결된 길보다 짧다.

도식에서 두 점 사이의 선이 곧게 그려졌다고 실제 거리도 가장 짧은 것은 아니다. 그래프의 선은 연결을 뜻하며 거리 값은 별도로 붙인 숫자다. 그림의 길이를 자로 재어 비교하는 실수를 피해야 한다.

후보 경로를 나열한 뒤 각 길이를 더하면 작은 연결망의 최단 경로를 찾을 수 있다. 같은 장소를 반복 방문하는 경로는 모든 길이가 양수라면 더 길어지므로 후보에서 줄일 수 있다. 가정을 이용해 탐색을 효율화하는 방법이다.



짧게 그려진 직접 연결보다 나를 거치는 길이 더 짧다.

탐구

가에서 라까지 나를 거치는 길이 $4+7$ 이고 다를 거치는 길이 $12+2$ 라면?

풀이와 확인

각각 11킬로미터와 14킬로미터이므로 두 후보 중에는 나를 거치는 길이 짧다. 다른 연결이 있다면 그것도 검토해야 하므로 이 비교만으로 전체 연결망의 최단 경로라고 단정하지 않는다.

거리와 시간의 다른 최적화

빠른 길과 짧은 길은 다를 수 있다.

가상의 두 경로를 비교하자. 산길은 8킬로미터이며 평균 속도가 시속 2킬로미터다. 완만한 길은 12킬로미터이며 시속 4킬로미터로 갈 수 있다고 가정한다. 산길은 4시간이고 완만한 길은 3시간이다.

따라서 거리를 최소화하면 산길을 택하지만 시간을 최소화하면 완만한 길을 택한다. 최적이라는 말에는 무엇을 줄이거나 늘리는지가 포함되어야 한다. 목적을 밝히지 않으면 서로 다른 정답이 충돌하는 것처럼 보일 수 있다.

실제 이동 시간은 고도와 날씨와 짐과 휴식에 영향을 받는다. 이 페이지의 일정한 속도는 계산을 위한 가정이다. 하나의 평균값으로 현장 이동을 완벽하게 예측한다고 주장하지 않는다.

경로	거리	속도	시간
산길	8 km	2 km/h	4 h
완만한 길	12 km	4 km/h	3 h

거리와 시간을 다르게 비교하는 가상 이동

탐구

완만한 길의 평균 속도가 시속 3킬로미터로 줄면 어느 길이 빠를까?

풀이와 확인

완만한 길도 $12 \div 3 = 4$ 시간이 걸려 두 경로의 시간이 같다. 거리는 여전히 다르다. 조건 하나가 바뀌면 최적 선택이 달라질 수 있으므로 가정의 변화를 함께 검토한다.

중계 구간의 합

한 사람이 전부 움직이는 모형과 구별한다.

길을 여러 사람이 이어 달리는 중계 모형을 생각하자. 세 구간의 이동 시간이 12분과 15분과 10분이며 각 인계에 1분씩 필요하다. 세 사람이 두 번 인계하면 총시간은 39분이다.

구간 시간만 더하면 37분이며 인계 시간을 놓치게 된다. 반대로 사람 수 세 명을 그대로 인계 횟수로 세면 40분이 된다. 시작과 끝을 제외한 연결 지점의 수를 확인해야 한다.

이 계산은 실제 잉카 전령의 속도나 운영 간격을 제시하는 것이 아니다. 도로와 정보 전달을 함께 생각하기 위한 수업 모형이다. 역사적 이동 성과를 말하려면 출처가 있는 거리와 시간 자료가 필요하다.

$$12+15+10=37\text{분}$$

$$\text{인계 2회} \times 1\text{분}$$

$$\text{총시간 39분}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

네 구간이 각각 10분이며 구간 사이 인계가 2분이라면 전체 시간은?

풀이와 확인

이동 시간 40분에 세 번의 인계 시간 6분을 더해 46분이다. 구간이 네 개이면 내부 연결은 세 곳이다. 첫 출발과 마지막 도착을 인계로 더 세지 않는다.

