MATHESIS

세계 수학관 / 내용 중심 개정판

세계 수학의 큰 책

여덟 관을 잇는 역사와 계산과 탐구



역사 / 도해 / 탐구

REVISED EDITION / 2026

차례

본문의 흐름에 따라 편집한 실제 PDF 쪽번호다.

고대 오리엔트관 / 기록의 재료에서 계산의 구조로 9

고대 오리엔트관 / 흙과 종이에 남은 계산 10

고대 오리엔트관 / 60을 묶음으로 세는 법 18

고대 오리엔트관 / 역수표와 나눗셈의 기술 26

고대 오리엔트관 / 곱셈표에서 넓이 계산으로 35

고대 오리엔트관 / 직사각형 속에 숨은 미지수 43

고대 오리엔트관 / 정사각형 대각선의 정밀도 51

고대 오리엔트관 / 플림프턴 322와 직각삼각형 60

고대 오리엔트관 / 이집트의 수와 두 배 계산 68

고대 오리엔트관 / 한 조각씩 나누는 분수 76

고대 오리엔트관 / 가정한 값에서 답으로 85

고대 오리엔트관 / 경사와 원과 밭의 넓이 93

고대 오리엔트관 / 잘린 피라미드와 남겨진 질문 101

고대 오리엔트관 / 참고 자료와 자료 읽기 110

인도관 / 길이를 옮기고 수를 이어 가다 112

인도관 / 줄과 넓이의 기하학 113

인도관 / 자리값과 아리아바타 123

인도관 / 빈자리에서 수 0으로 131

인도관 / 재산과 빚의 산술 140

인도관 / 방정식이 묻는 조건 147

인도관 / 쿠타카와 정수의 길 155

인도관 / 순환으로 찾는 큰 해 163

인도관 / 운율에서 조합으로 172

인도관 / 수열로 읽는 변화 181

인도관 / 케랄라의 무한급수 189

인도관 / 사인표와 하늘의 계산 199

인도관 / 라마누잔과 남겨진 노트 207

인도관 / 참고 자료와 자료 읽기 216

동아시아관 / 수를 놓는 공간과 도형을 보는 눈 218

동아시아관 / 산가지가 만든 계산의 공간 219

동아시아관 / 구장산술의 문제를 읽는 법 227

동아시아관 / 유휘와 도형을 나누는 생각 236

동아시아관 / 조충지와 근삿값의 정밀도 244

동아시아관 / 손자산경과 나머지의 만남 252

동아시아관 / 진구소와 계산 절차의 설계 261

동아시아관 / 양휘의 삼각형과 수의 배열 269

동아시아관 / 주세걸과 미지수의 배열 277

동아시아관 / 주판과 진겁기의 계산 문화 284

동아시아관 / 세키와 다케베의 탐구 294

동아시아관 / 산가쿠의 원과 도형 302

동아시아관 / 바다를 건너고 책으로 남은 수학 311

동아시아관 / 참고 자료와 자료 읽기 318

이슬람 아랍관 / 관계를 옮기는 언어와 정밀한 눈금 320

이슬람 아랍관 / 여러 언어가 만나는 수학 321

이슬람 아랍관 / 자리값과 계산의 질서 329

이슬람 아랍관 / 말로 쓴 관계에서 방정식으로 337

이슬람 아랍관 / 여섯 형식과 완전제곱 345

이슬람 아랍관 / 타비트와 수의 관계 353

이슬람 아랍관 / 빛과 기하학의 만남 362

이슬람 아랍관 / 하이얌과 곡선의 해 370

이슬람 아랍관 / 투시와 삼각형의 언어 379

이슬람 아랍관 / 알카시와 정밀한 계산 388

이슬람 아랍관 / 하늘을 읽는 원판 396

이슬람 아랍관 / 문양을 움직이는 규칙 405

이슬람 아랍관 / 책과 증명이 건너간 길 414

이슬람 아랍관 / 참고 자료와 자료 읽기 422

한국관 / 막대와 눈금과 책 사이에서 424

한국관 / 삼국과 고려의 산학 425

한국관 / 조선의 시간과 측정 444

한국관 / 수의 배열과 방정식 467

한국관 / 현대의 수학과 열린 질문 495

한국관 / 연표와 탐구 해설 및 참고 자료 516

한국관 / 심화 탐구 기록과 계산의 구조 531

한국관 / 참고 자료와 자료 읽기 536

아프리카관 / 하나의 장면에 담기지 않는 지식 537

아프리카관 / 하나의 대륙에서 여러 수학을 읽다 538

아프리카관 / 알렉산드리아에서 증명을 읽다 547

아프리카관 / 그림자에서 지구의 크기까지 556

아프리카관 / 방정식과 주석의 전통 567

아프리카관 / 이샹고의 자국과 해석의 경계 577

아프리카관 / 팀북투의 필사본과 계산 587

아프리카관 / 요루바 수 이름과 기준량 595

아프리카관 / 소나의 선과 연결 603

아프리카관 / 만칼라에서 상태와 전략을 읽다 614

아프리카관 / 직조의 격자와 무늬 624

아프리카관 / 반복과 자기닮음의 모형 634

아프리카관 / 오늘의 수학과 열린 탐구 644

아프리카관 / 참고 자료와 자료 읽기 653

고대 아메리카관 / 돌에 남긴 시간과 끈에 남긴 수량 655

고대 아메리카관 / 서로 다른 땅에서 자란 수학 656

고대 아메리카관 / 점과 막대와 영의 자리 663

고대 아메리카관 / 스무 개씩 묶는 계산 672
고대 아메리카관 / 장기력으로 긴 시간을 세다 681
고대 아메리카관 / 두 달력이 맞물리는 날 689
고대 아메리카관 / 하늘의 반복을 표에 담다 698
고대 아메리카관 / 매듭이 담는 수량 706
고대 아메리카관 / 합계와 분류의 수학 715
고대 아메리카관 / 계산판을 새로 구성하다 724
고대 아메리카관 / 산비탈을 바꾸는 기하 731
고대 아메리카관 / 길과 다리를 연결하는 수학 739
고대 아메리카관 / 살아 있는 지식과 우리의 전시 748
고대 아메리카관 / 참고 자료와 자료 읽기 756
지식의 길 / 움직이는 책과 남겨야 할 관계 758
지식의 길 / 한 줄이 아닌 길의 그물 759
지식의 길 / 숫자를 옮기면 남는 구조 767
지식의 길 / 기록의 재료와 책의 구조 775
지식의 길 / 번역이 옮겨야 하는 논리 783
지식의 길 / 상인의 장부와 계산의 이동 792
지식의 길 / 단위가 바뀌어도 같은 양 800
지식의 길 / 천문표의 줄 사이를 읽기 808
지식의 길 / 지도를 읽는 수학 816
지식의 길 / 인쇄된 숫자를 검산하기 824

지식의 길 / 대수 기호와 번역의 약속 831

지식의 길 / 편지와 학술 교류의 기록 838

지식의 길 / 디지털 기록과 새로운 길 846

지식의 길 / 자료를 다시 엮는 편집자의 작업실 855

지식의 길 / 참고 자료와 자료 읽기 860

/ 수를 쓰는 방식과 변하지 않는 관계 862

/ 측정값에서 증명으로 가는 거리 866

/ 절차를 비교하는 대수의 작업실 870

/ 자료를 잇는 법과 남겨 둘 빈칸 874

/ 여덟 관을 넘나드는 비교 탐구 878

/ 참고 자료와 자료 읽기 882

고대 오리엔트관 / 그림으로 다시 읽는 보충 탐구 884

인도관 / 그림으로 다시 읽는 보충 탐구 892

동아시아관 / 그림으로 다시 읽는 보충 탐구 900

이슬람 아랍관 / 그림으로 다시 읽는 보충 탐구 909

한국관 / 그림으로 다시 읽는 보충 탐구 919

아프리카관 / 그림으로 다시 읽는 보충 탐구 928

고대 아메리카관 / 그림으로 다시 읽는 보충 탐구 937

지식의 길 / 그림으로 다시 읽는 보충 탐구 946

READING THE WORLD

이 책을 여는 질문

이 책은 같은 분량으로 잘라 놓은 전시실이 아니라 서로 다른 질문을 지닌 여덟 권의 책에서 출발한다. 계산을 남긴 재료와 해결해야 했던 문제를 함께 읽으면 비슷한 수식 뒤에 있는 차이가 드러난다. 한 지역을 오늘의 국가 경계에 가두거나 다른 지역을 한 줄의 발전 순서에 놓지 않는다.

읽는 순서는 자유롭다. 수를 기록하는 방법이 궁금하다면 산가지와 자리값 및 키푸를 오가면 된다. 도형의 이유를 묻고 싶다면 넓이의 보존과 완전제곱 및 증명을 이어 읽을 수 있다. 서로 닮은 계산을 발견했을 때에는 구조의 공통점과 역사적 전파의 증거를 따로 살핀다.

이번 개정에서는 원고 단위마다 페이지를 끝내던 방식을 없앴다. 문장과 그림이 차지하는 실제 길이에 따라 다음 페이지로 이어지며 짧은 해설만 남는 쪽을 줄이도록 장 사이의 흐름도 연결했다. 빈 공간을 만들기 위해 본문을 늘리거나 일정한 쪽수를 맞추기 위해 설명을 나누지 않았다.

탐구 문제의 수치와 문자식은 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 재구성이다. 먼저 조건을 읽고 직접 계산한 뒤 풀이를 비교한다. 역사적 사실을 판단할 때에는 본문의 출처와 유물 설명을 함께 확인한다.

고대 오리엔트관 / 01

기록의 재료에서 계산의 구조로



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

점토판을 누르는 흔적과 종이에 남긴 기록은 지식을 보존하는 서로 다른 방식이다. 오늘의 독자는 완성된 수식에 익숙하지만 옛 계산을 읽을 때에는 수를 적는 순서와 단위 및 생략된 자릿값을 먼저 확인해야 한다. 같은 모양의 숫자도 문제의 맥락에 따라 크기가 달라질 수 있다. 재료와 표기 관습은 계산의 바깥 장식이 아니다.

이 관은 역수와 넓이 및 분수의 문제를 통해 계산이 어떻게 조직되는지 살핀다. 표에서 값을 찾는 일과 새로운 값을 만드는 절차를 구별하고 정확한 관계와 편리한 근삿값을 나누어 읽는다. 아래 삽화는 여러 주제를 한 화면에 모은 현대의 시각적 해석이다. 실제 유물의 문자 판독이나 특정 장소의 배치를 대신하는 자료로 사용하지 않는다.

고대 오리엔트관 / 02

흙과 종이에 남은 계산

손바닥 위의 수학 교실

작은 점토판에도 계산을 배우고 가르친 흔적이 남아 있다.

메트로폴리탄미술관의 서기관 연습판은 쐐기 모양 글자를 익히던 학습 자료다. 부드러운 흙을 눌러 글자를 남기는 일에는 손의 움직임과 기호의 구별이 함께 필요했다. 숫자를 읽는 능력도 이런 문자 학습과 떨어져 있지 않았다.

오늘의 독자는 완성된 답만 보고 옛 학습자를 평가하기 쉽다. 그러나 한쪽의 모범 문장과 반복된 글자와 지워진 자리는 학습 과정을 생각하게 한다. 계산 결과가 맞는지 살피는 일과 누가 어떤 과제로 연습했는지 묻는 일은 서로 다른 질문이다.

이 관에서는 실제 유물의 설명과 오늘의 학습용 계산을 구별한다. 뒤에 나오는 창고 장부와 수량 예제는 원리를 설명하기 위해 새로 구성한 것이다. 익숙한 생활 장면으로 읽되 실제 고대 장부의 번역이라고 받아들이지 않는다.



서기관 연습판을 읽는 순서. 개념도.

탐구

연습판에서 답 이외에 살펴볼 흔적을 두 가지 골라 보자.

풀이와 확인

글자의 반복 횟수와 수정 흔적을 볼 수 있다. 모범 글자와 학습자가 쓴 글자의 위치도 비교한다. 다만 이런 흔적 하나만으로 학습자의 나이나 성적을 확정할 수는 없다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

어디에서 나온 자료인가

계산식이 같은 유물도 발견 맥락에 따라 다른 질문을 던진다.

유물의 출처를 읽을 때는 제작 장소와 발견 장소와 현재 소장 장소를 나눈다. 세 장소가 모두 같다고 가정하면 이동 과정이 사라진다. 특히 시장에서 구입한 유물은 정확한 발굴 위치가 알려지지 않을 수 있으므로 빈칸을 상상으로 채우지 않는다.

예를 들어 같은 곱셈표가 주거지의 여러 학습판과 함께 발견됐다면 교육 활동을 검토할 근거가 늘어난다. 출토 맥락이 없는 곱셈표는 숫자의 배열을 분석할 수 있어도 그 방의 수업 모습을 복원하는 데에는 더 큰 제한이 있다.

출처표에는 관찰된 정보와 추정된 정보를 따로 적는다. 연대도 단일 연도보다 범위로 제시되는 경우가 많다. 범위를 제시하는 것은 설명의 실패가 아니라 남아 있는 증거가 허용하는 정확도를 드러내는 방식이다.



세 장소는 서로 다른 정보다.

탐구

현재 소장처가 뉴욕인 점토판을 뉴욕에서 제작된 계산판이라고 소개해도 될까?

풀이와 확인

안 된다. 소장처는 현재 보관 장소다. 제작지와 발굴지는 별도 기록으로 확인해야 한다. 알려지지 않은 항목에는 미상이라고 적고 확인된 소장처만 정확히 제시한다.

[01] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [02] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

장부의 수와 문제의 수

현실을 기록하는 숫자와 학습을 위해 고른 숫자를 구별한다.

학습용 창고 장부를 만들어 보자. 처음 보리가 84자루 있고 27자루를 내보낸 뒤 18자루가 들어왔다. 남은 수는 84−27+18=75다. 여기에 날짜와 거래 이유를 덧붙이면 수량 계산은 물건의 이동을 확인하는 기록으로 바뀐다.

반면 문제집은 84와 27과 18을 계산하기 알맞게 선택할 수 있다. 같은 덧셈과 뺄셈이라도 실제 장부와 교육용 문제는 만들어진 목적이 다르다. 문서 안의 수가 깔끔하다는 이유만으로 실제 거래가 언제나 그렇게 이루어졌다고 단정하지 않는다.

검산에는 다른 순서를 쓸 수 있다. 들어온 것을 먼저 합하면 102자루다. 여기서 나간 27자루를 빼면 역시 75자루가 된다. 연산 순서는 달라도 입고와 출고의 방향을 정확히 지키면 전체 수량은 일치한다.

처음	출고	입고	재고
84	−27	+18	75

가상의 창고 장부. 수량 변화의 검산.

탐구

마지막 재고가 73자루였다면 기록과 실물의 차이는 얼마인가?

풀이와 확인

기록상 재고는 75자루이므로 2자루가 모자란다. 이 차이만으로 원인을 정할 수는 없다. 입고 수량과 출고 수량과 처음 재고를 각각 다시 확인해야 한다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

눈에 보이는 것부터 적기

자료를 읽는 첫 단계는 해석보다 관찰을 앞세우는 것이다.

가상의 계산판에 세 줄의 수가 있고 마지막 줄 아래에 선이 그어져 있다고 하자. 세 줄과 밑줄은 관찰이다. 밑줄 아래 수가 합계일 것이라는 말은 해석이다. 앞의 수를 더해 일치하는지 확인하면 그 해석을 지지하는 근거가 생긴다.

그러나 합계가 맞지 않을 때 바로 필자의 실수라고 쓰면 안 된다. 일부 기호가 깨졌거나 단위가 다르거나 앞줄이 별도 항목일 수 있다. 눈에 보이는 수와 읽기 어려운 수를 구별한 뒤 가능한 설명을 몇 가지 세워야 한다.

학습용 판에 12와 18과 30을 적고 맨 아래에 60을 둔다. 이때 합계 해석은 잘 맞는다. 맨 아래가 1로 보인다면 60진법의 자리값이나 기호 판독을 다시 검토할 수 있다. 계산은 해석을 시험하는 도구가 된다.

$$12 + 18 + 30 = 60$$

$$60 = 1 \times 60$$

합계 해석을 시험하는 학습용 계산판.

탐구

자료에서 읽기 어려운 숫자를 자신 있게 하나로 정하면 무엇을 잃는가?

풀이와 확인

판독의 불확실성을 잃는다. 뒤의 계산이 맞아도 처음 읽은 수가 틀렸을 수 있다. 가능한 판독을 나란히 적고 각각이 다른 줄과 맞는지 비교하는 편이 타당하다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

매체가 바꾸는 계산의 모습

점토판과 파피루스는 같은 수학을 서로 다른 형태로 남긴다.

흙에 눌러 새긴 자국과 붓으로 적은 선은 모양과 배치가 다르다. 작은 판에서는 줄의 길이가 제한되고 긴 두루마리에서는 여러 문제를 이어 적을 수 있다. 이런 물리적 조건은 계산을 놓는 공간을 바꾸지만 사고의 우열을 곧바로 말해 주지는 않는다.

종이에 24×17의 풀이를 써 보자. 한쪽에는 세로 계산을 적고 다른 쪽에는 17×16과 17×8의 합을 적는다. 결과는 408로 같다. 배치가 달라도 중간 수를 어떻게 만들고 합치는지 읽으면 절차를 비교할 수 있다.

유물을 재현한 그림에서는 원래의 크기와 재료를 별도 설명으로 제공하는 것이 좋다. 화면에 크게 보이는 글자가 실제로도 컸다고 오해할 수 있기 때문이다. 확대 기능은 기호를 자세히 읽게 하지만 원래 물체의 크기를 대신하지 않는다.



17×24를 10×24와 7×24로 나눈 현대 도해.

탐구

계산판의 확대 이미지에 원래 크기를 함께 적어야 하는 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

확대 화면만으로 실제 크기를 판단할 수 없기 때문이다. 기호의 세부를 읽는 목적과 물체의 크기를 이해하는 목적을 나누면 자료를 더 정확히 볼 수 있다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

단위를 잃어버린 답

수량의 단위는 숫자와 함께 보존해야 할 계산의 일부다.

보리 3자루와 보리 5되를 아무 설명 없이 더해 8이라고 적을 수는 없다. 자루와 되가 서로 다른 크기를 나타내기 때문이다. 학습용 약속으로 한 자루를 12되로 정하면 3자루는 36되이므로 전체는 41되가 된다.

이 약속은 고대의 실제 도량형을 재현한 것이 아니다. 단위를 맞추는 원리를 보이기 위한 예시다. 역사 자료의 단위는 시대와 지역과 물품에 따라 달라질 수 있으므로 오늘의 리터나 킬로그램으로 바꿀 때에도 근거가 필요하다.

41되는 같은 약속 아래에서 3자루와 5되다. 단위를 작게 바꾸면 수는 커지지만 실제 양은 그대로다. 단위 변환은 물건을 더 만드는 일이 아니라 같은 양을 다른 기준으로 세는 일이라는 점을 기억하자.

$$3\text{자루} = 36\text{되}$$

$$36\text{되} + 5\text{되} = 41\text{되}$$

한 자루를 12되로 정한 학습용 단위 변환.

탐구

한 상자를 8묶음으로 정할 때 5상자와 3묶음은 모두 몇 묶음인가?

풀이와 확인

5상자는 40묶음이다. 여기에 3묶음을 더하면 43묶음이다. 답에 묶음이라는 단위를 써야 수 43이 무엇을 세는지 분명해진다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

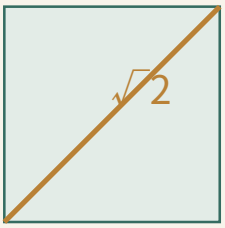
전시 설명문을 고쳐 쓰기

좋은 수학사 설명은 확인된 사실과 흥미로운 추론을 함께 구별한다.

어떤 전시문이 이 판을 쓴 학생은 모든 직각삼각형의 비밀을 완벽히 알았다고 말한다고 하자. 한 유물에 특정 계산이 남아 있다는 사실만으로 모든 경우의 지식이나 필자의 이해 수준을 확인하기는 어렵다. 문장을 증거가 있는 범위로 줄여야 한다.

이 판에는 정사각형과 대각선에 관련된 수가 적혀 있다라는 문장은 관찰에 가깝다. 그 수가 매우 정확한 근삿값이라는 설명은 계산으로 검토할 수 있다. 특정 알고리즘을 사용했다는 주장은 다른 문헌과 비교해 따로 논의해야 한다.

과장된 설명을 줄이면 이야기가 빈약해지는 것이 아니다. 남은 수 몇 개에서 얼마나 많은 질문이 나오는지 보여 줄 수 있다. 관람자가 스스로 검산하고 해석의 차이를 살펴보게 하는 전시가 오히려 더 깊은 이해를 만든다.



대각선² = 1² + 1²

대각선 = √2

계산으로 확인하는 관계

정사각형의 변과 대각선 관계를 검산한 현대 도해. 유물의 원도는 아니다.

탐구

어떤 절차로 계산했는지 확실하지 않을 때 설명문은 어떻게 쓰는가?

풀이와 확인

가능한 계산법 가운데 하나를 소개한다고 밝힌다. 그 절차로 같은 값이 나온다는 사실과 실제 필자가 그 절차를 썼다는 역사적 주장을 구별한다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

자료 읽기의 네 질문

대상과 절차와 목적과 한계를 차례로 묻는 습관을 만든다.

새로운 수학 유물을 만나면 무엇이 남아 있는지 먼저 묻는다. 다음에는 적힌 수들이 어떤 계산으로 연결되는지 확인한다. 이어서 누가 무엇을 하려고 이 자료를 만들었을지 검토한다. 마지막으로 현재 증거로는 무엇을 알 수 없는지 적는다.

가상의 표에 4와 8과 12가 적혀 있다면 4의 배수라는 관계는 쉽게 확인된다. 하지만 이 표가 물건 네 개씩을 포장한 기록인지 곱셈 연습인지 수만 보고 결정할 수는 없다. 제목과 단위와 주변 문서가 해석에 필요하다.

이 네 질문은 고대 자료에만 적용되지 않는다. 현대의 통계표와 그래프도 측정 대상과 계산 과정과 작성 목적과 자료의 한계를 함께 읽어야 한다. 수학의 정확성과 자료 해석의 신중함은 서로 보완하는 능력이다.



4개씩 묶은 배열은 4와 8과 12의 관계를 보여 준다. 기록의 목적까지 정하지는 않는다.

탐구

수의 관계를 맞게 찾았으면 문서의 목적도 자동으로 알아낸 것일까?

풀이와 확인

그렇지 않다. 같은 수열은 여러 상황에 나타날 수 있다. 수학적 관계는 계산으로 확인하고 문서의 목적은 제목과 출토 맥락과 다른 자료를 통해 검토한다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판 / [O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판

고대 오리엔트관 / 03

60을 묶음으로 세는 법

기수가 달라지면 자리도 달라진다

60진법에서는 한 자리가 60개 모일 때 다음 자리로 올라간다.

십진법의 243은 2×100+4×10+3이다. 같은 자리 원리를 60을 기준으로 적용하면 두 자리 수 2:43은 2×60+43이 된다. 따라서 십진법으로 163이다. 이 책의 쌍점은 60진법의 자리를 나누기 위해 덧붙인 현대의 학습용 표시다.

한 자리에 들어가는 값은 0부터 59까지다. 자리 안에서 43을 표시하는 방법과 자리 전체가 60배씩 커지는 원리를 혼동하지 말자. 고대 바빌로니아의 기호는 1과 10을 나타내는 기본 모양을 조합해 자리 안의 수를 표현했다.

먼저 숫자의 모양을 읽고 그다음 위치가 주는 값을 읽어야 한다. 같은 2라는 묶음도 가장 오른쪽에서는 2가 되지만 한 칸 왼쪽에서는 120이 된다. 기호와 자리값이라는 두 층이 함께 작동한다.

60의 자리	1의 자리
2	43
120	

2:43은 120+43이다. 현대 자리값 해설. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

60진법의 3:12는 십진법으로 얼마인가?

풀이와 확인

3×60+12=192다. 312라고 이어 읽으면 십진법의 자리값을 잘못 적용한 것이다. 자리를 나누어 각각의 값부터 계산하면 오류를 막을 수 있다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

한 자리 안의 두 기호

기본 기호를 합해 수를 만들고 그 수를 다시 자리 안에 놓는다.

바빌로니아 수 표기에서는 1을 나타내는 기호와 10을 나타내는 기호의 조합이 중요하다. 예를 들어 23은 열을 나타내는 모양 두 개와 하나를 나타내는 모양 세 개로 읽을 수 있다. 실제 배열에는 관례가 있으므로 현대의 점 그림은 원리 설명에만 사용한다.

이 구조는 기수 60과 모순되지 않는다. 한 자리의 값을 구성하는 방식은 십 단위 묶음을 이용하지만 자리 사이의 배수는 60이다. 두 층의 규칙을 각각 살피면 혼합되어 보이는 표기도 일관되게 이해할 수 있다.

53을 읽는 학습 카드에는 열 묶음 다섯 개와 낱개 세 개를 놓는다. 그 카드가 오른쪽 끝에 있으면 53이다. 왼쪽으로 한 자리 옮기면 53×60이 된다. 카드 안의 모습은 같아도 전체 값은 달라진다.



열 기호 5개 하나 기호 3개

50 + 3 = 53

60의 자리	1의 자리	
	53	= 53
53		= 3180

같은 카드를 한 자리 왼쪽으로: 53 × 60 = 3180

열 기호 다섯과 하나 기호 셋이 만드는 자리 값 53과 자리 이동

탐구

열 기호 네 개와 하나 기호 일곱 개로 만든 자리의 값은 얼마인가?

풀이와 확인

그 자리 안의 값은 47이다. 전체 수에서 얼마를 뜻하는지는 위치에 따라 달라진다. 일의 자리라면 47이고 60의 자리라면 2820이다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

자리 올림을 눈으로 보기

합이 60을 넘으면 큰 묶음과 남은 수로 다시 나눈다.

47+28을 계산하면 75다. 이를 60진법 두 자리로 쓰려면 75를 60과 15로 나누어 1:15로 나타낸다. 60개짜리 묶음 하나와 낱개 15개라는 뜻이다. 이때 75라는 십진법 표기를 그대로 한 자리에 넣으면 자리 규칙을 어기게 된다.

두 자리 계산 1:47+2:28에서는 오른쪽 합이 75이므로 15를 남기고 1을 왼쪽으로 올린다. 왼쪽은 1+2+1=4가 되어 답은 4:15다. 십진법으로 검산하면 107+148=255이며 4×60+15와 일치한다.

십진법 덧셈의 받아올림과 원리는 같다. 달라진 것은 새 묶음을 만드는 기준이 10에서 60으로 바뀐 점이다. 익숙한 절차를 무작정 외우기보다 어느 크기의 묶음을 만들고 있는지 말로 설명해 보자.

$$47 + 28 = 75$$

$$75 = 1 \times 60 + 15$$

$$1{:}47 + 2{:}28 = 4{:}15$$

오른쪽 자리에서 60개를 묶어 왼쪽으로 올린다.

탐구

2:38과 1:45를 더해 보자.

풀이와 확인

38+45=83이므로 23을 남기고 1을 올린다. 왼쪽은 2+1+1=4다. 답은 4:23이며 십진법으로 263이다.

[03] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

빌려오는 수는 60

뺄셈에서 왼쪽 한 묶음은 오른쪽 60개로 바뀐다.

3:10에서 1:25를 빼려면 오른쪽 10이 부족하다. 왼쪽의 한 묶음을 풀어 오른쪽에 60을 더한다. 3:10은 2:70으로 다시 생각할 수 있다. 이 표기는 계산 중의 상태이며 최종 표기는 각 자리가 60보다 작아야 한다.

오른쪽은 70−25=45다. 왼쪽은 2−1=1이므로 답은 1:45다. 십진법으로 바꾸면 190−85=105이며 1×60+45와 같다. 자리를 빌릴 때 10을 더하면 십진법 습관을 잘못 옮긴 것이 된다.

이 과정을 물건 묶음으로 표현하면 더 분명하다. 큰 상자 한 개를 작은 물건 60개로 푸는 것이므로 전체 물건 수는 줄지 않는다. 뺄셈은 같은 양을 다른 묶음으로 다시 놓은 다음 수행한다.

$$3{:}10 \rightarrow 2{:}70$$

$$2{:}70 - 1{:}25 = 1{:}45$$

왼쪽 한 묶음을 오른쪽 60개로 푼다.

탐구

4:05에서 2:48을 빼면 얼마인가?

풀이와 확인

4:05를 3:65로 풀어 쓴다. 65−48=17이며 3−2=1이다. 답은 1:17이다. 검산하면 168+77=245로 처음 수를 얻는다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

소수점 아래에도 같은 규칙

60진 분수의 첫 자리는 60분의 몇을 나타낸다.

이 책에서는 정수 부분과 분수 부분을 세미콜론으로 나눈다. 0;30은 30/60이므로 1/2이다. 0;15는 15/60이므로 1/4이며 0;20은 20/60이므로 1/3이다. 이런 구분 표시는 옛 점토판의 기호를 그대로 옮긴 것이 아니라 독해를 돕는 현대 표기다.

분수 자리가 하나 더 이어지면 그 자리는 3600분의 몇이 된다. 0;01:30은 1/60+30/3600으로 읽으며 값은 1/40이다. 두 자리를 130으로 붙여 읽거나 두 번째 자리도 60으로 나누면 다른 값이 된다.

자리값을 줄로 적어 두면 계산이 간단해진다. 정수 첫 자리는 1이고 그다음은 1/60이며 그다음은 1/3600이다. 오른쪽으로 한 칸 이동할 때 값이 60분의 1로 줄어든다는 규칙을 계속 적용한다.

표기	분수	약분
0;30	30/60	1/2
0;20	20/60	1/3
0;15	15/60	

60진 분수 첫 자리의 크기. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

0;45를 보통분수로 바꾸고 약분해 보자.

풀이와 확인

45/60=3/4이다. 반대로 3/4에 60을 곱하면 45이므로 60진 분수 한 자리로 정확하게 표시된다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

표기되지 않은 크기를 판단하기

기호의 배열만으로 전체 크기가 완전히 정해지지 않는 경우가 있다.

고바빌로니아 계산 표기는 오늘의 소수점처럼 수의 절대 크기를 항상 명시하지 않았다. 30이라는 기호가 문맥에 따라 30이나 1/2을 뜻할 수 있다는 점이 대표적이다. 실제 해석에서는 단위와 문제의 조건과 함께 읽어야 한다.

학습용 기록에 사람 2와 보리 30과 한 사람 몫 15가 있다고 하자. 30과 15의 관계는 두 배다. 그러나 단위가 없으면 보리의 실제 양을 30리터와 15리터로 확정할 수 없다. 계산 비율이 맞는다는 사실과 크기를 안다는 사실은 다르다.

이런 표기를 단순히 불완전하다고만 평가하면 계산 관행을 놓친다. 맥락이 충분한 환경에서는 크기를 따로 조절하면서 같은 숫자 배열로 여러 계산을 처리할 수 있다. 오늘의 독자는 그 맥락을 복원해야 하므로 더 주의가 필요하다.

$$30 \div 60 = 1/2$$
$$30 \div (1/2) = 60$$

같은 기호 배열도 문맥에 따라 60배 다른 값을 가리킬 수 있다.

탐구

같은 기호 30이 30과 1/2을 모두 나타낼 수 있다면 두 값의 비는 얼마인가?

풀이와 확인

30÷(1/2)=60이다. 두 해석은 60배 차이가 난다. 자리의 위치가 한 단계 달라진 것으로 이해할 수 있다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

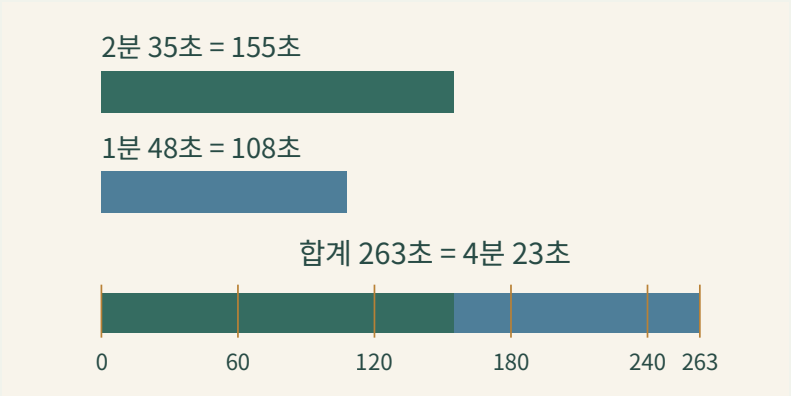
시간 표기와 비교하기

익숙한 분과 초는 60이라는 묶음을 이해하는 좋은 출발점이다.

2분 35초와 1분 48초를 더하면 초의 합은 83이다. 이를 1분 23초로 바꾸어 분에 더하면 전체는 4분 23초다. 앞에서 계산한 60진법의 자리 올림과 같은 묶음 원리를 확인할 수 있다.

하지만 오늘의 시계 표기를 고대 수 표기와 완전히 같은 체계라고 말하면 지나치다. 시간에는 시와 분과 초라는 단위 이름이 있고 날짜와 시각을 표현하는 별도 약속도 있다. 닮은 계산 원리를 배우되 사용 목적과 표기 관행의 차이를 남겨 두자.

비교 학습에서는 무엇이 같은지와 무엇이 다른지를 모두 적는다. 묶음이 60이라는 점은 같다. 고대 자료에 현대의 쌍점과 소수점을 그대로 그려 넣는 것은 재현이 아니라 설명이다. 이런 표시를 덧붙였음을 독자에게 알려야 한다.



같은 초 단위 눈금에서 두 시간을 합친다. 60초마다 분의 경계가 생긴다.

탐구

1분 20초를 1.20분이라고 쓰면 같은 시간인가?

풀이와 확인

같지 않다. 1.20분은 1분과 0.20분이므로 1분 12초다. 1분 20초는 1+20/60분으로 계산해야 한다.

[03] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

60진법 변환 실험실

나누어 얻은 몫과 나머지를 연결해 수를 다시 써 본다.

십진법 202을 60으로 나누면 몫은 3이며 나머지는 22다. 따라서 60진법으로 3:22다. 더 큰 수 3725는 60으로 나누어 몫 62와 나머지 5를 얻는다. 다시 62를 나누면 몫 1과 나머지 2가 되어 1:02:05로 나타낸다.

검산은 왼쪽부터 한다. 1×3600+2×60+5=3725다. 가운데 자리가 2라는 사실을 놓치지 않도록 02로 적었지만 앞의 0은 학습 편의를 위한 것이다. 각 자리의 의미를 먼저 읽으면 표기의 길이에 흔들리지 않는다.

같은 절차를 다른 기수에도 적용할 수 있다. 기준 수로 계속 나누어 나머지를 기록한 뒤 역순으로 읽는 방식이다. 60진법은 낯선 기호의 전시물이면서 동시에 우리가 쓰는 자리값 체계를 새롭게 바라보게 하는 거울이다.

자리	값	기여량
맨 왼쪽	2	7200
가운데	1	60
맨 오른쪽	1	1

탐구

십진법 7261을 60진법 세 자리로 나타내 보자.

풀이와 확인

7261=2×3600+1×60+1이므로 2:01:01이다. 마지막 두 자리가 모두 1이지만 하나는 60이고 다른 하나는 1을 뜻한다.

[03] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계

고대 오리엔트관 / 04

역수표와 나눗셈의 기술

나눗셈을 곱셈으로 바꾸기

곱해서 1이 되는 짝을 알면 나누는 계산을 다시 쓸 수 있다.

24를 8로 나누는 일은 24에 1/8을 곱하는 일과 같다. 8과 1/8은 서로 곱해 1이 되므로 역수의 짝이다. 역수표는 이런 짝을 모아 놓은 계산 도구로 읽을 수 있다. 실제 문제에서는 수의 크기와 단위를 함께 맞춰야 한다.

60진법에서 1/8은 0;07:30이다. 7/60+30/3600을 통분하면 450/3600이며 약분하면 1/8이다. 따라서 24×0;07:30의 값은 3이다. 표를 찾는 일과 찾은 값을 적용하는 일을 구별해 연습해 보자.

역수를 쓰면 계산의 구조가 선명해진다. 나누는 수를 곱하는 수로 바꾸었으므로 절차가 바뀌어도 답은 보존되어야 한다. 24÷8=3이라는 쉬운 예제로 원리를 확인한 뒤 더 큰 수와 분수로 확장할 수 있다.

$$24 \div 8 = 24 \times 1/8$$
$$8 \times 1/8 = 1$$

역수로 바꾼 나눗셈의 학습 모형.

탐구

36을 12로 나누는 계산을 역수로 쓰면 어떻게 되는가?

풀이와 확인

36×1/12=3이다. 1/12은 60진법으로 0;05이므로 36×0;05라고도 쓸 수 있다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

끝나는 분수와 끝나지 않는 분수

어떤 역수는 60진법에서 유한한 자리로 표현된다.

1/3은 십진법에서 0.333…으로 이어지지만 60진법에서는 0;20으로 끝난다. 60이 3으로 나누어지기 때문이다. 반면 1/7은 60의 거듭제곱을 분모로 삼아도 정수 분자가 되지 않으므로 유한한 60진 분수가 되지 않는다.

어떤 수가 정규수인지 판단할 때는 소인수를 살핀다. 양의 정수의 소인수가 2와 3과 5뿐이면 그 역수는 유한한 60진 분수로 나타난다. $60=2^2\times3\times5$이므로 충분히 큰 60의 거듭제곱 안에 그 수의 인수를 모두 포함할 수 있다.

이 설명은 현대 수학으로 원리를 정리한 것이다. 표를 실제로 사용하는 사람은 소인수분해의 일반 명제를 쓰지 않고도 익숙한 역수의 목록을 활용할 수 있다. 계산 관행과 오늘의 이론적 설명은 서로 연결되지만 동일한 문장은 아니다.

수	소인수	유한 여부
45	$3^2 \times 5$	유한
49	7^2	

60의 소인수와 역수의 유한 표현. 현대 수학적 설명. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

45와 49 가운데 역수가 유한한 60진 분수가 되는 수는 무엇인가?

풀이와 확인

$45=3^2\times5$이므로 유한하게 끝난다. $49=7^2$에는 7이 들어 있으므로 유한한 60진 분수로 나타나지 않는다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

쉬운 역수 여섯 쌍

표의 각 줄을 외우기 전에 곱셈으로 맞는지 확인한다.

2의 역수는 0;30이며 3의 역수는 0;20이다. 4의 역수는 0;15이고 5의 역수는 0;12다. 6과 10의 역수는 각각 0;10과 0;06이다. 이 여섯 쌍은 첫 분수 자리만으로 표현되므로 변환 원리를 확인하기 좋다.

검산은 각 수에 분자 역할을 하는 값을 곱해 60이 되는지 보는 방식으로 할 수 있다. $5\times12=60$이므로 $5\times12/60=1$이다. 마찬가지로 $6\times10=60$이며 $10\times6=60$이다. 표의 대칭적인 짝도 눈에 들어온다.

모든 수의 역수를 한 자리로 쓸 수는 없다. 8의 역수에는 다음 자리가 필요하고 7의 역수는 끝나지 않는다. 쉬운 표를 전체 체계로 오해하지 않도록 표에 없는 수가 왜 빠졌는지도 함께 질문해 보자.

수	역수
2	0;30
3	0;20
4	0;15
5	

곱해서 1이 되는 간단한 짝. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

15의 역수를 60진 분수 한 자리로 쓰고 검산하자.

풀이와 확인

15×4=60이므로 역수는 0;04다. 15×4/60=1이 되어 역수의 조건을 만족한다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

두 자리 역수를 만드는 법

첫 자리에 들어가지 않는 나머지를 다시 60배하여 계산한다.

1/16을 60진법으로 바꾸어 보자. 60÷16은 몫 3과 나머지 12다. 첫 분수 자리는 3이며 남은 부분은 12/16이다. 이를 다시 60배하면 45이므로 두 번째 자리는 45다. 따라서 1/16=0;03:45다.

분수로 검산하면 3/60+45/3600=225/3600=1/16이다. 첫 자리만 써서 0;03으로 멈추면 1/20이 되므로 원래 값보다 작다. 남은 부분이 0이 될 때까지 계속해야 정확한 유한 표현을 얻는다.

이 변환법은 십진 소수를 구할 때 나머지에 10을 곱하는 과정과 같다. 여기서는 60을 곱한다. 기수의 차이를 의식하면 복잡해 보이는 숫자도 하나의 일정한 절차로 만들어 낼 수 있다.

$$60 = 16 \times 3 + 12$$

$$12 \times 60 = 16 \times 45$$

$$1/16 = 0;03:45$$

나머지를 60배 하여 다음 분수 자리를 구한다.

탐구

1/25를 같은 방식으로 나타내 보자.

풀이와 확인

60÷25는 몫 2와 나머지 10이다. 10×60÷25=24이므로 1/25=0;02:24다.
2/60+24/3600=144/3600=1/25로 확인된다.

[O4] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

역수표로 분배하기

분배 문제에서는 전체 양과 한 몫의 단위를 끝까지 유지한다.

학습용 곡식 225단위를 15명에게 똑같이 나누어 준다고 하자. 15의 역수 0;04를 사용하면 225×4/60=15가 된다. 한 사람은 15단위를 받는다. 사람 수가 계산에 들어가더라도 답의 단위는 곡식의 단위라는 점을 놓치지 않는다.

전체가 240단위로 바뀌면 같은 역수를 적용해 16단위를 얻는다. 나누는 수가 같을 때 표의 같은 줄을 재사용할 수 있다. 여러 거래와 분배를 처리하는 환경에서 표가 유용한 이유를 이 작은 예제로 이해할 수 있다.