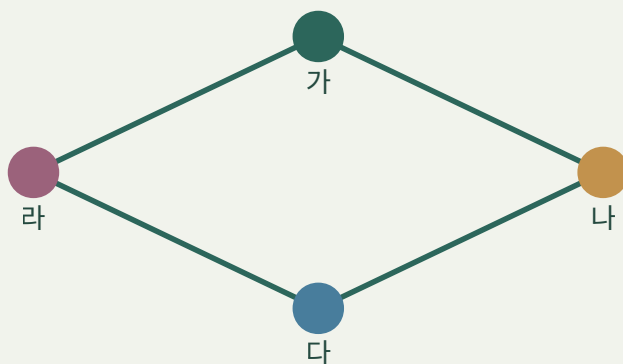
다리가 끊기면 생기는 일

한 연결선이 전체 구조를 나눌 수 있다.

네 거점 가와 나와 다와 라가 한 줄로 연결되어 있다고 하자. 가운데 나와 다 사이의 길을 제거하면 연결망은 둘로 나뉜다. 이런 선은 전체 연결을 유지하는 데 특별한 역할을 한다.

가와 라를 잇는 우회 길을 추가하면 가운데 길이 끊겨도 모든 거점에 도달할 수 있다. 한 연결을 더하는 일이 평소의 최단 거리뿐 아니라 고장 상황의 접근성도 바꾼다. 효율성과 견고함을 서로 다른 기준으로 비교할 수 있다.

실제 도로 체계에서 우회로는 유지 비용과 지형 조건을 고려해야 한다. 모든 점을 모두 연결하면 좋다는 단순한 결론은 적절하지 않다. 제한된 자원 안에서 어떤 연결이 가장 큰 도움을 주는지 탐구하는 문제로 바꿀 수 있다.



우회 연결을 추가한 가상 도로망

탐구

가-나-다-라 연결에서 가와 다를 추가로 이으면 모든 단일 단절을 견딜까?

풀이와 확인

라가 여전히 다에만 연결되어 있으므로 다와 라 사이가 끊기면 라가 고립된다. 우회가 생긴 부분과 여전히 취약한 부분을 따로 확인해야 한다.

케스와차카의 이어지는 기술

다리를 만드는 지식은 오늘의 공동체에도 있다.

케스와차카의 풀로 엮은 다리는 지역 공동체가 전통 기술을 이어 가며 새로 만드는 사례다. 스미스소니언의 자료는 작은 끈을 합쳐 더 큰 줄을 만들고 그것을 다시 케이블로 엮는 과정을 소개한다. 기술은 완성된 물건뿐 아니라 공동 작업에도 담겨 있다.

모형 계산에서 작은 끈 30개로 한 줄을 만들고 이런 줄 세 개를 엮으면 케이블 하나에 작은 끈 90개가 포함된다. 단계별 묶음을 곱셈으로 표현할 수 있다. 재료의 길이가 같으며 손실을 따로 세지 않았다는 조건을 적는다.

끈의 개수를 안다고 실제 다리의 하중을 계산할 수 있는 것은 아니다. 재료의 강도와 엮음과 고정 방식과 노후 상태 등이 필요하다. 이 페이지의 곱셈은 구성 수량의 계산이며 실제 구조 안전을 판단하는 공식이 아니다.

작은 끈 30개 → 줄 1개
줄 3개 → 케이블 1개
케이블 1개에 작은 끈 90개

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

같은 묶음 규칙으로 케이블 네 개를 만들면 작은 끈은 몇 개 필요한가?

풀이와 확인

$90 \times 4 = 360$ 개다. 이 계산은 구성 수량만 센다. 여분과 연결 손실이 있다면 실제 준비량은 달라지므로 제작 계획에서는 추가 조건을 반영해야 한다.

[A11] Smithsonian NMAI | The Bridge at Q'eswachaka

기록된 길이의 오차

경로의 합에도 측정의 한계가 누적된다.

가상 경로의 세 구간 길이가 각각 10킬로미터와 8킬로미터와 12킬로미터라고 기록되어 있다. 각 값의 오차가 최대 0.5킬로미터라고 가정하면 합계 30킬로미터의 최대 절대 오차는 1.5킬로미터다.