검산은 한 사람의 몫에 사람 수를 곱하는 것이다. 16×15=240이 되어야 한다. 만약 16에 0;04를 다시 곱한다면 역수를 두 번 적용하는 오류가 된다. 어떤 단계에서 무엇을 구했는지 문장으로 적으면 혼동을 줄일 수 있다.

$$225 \times 4/60 = 15$$

$$15\text{명} \times 15\text{단위} = 225\text{단위}$$

역수 0;04로 15명에게 분배하는 현대 예제.

탐구

324단위를 18명에게 나누면 한 사람의 몫은 얼마인가?

풀이와 확인

18의 역수는 1/18이다. 324×1/18=18이므로 한 사람은 18단위를 받는다. 18×18=324로 검산한다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

일곱으로 나누기의 어려움

끝나지 않는 표기에도 계산 방법이 사라지는 것은 아니다.

1/7을 60진법으로 바꾸면 첫 자리는 8이고 나머지는 4다. 다음 자리는 34이며 나머지는 2다. 그다음 자리는 17이며 나머지는 다시 1이 된다. 처음 상태로 돌아왔으므로 8과 34와 17이 반복된다.

따라서 1/7=0;08:34:17:08:34:17…이다. 세 자리까지만 적으면 정확한 값보다 조금 작다. 그렇다고 21÷7을 계산하지 못하는 것은 아니다. 7×3=21을 알면 몫은 바로 3이다. 역수의 유한 표기와 나눗셈 가능성은 같은 문제가 아니다.

근삿값을 쓸 때에는 정밀도가 필요한 목적을 생각해야 한다. 반복을 몇 자리에서 멈추었는지 밝히고 마지막에 원래 수를 곱해 오차를 확인한다. 어려운 수 하나가 계산 체계 전체를 무효로 만드는 것은 아니다.

단계	자리	나머지
1	8	4
2	34	2
3	17	

1/7의 나머지가 처음으로 돌아와 세 자리가 반복된다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

1/7의 첫 60진 분수 자리 0;08만 쓰면 실제 값보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

0;08은 8/60=2/15다. 2/15와 1/7을 통분하면 14/105와 15/105이므로 근삿값이 1/105만큼 작다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

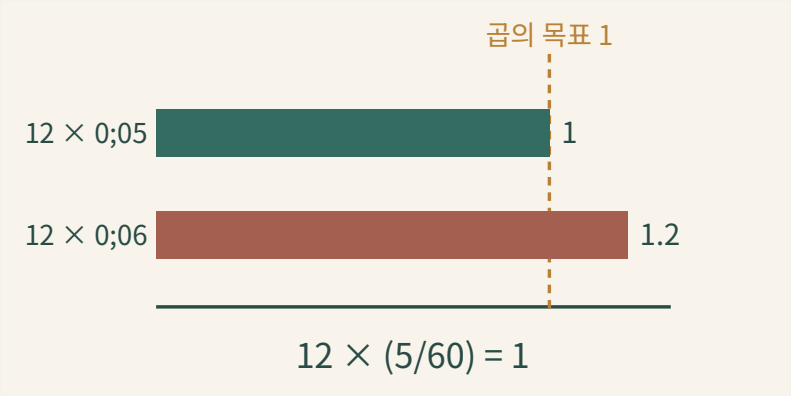
표의 오류를 찾아내는 검산

한 줄의 잘못된 수는 곱해서 1이 되는지 살피면 드러난다.

누군가 역수표에 12의 짝을 0;06으로 적었다고 하자. 12×6/60=6/5이므로 1이 되지 않는다. 0;06은 10의 역수다. 12의 역수는 0;05로 고쳐야 하며 12×5/60=1로 확인할 수 있다.

단순한 자리 오류도 살펴보자. 16의 역수를 0;03:54라고 적으면 3/60+54/3600이 된다. 올바른 값 0;03:45보다 9/3600만큼 크다. 곱셈 결과가 1보다 커지는 방향까지 예측하면 오류 탐지가 더 쉬워진다.

역사 자료에 틀린 줄이 보인다고 곧바로 고대 필자의 실수라고 결론 내리지 않는다. 원래 기호의 손상과 현대 전사의 오류도 검토해야 한다. 여기의 가상 표는 검산 원리를 익히기 위한 것이며 실제 유물의 오류 목록이 아니다.



12의 올바른 역수는 곱을 1로 만든다. 잘못 쓴 0;06은 1.2를 만든다.

탐구

20의 역수를 0;30으로 적은 줄을 어떻게 고치는가?

풀이와 확인

20×30/60=10이므로 틀렸다. 20×3=60이므로 0;03이 올바른 역수다. 3과 30의 기호를 혼동했을 가능성을 점검할 수 있다.

[04] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

역수가 끝나는 데 필요한 자리 수

유한하게 끝난다는 판단에서 멈추지 않고 가장 짧은 표기 길이를 구한다.

양의 정수 n의 역수가 60진법으로 k자리 안에 끝나려면 60^k을 n으로 나눈 값이 정수여야 한다. 그러면 1/n을 분모 60^k인 분수로 나타낼 수 있다. 약분한 분모에 2와 3과 5 이외의 소인수가 있으면 어떤 유한한 k로도 이 조건을 만족시키지 못한다.

$n=2^a3^b5^c$로 쓰면 $60^k=2^{2k}3^k5^k$이다. 따라서 $2k\geq a$와 $k\geq b$와 $k\geq c$가 동시에 필요하다. 필요한 최소 자릿수는 a의 절반을 올림한 값과 b와 c 가운데 가장 큰 값이다. 이 식은 고대 표의 문장이 아니라 자리값 원리를 현대적으로 일반화한 것이다.

예를 들어 $32=2^5$이므로 $2k\geq5$에서 최소 k는 3이다. 실제 역수 0;01:52:30은 세 자리다. $125=5^3$도 세 자리가 필요하지만 이유는 5의 지수 3에 있다. 1/125=0;00:28:48로 쓰면 첫 분수 자리가 0이더라도 전체 자릿수는 셋임을 확인한다.

이렇게 최소 길이를 미리 알면 변환 도중 멈추어도 되는지 판단할 수 있다. 다만 끝자리에 불필요한 0을 덧붙인 표현도 가능하므로 실제 적힌 자리 수와 필요한 최소 자리 수는 다르다. 역사 자료의 줄 길이를 분석할 때 계산 원리와 필사상의 선택을 구별한다.

분모	소인수 구조	최소 분수 자리
16	2^4	2
32	2^5	3
45	$3^2\times5$	2
125	5^3	3

탐구

1/128은 최소 몇 자리의 유한한 60진 분수로 나타나는가?

풀이와 확인

$128=2^7$이다. $2k\geq7$을 만족하는 가장 작은 정수 k는 4다. 60^3에는 2가 여섯 번만 들어 있어 부족하며 60^4에는 여덟 번 들어 있어 충분하다.

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계 / [O4] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

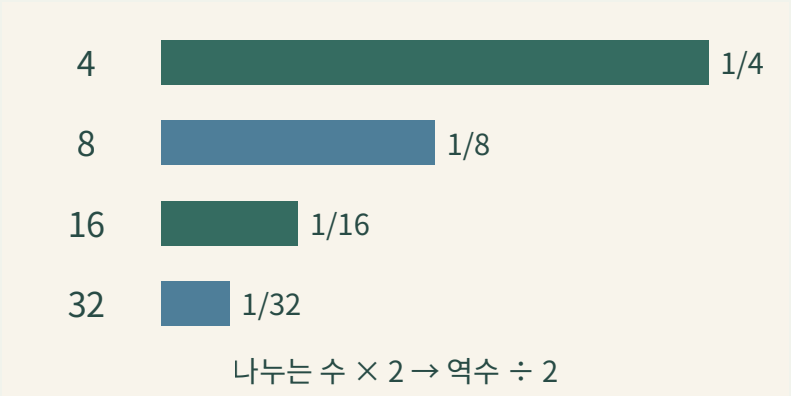
역수의 연결망 만들기

한 개의 역수를 알면 두 배와 절반의 관계로 다른 값을 구한다.

8의 역수가 1/8이면 16의 역수는 그 절반인 1/16이다. 반대로 4의 역수는 1/8의 두 배인 1/4이다. 나누는 수가 커질 때 같은 전체를 나누어 얻는 한 몫은 작아진다는 관계를 수식으로 확인한 것이다.

60진 표기로 쓰면 0;07:30의 절반은 0;03:45다. 첫 자리 7을 절반으로 나누어 3을 남기고 남은 1을 다음 자리의 60으로 바꾸면 90의 절반 45를 얻는다. 자리 사이의 묶음을 풀어 나누는 과정이다.

직접 만든 역수표에서 2배로 연결되는 수들을 같은 색으로 묶어 보자. 숫자의 목록이 계산 관계의 지도처럼 보인다. 표를 외워서 쓰는 능력에 관계를 설명하는 능력을 더하면 낯선 수에서도 이미 아는 정보를 활용할 수 있다.



역수의 길이를 같은 눈금으로 비교했다. 4와 8과 16과 32에 대응하는 몫은 차례로 절반이 된다.

탐구

1/32를 1/16의 표기에서 구해 보자.

풀이와 확인

0;03:45의 절반은 0;01:52:30이다. 분수로 확인하면 1/60+52/3600+30/216000=1/32가 된다.

[O4] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학

고대 오리엔트관 / 05

곱셈표에서 넓이 계산으로

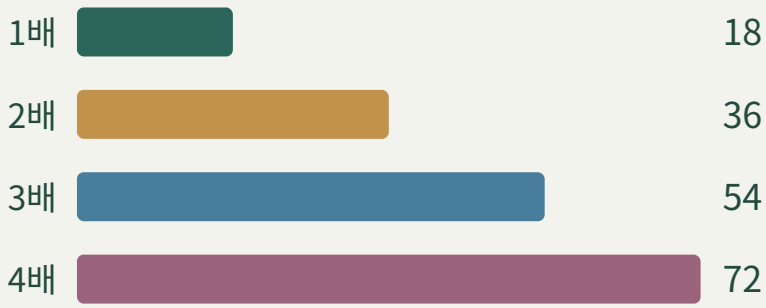
곱셈표가 저장하는 규칙

표는 따로 떨어진 답의 모음이 아니라 일정한 증가를 담은 구조다.

메트로폴리탄미술관에는 고바빌로니아 시대의 곱셈표 점토판이 소장되어 있다. 여기서는 실제 표를 그대로 번역하지 않고 18의 배수로 학습용 표를 만든다. 18과 36과 54와 72는 한 줄 내려갈 때마다 18씩 커진다.

표의 네 번째 줄 72를 60진법으로 쓰면 1:12다. 세 번째 줄 54에서 18을 더할 때 60을 넘어 받아올림이 생긴다. 표를 읽는 연습은 곱셈과 자리값의 두 기능을 함께 익히게 한다.

열 번째 줄은 180이며 60진법으로 3:00이다. 여기서 마지막 00은 자리를 분명하게 하는 현대 표기다. 원자료의 표기 관행과 설명용 표의 표기를 구별하면서 일정한 증가가 유지되는지 확인하자.



18의 배수표를 나타낸 학습 그래프.

탐구

18의 배수표에서 여덟 번째 값은 얼마이며 60진법으로 어떻게 쓰는가?

풀이와 확인

18×8=144이므로 2:24다. 일곱 번째 값 126에 18을 더해도 144가 되어 같은 규칙을 확인할 수 있다.

[05] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

큰 곱을 작은 곱으로 나누기

한 수를 더하기 쉬운 부분으로 나누면 곱셈표의 범위를 넓힐 수 있다.

24×17을 24×10과 24×7의 합으로 계산해 보자. 두 부분은 240과 168이며 합은 408이다. 17을 10+7로 나누었으므로 같은 24를 열 번 센 것과 일곱 번 센 것을 합한 셈이다.

다른 분해도 가능하다. 17을 20−3으로 보면 480−72=408이다. 어떤 분해가 편한지는 이미 알고 있는 배수와 계산 도구에 따라 달라진다. 하나의 문제에 반드시 하나의 계산 경로만 있는 것은 아니다.

직사각형 도식에서는 가로 17을 10과 7로 나누고 세로 24를 유지한다. 두 부분의 넓이를 합하면 전체 넓이가 된다. 이 그림은 분배법칙을 오늘의 기호로 설명한 학습 도해이며 특정 점토판의 도식을 복원한 것은 아니다.



가로 17의 분해와 넓이의 합.

탐구

36×19를 20배와 한 배의 차이로 계산하자.

풀이와 확인

36×20−36=720−36=684다. 36×10과 36×9의 합으로 계산해도 360+324=684가 된다.

[05] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

넓이와 길이를 혼동하지 않기

길이를 두 배로 늘리는 방향이 하나인지 둘인지 살핀다.

가로 12와 세로 8인 직사각형의 넓이는 96이다. 가로만 두 배로 하면 24×8=192로 넓이도 두 배다. 가로와 세로를 모두 두 배로 하면 24×16=384로 넓이는 네 배가 된다. 바뀐 방향의 수가 결과에 영향을 준다.

점토판의 토지 문제를 읽을 때 길이 단위와 넓이 단위를 구별하는 이유도 여기에 있다. 길이 숫자 둘을 곱해 얻은 것은 길이가 아니라 넓이다. 실제 옛 단위의 환산은 별도 근거가 필요하므로 이 예제는 단위 없는 학습 모형으로 다룬다.

그림에서 단위 정사각형을 직접 세어 보면 넓이의 배율이 드러난다. 모든 작은 정사각형이 가로 두 칸과 세로 두 칸으로 바뀌어 네 칸을 차지한다. 곱셈은 두 방향의 변화를 함께 담는 연산이다.

길이 배율	넓이 배율
한 방향 2배	2배
두 방향 2배	4배
두 방향 3배	

길이의 배율과 넓이의 배율을 구별한다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

가로와 세로를 각각 세 배로 늘리면 넓이는 몇 배가 되는가?

풀이와 확인

3×3=9배다. 둘레는 세 배지만 넓이는 아홉 배이므로 두 양의 배율을 같은 것으로 생각하면 안 된다.

[05] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

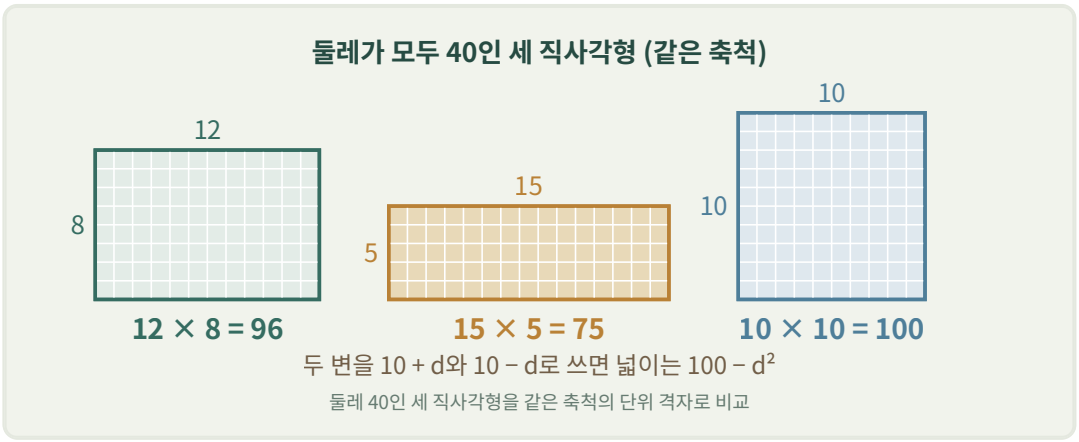
둘레가 같아도 넓이는 달라진다

같은 길이의 경계 안에 들어가는 넓이는 모양에 따라 달라진다.

가로 12와 세로 8인 직사각형의 둘레는 40이며 넓이는 96이다. 가로 15와 세로 5도 둘레는 40이지만 넓이는 75다. 가로 10과 세로 10인 정사각형은 같은 둘레에서 넓이가 100이다.

두 변의 합이 20이면 10을 기준으로 한쪽은 늘고 다른 쪽은 같은 만큼 줄어든다. 두 변을 10+d와 10−d로 쓰면 넓이는 100−d^2이다. 길이 차이가 커질수록 빼는 양이 커져 넓이가 줄어든다.

이 설명은 뒤에서 볼 직사각형 문제의 바탕이 된다. 합을 고정한 뒤 가운데 값에서 얼마나 벗어났는지 찾는 방식이다. 고대의 절차를 이해할 때 현대 기호를 사용할 수 있지만 당시 문장이 그대로 이런 식이었다고 말하지는 않는다.



둘레 40인 세 직사각형을 같은 축척의 단위 격자로 비교

탐구

둘레 40인 직사각형의 한 변이 13이면 다른 변과 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

두 변의 합이 20이므로 다른 변은 7이다. 넓이는 91이며 $100-3^2=91$로도 확인된다.

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

나머지를 버리면 생기는 변화

나눗셈의 나머지는 문제의 목적에 따라 다른 의미를 가진다.

곡식 100단위를 12명에게 나누면 한 사람에게 8단위씩 주고 4단위가 남는다. 곡식을 더 잘게 나눌 수 있다면 남은 4단위를 다시 12명에게 나누어 각자 1/3단위를 받는다. 최종 몫은 8과 1/3이다.

물건이 자를 수 없는 단단한 상자라면 같은 계산의 해석이 달라진다. 각자 8상자를 받고 4상자가 남는다고 보고할 수 있다. 수학적 나눗셈은 같아도 나머지의 처리는 물건의 성질과 분배 규칙에 달려 있다.

60진 분수로 1/3은 0;20이므로 몫을 8;20으로 쓸 수 있다. 이 값에 12를 곱하면 100이다. 8만 답으로 적으면 96만 배분한 것이 되므로 남은 4의 행방을 설명해야 한다.

$$100 = 12 \times 8 + 4$$

$$100 \div 12 = 8 + 1/3$$

나머지 4를 다시 12몫으로 나누면 1/3씩이다.

탐구

100명을 한 대에 12명씩 타는 차량에 모두 태우려면 최소 몇 대가 필요한가?

풀이와 확인

8대에는 96명만 탈 수 있으므로 9대가 필요하다. 몫 8과 나머지 4를 보고 상황에 맞게 올림해야 한다.

[05] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

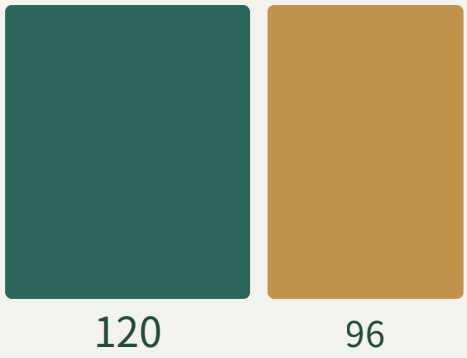
같은 넓이를 다른 식으로

도형을 잘라 옮기는 활동은 계산식 사이의 관계를 보여 준다.

가로 18과 세로 12인 직사각형을 세로선으로 10과 8로 나누면 넓이는 120+96=216이다. 가로선으로 6과 6으로 나누면 108+108=216이다. 조각의 모양은 달라도 겹치거나 빠지는 부분이 없으면 전체 넓이는 보존된다.

조각을 다시 붙일 때에는 길이뿐 아니라 붙이는 변의 대응을 확인한다. 아무 조각이나 늘여 맞추면 넓이 보존을 설명할 수 없다. 잘라 옮기는 도해는 조각을 변형하지 않고 위치만 바꾸는 약속을 지켜야 한다.

이 관의 넓이 그림에서는 같은 조각에 같은 색을 사용한다. 색은 장식이면서 논증의 안내다. 어떤 항이 어디에서 왔는지 도형과 계산식을 번갈아 읽으면 분배법칙을 기계적인 전개 이상으로 이해할 수 있다.



18×12의 직사각형을 두 조각으로 나눈다.

탐구

18×12를 20×12에서 두 줄을 빼는 방식으로 구해 보자.

풀이와 확인

20×12−2×12=240−24=216이다. 가로 20인 직사각형에서 가로 2인 띠를 떼어 내는 도형과 대응한다.

[05] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

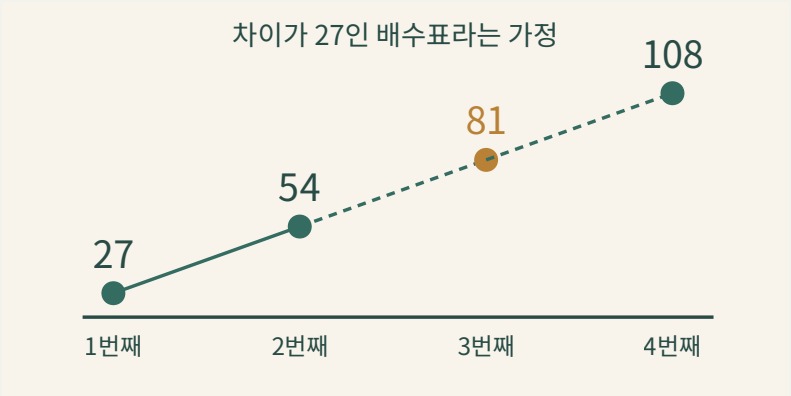
계산표의 빈칸 복원

이웃한 수의 관계를 이용하면 사라진 값을 합리적으로 추정할 수 있다.