가장 짧은 경우는 $9.5+7.5+11.5$ 로 28.5킬로미터다. 가장 긴 경우는 $10.5+8.5+12.5$ 로 31.5킬로미터다. 모든 오차가 같은 방향으로 나타날 수 있다는 보수적인 범위를 계산한 것이다.

실제 측정 오차가 독립적이며 특정한 분포를 따른다면 다른 통계적 방법을 사용할 수 있다. 여기서는 그런 조건을 가정하지 않는다. 어떤 방식으로 오차 범위를 계산했는지 명시하면 숫자의 신뢰 범위를 과장하지 않을 수 있다.

기록 합계 $10+8+12=30$ km

최소 28.5 km

최대 31.5 km

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

기록 합계가 30킬로미터인 이 길과 30.5킬로미터인 다른 길 중 어느 쪽이 확실히 짧을까?

풀이와 확인

각 경로의 오차 범위를 알아야 판단할 수 있다. 첫 경로만 해도 28.5에서 31.5까지 가능하므로 중심값 30이 작다는 이유만으로 반드시 짧다고 할 수 없다.

길이 넓어져도 운반량이 늘지 않는 까닭

연결망의 병목은 구간별 능력과 전체 흐름을 나누어 보게 한다.

안데스 도로망에서 떠올린 현대 운반 모형을 만든다. 출발 S에서 A로 하루 네 꾸러미를 보낼 수 있고 A에서 도착 T로는 두 꾸러미를 보낼 수 있다. 다른 길 S에서 B로는 세 꾸러미이며 B에서 T로는 다섯 꾸러미다. 실제 역사적 운송량을 나타내는 수치는 아니다.

A를 거치는 길은 앞 구간이 넓어도 뒤 구간 때문에 하루 두 꾸러미만 끝까지 옮길 수 있다. B를 거치는 길은 출발 쪽의 세 꾸러미가 제한이 된다. 두 길을 함께 쓰면 하루 다섯 꾸러미가 도착한다. 중간 거점에 계속 쌓아 두지 않는 정상적인 흐름을 가정한다.

A에서 B로 하루 두 꾸러미를 보낼 수 있는 연결을 추가하면 상황이 바뀐다. S에서 A로 간 네 꾸러미 중 둘은 T로 보내고 둘은 B로 보낸다. B는 S에서 받은 셋과 A에서 받은 둘을 합해 다섯 꾸러미를 T로 보낸다. 전체 도착량은 일곱이다.

이것이 최대인 이유도 찾을 수 있다. S에서 나오는 능력의 합이 $4 + 3 = 7$ 이므로 어떤 경로를 택해도 하루 일곱을 넘길 수 없다. 실제로 일곱을 보내는 배치를 만들었으므로 상한과 실행 결과가 맞는다. 좋은 해를 찾는 일과 더 좋은 해가 없음을 보이는 일이 만난다.

구간	하루 최대 꾸러미
$S \rightarrow A$	4
$A \rightarrow T$	2
$S \rightarrow B$	3
$B \rightarrow T$	5
추가 $A \rightarrow B$	2

탐구

추가 연결 A에서 B의 능력이 하루 한 꾸러미라면 최대 도착량은?

풀이와 확인

A에서 T로 둘과 A에서 B를 거쳐 T로 하나를 보낸다. S에서 B로 바로 보내는 셋을 더하면 여섯이다. A 쪽에서는 둘과 하나만 빠져나갈 수 있으므로 남은 한 꾸러미를 더 보낼 길이 없다.

[A9] UNESCO | Qhapaq Ñan Andean Road System

연결망 전시를 설계하기

지도와 그래프를 나란히 놓으면 역할이 드러난다.

전시에서 지리 지도와 연결 그래프를 나란히 보여 주면 독자는 서로 다른 질문을 할 수 있다. 지도에서는 산과 계곡과 거리의 방향을 살피고 그래프에서는 거점 사이의 연결과 우회 가능성을 살핀다. 하나의 그림으로 모든 정보를 표현하려 하지 않는다.

그래프에 수치를 붙일 때는 거리인지 시간인지 비용인지 적는다. 같은 선에 붙은 5라는 숫자도 단위에 따라 경로 선택을 바꾼다. 범례는 장식이 아니라 계산 규칙을 정의하는 부분이다.

전시 활동에서는 특정 연결 하나를 가리고 나머지 길로 도달할 수 있는지 찾게 할 수 있다. 실제 유산의 위치 자료와 별도로 만든 실험 연결망을 구별하면 과거 공간을 왜곡하지 않으면서 원리를 탐구할 수 있다.

그림	잘 보여 주는 것
축척 지도	방향과 실제 거리
연결 그래프	직접 연결과 우회
시간 가중 그래프	이동 시간의 합

그림의 유형에 맞는 질문을 선택한다

탐구

관람객이 선의 길이를 자로 재어 실제 거리를 구하려 한다면 무엇을 고쳐야 할까?

풀이와 확인

연결 그래프는 축척 지도와 다르다는 설명을 붙이고 거리 숫자를 별도로 표시한다. 실제 거리를 재는 활동이라면 축척이 있는 지도를 제공해야 한다. 그림의 목적을 분명히 하면 오독을 줄일 수 있다.

살아 있는 지식과 우리의 전시

과거형으로만 쓰지 않기

자료를 만든 전통과 오늘날의 사람들을 연결한다.

마야와 안데스의 지식을 소개할 때 모든 문장을 사라진 문명의 이야기로 쓰지 않는다. 달력의 실천과 다리의 기술을 이어 가는 오늘날의 공동체가 있다. 유물의 제작 시기와 현재의 문화적 존재를 서로 다른 질문으로 다루어야 한다.

박물관 교육 자료에서 당사자가 설명하는 영상을 보면 숫자와 구조에 대한 우리의 질문이 더 넓어진다. 다리가 얼마나 긴지뿐 아니라 누가 함께 만들고 어떤 관계를 이어 가는지 물을 수 있다. 수학적 관심과 사회적 맥락은 서로 보완한다.

한 사람의 설명을 모든 공동체의 유일한 목소리로 확대하지 않는 것도 중요하다. 지역과 언어와 세대에 따라 차이가 있을 수 있다. 출처가 누구의 어떤 경험을 담는지 구체적으로 밝히면 다양성을 지킬 수 있다.

질문

살필 자료

과거의 형태 유물과 기록

현재의 실천당사자의 설명

변화의 과정여러 시대의 비교

과거와 현재를 구별하며 연결하는 읽기

탐구

옛사람들이 쓰던 지식은 모두 사라졌다는 문장을 어떻게 고칠까?

풀이와 확인

과거 자료 중 해석이 어려운 부분이 있으며 일부 지식과 실천은 오늘날의 공동체에서 이어진다고 구체화한다. 사라진 자료와 살아 있는 사람을 하나의 결론으로 묶지 않는 것이 핵심이다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time / [A11] Smithsonian NMAI | The Bridge at Q'eswachaka

구아만 포마의 기록을 읽는 위치

제작 시기와 관점이 사료의 성격을 정한다.

구아만 포마의 연대기는 식민지 시기의 중요한 그림과 글 자료다. 덴마크 왕립도서관은 원고의 이미지와 전사 등을 디지털로 제공한다. 이를 접촉 이전 시대의 현장 사진처럼 취급하지 않고 제작 시점과 목적을 확인하며 읽어야 한다.

그림은 인물과 도구와 활동을 보여 주지만 무엇을 강조하고 생략했는지도 생각해야 한다. 하나의 장면에서 계산판을 보았다고 모든 작동 규칙을 읽었다고 할 수는 없다. 글과 그림을 함께 확인하고 다른 자료와 비교하는 과정이 필요하다.

디지털 이미지의 쪽 번호와 원고 자체의 번호가 다를 수 있으므로 인용 위치를 정확히 남긴다. 나중 독자가 같은 그림을 찾아 확인할 수 있어야 주장의 근거가 검토된다. 자료를 찾은 행위와 자료를 해석한 행위를 기록에서 구별하자.