학습용 표에 27과 54와 빈칸과 108이 차례로 적혀 있다. 일정한 배수표라는 가정을 세우면 빈칸은 81이 된다. 54에 27을 더해도 81이고 108에서 27을 빼도 81이므로 양쪽 관계가 일치한다.

그러나 수 네 개만으로 모든 문서의 규칙을 확정할 수는 없다. 제목이 27의 배수표라고 알려 주면 추정의 근거가 강해진다. 제목 없이 숫자만 남아 있다면 가능한 복원이라고 표현하는 것이 더 정확하다.

복원 과정에서는 가정과 결과를 함께 기록한다. 일정한 차이가 27이라는 가정 아래 빈칸을 81로 채웠다고 적는 식이다. 새로운 조각이 발견되어 다른 수가 확인되면 가정을 고쳐야 한다. 좋은 해석은 수정 가능성을 열어 둔다.



빈칸 81은 앞의 54에 27을 더한 값이며 뒤의 108에서 27을 뺀 값이다.

탐구

6과 12와 빈칸과 24의 빈칸을 18로 채우는 데 사용한 가정은 무엇인가?

풀이와 확인

각 줄이 6의 연속한 배수라는 가정이다. 앞뒤의 차이가 모두 6이라는 조건을 적용했다. 규칙의 근거가 문서 전체에서도 유지되는지 확인해야 한다.

[05] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

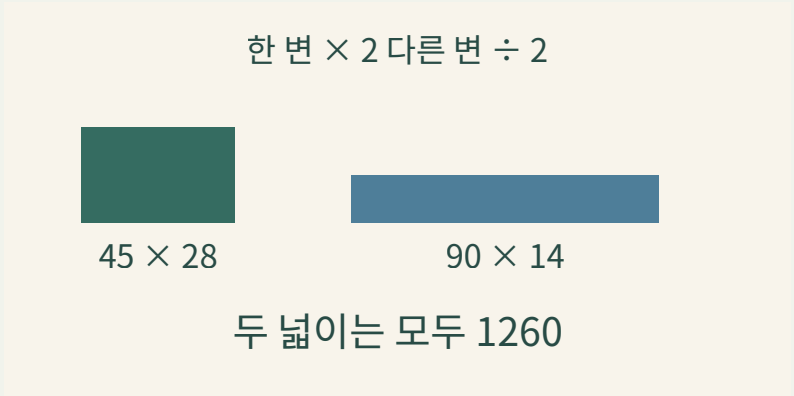
두 방법으로 같은 답 얻기

서로 다른 풀이를 비교하면 계산의 핵심과 실수를 함께 찾을 수 있다.

45×28을 분배법칙으로 계산하면 45×20+45×8=900+360=1260이다. 두 배와 절반의 관계를 쓰면 90×14=180×7=1260이다. 한 수를 두 배로 하고 다른 수를 절반으로 할 때 곱은 변하지 않는다.

두 번째 방법은 모든 경우에 정수만으로 끝나는 것은 아니다. 절반으로 나누는 수가 홀수이면 분수가 생길 수 있다. 따라서 계산을 편리하게 만드는 선택인지 따져야 한다. 같은 원리가 언제나 같은 편리함을 주지는 않는다.

검산을 독립적으로 하는 것이 중요하다. 처음 풀이를 그대로 반복하면 같은 실수를 반복할 수 있다. 다른 분해나 역연산이나 대략적인 크기 비교를 이용하면 결과를 더 신뢰할 수 있다.



같은 길이 축척으로 그린 두 직사각형. 한 변을 두 배로 하고 다른 변을 절반으로 하면 넓이는 유지된다.

탐구

1260÷45가 28인지 30배와의 차이를 이용해 확인할 수 있는가?

풀이와 확인

45×30=1350이며 1260은 여기서 90만큼 작다. 90은 45의 두 배이므로 몫은 30−2=28이다. 정확한 차이를 이용한 확인이다.

[05] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표

고대 오리엔트관 / 06

직사각형 속에 숨은 미지수

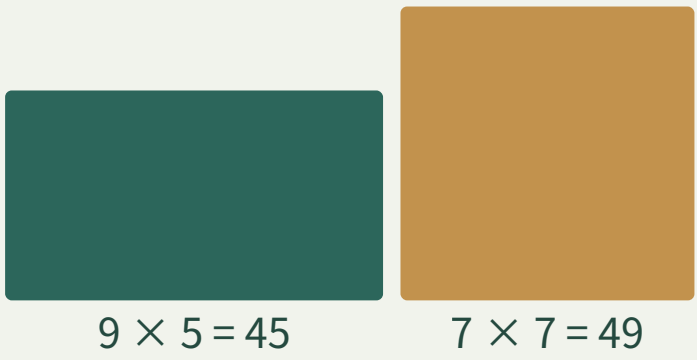
두 변의 합과 넓이

길이를 직접 주지 않아도 합과 곱이 모양을 결정할 수 있다.

두 변의 합이 14이고 넓이가 45인 직사각형을 생각하자. 가로와 세로를 각각 알 수 없지만 두 수의 가운데는 7이다. 두 변이 같다면 넓이는 49이므로 주어진 넓이는 그보다 4만큼 작다. 이 차이가 길이의 차이를 찾는 실마리다.

7에서 같은 양을 더하고 빼서 두 변을 만든다. 그 양을 d라고 쓰면 두 변은 7+d와 7−d다. 두 수를 곱한 값은 $49-d^2$이므로 $d^2=4$이며 d=2다. 따라서 길이는 9와 5다. 현대의 기호로 옛 직사각형 문제의 계산 구조를 읽는 학습 예제다.

넓이 45만으로는 15와 3도 가능하다. 합이 14라는 조건을 함께 확인해야 답이 정해진다. 이처럼 조건은 따로 장식처럼 붙는 문장이 아니라 가능한 도형을 차례로 좁히는 역할을 한다. 마지막에는 합과 곱을 모두 검산한다.



합이 14인 두 변과 가운데 값의 정사각형 비교.

탐구

합이 20이고 곱이 96인 두 양수를 찾아 보자.

풀이와 확인

가운데 값은 10이다. 100−96=4이므로 차이의 절반은 2다. 두 수는 12와 8이며 합 20과 곱 96을 모두 만족한다.

[06] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

반으로 나눈 차이

합이 아니라 두 변의 차이를 알아도 같은 중심을 찾을 수 있다.

길이 차이가 6이고 넓이가 40인 직사각형을 구해 보자. 두 변의 가운데 값을 m이라 두면 긴 변은 m+3이고 짧은 변은 m−3이다. 곱은 m^2-9이므로 $m^2=49$다. 양의 길이를 다루므로 m=7이며 두 변은 10과 4가 된다.

계산 순서는 차이를 반으로 나누기에서 시작한다. 그 값의 제곱을 넓이에 더한 뒤 제곱근을 구한다. 마지막에는 반차를 더하고 빼서 두 변을 얻는다. 각 단계가 어떤 길이 또는 넓이에 대응하는지 설명하면 절차가 기억에 남는다.

이 문제를 x와 x+6의 곱이 40이라고 적을 수도 있다. 두 표현은 같은 조건을 담지만 가운데 값을 사용하는 표현은 대칭을 드러낸다. 역사적 절차를 오늘의 식과 연결할 때에는 원문에 없던 기호를 우리가 보탰다는 점을 밝힌다.

$$6 \div 2 = 3$$

$$40 + 3^2 = 49$$

$$\sqrt{49} \pm 3 \rightarrow 10과\ 4$$

반차를 이용해 두 변을 되찾는 현대 해설.

탐구

차이가 4이고 곱이 45인 두 양수는 무엇인가?

풀이와 확인

반차는 2다. 45+4=49의 제곱근은 7이므로 두 수는 9와 5다. 차이 4와 곱 45를 각각 확인한다.

[06] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

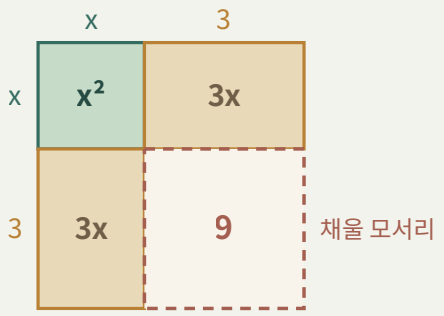
정사각형을 채우는 이유

빠진 모서리를 채우면 복잡한 넓이를 한 개의 정사각형으로 묶을 수 있다.

$x^2+6x=16$을 넓이로 읽어 보자. 한 변 x인 정사각형에 폭 3인 띠 두 개를 이웃한 변에 붙인다. 두 띠의 넓이는 각각 3x다. 바깥 윤곽을 정사각형으로 만들려면 모서리에 한 변 3인 작은 정사각형이 더 필요하다.

추가한 넓이 9를 양쪽에 더하면 $x^2+6x+9=25$다. 왼쪽은 한 변 x+3인 정사각형이므로 x+3=5가 되고 x=2를 얻는다. 도형에서 더한 조각을 식의 오른쪽에서도 더해야 같은 관계가 유지된다.

현대 대수에서는 음의 해도 다룰 수 있다. 이 식의 다른 해는 −8이지만 여기의 길이 모형에는 맞지 않는다. 계산 가능한 수의 범위와 그림이 표현하는 대상의 범위를 구별하면 그림의 장점과 한계를 함께 이해할 수 있다.



$x^2 + 6x = 16$

모서리 9를 양쪽에 더함

$x^2 + 6x + 9 = 25$

$(x + 3)^2 = 25$

$x + 3 = 5, x = 2$

x = 2일 때 한 변 5인 정사각형

$x^2 + 6x = 16$의 조각에 모서리 9를 채워 한 변 5인 정사각형 만들기

탐구

$x^2+4x=12$에서 채워야 할 작은 정사각형의 넓이와 양의 해는 얼마인가?

풀이와 확인

4의 절반이 2이므로 넓이 4를 더한다. $(x+2)^2=16$에서 $x+2=4$를 택하면 양의 해는 $x=2$다.

[06] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

음수가 없는 그림과 오늘의 식

대수 기호가 허용하는 답과 고대 길이 문제의 답은 다를 수 있다.

$x^2-5x=14$를 오늘의 식으로 풀면 $(x-7)(x+2)=0$이므로 $x=7$ 또는 $x=-2$다. 두 값은 모두 식에 대입해 맞는지 검사할 수 있다. 그러나 원래 질문이 밭의 길이를 묻는 것이라면 음수인 −2를 길이로 받아들이지 않는다.

옛 문제를 소개하며 그 시대의 수학자가 음의 해까지 당연히 사용했다고 쓰면 현대의 개념을 과거에 옮기는 셈이다. 반대로 음의 해가 나오지 않는다는 이유만으로 절차가 잘못되었다고 평가할 필요도 없다. 무엇을 수로 인정하고 어떤 대상을 계산했는지 살핀다.

현대식의 해 집합은 {7과 −2}라고 설명하고 길이 조건 아래의 답은 7이라고 덧붙일 수 있다. 같은 방정식도 문제의 문맥에 따라 허용되는 답이 달라진다. 이 구분은 오늘의 속도나 인원 수 문제에서도 유용하다.

후보	식 만족	양의 길이
7	예	예
−2	예	아니오

식의 해와 길이 조건에 맞는 해를 구별한다.

탐구

$x^2=9$의 대수적 해와 양의 길이 해를 나누어 쓰자.

풀이와 확인

대수적 해는 3과 −3이다. 양의 길이만 허용하면 3만 남는다. 식을 만족하는지와 상황에 맞는지는 서로 다른 검사다.

[06] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

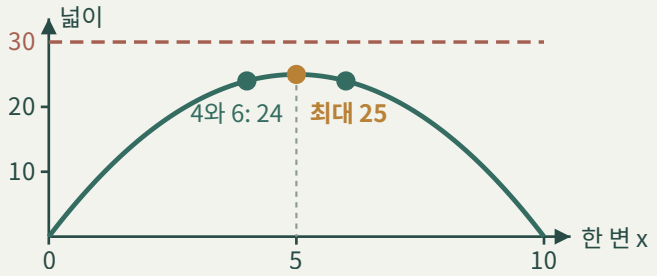
답이 존재하지 않는 조건

조건을 주었다고 언제나 실제 직사각형을 만들 수 있는 것은 아니다.

두 양의 변의 합이 10인 직사각형에서 넓이가 30일 수 있을까. 가운데 값 5를 기준으로 두 변을 5+d와 5−d라 쓰면 넓이는 $25-d^2$다. 제곱은 음수가 아니므로 넓이는 25를 넘을 수 없다. 따라서 30이라는 조건은 실현되지 않는다.

그림에서는 같은 둘레를 가진 직사각형들을 정사각형에 가까워지게 바꾸어 본다. 넓이가 커지다가 두 변이 같을 때 최대가 된다. 이 설명은 양의 실수 길이라는 조건을 사용한다. 조건을 말하지 않으면 어떤 범위에서 결론이 성립하는지 흐려진다.

불가능한 문제를 찾아내는 능력도 계산 능력의 일부다. 공식을 반복 적용하다 음수의 제곱근이 나오면 먼저 자료의 조건을 다시 읽는다. 숫자의 전사 오류인지 의도적인 불가능 문제인지 또는 다른 대상을 다루는지 살펴볼 수 있다.



두 변의 합이 10일 때 넓이 곡선은 25에서 멈추고 30에 닿지 않는다.

탐구

두 변의 합이 18일 때 가능한 최대 넓이와 그때의 두 변은 무엇인가?

풀이와 확인

가운데 값은 9이며 최대 넓이는 81이다. 두 변이 모두 9일 때 그 값을 얻는다. 넓이 82라는 조건은 양의 실수 변으로 만들 수 없다.

[06] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

같은 문제를 비율로 줄이기

크기를 바꾸어도 유지되는 구조를 이용하면 계산이 단순해진다.

두 변의 합이 70이고 넓이가 1125인 직사각형을 생각하자. 모든 길이를 5로 나누면 새 두 변의 합은 14가 되고 넓이는 25로 나누어 45가 된다. 앞에서 푼 작은 문제로 바뀌었으므로 새 길이는 9와 5다.

원래 길이는 각각 5배인 45와 25다. 합은 70이며 곱은 1125다. 길이를 5로 나누면서 넓이도 5로만 나누면 다른 문제를 만들게 된다. 길이의 배율과 넓이의 배율을 구별하는 것이 축소 계산의 핵심이다.

이 방법은 원문에 적힌 특정 절차라고 주장하는 대신 현대의 학습용 변환으로 사용한다. 큰 수의 계산에 가려진 구조를 드러내고 이미 푼 문제와 관계를 찾는 데 유용하다. 도면의 축척을 읽을 때에도 같은 생각이 적용된다.

대상	큰 도형	축소 도형
길이 합	70	14
넓이	1125	45
두 변	45와 25	9와 5

길이를 5로 나누면 넓이는 25로 나눈다.

탐구

길이를 모두 3배로 한 직사각형의 넓이가 540이라면 원래 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

넓이는 9배가 되었으므로 540÷9=60이다. 길이 배율 3을 넓이에 그대로 적용해 180이라 하면 틀린다.

[06] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

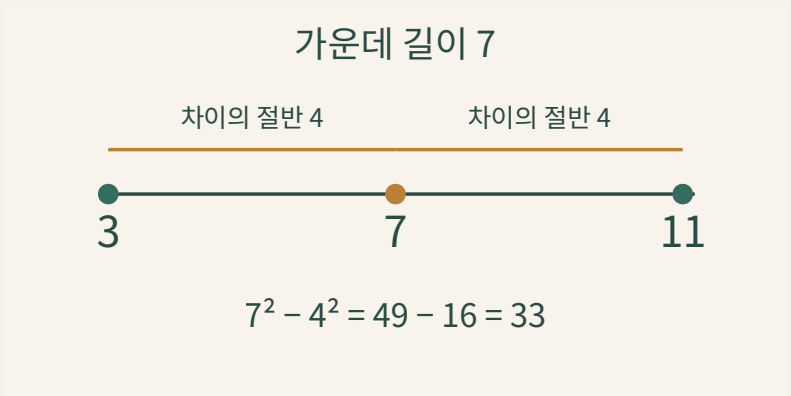
풀이의 문장을 재구성하기

계산 지시를 읽을 때 생략된 대상을 다시 써 보면 논리가 드러난다.

반으로 하라. 제곱하라. 더하라. 뿌리를 구하라라는 짧은 지시만 있으면 무엇을 반으로 하는지 알기 어렵다. 길이의 차이를 반으로 하고 그 결과를 제곱한 뒤 넓이에 더한다고 대상을 붙이면 계산의 흐름이 명확해진다.

차이 8과 넓이 33을 예로 들면 반차는 4다. 제곱 16을 넓이에 더하면 49다. 제곱근 7은 두 변의 가운데 값이다. 마지막에 4를 더하고 빼면 11과 3이 된다. 각 중간값에 이름을 붙이면 서로 다른 양을 바꾸어 쓰는 실수를 줄인다.

번역에서도 같은 태도가 필요하다. 원문의 간결한 지시를 풀어 설명하는 것은 유용하지만 설명자가 덧붙인 내용을 원문 그대로라고 제시해서는 안 된다. 번역문과 해설문을 분리하면 독자는 자료와 해석을 각각 살펴볼 수 있다.



두 길이 3과 11은 가운데 7에서 각각 4만큼 떨어져 있다. 곱 33은 가운데 제곱에서 반차의 제곱을 뺀 값이다.

탐구

위 풀이에서 49는 길이인가 넓이인가? 7은 무엇을 뜻하는가?

풀이와 확인

49는 가운데 길이를 한 변으로 하는 정사각형의 넓이다. 7은 두 변 11과 3의 가운데 길이다. 단위를 적으면 두 중간값의 역할이 더 분명해진다.

[06] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

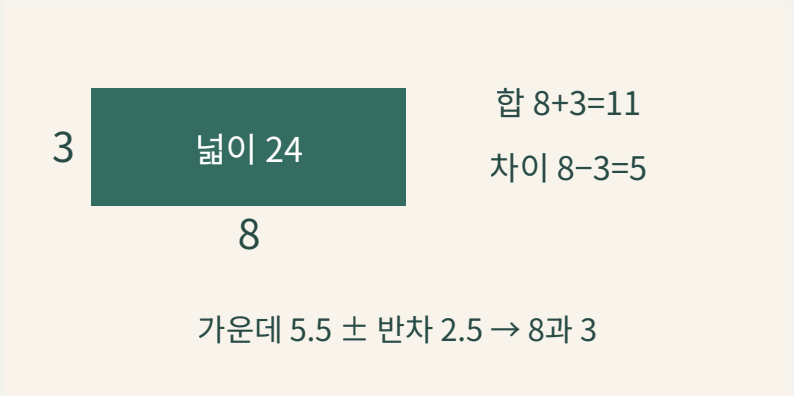
조건을 스스로 만드는 연습

답부터 정해 문제를 만들면 조건 사이의 관계를 깊이 이해할 수 있다.

길이 8과 3을 먼저 골라 보자. 합은 11이며 차이는 5이고 넓이는 24다. 이제 합과 넓이만 알려 주는 문제 또는 차이와 넓이만 알려 주는 문제를 만들 수 있다. 두 문제는 겉모습이 다르지만 같은 직사각형을 가리킨다.

답이 정수가 되도록 문제를 만드는 활동은 교육용 표의 수들이 왜 계산하기 좋은지 생각하게 한다. 다만 오늘 우리가 문제를 만들 수 있다는 사실이 특정 점토판도 정확히 같은 절차로 작성되었다는 증거는 아니다. 가능성과 역사적 확인을 나누어 적는다.

친구에게 조건만 건네고 풀이를 받아 보자. 다른 두 변이 나왔다면 합과 곱을 비교해 어떤 조건을 놓쳤는지 찾는다. 정답을 맞히는 것에 더해 조건을 설계하고 검증하는 활동까지 하면 문제의 구조가 더 선명해진다.



8과 3으로 만든 직사각형은 합 11과 차이 5와 넓이 24를 동시에 만족한다.

탐구

두 변 12와 7로 차이와 넓이를 주는 문제를 만들고 가운데 값을 구하자.

풀이와 확인

차이는 5이고 넓이는 84다. 반차 2.5의 제곱 6.25를 더하면 90.25이며 제곱근은 9.5다. 여기서 2.5를 더하고 빼면 12와 7을 되찾는다.

[06] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

고대 오리엔트관 / 07

정사각형 대각선의 정밀도

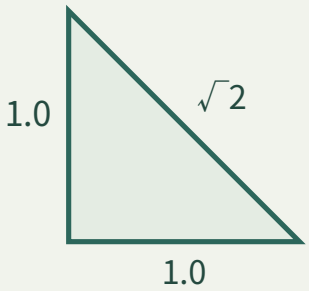
YBC 7289를 읽는 출발점

정사각형과 그 위의 수들은 도형과 계산이 만나는 작은 기록이다.