확인 항목	이유
제작 시기	동시대성 판단
글과 그림	장면의 맥락
정확한 쪽 번호	확인 가능성

그림 사료를 읽기 전의 확인 항목

탐구

그림의 일부만 잘라 전시에 쓰면 어떤 정보가 사라질 수 있을까?

풀이와 확인

주변 글과 다른 인물과 장면의 배열이 사라져 도구의 맥락이 약해질 수 있다. 부분 확대를 쓰더라도 전체 쪽의 위치와 원자료 정보를 함께 제공하면 독자가 맥락을 확인할 수 있다.

[A5] Royal Danish Library | The Guaman Poma Website

유물 사진과 재구성 그림

시각 자료의 종류를 명확히 표시한다.

유물 사진은 실물의 표면을 보여 주지만 조명과 각도와 손상 때문에 읽기 어려울 수 있다. 선으로 다시 그린 도해는 구조를 명료하게 만들지만 편집자의 판단이 들어간다. 두 종류의 장점을 활용하되 같은 증거로 취급하지 않는다.

생성형 도구로 만든 분위기 그림은 시대와 장소를 떠올리게 하는 장식으로 사용할 수 있다. 그러나 정확한 유물 복원이나 수학적 구조의 증거로 제시하면 안 된다. 이 책의 표지 역시 실물 사진과 구별되는 편집용 이미지다.

수학 도식은 규칙과 수치를 확인하여 제작한다. 그림 안의 점 수와 표의 숫자가 맞는지 검산하고 축척을 썼다면 명시한다. 아름다운 편집과 정확한 정보는 함께 점검해야 하는 별도의 품질 기준이다.

자료 종류	주요 역할
유물 사진	실물의 관찰
재구성 도해	구조의 설명
표지 삽화	분위기와 주제 제시

시각 자료를 용도에 따라 구분한다

탐구

점 다섯 개가 그려진 그림의 설명에 점 넷이라고 적었다면 무엇을 먼저 고칠까?

풀이와 확인

자료가 전달하려는 값과 원래 규칙을 확인한 뒤 그림과 설명을 일치시킨다. 정확한 수량이 핵심인 도식에서는 분위기에 맞춘 임의 수정이 아니라 수학적 검산에 따라 고쳐야 한다.

표기법을 번역하는 전시

낮선 기호를 익숙한 숫자로만 지우지 않는다.

마야의 점막대 수를 현대 숫자로 번역할 때 원래 기호도 함께 보여 주면 좋다. 값만 27이라고 적으면 위의 자리 1과 아래의 자리 7이라는 구조가 사라진다. 번역은 읽기를 돕지만 원자료의 형식을 대체할 필요는 없다.

키푸의 234를 숫자로 옮길 때도 매듭의 위치와 연결을 함께 표시할 수 있다. 숫자 값과 원래 매체가 나란히 있으면 독자는 같은 수학 구조가 다른 재료에서 어떻게 구현되는지 비교할 수 있다.

원문과 번역과 설명을 구분한 전시는 독자의 수준에 따라 여러 입구를 만든다. 먼저 값만 보고 이해한 사람도 다음에는 자리 규칙을 살펴볼 수 있다. 단순화한 설명에서 더 자세한 자료로 이동할 길을 남기는 방식이다.

표기 안내에는 쉬운 예와 경계 예를 함께 둔다. 8은 점과 막대의 결합을 보여 주며 19에서 20으로 가는 변화는 자리 교환을 드러낸다. 40의 아래 자리 0도 표시한다. 독자에게 27과 60을 읽게 하고 설명에서 빠진 규칙을 찾아 고친다.

위 2와 아래 7
 $2 \times 20 + 7$
 현대 십진 표기 47

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

순수 이십진법의 위 2와 아래 7을 전시에 소개하는 세 요소는?

풀이와 확인

원래 배열을 단순화한 그림과 $2 \times 20 + 7$ 이라는 해석식과 결과 47을 함께 놓는다. 이 표기는 장기력 날짜가 아닌 순수 이십진법 연습임을 적어 체계를 명확히 한다.

비교표가 숨기는 차이

빈칸을 억지로 채우지 않는 비교를 한다.

마야 표기와 키푸를 비교하는 표에는 수의 밑과 기록 재료와 대표 기능을 넣을 수 있다. 그러나 모든 항목에 같은 종류의 답이 있다고 가정하지 않는다. 한 전통에서 알려진 정보가 다른 전통에서는 아직 불확실할 수 있다.

빈칸은 지식이 없었다는 증거가 아니라 현재 자료로 답하기 어렵다는 표시일 수 있다. 모름과 없음과 해당 없음은 서로 다른 상태다. 이를 같은 기호로 처리하면 비교가 부정확해진다.

비교의 목적도 밝혀야 한다. 자릿값의 원리를 배우려는 표와 역사적 전파를 조사하는 표는 필요한 근거가 다르다. 비슷한 구조가 있다는 관찰만으로 직접 교류를 결론 내릴 수는 없다.

상태	뜻
없음	대상이 없다는 근거가 있음
모름	현재 자료로 판단 어려움
해당 없음	비교 항목이 적용되지 않음

자료의 빈칸을 정확한 언어로 구별한다

탐구

두 체계가 모두 0을 표현하는 기능을 가졌다면 서로 전해졌다고 할 수 있을까?

풀이와 확인

공통 기능만으로는 직접 전파를 증명할 수 없다. 시기와 이동 경로와 중간 자료 같은 별도 증거가 필요하다. 독립적인 필요에 따라 비슷한 구조가 나타날 가능성도 검토해야 한다.

나의 작은 전시를 꾸미기

한 주제를 깊이 설명하는 세 장면을 고른다.

작은 전시의 주제를 자리값으로 정했다면 첫 장면에는 19에서 20으로 바뀌는 점막대 모형을 놓을 수 있다. 둘째 장면에는 키푸의 십진 위치를 단순화한 도식을 놓는다. 셋째 장면에서는 관람객이 같은 수를 두 체계로 나타내게 한다.

각 장면에는 하나의 질문을 붙인다. 무엇이 묶이는가와 빈자리를 어떻게 남기는가와 같은 값임을 어떻게 확인하는가가 좋은 예다. 설명을 많이 붙이는 것보다 도형과 계산이 질문에 직접 답하도록 구성한다.

마지막에는 자료 출처와 재구성 여부를 적는다. 실제 유물의 이미지와 학습자가 만든 판을 시각적으로 구분하면 전시의 신뢰도가 높아진다. 관람객의 반응을 보고 어려운 용어와 빠진 단위도 고칠 수 있다.

$$43=2\times 20+3$$

$$43=4\times 10+3$$

값은 같고 묶음은 다르다

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

43을 두 체계로 나타내는 활동의 정답을 설명해 보자.

풀이와 확인

순수 이십진법에서는 $2\times 20+3$ 이며 십진법에서는 $4\times 10+3$ 이다. 기호와 재료가 달라도 전체 값은 같다. 키푸 도식을 사용할 때는 실제 유물 복원이 아닌 자리값 학습 그림임을 적는다.

배운 내용을 검산하는 네 문제

표기와 시간과 기록과 공간을 연결한다.

첫 문제는 순수 이십진법의 위 3과 아래 9를 읽는 것이다. 둘째 문제는 2톤 4위날 5킨을 일수로 바꾸는 것이다. 셋째 문제는 백 2와 십 0과 일 6의 수량을 읽는 것이다. 넷째 문제는 8미터와 5미터인 직사각형 모형의 면적을 구하는 것이다.

네 문제는 숫자 모양보다 단위와 자리의 무게를 확인하는 습관을 평가한다. 각각 20과 360과 10과 제곱미터가 계산의 의미를 정한다. 같은 곱셈과 덧셈을 사용해도 체계가 다르면 해석은 달라진다.

답을 쓴 뒤 어떤 가정을 사용했는지 한 문장씩 적어 보자. 순수 이십진법이라는 조건과 장기력의 예외 규칙과 손상 없는 판독과 직사각형 모양이 그 예다. 답의 정확성과 조건의 명확성을 함께 검토한다.