YBC 7289는 예일 바빌로니아 컬렉션의 점토판이다. 정사각형 그림과 대각선에 관련된 수가 남아 있어 제곱근 2의 근삿값을 설명할 때 자주 소개된다. 이 책의 깨끗한 선 그림은 유물 사진이 아니라 읽기 쉽도록 다시 그린 학습 도해다.

핵심 수를 현대의 60진 표기로 1;24:51:10이라 적는다. 이는 1+24/60+51/3600+10/216000이다. 십진법으로 약 1.41421296이 되어 제곱근 2에 매우 가깝다. 자리를 하나씩 풀어 쓰면 낯선 기호 뒤의 값이 보인다.

정밀한 값이 적혀 있다는 사실과 그 값을 처음 계산한 절차가 무엇인지는 별개의 질문이다. 그림 자체에 모든 계산 과정이 기록된 것은 아니다. 이어지는 평균 반복법은 정밀한 근삿값을 만드는 원리를 이해하도록 현대적으로 재구성한 활동이다.



한 변 1인 정사각형을 대각선으로 나눈 현대 학습 도해.

> **탐구**
>
> 1;24까지만 읽으면 값은 얼마인가? 제곱근 2보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

1+24/60=1.4다. 1.4^2=1.96으로 2보다 작으므로 양의 제곱근 2보다 작다. 뒤의 자리들이 이 부족한 값을 보충한다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독 / [O15] 제곱근 2의 근삿값이 계산된 방법에 관한 연구

세 자리 분수의 크기

작아 보이는 마지막 자리는 전체 오차를 크게 줄일 수 있다.

1;24:51:10에서 분수 자리는 각각 24/60과 51/3600과 10/216000이다. 첫 항은 0.4이고 둘째 항은 약 0.0141667이다. 마지막 항은 약 0.0000463이다. 자리가 오른쪽으로 갈수록 기준 단위가 60분의 1로 작아진다.

앞의 세 부분만 합한 1;24:51은 약 1.4141667이다. 마지막 부분까지 넣으면 약 1.41421296이 된다. 두 값의 차이는 작지만 제곱근 2와의 거리에서는 큰 개선이다. 정밀도는 눈에 보이는 자릿수의 길이보다 목표값과의 차이로 평가한다.

유효숫자를 설명할 때 근삿값과 정확한 값을 같은 등호로 연결하지 않는다. 분수로 전개한 수는 해당 60진 표기와 정확히 같지만 제곱근 2와는 근사 관계다. 기호 하나가 계산의 성격을 드러내므로 ≈와 =를 구분해서 쓴다.

정수	첫 자리	둘째 자리	셋째 자리
1	24/60	51/3600	10/216000

1;24:51:10을 네 부분의 합으로 읽는다.

탐구

마지막 분수 자리가 1만큼 바뀌면 전체 값은 얼마만큼 바뀌는가?

풀이와 확인

1/216000만큼 바뀐다. 십진법으로 약 0.00000462963이다. 마지막 자리가 10인 항은 이 단위 열 개를 더한 값이다.

[07] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

한 변 30의 대각선

비율을 알고 있으면 같은 모양의 모든 크기에 적용할 수 있다.

한 변이 1인 정사각형의 대각선 길이는 제곱근 2다. 한 변을 30으로 키우면 대각선도 30배가 된다. 따라서 근삿값 1;24:51:10에 30을 곱하면 42;25:35를 얻는다. 이 두 수의 연결이 점토판의 수를 읽는 중요한 단서다.

십진 분수로 직접 확인할 수 있다. 30×1=30이며 30×24/60=12다. 나머지 두 항은 1530/3600과 300/216000이다. 모두 합하면 약 42.4263889이며 42+25/60+35/3600과 일치한다.

대각선과 변의 비율이 일정한 까닭은 정사각형들이 서로 닮았기 때문이다. 크기를 바꾸어도 각도와 변의 비는 유지된다. 여기서 30은 길이의 값이며 근삿값 1.41421296은 단위가 없는 비율이라는 점도 함께 읽는다.

$$30 \times 1;24:51:10 = 42;25:35$$

$$42;25:35 \approx 42.4263889$$

유한 소수 근삿값에는 ≈를 쓴다.

점토판의 두 수를 연결하는 30배 계산.

탐구

한 변이 60인 정사각형에서 같은 근삿값을 사용한 대각선은 60진법으로 얼마인가?

풀이와 확인

30일 때 값의 두 배이므로 84;51:10이다. 정수 부분 84를 60진 자리로 다시 쓰면 1:24;51:10으로 나타낼 수 있다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

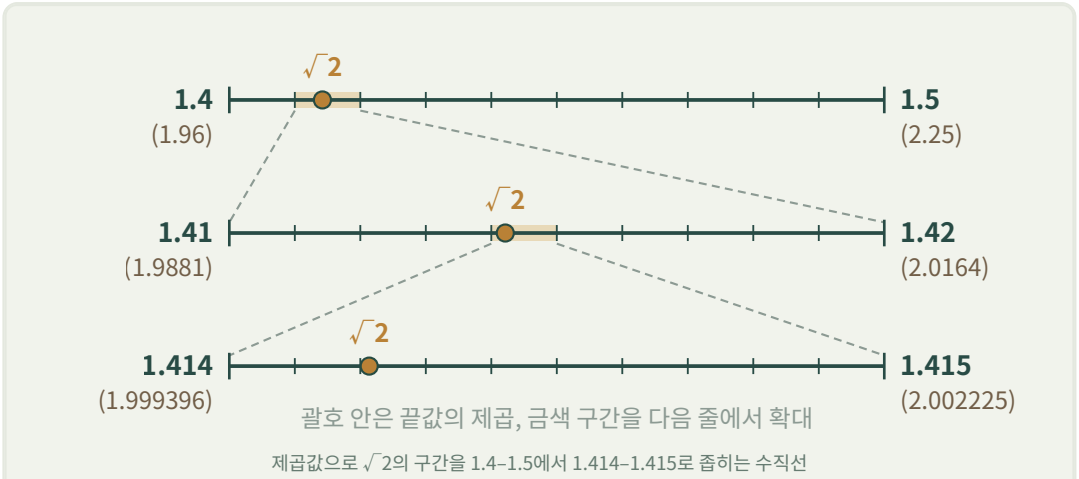
사이에서 제곱근 찾기

제곱을 비교하면 정답을 몰라도 근삿값의 범위를 좁힐 수 있다.

$1.4^2=1.96$이고 $1.5^2=2.25$이므로 제곱근 2는 1.4와 1.5 사이에 있다. 다시 $1.41^2=1.9881$과 $1.42^2=2.0164$를 계산하면 범위를 1.41과 1.42 사이로 좁힐 수 있다. 양수의 제곱이 크기 순서를 유지한다는 성질을 이용한다.

다음에는 $1.414^2=1.999396$과 $1.415^2=2.002225$를 비교한다. 범위가 더 작아진다. 이렇게 간격을 나누며 시험하는 방법은 이해하기 쉽지만 원하는 자릿수가 늘어날수록 계산 횟수도 많아진다. 이어지는 설명에서는 더 빠르게 중심으로 접근하는 방법을 살펴본다.

이 활동은 옛 필자가 실제로 이렇게 자리별 탐색을 했다고 주장하는 재현이 아니다. 역사 자료의 근삿값이 얼마나 좋은지 독자가 직접 판단할 수 있게 하는 현대의 검산이다. 계산 과정의 출처와 교육적 목적을 분명히 구분한다.



제곱값으로 √2의 구간을 1.4–1.5에서 1.414–1.415로 좁히는 수직선

탐구

$1.73^2=2.9929$이고 $1.74^2=3.0276$이라면 제곱근 3의 범위는 어디인가?

풀이와 확인

양의 제곱근 3은 1.73보다 크고 1.74보다 작다. 두 제곱값이 3을 사이에 두고 있기 때문이다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

평균으로 균형 잡기

넓이가 일정한 직사각형을 정사각형에 가깝게 바꾸어 본다.

넓이 2인 직사각형의 한 변을 1.5로 잡으면 다른 변은 $2\div1.5=4/3$이다. 두 길이는 각각 제곱근 2보다 크고 작다. 두 변의 평균을 새 추정값으로 택하면 $(3/2+4/3)/2=17/12$가 된다.

17/12는 약 1.4166667이므로 처음 1.5보다 제곱근 2에 가깝다. 이 새 값과 2를 이 값으로 나눈 값을 다시 평균하면 577/408을 얻는다. 같은 원리를 반복하면서 두 변의 차이를 줄이는 것이다. 나눗셈과 평균만으로 근삿값이 빠르게 개선된다.

평균 반복은 제곱근을 구하는 유용한 방법이다. 여기의 분수 전개는 현대의 설명이며 YBC 7289에 이 모든 단계가 쓰여 있는 것은 아니다. 특정 결과를 재현하는 알고리즘과 특정 유물의 실제 제작 과정을 동일시하지 않는다.

$$(3/2 + 4/3) / 2 = 17/12$$

$$(17/12 + 24/17) / 2 = 577/408$$

평균 반복으로 제곱근 2에 접근하는 현대 재구성.

탐구

제곱근 9를 찾으며 추정값을 4로 잡으면 평균 반복의 다음 값은 얼마인가?

풀이와 확인

다른 변은 9/4다. 평균은 $(4+9/4)/2=25/8=3.125$다. 처음 추정값 4보다 실제 제곱근 3에 가깝다.

[07] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

제곱의 오차와 길이의 오차

넓이에서 보이는 차이를 길이의 차이로 그대로 읽지 않는다.

근삿값 x가 제곱근 2보다 크면 x^2-2는 넓이의 초과량이다. 길이의 오차는 $x-\sqrt{2}$다. 두 양은 같지 않다. 곱의 차이 공식을 쓰면 $x^2-2=(x-\sqrt{2})(x+\sqrt{2})$이므로 넓이 오차는 길이 오차에 두 길이의 합을 곱한 값이다.

예를 들어 $x=1.42$이면 제곱의 오차는 0.0164다. 길이의 오차는 약 0.005786으로 더 작다. 도형에서 가느다란 띠의 넓이는 폭뿐 아니라 길이에도 영향을 받는다는 점을 떠올리면 두 오차가 다른 이유를 이해할 수 있다.

정확도를 말할 때 무엇의 오차인지 명시해야 한다. 수의 차이를 제시하는 절대 오차와 기준값에 대한 비율을 제시하는 상대 오차도 서로 다르다. 작은 오차라는 표현만 쓰기보다 비교 대상과 단위를 함께 적는 습관이 필요하다.

$$x^2 - 2 = (x - \sqrt{2})(x + \sqrt{2})$$

넓이 오차 ≠ 길이 오차

두 종류의 오차는 단위와 값이 다르다.

탐구

근삿값 1.4의 제곱 오차는 어느 방향으로 얼마인가?

풀이와 확인

$1.4^2=1.96$이므로 2보다 0.04만큼 작다. 이는 넓이의 부족량이다. 길이 부족량이 0.04라는 뜻은 아니다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

반올림과 잘라내기의 차이

마지막 자리를 정하는 규칙이 근삿값의 방향을 바꾼다.

십진 근삿값 1.41421356을 소수 셋째 자리까지 나타내자. 잘라내면 1.414다. 넷째 자리가 2이므로 반올림해도 이번에는 1.414다. 그러나 소수 둘째 자리까지 나타낼 때도 1.41인 반면 다른 수에서는 두 방식의 결과가 달라질 수 있다.

1.4186을 셋째 자리에서 잘라내면 1.418이고 반올림하면 1.419다. 반올림은 가장 가까운 격자점을 선택하는 규칙이며 잘라내기는 양수에서 항상 원래 값 이하를 만든다. 옛 표의 끝자리만 보고 사용한 반올림 관행을 단정하지 않는다.

60진법에도 같은 문제가 있다. 마지막으로 남길 자리 다음 값이 30 이상이면 올리는 현대 규칙을 쓸 수 있다. 기준이 10이 아니라 60이므로 절반은 5가 아니라 30이다. 먼저 표기 체계를 정한 다음 정밀도 규칙을 적용한다.



1.4186은 1.419에 더 가깝다. 양수의 잘라내기는 왼쪽 격자점 1.418을 택한다.

탐구

0;12:40을 분수 첫 자리까지 현대식으로 반올림하면 얼마인가?

풀이와 확인

다음 자리 40이 30 이상이므로 0;13이 된다. 잘라내면 0;12다. 두 결과의 차이는 1/60이다.

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

평균 반복이 위쪽 경계를 만드는 이유

빠른 계산 절차의 뒤에 있는 오차 관계를 직접 전개한다.

양수 A의 제곱근을 찾기 위해 양의 추정값 x를 고른다. 다음 추정값을 $y=(x+A/x)/2$로 정한다. 앞에서는 작은 수로 계산을 따라 했다. 이제 어떤 양의 x에서 시작해도 y가 제곱근 아래로 내려가지 않는 이유를 살핀다.

y^2-A를 통분하면 $(x^2+2A+A^2/x^2-4A)/4$가 된다. 이는 $(x-A/x)^2/4$와 같다. 제곱은 음수가 아니므로 $y^2 \geq A$다. y도 양수이므로 $y \geq \sqrt{A}$가 된다. 처음 x가 작았어도 한 차례 평균 뒤에는 위쪽 경계가 만들어진다.

새 추정값 y가 위쪽 경계이면 A/y는 아래쪽 경계다. 둘의 곱이 A이기 때문이다. 따라서 $A/y \leq \sqrt{A} \leq y$라는 검증 가능한 구간을 얻는다. y를 다시 평균하면 같은 방식으로 더 좁은 구간을 만들 수 있다. 단 반올림을 섞을 때에는 경계 방향을 보존하도록 따로 검사해야 한다.

A=2와 x=3/2에서는 y=17/12이며 아래쪽 값은 24/17이다. 위쪽 값의 제곱과 2의 차이는 1/144다. 이 증명은 현대 대수로 계산의 성능을 설명하며 YBC 7289의 필자가 같은 문자 논증을 기록했다는 뜻은 아니다. 결과의 검산과 역사적 절차의 확인을 끝까지 나누어 읽는다.

단계	아래쪽 경계	위쪽 경계
첫 평균 뒤	24/17	17/12
둘째 평균 뒤	816/577	577/408

탐구

A=9와 x=4를 사용한 첫 평균값과 그에 따른 아래쪽 경계를 구하라.

풀이와 확인

평균값은 25/8이다. 아래쪽 값은 9÷(25/8)=72/25다. 따라서 72/25≤3≤25/8이다. 소수로는 2.88≤3≤3.125가 되어 양쪽에서 제곱근을 감싼다.

[07] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

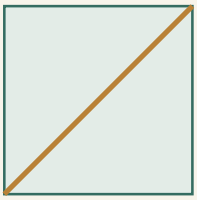
유물 한 점에서 질문 넓히기

하나의 뛰어난 계산을 문명 전체의 순위로 바꾸지 않는다.

YBC 7289의 수를 읽으며 정밀한 계산의 힘을 볼 수 있다. 하지만 이 유물 한 점만으로 모든 사람이 같은 정확도로 계산했다거나 모든 분야가 동일한 수준이었다고 결론 내리기는 어렵다. 남은 자료는 전체 활동의 일부이며 보존과 수집의 영향을 받는다.

이 관의 활동에서는 수의 전개와 곱셈과 오차를 직접 검산했다. 이런 확인은 유물의 중요성을 더 구체적으로 설명하게 한다. 아주 발전했다는 막연한 평가 대신 어느 값이 얼마나 정확하고 어떤 관계를 보여 주는지 말할 수 있다.

나만의 전시 라벨을 쓴다면 대상의 이름과 관찰 가능한 수와 현대적 검산을 차례로 담아 보자. 마지막에는 계산 절차의 복원에 한계가 있다는 문장을 넣는다. 흥미와 신중함은 함께 있을 수 있으며 오히려 서로를 보완한다.



변 1

1;24:51:10

≈ 1.414212963

√2 ≈ 1.414213562

차이의 크기 ≈ 0.000000599

YBC 7289의 대표 근삿값과 제곱근 2를 현대 십진 표기로 비교했다. 오차는 약 0.000000599다.

탐구

유물 설명에서 직접 계산으로 확인할 수 있는 주장 하나와 추가 자료가 필요한 주장 하나를 골라 보자.

풀이와 확인

적힌 수가 제곱근 2에 가깝다는 주장은 검산할 수 있다. 필자가 어떤 알고리즘으로 그 수를 처음 얻었는지는 다른 문헌과 연구가 필요하다.

[07] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독

고대 오리엔트관 / 08

플림프턴 322와 직각삼각형

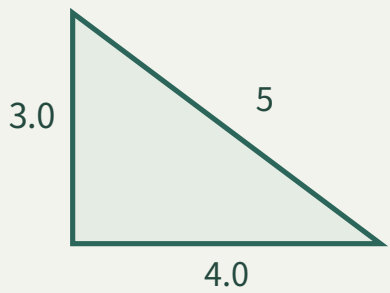
표가 남긴 수의 관계

플림프턴 322는 유명한 결론보다 먼저 표 자체를 살펴보게 한다.

컬럼비아대학교가 소장한 플림프턴 322에는 여러 행과 열의 수가 남아 있다. 이 수들이 직각삼각형의 변 관계와 연결된다는 점은 수학사에서 잘 알려져 있다. 다만 표의 원래 목적과 작성 방법에 대해서는 서로 다른 해석이 제시되어 왔다.

이 관에서는 실제 표의 모든 숫자를 복원하는 대신 작은 정수 삼각형을 통해 관련 원리를 익힌다. 3과 4와 5는 $3^2+4^2=5^2$를 만족한다. 이 관계는 삼각형을 그린 뒤 길이를 재는 것보다 정확한 수의 검산을 가능하게 한다.

표를 세계 최초의 삼각함수표라고 단정하는 소개는 논쟁을 감춘다. 교육용 계산표와 직사각형 문제와 관련된 해석도 검토해야 한다. 확실한 수의 관계와 자료의 목적에 관한 가설을 나누어 읽는 태도가 중요하다.



3과 4와 5의 제곱 관계를 보여 주는 학습 삼각형.

> **탐구**
>
> 3과 4와 5가 직각삼각형의 변이 될 수 있는지 계산으로 확인하자.

풀이와 확인

$3^2+4^2=9+16=25$이며 $5^2=25$다. 가장 긴 변을 빗변으로 두면 직각삼각형의 변 관계를 만족한다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

피타고라스 수라는 오늘의 이름

이름이 붙은 시대와 관계가 알려진 시대는 반드시 같지 않다.

양의 정수 a와 b와 c가 $a^2+b^2=c^2$를 만족하면 오늘날 피타고라스 수라고 부른다. 이 용어는 현대 독자가 관계를 알아보기 위한 이름이다. 고바빌로니아 자료를 이 이름으로 설명하더라도 해당 관계가 그리스에서만 존재했다는 뜻은 아니다.

5와 12와 13을 검산하면 25+144=169다. 8과 15와 17에서는 64+225=289다. 모두 같은 제곱 관계를 만족하지만 두 짧은 변의 비율은 다르다. 숫자의 크기보다 비율을 살피면 서로 다른 삼각형 모양이 보인다.

기호와 이름은 비교를 돕지만 원자료의 언어를 덮지 않도록 주의한다. 옛 문서가 변과 대각선 또는 직사각형을 어떤 말로 다루었는지 별도로 읽어야 한다. 현대 용어는 안내 표지이며 원문의 정확한 번역을 대신하지 않는다.



$5^2+12^2=13^2$을 만족하는 다른 정수 삼각형.

탐구

7과 24와 25도 같은 관계를 만족하는가?

풀이와 확인

$7^2+24^2=49+576=625$이며 $25^2=625$다. 따라서 같은 유형의 정수 삼각형을 만든다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

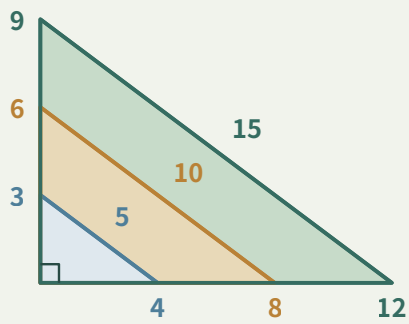
배수를 만들어도 모양은 같다

변을 같은 비율로 늘리면 직각 관계와 각도가 유지된다.

3과 4와 5를 모두 두 배로 하면 6과 8과 10이다. 제곱의 합은 36+64=100이므로 직각 관계가 유지된다. 모든 길이에 k를 곱하면 식의 양쪽에 k^2이 곱해지기 때문에 같은 관계가 성립한다.

그러나 6과 8과 10은 새로운 비율의 삼각형이 아니다. 각 변을 최대공약수 2로 나누면 원래 3과 4와 5를 얻는다. 공통 인수가 없는 정수 삼각형과 그 배수들을 구별하면 표에 어떤 모양이 포함되어 있는지 비교하기 편하다.

같은 모양이라도 실제 길이와 넓이는 다르다. 길이가 두 배이면 넓이는 네 배다. 지도에서 같은 각도를 유지한 채 크기를 바꾸는 확대와 닮은 도형의 관계가 정수 삼각형에서도 나타난다. 이 활동은 표의 구조를 이해하기 위한 현대의 분류다.



배율	세 변	넓이
×1	3, 4, 5	6
×2	6, 8, 10	24
×3	9, 12, 15	54

빗변은 모두 평행, 넓이는 1 : 4 : 9

3, 4, 5 삼각형을 2배와 3배로 늘려 직각을 공유하도록 겹친 그림

탐구

9와 12와 15를 가장 작은 정수 비율로 줄여 보자.

풀이와 확인

세 수의 최대공약수는 3이다. 모두 3으로 나누면 3과 4와 5가 된다. 길이 비율이 같으므로 두 삼각형은 닮았다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

두 수로 세 변 만들기

제곱의 차이와 두 배의 곱을 묶으면 직각 관계가 나타난다.

$m>n>0$인 두 정수를 골라 $a=m^2-n^2$와 $b=2mn$과 $c=m^2+n^2$를 만든다. $m=3$과 $n=2$를 쓰면 세 수는 5와 12와 13이다. 숫자를 임의로 세 개 고르는 대신 관계가 성립하도록 만드는 현대적 생성 공식이다.

왜 가능한지 식을 펼쳐 보자. $(m^2-n^2)^2+(2mn)^2$에서 가운데 항 $-2m^2n^2$와 $4m^2n^2$가 합쳐져 $2m^2n^2$이 된다. 전체는 $m^4+2m^2n^2+n^4$로 $(m^2+n^2)^2$과 같다. 계산 과정 자체가 직각 관계를 보장한다.

이 공식으로 표와 관련된 정수쌍을 만들 수 있다고 해서 옛 필자가 그대로 사용했다고 단정할 수는 없다. 실제 표의 순서와 표기와 계산에 사용한 수를 함께 설명하는지 비교해야 한다. 수학적 가능성은 역사적 입증의 한 부분이다.

$$m = 3\ n = 2$$

$$m^2 - n^2 = 5$$

$$2mn = 12\ m^2 + n^2 = 13$$

두 매개수에서 정수 세 변을 만드는 현대 공식.

탐구

m=4와 n=1을 넣어 세 변을 만들고 검산하자.

풀이와 확인

세 수는 15와 8과 17이다. $225+64=289$이며 17^2과 같다. 짧은 두 변의 순서는 바꾸어도 같은 삼각형이다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

역수쌍으로 보는 다른 경로

같은 관계를 만드는 방법이 하나뿐이라는 생각에서 벗어난다.

1보다 큰 수 t와 그 역수 1/t를 생각하자. 두 수의 반합을 $c=(t+1/t)/2$로 두고 반차를 $a=(t-1/t)/2$로 두면 $c^2-a^2=1$이다. 따라서 $a^2+1=c^2$라는 직각 관계를 얻는다. 역수표의 계산과 삼각형이 만나는 지점이다.

t=2이면 반합은 5/4이며 반차는 3/4다. 따라서 3/4와 1과 5/4가 한 삼각형의 세 변이다. 모두 4배하면 익숙한 3과 4와 5가 된다. 정수 생성 공식과 다른 모습으로 같은 결과를 얻는다.

60진법에서 역수가 유한하게 끝나는 수를 쓰면 중간 계산도 다루기 쉽다. 이것은 플림프턴 322를 이해하려는 여러 연구에서 주목하는 관계다. 이 책의 작은 예제는 원리 설명이며 실제 표의 모든 행을 그대로 재현한 목록은 아니다. t=1이면 반차가 0이 되어 삼각형이 납작해진다. 0<t<1을 사용할 때에는 반차의 절댓값을 변의 길이로 삼아야 한다.

$$t = 2\ 1/t = 1/2$$

$$\text{반차} = 3/4\ \text{반합} = 5/4$$

$$(3/4)^2 + 1 = (5/4)^2$$

역수쌍의 반합과 반차를 이용한 관계.

탐구

t=3에서 반합과 반차를 구하고 정수 세 변으로 바꾸자.

풀이와 확인

반합은 5/3이고 반차는 4/3이다. 4/3과 1과 5/3을 모두 3배하면 4와 3과 5가 된다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

비율의 제곱을 읽기

표의 값이 길이인지 비율인지 비율의 제곱인지 구별한다.

3과 4와 5인 삼각형에서 빗변이 아닌 변 4를 기준으로 하면 빗변 비율은 5/4다. 그 제곱은 25/16이며 다른 변 비율의 제곱 9/16보다 정확히 1만큼 크다. 길이 세 개가 하나의 기준으로 나누어지면 비율 관계로 바뀐다.

기준을 3으로 바꾸면 빗변 비율은 5/3이고 제곱은 25/9다. 같은 삼각형도 어떤 변을 기준으로 잡느냐에 따라 표에 적힐 숫자가 달라진다. 제목과 열의 의미를 먼저 읽어야 숫자 배열을 올바르게 비교할 수 있다.

소수로 바꾸면 계산이 익숙해지지만 분수는 정확한 관계를 더 잘 드러낼 때가 있다. 25/16−9/16=1은 즉시 확인된다. 전시에서는 원래 표기와 현대 분수와 그림을 연결해 보여 주되 각각이 무엇을 뜻하는지 표시한다.

비율	제곱
5/4	25/16
3/4	9/16
제곱의 차이	1

기준 변을 4로 정규화하면 두 제곱 비율의 차이는 1이다.

탐구

5와 12와 13에서 12를 기준으로 한 두 제곱 비율의 차이를 구하자.

풀이와 확인

$13^2/12^2-5^2/12^2=(169-25)/144=1$이다. 두 제곱 비율은 169/144와 25/144다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

틀린 한 행을 고쳐 보기

계산 오류를 찾는 것과 원래 표를 복원하는 것은 다른 작업이다.

학습용 표에 8과 15와 18이 적혀 있다고 하자. 짧은 두 변의 제곱 합은 64+225=289다. 18^2은 324이므로 직각 관계가 맞지 않는다. 앞의 두 수가 맞다는 가정 아래 빗변은 17이어야 한다.

그러나 실제 손상된 문서에서는 어느 수가 잘못 읽혔는지 먼저 확인해야 한다. 무조건 마지막 수를 고치면 다른 가능성을 놓친다. 기호의 남은 흔적과 표의 다른 행과 제목을 함께 비교해야 복원의 근거가 생긴다.

교정 결과를 제시할 때에는 원래 읽은 값과 고친 값과 수정 이유를 함께 적는다. 독자는 어떤 가정을 받아들이면 그 복원이 성립하는지 확인할 수 있다. 수학적 일관성은 강한 단서지만 유물의 흔적을 대신하지는 않는다.

세 변	짧은 두 변의 제곱 합	빗변의 제곱
8과 15와 18	289	324
20과 21과 29	841	841

탐구

20과 21과 29가 적힌 행은 직각 관계를 만족하는가?

풀이와 확인

$400+441=841$이며 $29^2=841$이다. 이 행은 관계를 만족한다. 검산이 맞는다는 사실만으로 표의 제작 목적까지 확정되는 것은 아니다.

[O8] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [O9] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

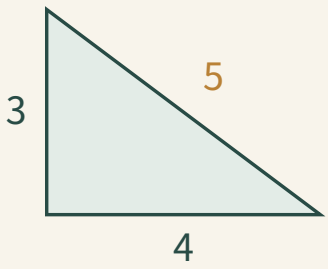
논쟁을 전시하는 방법

서로 다른 해석을 비교할 때에는 각 주장과 그 근거를 연결한다.

어떤 연구는 플림프턴 322를 삼각법의 관점에서 설명하고 다른 연구는 교육용 수표와 계산 관행을 더 중시한다. 독자는 어느 설명이 더 흥미로운지보다 무엇을 설명하고 어떤 가정을 추가하는지 비교해야 한다. 해석의 차이를 숨기지 않는 것이 정확한 안내다.

비교표에는 숫자의 관계와 행의 순서와 제목의 번역과 사용 상황을 구분해 적을 수 있다. 같은 수학적 관계를 인정하면서도 목적의 해석은 달라질 수 있다. 논쟁이 있다는 말이 모든 사실이 불확실하다는 뜻은 아니다.

이 장에서는 작은 정수 예제로 제곱 관계와 닮음과 생성법을 검산했다. 이 부분은 독자가 직접 확인할 수 있다. 실제 유물의 목적에 대해서는 연구사와 언어 자료를 더 읽도록 안내한다. 확실한 계산과 열린 질문이 한 전시 안에 함께 남는다.



$$5^2 - 3^2 = 4^2$$

$$25/16 - 9/16$$

$$= 1$$

3과 4와 5의 예제에서 제곱 비율의 차는 1이다. 이 검산 자체가 플림프턴 322의 사용 목적을 결정하지는 않는다.

탐구

두 해석이 같은 수 관계를 설명한다면 무엇을 더 비교해야 하는가?

풀이와 확인

표의 제목과 배열과 작성 관행을 얼마나 자연스럽게 설명하는지 비교한다. 추가 가정의 수와 다른 동시대 문헌과의 일치 여부도 중요한 판단 자료다.

[08] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시 / [09] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산

고대 오리엔트관 / 09

이집트의 수와 두 배 계산

기호를 더해서 수를 읽기

십진 묶음을 나타내는 기호는 자리값 표기와 다른 방식으로 작동한다.

고대 이집트의 상형문자 수 표기는 1과 10과 100 같은 크기를 나타내는 기호를 반복해 수를 표현했다. 이 책에서는 기호의 세부 모양을 복제하지 않고 크기별 카드로 원리를 설명한다. 백 카드 두 장과 십 카드 세 장과 일 카드 네 장이면 234다.

십진 묶음을 사용한다는 점은 오늘의 표기와 같지만 위치만으로 값이 바뀌는 자릿수 체계는 아니다. 숫자 2가 백의 자리에 놓여 200이 되는 오늘의 방식과 백 기호를 두 번 쓰는 방식을 구별한다. 같은 수를 적는 방법에도 서로 다른 규칙이 있다.

실제 자료에서는 상형문자와 필기용 서체의 수 표기를 구분해야 한다. 모든 파피루스에 기념비의 그림 문자가 그대로 쓰였다고 상상하지 않는다. 재료와 쓰기 목적과 서체가 함께 달라지므로 표기 체계를 소개할 때 문서의 종류도 밝힌다.

크기	개수	합
100	2	200
10	3	30
1	4	4

상형 수 표기의 묶음 원리를 카드로 바꾼 학습 도해.

탐구

백 카드 세 장과 십 카드 일곱 장과 일 카드 두 장의 합은 얼마인가?

풀이와 확인

300+70+2=372다. 카드를 놓는 순서보다 각 카드가 나타내는 묶음의 크기와 개수가 중요하다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

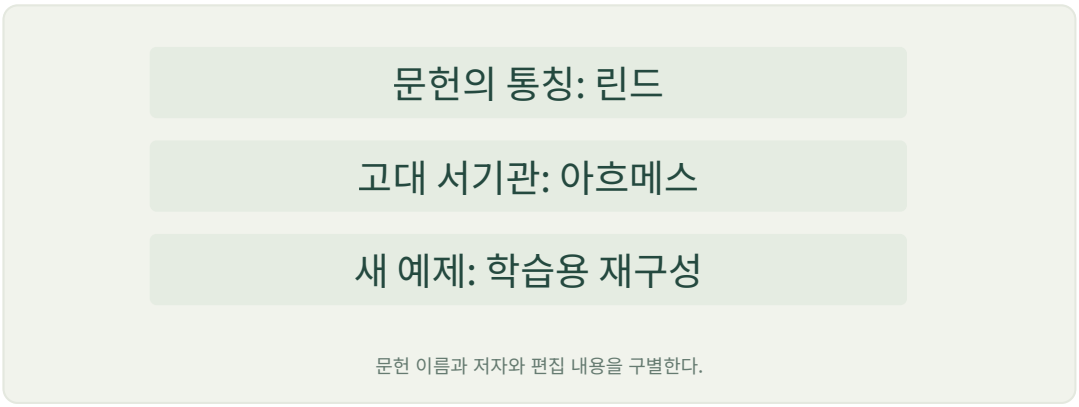
아흐메스의 파피루스

린드 파피루스는 계산 절차를 전하는 중요한 문헌이다.

대영박물관의 린드 수학 파피루스는 서기관 아흐메스가 쓴 문헌으로 알려져 있다. 분배와 분수와 도형을 다루는 여러 계산이 남아 있다. 현대에 붙은 이름은 수집가 린드에서 왔으므로 저자의 이름과 문헌의 통칭을 구별해 읽는다.

하나의 문헌을 모든 이집트 수학의 완전한 목록으로 취급해서는 안 된다. 어떤 문제가 선택되어 전해졌는지와 실제로 어떤 수학 활동이 있었는지는 범위가 다르다. 남은 문서의 내용을 꼼꼼히 살피면서 자료의 공백도 인정해야 한다.

이 장의 두 배 표와 분배 예제는 원리를 익히도록 새로 구성했다. 원문 문제를 다루는 경우에는 번호를 따로 밝힌다. 유물 설명과 현대 활동을 구분하면 재미있는 계산을 하면서도 어느 부분이 역사 자료에서 직접 온 것인지 알 수 있다.



문헌 이름과 저자와 편집 내용을 구별한다.

탐구

문헌 이름에 붙은 린드와 서기관 아흐메스는 같은 인물인가?

풀이와 확인

아니다. 린드는 문헌의 통칭에 이름이 남은 근대 수집가다. 아흐메스는 문헌을 쓴 고대 서기관으로 알려져 있다.

[O16] 대영박물관 린드 수학 파피루스 소장 기록

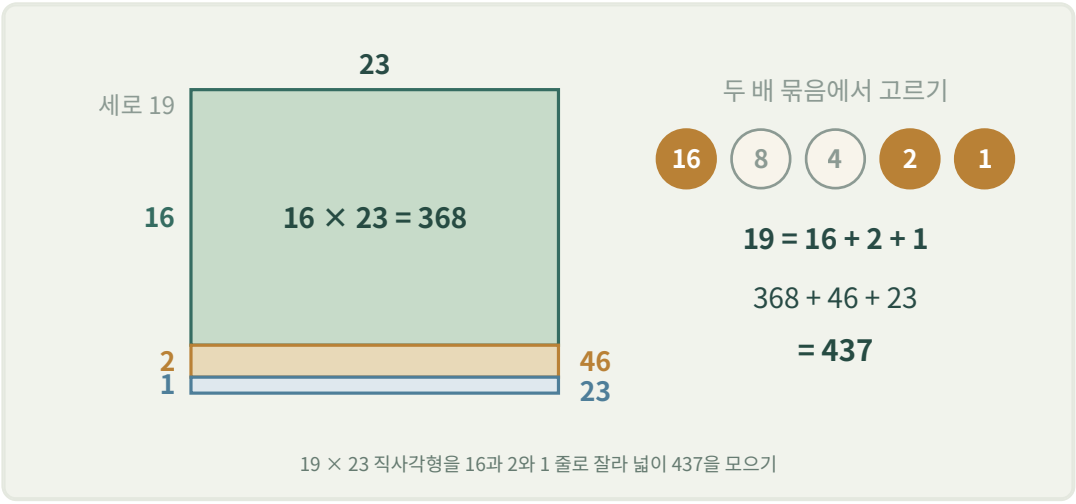
두 배 표로 곱하기

큰 곱셈을 덧셈과 선택의 과정으로 바꾸어 본다.

19×23을 계산하기 위해 왼쪽에 1과 2와 4와 8과 16을 적는다. 오른쪽에는 23과 46과 92와 184와 368을 적는다. 각 줄은 바로 위 줄의 두 배다. 이제 19를 16+2+1로 나누어 해당하는 오른쪽 값을 고른다.

선택한 수는 368과 46과 23이다. 합하면 437이므로 19×23=437이다. 19번을 한 번씩 더하는 대신 묶음의 크기를 빠르게 늘린 뒤 필요한 묶음만 합친다. 표를 만드는 과정과 줄을 고르는 과정을 분리하면 계산이 단순해진다.

오늘의 눈으로 보면 이 절차는 수를 2의 거듭제곱의 합으로 나타내는 방식과 연결된다. 그러나 고대 서기관이 현대 컴퓨터의 이진 표기법을 사용했다고 말하는 것은 지나친 연결이다. 같은 수학적 구조와 같은 역사적 개념은 구별해야 한다.



19 × 23 직사각형을 16과 2와 1 줄로 잘라 넓이 437을 모으기

탐구

13×21을 두 배 표로 계산하면 어떤 줄을 고르는가?

풀이와 확인

13=8+4+1이므로 168과 84와 21을 고른다. 합은 273이다. 선택하지 않은 2배 줄은 더하지 않는다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

왜 원하는 수를 만들 수 있을까

두 배 묶음은 이전 묶음들의 합보다 하나씩 더 크다.

1과 2와 4와 8을 모두 더하면 15다. 다음 묶음 16은 그보다 1 크다. 0부터 15까지 만들 수 있다면 16을 더해 16부터 31까지도 만들 수 있다. 이런 구조가 반복되므로 두 배 묶음으로 모든 자연수를 표현할 수 있다.

29를 만들 때 가장 큰 16을 먼저 고르면 13이 남는다. 다음 8을 고르면 5가 남고 4를 고르면 1이 남는다. 마지막 1을 고르면 끝난다. 따라서 29=16+8+4+1이다. 각 묶음은 한 번씩만 사용해도 충분하다.

이 설명은 현대적인 논증으로 계산법의 보편성을 보여 준다. 특정 서기관이 같은 증명을 글로 적었다는 뜻은 아니다. 실제 절차를 익히는 것에 더해 왜 언제나 작동하는지 묻는 활동을 통해 역사와 수학을 함께 탐구할 수 있다.

$$1 + 2 + 4 + 8 = 15$$

$$\text{다음 묶음} = 16$$

$$29 = 16 + 8 + 4 + 1$$

두 배 묶음은 자연수를 빠짐없이 구성할 수 있다.

탐구

1과 2와 4와 8과 16을 모두 사용하면 얼마인가? 다음 묶음은 무엇인가?

풀이와 확인

합은 31이다. 다음 묶음은 32이며 앞의 모든 묶음의 합보다 1 크다. 이 관계가 수를 빠짐없이 만드는 바탕이다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

두 배 표를 거꾸로 읽기

나눗셈에서는 목표량을 만드는 줄을 찾은 뒤 묶음 수를 더한다.

391÷17을 구해 보자. 두 배 표의 오른쪽에는 17과 34와 68과 136과 272가 놓인다. 391은 272+68+34+17이므로 왼쪽에서 16과 4와 2와 1을 고른다. 합은 23이며 이것이 몫이다.

곱셈에서는 왼쪽 수를 먼저 분해했지만 나눗셈에서는 오른쪽 목표량을 분해했다. 표의 관계는 그대로이며 읽는 방향만 바뀐다. 이런 역방향 읽기는 곱셈과 나눗셈이 서로 연결된 연산임을 보여 준다.

목표량이 정확히 만들어지지 않으면 나머지를 따로 처리한다. 표에서 가까운 값이 나왔다고 그대로 답으로 쓰면 전체 양이 맞지 않는다. 남은 양을 단위분수로 표현하거나 나머지로 보고할지는 문제의 물건과 분배 규칙에 따라 정한다.

$$391 = 272 + 68 + 34 + 17$$

$$\text{몫} = 16 + 4 + 2 + 1 = 23$$

나눗셈에서는 목표량을 만드는 오른쪽 줄을 고른다.

탐구

270÷18을 같은 방법으로 풀 때 몫은 얼마인가?

풀이와 확인

270=144+72+36+18이다. 왼쪽 묶음 수는 8+4+2+1=15이므로 몫은 15다. 18×15=270으로 검산한다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

절반을 표에 보태기

정수 줄만으로 부족한 양은 절반 줄과 작은 분수 줄로 채울 수 있다.

95÷12를 생각하자. 12의 네 배와 두 배와 한 배를 더하면 84이므로 정수 몫은 7이고 11이 남는다. 12의 절반은 6이며 4분의 1은 3이고 6분의 1은 2다. 이 세 양을 합하면 남은 11을 채운다.

따라서 몫은 7+1/2+1/4+1/6이다. 분수 합은 공통분모 12에서 6/12+3/12+2/12=11/12가 된다. 정수 두 배 표에 분수 배수를 덧붙이면 나누어떨어지지 않는 양도 정확하게 표현할 수 있다.

여기의 분해는 학습을 위한 한 가지 선택이다. 같은 분수는 다른 단위분수의 합으로도 나타낼 수 있다. 어떤 표현이 편리한지는 분모의 크기와 항의 개수와 다음 계산에서의 쓰임에 따라 달라진다. 하나만 정답이라고 외우지 않는다.

배수	12의 해당 부분
7	84
1/2	6
1/4	3
1/6	2

84+6+3+2=95이므로 몫은 7+1/2+1/4+1/6이다.

탐구

12의 1/3과 1/4를 더하면 얼마이며 원래 수의 어떤 분수인가?