문제	계산	결과
표기	$3 \times 20 + 9$	69
기간	$2 \times 360 + 4 \times 20 + 5$	805일
매듭 모형	$2 \times 100 + 0 \times 10 + 6$	206
면적	8×5	40 m^2

서로 다른 체계에서 단위와 자리를 확인한다

탐구

네 문제의 답과 핵심 조건을 확인해 보자.

풀이와 확인

첫째는 69다. 둘째는 805일이다. 셋째는 206이다. 넷째는 40제곱미터다. 순서대로 순수 이십진법과 360일 톤과 십진 자리와 직사각형이라는 조건을 사용했다.

다음 질문을 남기며

정확한 계산과 열린 해석을 함께 가져간다.

이 책에서 만난 수학은 종이에 적힌 식에만 있지 않았다. 점과 막대의 배열과 시간의 반복과 끈의 위치와 길의 연결에도 수량과 관계가 들어 있었다. 낯선 매체를 읽는 일은 익숙한 계산을 새로운 질문으로 바꾸는 경험이다.

동시에 모든 그림을 읽었다고 모든 역사를 이해한 것은 아니다. 판독되지 않은 부분과 해석이 여러 개인 부분을 남겨 두어야 한다. 모르는 것을 정확히 표시하면 다음에 어떤 자료가 필요한지 더 분명해진다.

마지막 활동은 한 가지 질문을 골라 출처가 있는 자료와 자신의 계산을 나누어 기록하는 것이다. 달력의 공통 주기나 키푸의 부분합이나 길의 우회 가능성 중 하나를 선택해 보자. 독자가 다시 계산하고 원자료를 찾아갈 수 있는 작은 탐구가 완성의 기준이다.

탐구 단계	남길 기록
질문	대상과 조건
자료	출처와 관찰
계산	식과 검산
해석	결론과 남은 질문

다음 독자가 이어 갈 수 있는 탐구의 기록

탐구

다음 탐구 질문을 어떻게 검증 가능한 형태로 바꿀 수 있을까?

풀이와 확인

마야는 수학을 잘했을까 같은 넓은 질문보다 260일과 365일 순환은 언제 같은 짝으로 돌아올까처럼 조건과 확인 방법이 있는 질문을 고른다. 답 18980일을 계산한 뒤 그 결과가 설명하지 못하는 문화적 의미도 별도로 남긴다.

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time

<https://americanindian.si.edu/nk360/resources/Living-Maya-Time/>

[A2] Museo Larco | Inca Quipus

<https://www.museolarco.org/en/exhibition/permanent-exhibition/online-exhibition/textiles-from-ancient-peru/inca-quipus/>

[A3] NIST Museum | Standardizing an Empire

<https://www.nist.gov/nist-museum/standardizing-empire>

[A4] Smithsonian NMAI | The Calendar System

<https://maya.nmai.si.edu/calendar/calendar-system>

[A5] Royal Danish Library | The Guaman Poma Website

<https://poma.kb.dk/>

[A6] SLUB Dresden | The Dresden Maya Codex Content

<https://www.slub-dresden.de/en/explore/manuscripts/the-dresden-maya-codex/content>

[A7] INALCO | Quechua oral numeration and its writing in quipus

<https://inalco.fr/en/quechua-oral-numeration-and-its-writing-quipus>

[A8] Harvard Archaeology | Building Pathways into Khipu Research

<https://archaeology.harvard.edu/news/2025/12/building-pathways-khipu-research-openness-access-and-next-generation>

[A9] UNESCO | Qhapaq Ñan Andean Road System

<https://whc.unesco.org/en/list/1459/>

[A10] UNESCO | Historic Sanctuary of Machu Picchu

<https://whc.unesco.org/en/list/274>

[A11] Smithsonian NMAI | The Bridge at Q'eswachaka

<https://americanindian.si.edu/inkaroad/engineering/video/bridge-qeswachaka.html>

[A12] Smithsonian NMAI | Maya Math Game

<https://maya.nmai.si.edu/maya-sun/maya-math-game>

[A13] Smithsonian NMAI | Maya Calendar Converter

<https://maya.nmai.si.edu/calendar/maya-calendar-converter>