풀이와 확인

4+3=7이다. 따라서 12의 7/12이며 1/3+1/4=7/12라는 관계를 확인할 수 있다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

행 선택의 실수를 찾기

표가 정확해도 잘못된 줄을 고르면 곱셈의 답이 달라진다.

27×14의 두 배 표에서 27을 16+8+2+1로 나누어야 한다. 만약 16+8+4+1을 골랐다면 선택한 묶음 수는 29다. 오른쪽 합도 27×14가 아니라 29×14가 되어 실제 답보다 28만큼 커진다.

검산은 표의 각 줄을 확인하는 단계와 고른 줄의 합을 확인하는 단계로 나누면 좋다. 줄 자체가 틀렸는지 선택이 틀렸는지 구별할 수 있기 때문이다. 계산 과정에 표시를 남기면 실수의 위치를 더 쉽게 찾는다.

현대 계산기에서도 비슷한 구분이 필요하다. 연산 장치가 정확하게 작동해도 입력한 수가 잘못되면 결과는 문제의 답이 아니다. 정확한 도구를 사용하는 것과 올바른 조건을 입력하는 것은 함께 갖추어야 할 능력이다.



27을 만드는 줄에서 2 대신 4를 고르면 합이 29가 된다. 오른쪽 값은 14의 두 배만큼 초과한다.

탐구

27×14의 정확한 답과 잘못된 29×14의 답을 구하자.

풀이와 확인

정확한 답은 378이다. 잘못 선택한 표의 합은 406이며 차이는 28이다. 두 묶음을 더 선택한 만큼 14의 두 배가 초과했다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

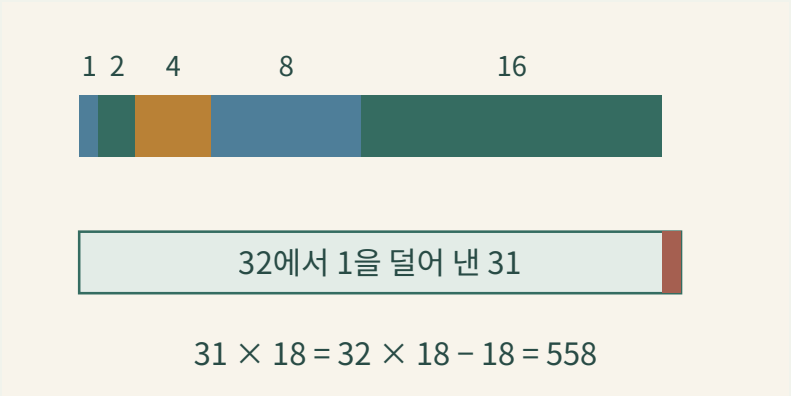
계산 방식의 비용 비교

어떤 방법이 빠른지는 수의 모양과 이미 가진 표에 따라 달라진다.

31×18은 두 배 표에서 1과 2와 4와 8과 16의 모든 줄을 더하면 된다. 다른 방법으로는 32×18에서 18을 빼면 된다. 32배를 이미 구했다면 두 번째 방법이 간단하다. 그러나 작은 표만 있다면 첫 방법이 자연스러울 수 있다.

계산 횟수만 세어 옛 방법의 가치를 판단하지 않는다. 종이와 기억과 표의 이용 가능성이 다르고 실수를 확인하는 방식도 다르다. 중간값을 다시 사용할 수 있는가와 절차를 가르치기 쉬운가도 실용성의 일부다.

두 방법의 결과는 모두 558이다. 독자는 같은 답에 도달한 경로를 비교하며 공통 원리인 분배법칙을 찾을 수 있다. 계산법의 역사는 하나의 최종 방법으로 곧장 가는 이야기가 아니라 다양한 조건에 맞춘 선택의 역사이기도 하다.



1+2+4+8+16과 32−1은 같은 31이다. 위아래 막대는 같은 단위 길이로 그렸다.

탐구

63×9를 64배를 이용해 계산해 보자.

풀이와 확인

64×9=576에서 9를 빼면 567이다. 63=64−1이라는 수의 모양을 활용했다. 두 배 표를 길게 더하는 것과 같은 결과다.

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기 / [O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

고대 오리엔트관 / 10

한 조각씩 나누는 분수

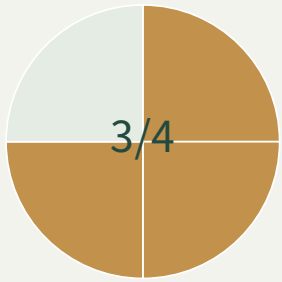
단위분수로 양을 표현하기

분자가 1인 분수들을 더해 여러 크기의 몫을 나타낼 수 있다.

단위분수는 1/2와 1/3과 1/7처럼 분자가 1인 분수다. 고대 이집트의 계산 자료에서는 단위분수의 합이 중요한 역할을 한다. 특별한 표기를 가진 2/3 같은 예외도 있으므로 모든 분수가 반드시 같은 모양이었다고 단정하지 않는다.

오늘의 학습 예제로 3/4를 1/2+1/4로 나타내 보자. 한 덩이를 반으로 나눈 조각 하나와 네 등분한 조각 하나를 합하면 전체의 네 조각 중 세 조각이 된다. 같은 양을 다른 조각 구성으로 표현한 것이므로 전체 크기는 바뀌지 않는다.

이 책은 고대 분수 기호의 모양 대신 익숙한 분수선을 사용한다. 표기의 장벽을 낮추되 원리까지 오늘의 방식과 같다고 가정하지 않기 위해서다. 이어지는 설명에서는 서로 다른 분모를 골라 하나의 분수를 여러 방식으로 분해한다.



같은 전체의 3/4은 1/2+1/4과 같다.

> **탐구**
>
> 5/6을 서로 다른 두 단위분수의 합으로 나타내 보자.

풀이와 확인

1/2+1/3이다. 공통분모 6으로 바꾸면 3/6+2/6=5/6이므로 정확히 같은 양이다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

분모를 맞추면 검산이 보인다

분수 조각의 크기가 다르면 공통된 작은 단위로 바꾸어 더한다.

1/4와 1/6을 더할 때 분모끼리 더해 2/10이라고 하면 안 된다. 두 분수는 서로 다른 크기의 조각이기 때문이다. 전체를 12등분하면 1/4은 세 조각이고 1/6은 두 조각이므로 합은 5/12다.

그림에서는 같은 길이의 띠를 사용해야 한다. 하나는 큰 전체를 네 등분하고 다른 하나는 작은 전체를 여섯 등분했다면 조각을 바로 비교할 수 없다. 분수는 언제나 무엇을 전체 1로 삼았는지와 함께 읽어야 한다.

고대 분수표의 등식을 확인할 때도 같은 원리가 적용된다. 우변의 단위분수를 공통분모로 바꾼 뒤 분자를 더해 좌변과 일치하는지 본다. 표의 역사적 작성법을 몰라도 제시된 관계가 맞는지는 독자가 직접 검산할 수 있다.

$$1/4 = 3/12$$

$$1/6 = 2/12$$

$$1/4 + 1/6 = 5/12$$

공통된 작은 조각으로 바꾸어 합한다.

탐구

1/3+1/8의 합을 공통분모로 구하자.

풀이와 확인

24를 공통분모로 쓰면 8/24+3/24=11/24다. 1/11이 아니며 분모의 합은 전체를 나눈 공통 단위가 아니다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

두 개의 같은 분수를 바꾸기

같은 단위분수를 반복하지 않는 표현을 찾아 본다.

2/7은 1/7을 두 번 더한 양이다. 서로 다른 단위분수로 나타내려면 1/4+1/28을 쓸 수 있다. 두 분수를 28분의 몇으로 바꾸면 7/28+1/28=8/28=2/7이다. 서로 다른 분모를 써도 정확한 양을 유지한다.

홀수 n에 대해 2/n=1/((n+1)/2)+1/(n(n+1)/2)라는 현대적 항등식을 사용할 수 있다. 첫 항은 2/(n+1)이고 둘째 항은 2/(n(n+1))이므로 합하면 2/n이 된다. 이 식은 몇몇 분해를 한꺼번에 설명하는 학습 도구다.

모든 역사적 분수표가 이 식 하나로 작성되었다고 볼 수는 없다. 실제 표에는 다른 기준을 따르는 분해도 있다. 하나의 일반 공식이 성립한다는 사실과 실제 계산자가 어떤 선택을 했는지에 관한 질문은 분리해서 다룬다.

$$2/7 = 8/28$$

$$1/4 + 1/28 = 7/28 + 1/28$$

서로 다른 단위분수로 바꾼 2/7.

탐구

위 식을 n=9에 적용해 2/9를 분해하자.

풀이와 확인

1/5+1/45다. 9/45+1/45=10/45=2/9이다. 다른 분해 1/6+1/18도 가능하므로 표현은 하나만 있는 것이 아니다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

같은 양을 여러 길로 나누기

분수의 값은 같아도 조각의 개수와 크기는 달라질 수 있다.

2/3은 1/2+1/6으로 나타낼 수 있다. 또 1/3+1/4+1/12로도 나타낼 수 있다. 첫 표현은 두 조각이고 둘째 표현은 세 조각이다. 공통분모 12로 바꾸면 둘 다 8/12가 되어 같은 양임을 확인할 수 있다.

어느 표현이 좋은지는 목적에 달려 있다. 두 종류의 조각만 만들 수 있는 상황에서는 첫 표현이 편하다. 이미 3등분과 4등분과 12등분 조각이 준비되어 있다면 둘째 표현이 자연스러울 수 있다. 수식의 길이만으로 계산의 편의를 모두 판단하지 않는다.

역사적 분수표를 볼 때에도 왜 이 분모들을 골랐는지 질문할 수 있다. 다만 현대의 효율 기준을 옛 필자에게 그대로 적용하지 않는다. 남은 문헌의 반복되는 선택과 계산 맥락을 비교해야 선택의 기준을 검토할 수 있다.

표현	12분의 몇
1/2 + 1/6	6/12 + 2/12
1/3 + 1/4 + 1/12	4/12 + 3/12 + 1/12

두 표현은 모두 8/12이며 값이 같다.

탐구

1/2를 서로 다른 두 단위분수로 바꾸는 표현을 하나 만들어 보자.

풀이와 확인

1/3+1/6이다. 2/6+1/6=3/6=1/2다. 이를 2/3의 첫 표현에 대입하면 또 다른 분해를 만들 수 있다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

큰 조각부터 고르는 현대 활동

남은 양보다 크지 않은 가장 큰 단위분수를 차례로 선택한다.

5/7을 분해하는 학습 활동을 해 보자. 1/1은 너무 크고 1/2는 5/7보다 작으므로 먼저 1/2를 고른다. 남은 양은 5/7−1/2=3/14다. 여기서 가장 큰 단위분수는 1/5이며 남은 양은 1/70이다.

따라서 5/7=1/2+1/5+1/70이다. 분모를 70으로 맞추면 35+14+1=50이므로 50/70=5/7이다. 각 단계에서 남은 양을 정확히 계산해야 다음 선택이 올바르게 이어진다. 처음부터 소수로 반올림하면 마지막 잔여량이 틀릴 수 있다.

이 절차는 오늘의 탐구 활동으로 제시한다. 고대 이집트의 모든 분수표가 가장 큰 조각부터 선택하는 동일한 알고리즘으로 만들어졌다는 뜻은 아니다. 같은 표현을 얻을 수 있다는 것과 역사적 작성 경로를 확인했다는 것은 다른 주장이다.

$$5/7 - 1/2 = 3/14$$
$$3/14 - 1/5 = 1/70$$
$$5/7 = 1/2 + 1/5 + 1/70$$

큰 단위분수부터 고르는 현대 학습 알고리즘.

탐구

3/5에서 가장 큰 단위분수 1/2를 빼면 무엇이 남는가?

풀이와 확인

3/5−1/2=6/10−5/10=1/10이다. 따라서 3/5=1/2+1/10으로 두 단계 만에 분해된다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

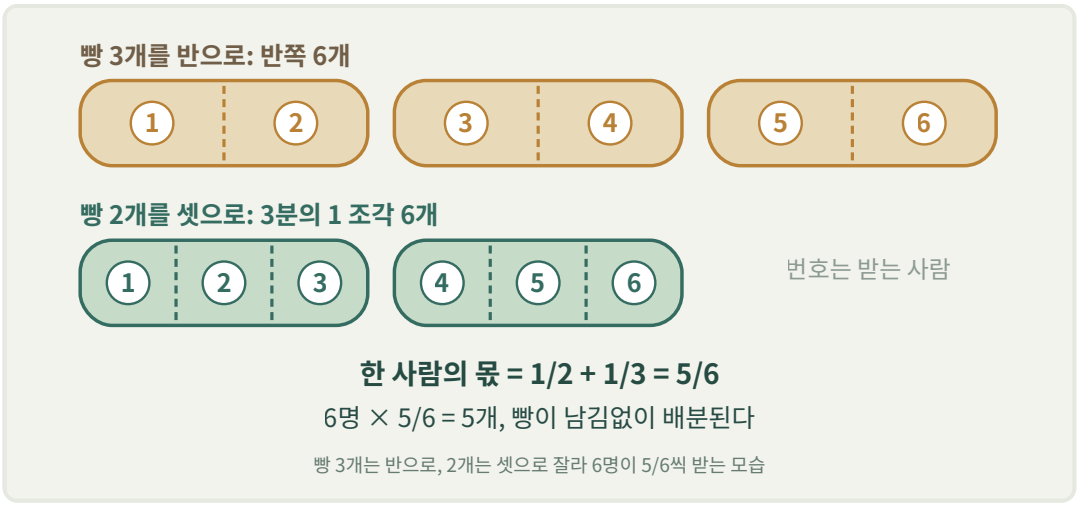
나눔의 공평함을 검산하기

각 사람이 받는 조각의 모양보다 전체 몫이 같은지 확인한다.

빵 5개를 6명에게 공평하게 나눈다고 하자. 한 사람의 몫은 5/6개다. 이를 1/2+1/3으로 주면 반쪽 한 개와 3분의 1 조각 한 개가 된다. 전체적으로 반쪽 여섯 개에 빵 3개를 쓰고 3분의 1 조각 여섯 개에 빵 2개를 쓴다.

두 종류 조각을 합하면 빵 5개가 정확히 모두 배분된다. 사람마다 같은 조각 구성을 받으므로 공평함을 눈으로도 확인하기 쉽다. 분수 표현이 실제 자르는 작업과 연결될 때 계산은 수식 이상의 설명이 된다.

빵의 크기가 서로 다르면 같은 조각 개수만으로 공평함을 보장할 수 없다. 학습 모형에서는 모든 빵이 같은 크기라는 가정을 둔다. 현실을 단순화한 조건을 밝혀야 계산 결과가 어떤 상황에 적용되는지 분명해진다.



빵 3개는 반으로, 2개는 셋으로 잘라 6명이 5/6씩 받는 모습

탐구

빵 7개를 12명에게 나눌 때 1/3+1/4씩 주어도 되는가?

풀이와 확인

한 사람의 몫은 4/12+3/12=7/12다. 전체 12명에게 주면 빵 4개와 3개를 사용하므로 합계 7개가 정확히 배분된다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

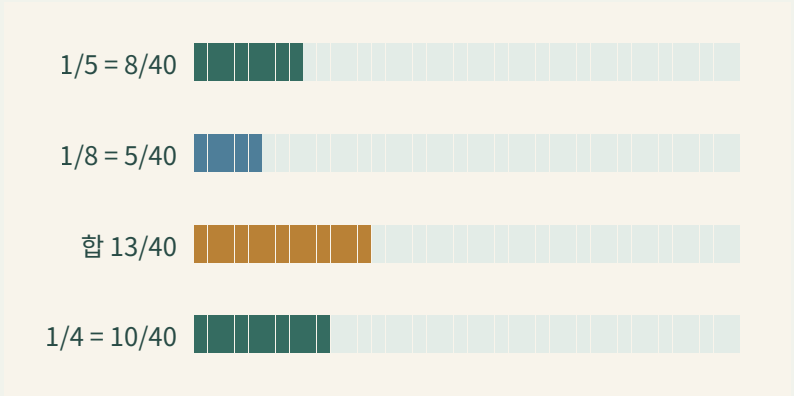
분모가 커질 때의 함정

분모가 큰 단위분수는 조각의 수가 아니라 조각 하나의 크기를 말한다.

1/5와 1/8을 비교하면 1/5가 더 크다. 같은 전체를 더 많이 나눌수록 조각 하나는 작아지기 때문이다. 분모 8이 5보다 크다는 이유로 1/8이 크다고 하면 분모의 역할을 거꾸로 읽은 셈이다.

1/5+1/8과 1/4을 비교하려면 공통분모 40을 쓸 수 있다. 앞의 합은 8/40+5/40=13/40이며 1/4은 10/40이다. 따라서 합이 더 크다. 개별 조각의 크기와 여러 조각을 더한 크기를 구별해야 한다.

그림에서는 모든 띠의 전체 길이를 맞추고 경계선을 분명히 그린다. 서로 다른 색의 조각을 같은 기준선 위에 놓으면 비교가 쉬워진다. 시각화는 계산을 대신하는 장식이 아니라 무엇을 같은 단위로 비교하는지 드러내는 도구다.



전체 길이를 같은 40조각으로 나누었다. 1/5과 1/8의 합 13/40은 1/4인 10/40보다 크다.

탐구

1/6+1/12는 1/4보다 큰가 작은가 같은가?

풀이와 확인

2/12+1/12=3/12=1/4이므로 같다. 각 조각은 1/4보다 작지만 합은 정확히 1/4이 된다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

큰 단위분수부터 고르면 왜 끝나는가

남은 분수의 분자가 줄어드는 성질로 절차의 종료를 설명한다.

0<a/b<1인 양의 분수를 가장 큰 단위분수부터 분해한다고 하자. a와 b는 양의 정수이며 먼저 약분한다. a/b가 이미 단위분수이면 끝난다. 그렇지 않으면 b/a 이상인 가장 작은 정수 n을 고르고 1/n을 뺀다. 이 선택은 남은 양보다 크지 않은 가장 큰 단위분수다.

차이는 a/b−1/n=(an−b)/(bn)이다. n을 올림으로 정했으므로 n−1<b/a≤n이다. 양변에 a를 곱하면 a(n−1)<b≤an이다. 따라서 새 분자 an−b는 0 이상 a 미만이다. 약분하면 분자는 그대로이거나 더 작아진다.

분자는 음이 아닌 정수이며 매 단계 엄격하게 줄어든다. 그러므로 끝없이 양의 분수만 남을 수 없다. 이 논증은 결과의 분모가 작게 유지된다는 뜻은 아니다. 종료가 보장되어도 중간 분모가 매우 커져 계산하기 불편할 수 있다.

예를 들어 4/13에서 1/4을 빼면 3/52다. 이어 1/18을 빼면 1/468이 남아 끝난다. 분자는 4에서 3으로 줄고 마지막에 1이 된다. 이 알고리즘의 일반 성질은 현대의 학습 해설이며 고대 이집트 서기관이 모든 표를 이 방법으로 만들었다는 역사적 주장이 아니다.

남은 양	선택한 조각	다음 잔여
4/13	1/4	3/52
3/52	1/18	1/468
1/468	1/468	0

탐구

분자가 줄어든다는 사실만으로 이 알고리즘이 가장 짧은 분해를 준다고 말할 수 있는가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 이 증명은 유한 단계에 끝난다는 사실만 보여 준다. 항의 개수나 가장 큰 분모가 최소인지 판단하려면 다른 분해와 비교하는 별도 논증이 필요하다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

나만의 분수표를 편집하기

답을 나열하는 표에 검산 열을 붙여 계산의 신뢰성을 높인다.

학습용 표의 첫 열에 2/5와 2/7과 2/9를 적는다. 둘째 열에는 각각 1/3+1/15와 1/4+1/28과 1/6+1/18을 적는다. 마지막 열에는 공통분모 검산을 적어 각 등식이 맞는지 보이게 한다.

표의 분모는 순서대로 커지도록 정리하면 읽기 쉽다. 동일한 값을 다른 방식으로 나타낸 경우에는 별도 줄로 두고 같은 원래 분수를 연결한다. 한 표현만 유일하다고 보이지 않도록 편집하는 것이 수학적 의미를 정확히 전달한다.

역사 자료의 표를 옮길 때에는 원문 순서를 유지한 전사와 학습을 위해 재배열한 표를 구분한다. 독자가 원래 구조와 편집자의 도움을 혼동하지 않게 하기 위해서다. 표를 만드는 일에도 자료의 출처와 편집 원칙이 필요하다.

분수	단위분수 분해
2/5	1/3 + 1/15
2/7	1/4 + 1/28
2/9	1/6 + 1/18

탐구

2/11=1/6+1/66이라는 줄을 검산해 보자.

풀이와 확인

1/6은 11/66이므로 합은 12/66=2/11이다. 두 단위분수의 분모가 서로 다르고 합도 정확하다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

고대 오리엔트관 / 11

가정한 값에서 답으로

맞지 않는 값도 출발점이 된다

계산하기 쉬운 수를 넣어 본 뒤 결과의 비율로 수정할 수 있다.

어떤 양에 그 양의 1/4을 더하면 25가 된다고 하자. 먼저 양을 4로 가정하면 4+1=5가 된다. 필요한 결과 25는 5의 다섯 배이므로 처음 가정한 양도 다섯 배로 바꾼다. 답은 20이며 20+5=25로 맞는다.

이 방법은 처음부터 정답을 찍는 것이 아니다. 계산하기 쉬운 시험값을 고른 뒤 결과가 어떻게 비례하는지 이용한다. 4를 택한 이유는 그 1/4이 정수 1이 되어 계산이 간단하기 때문이다. 시험값의 선택에도 목적이 있다.

이집트 수학의 일부 문제를 설명할 때 가정법 또는 가정한 값으로 푸는 방법을 소개한다. 이 책의 예제는 그 원리를 보여 주기 위한 현대 재구성이다. 이어지는 설명에서는 비례가 성립하는 조건과 성립하지 않는 경우를 나누어 본다.

$$시험: 4 + 1 = 5$$
$$목표: 25 = 5 \times 5$$
$$답: 4 \times 5 = 20$$

시험 결과와 목표의 비율을 입력에도 적용한다.

탐구

어떤 양에 그 1/3을 더해 32가 된다. 시험값 3으로 답을 구하자.

풀이와 확인

시험 결과는 3+1=4다. 32는 4의 8배이므로 답은 3×8=24다. 24+8=32로 검산한다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

시험값을 고르는 기준

분모들의 공배수를 택하면 중간 분수 계산을 줄일 수 있다.

어떤 양에 그 양의 1/2과 1/3을 더하면 55가 된다고 하자. 시험값을 1로 잡아도 되지만 분수가 나온다. 2와 3의 공배수 6을 택하면 6+3+2=11로 정수만 계산할 수 있다. 목표 55는 시험 결과의 다섯 배다.

따라서 원래 양은 30이다. 원문 형태를 현대 식으로 쓰면 x+x/2+x/3=55다. 분모를 통일하면 11x/6=55가 되어 같은 답을 얻는다. 두 풀이를 나란히 보면 시험값 6이 공통분모와 어떤 관계인지 드러난다.

편리한 시험값은 유일하지 않다. 12를 택하면 결과가 22이며 수정 비율은 5/2가 된다. 답은 여전히 30이다. 방법이 맞다면 출발값이 달라도 같은 문제의 답에 도달해야 한다. 이 성질을 독립적인 검산으로 사용할 수 있다.

$$\text{시험: } 6 + 3 + 2 = 11$$

$$\text{목표: } 55 = 11 \times 5$$

$$\text{답: } 6 \times 5 = 30$$

공배수 6을 고르면 분수 없이 시험할 수 있다.

탐구

x+x/4+x/6=34에서 편리한 시험값과 답은 무엇인가?

풀이와 확인

공배수 12를 택하면 12+3+2=17이다. 목표 34는 두 배이므로 x=24다. 24+6+4=34로 확인한다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

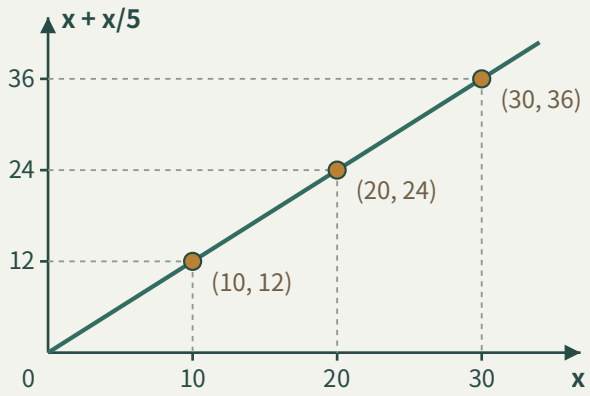
비례가 작동하는 까닭

입력을 두 배로 하면 출력도 두 배가 되는 구조를 찾는다.

x+x/4는 x의 5/4배다. x를 두 배로 바꾸면 두 항이 모두 두 배가 되어 전체도 두 배다. 따라서 시험 결과를 목표값에 맞추는 배율을 입력에도 똑같이 적용할 수 있다. 계산의 핵심은 이런 직접적인 비례 관계다.

일반적으로 ax=b에서 a가 일정하고 0이 아니면 0이 아닌 시험값 t의 결과는 at다. b가 at의 k배이면 답은 kt다. 이 설명은 현대의 대수 기호로 원리를 정리한 것이다. 옛 계산 절차를 검토하면서 오늘의 일반화도 함께 배울 수 있다.

비례를 확인하려면 문제에 고정된 더하기 항이 없는지 살핀다. 양의 일정 비율을 더하는 것과 고정된 수를 더하는 것은 다르다. 문장 속에서 그 양의 1/4과 숫자 4를 혼동하면 전혀 다른 관계를 풀게 된다.



원점을 지나는 직선

입력 ×2 → 출력 ×2

입력 ×3 → 출력 ×3

출력 ÷ 입력 = 6/5

x + x/5의 값이 원점을 지나는 직선 위에 놓이는 직접 비례

탐구

x+x/5에서 x가 10일 때와 30일 때의 결과를 비교하자.

풀이와 확인

각각 12와 36이다. 입력이 세 배가 되면 출력도 세 배가 된다. 이 비례 때문에 시험값을 같은 배율로 수정하는 방법이 작동한다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

고정된 수를 더하면 달라진다

모든 문제에 같은 수정 비율을 무조건 적용할 수는 없다.

x+4=20을 생각하자. 시험값 4를 넣으면 결과는 8이다. 목표 20이 8의 2.5배라고 해서 시험값 4도 2.5배로 바꾸면 x=10이 된다. 그러나 10+4=14이므로 틀린다. 고정된 4는 입력과 함께 늘어나지 않기 때문이다.

이 문제에서는 먼저 양쪽에서 4를 빼서 x=16을 구한다. 또는 시험값의 결과 8이 목표보다 12 작다는 점을 보고 x를 12 늘릴 수 있다. 비율 수정이 아니라 차이 수정이 맞는 구조다. 문제의 연산 관계를 먼저 파악해야 한다.

하나의 역사적 알고리즘을 배웠다고 모든 문장 문제에 기계적으로 적용하지 않는다. 잘 작동하는 범위를 확인하는 것은 방법을 제대로 이해했다는 증거다. 반례를 직접 만드는 활동은 절차의 조건을 선명하게 드러낸다.

$$시험: 4 + 4 = 8$$

$$잘못된 비율 수정: x = 10$$

$$정답: x = 20 - 4 = 16$$

고정된 더하기 항이 있으면 단순 비율 수정이 실패한다.

탐구

2x+3=15에서 시험값 1의 결과 5를 세 배로 맞추면 x=3이 되는가?

풀이와 확인

아니다. 2×3+3=9다. 먼저 고정항 3을 빼면 2x=12이므로 x=6이다. 비례 부분과 고정항을 분리해야 한다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

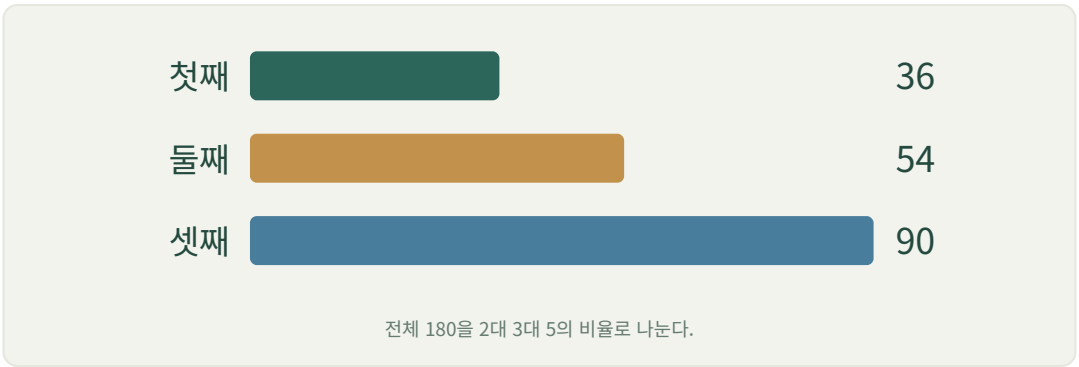
분배 비율을 합으로 바꾸기

몫의 비율을 알면 전체를 몇 개의 같은 단위로 볼지 정할 수 있다.

세 사람이 물건을 2대 3대 5의 비율로 나눈다고 하자. 비율의 합은 10이므로 전체를 같은 크기 10몫으로 생각할 수 있다. 전체가 180단위이면 한 몫은 18이며 세 사람은 36과 54와 90을 받는다.

처음에는 비율의 수 자체를 시험 몫으로 사용한 셈이다. 그 합 10을 실제 전체 180에 맞추기 위해 18배를 적용했다. 가정한 값에서 비례로 수정하는 생각이 분배 문제에도 이어진다. 단 비율의 순서와 사람의 대응을 유지해야 한다.

검산은 두 가지다. 세 몫을 더해 전체가 되는지 확인하고 각 몫을 해당 비율 수로 나눈 값이 모두 같은지 확인한다. 합계만 맞아도 비율이 틀릴 수 있으므로 두 조건을 함께 검사하는 것이 좋다.



전체 180을 2대 3대 5의 비율로 나눈다.

탐구

전체 84를 1대 2대 4로 나누어 보자.

풀이와 확인

비율 합은 7이며 한 몫은 12다. 분배량은 12와 24와 48이다. 합은 84이고 각 양을 1과 2와 4로 나누면 모두 12다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

일의 양과 사람 수

사람 수와 작업량의 관계에는 일정한 작업 속도라는 가정이 필요하다.

네 사람이 하루에 같은 속도로 각각 6단위를 처리한다고 하자. 하루 전체 작업량은 24단위다. 같은 조건에서 여섯 사람이 일하면 36단위다. 사람 수와 하루 작업량은 비례하지만 이것은 모든 사람이 같은 속도로 일한다는 학습 모형의 조건 아래 성립한다.

전체 작업량이 72단위라면 네 사람은 3일이 필요하고 여섯 사람은 2일이 필요하다. 사람 수가 늘 때 걸리는 시간은 줄어든다. 일정한 전체 작업량 아래에서는 사람 수와 시간이 반비례한다. 같은 문맥에서도 무엇을 고정하느냐에 따라 관계가 달라진다.

이 예제는 특정 고대 공사 기록의 번역이 아니다. 현실에서는 준비 시간과 역할 분담과 공간 제한이 있으므로 사람을 두 배로 늘렸다고 시간이 정확히 반이 되지 않을 수 있다. 모형의 가정을 밝혀야 계산 결과를 현실과 적절히 연결할 수 있다.

사람 수	하루 처리량	필요 일수
4	24	3
6	36	2

전체 72단위와 일정한 작업 속도를 가정한 학습 모형.

탐구

같은 속도의 세 사람이 8일 걸리는 일을 여섯 사람이 하면 모형상 며칠 걸리는가?

풀이와 확인

전체 일은 24사람일이다. 이를 여섯 사람으로 나누면 4일이다. 작업 속도와 조건이 같다는 가정이 필요하다.

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

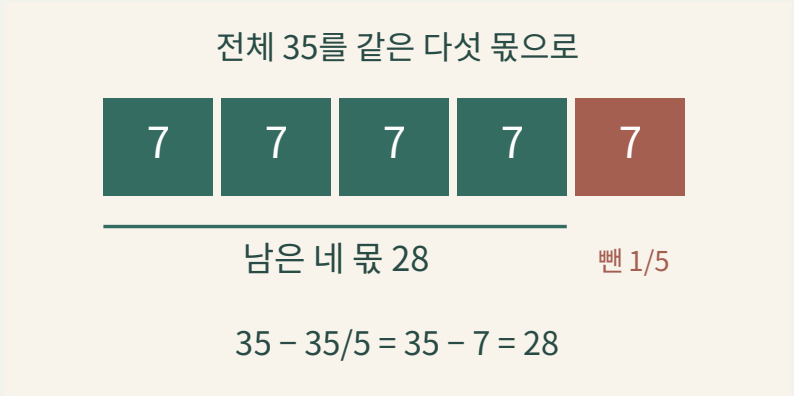
해를 넣어 문장으로 검산하기

식을 만족하는 답인지 확인한 뒤 원래 말의 뜻에도 맞는지 살핀다.

어떤 양에서 그 양의 1/5을 빼면 28이라는 문제를 풀자. 시험값 5에서는 4가 남는다. 28은 4의 일곱 배이므로 답은 35다. 여기에 원래 문장을 적용하면 35의 1/5은 7이며 35−7=28이 된다.

답을 구한 뒤 다른 식에 넣어 확인하면 검산의 의미가 약해진다. 원래 문제의 말로 돌아가 무엇을 더하고 뺐는지 다시 확인해야 한다. 문제를 식으로 옮기는 단계에서 생긴 오류는 같은 잘못된 식 안에서는 잘 드러나지 않을 수 있다.

예를 들어 1/5을 빼라는 말을 5를 빼는 것으로 읽으면 답 33을 얻는다. 33−5=28은 맞지만 원래 문제의 조건과 다르다. 숫자만 확인하지 않고 대상과 관계를 문장으로 복원하는 습관이 중요하다.



원래 양 35의 1/5은 7이다. 네 몫을 남긴 28이 원래 문장의 조건을 만족한다.

탐구

어떤 양에서 그 1/4을 빼면 45다. 답을 구하고 원래 문장으로 검산하자.

풀이와 확인

시험값 4에서는 3이 남으므로 목표에 맞추려면 15배다. 답은 60이며 그 1/4인 15를 빼면 45가 된다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

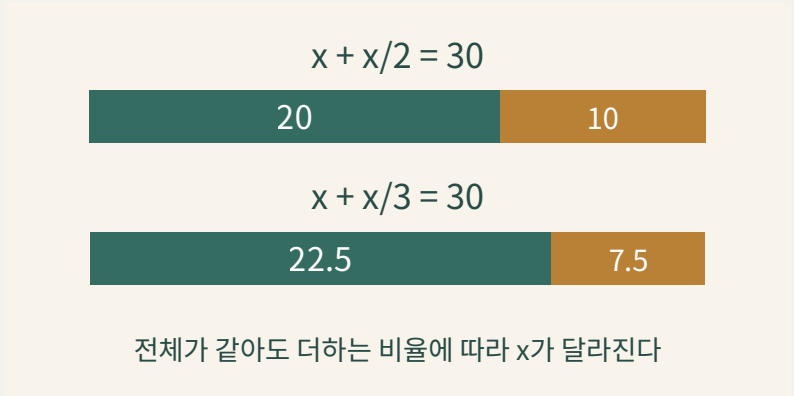
문제를 바꾸어 보는 편집실

숫자 하나를 바꿨을 때 해가 어떻게 달라지는지 예측해 본다.

x+x/2=30의 답은 20이다. 오른쪽 전체를 45로 바꾸면 전체가 1.5배이므로 답도 30이 된다. 반면 x+x/3=30으로 분수 부분을 바꾸면 같은 전체를 만드는 원래 양은 22.5다. 서로 다른 변경이 다른 효과를 낸다.

첫 변경은 같은 계수에서 목표량만 바꾼 것이다. 둘째 변경은 원래 양에 붙는 배율을 바꾼 것이다. 두 변화의 종류를 구별하면 문제를 풀기 전에 답이 커질지 작아질지 예상할 수 있다. 더하는 비율이 작아지면 같은 전체를 만들기 위한 원래 양은 커진다.

편집 활동에서는 원문을 고쳤다는 말 대신 새 학습 문제를 만들었다고 밝힌다. 역사 자료를 존중하면서도 원리를 여러 상황으로 확장할 수 있다. 마지막에는 만든 문제의 답과 검산을 함께 적어 다른 독자가 재사용할 수 있게 한다.



같은 전체 30을 만드는 두 분해. 금색 부분의 비율이 1/2에서 1/3으로 줄면 원래 양은 20에서 22.5로 늘어난다.

탐구

x+x/4=40에서 1/4을 1/2로 바꾸면 양의 해는 커지는가 작아지는가?

풀이와 확인

작아진다. 처음 해는 32이고 바꾼 해는 80/3이다. 원래 양에 더하는 비율이 커졌으므로 같은 전체 40을 만드는 x는 줄어든다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

고대 오리엔트관 / 12

경사와 원과 밭의 넓이

세케드가 재는 방향

수직으로 일정하게 올라갈 때 가로로 얼마나 이동하는지 나타낸다.

린드 파피루스의 피라미드 문제에는 세케드라는 경사량이 등장한다. 높이 한 큐빗에 대응하는 수평 이동을 손바닥 너비인 팜 단위로 나타내는 방식이다. 여기서는 한 큐빗을 7팜으로 두는 해당 도량 관계를 사용한다.

높이 10큐빗에 수평으로 5큐빗 이동한다면 높이 1큐빗당 수평 이동은 1/2큐빗이다. 이를 팜으로 바꾸면 세케드는 3.5팜이다. 오늘의 경사도처럼 높이를 수평 거리로 나눈 값과는 비율의 방향이 반대이므로 혼동하지 않는다.

이 장의 간단한 수는 학습용으로 새로 골랐다. 실제 피라미드의 치수를 주장하는 예제가 아니다. 비율의 분자와 분모와 단위를 분명히 적으면 낯선 경사량도 일관된 계산으로 이해할 수 있다. 도해에는 수평과 수직을 각각 표시한다.



높이 10에 수평 이동 5인 단면. 세케드는 3.5팜이다.

탐구

높이 8큐빗에 수평 이동 6큐빗이면 세케드는 몇 팜인가?

풀이와 확인

수평과 높이의 비는 6/8=3/4다. 1큐빗당 3/4큐빗이며 7×3/4=5.25팜이다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

밑변의 절반을 쓰는 까닭

피라미드 중심에서 한 면의 가운데까지 자른 단면을 생각한다.

정사각형 밑면의 한 변이 20이고 수직 높이가 16인 반듯한 피라미드를 그려 보자. 중심을 지나 한 면의 가운데로 향하는 단면에서 수평 거리는 밑변 전체 20이 아니라 절반인 10이다. 꼭대기는 밑면의 중심 바로 위에 있다고 가정한다.

따라서 수평과 수직의 비는 10/16=5/8이다. 한 큐빗을 7팜으로 환산하면 세케드는 35/8팜이다. 밑변 전체를 쓰면 경사량이 두 배가 되어 잘못된 값을 얻는다. 어떤 단면을 보고 있는지 먼저 정해야 한다.

중심에서 밑면의 꼭짓점으로 향하는 단면은 수평 거리가 다르다. 두 단면을 섞으면 같은 피라미드에서도 다른 비율이 나온다. 도형의 이름만으로는 계산이 정해지지 않으므로 기준선과 높이를 그림에 분명히 표시한다.



밑변 전체 20의 절반 10을 수평 거리로 사용한다.

탐구

밑변 한 변 18과 높이 12인 피라미드에서 면 가운데 단면의 수평과 수직 비는 얼마인가?

풀이와 확인

수평 거리는 9이므로 비는 9/12=3/4다. 밑변 18 전체를 높이 12로 나누는 것은 해당 단면의 세케드 계산이 아니다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

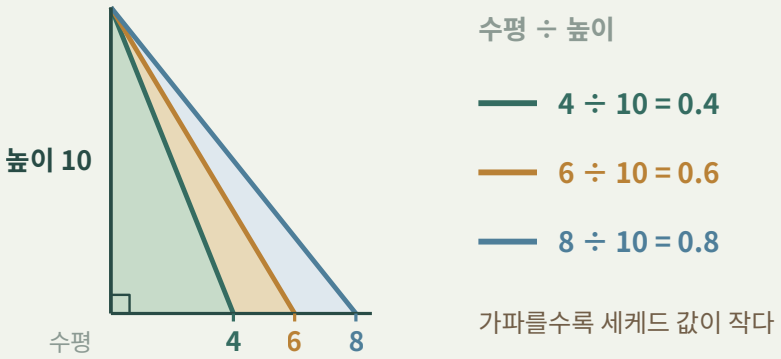
경사가 가파를수록 작아지는 수

어떤 비율을 택했는지에 따라 변화 방향도 달라진다.

높이를 10으로 고정하고 수평 이동을 4와 6과 8로 바꾸어 보자. 수평 이동이 작을수록 경사는 가파르다. 세케드에 대응하는 수평과 높이의 비는 각각 0.4와 0.6과 0.8이므로 가파를수록 값이 작아진다.

오늘의 익숙한 상승률은 높이를 수평 이동으로 나누므로 같은 세 경우가 2.5와 약 1.667과 1.25다. 여기서는 가파를수록 값이 커진다. 두 경사 표현은 서로 역수 관계이며 어느 쪽이 틀린 것이 아니라 기준이 다르다.

표를 만들 때 열 제목에 수평/높이인지 높이/수평인지 반드시 적는다. 경사 0.5라는 숫자만 있으면 어느 방향으로 읽어야 할지 모호하다. 단위와 비율의 방향을 보존하는 습관은 역사적 도량형뿐 아니라 현대의 그래프에서도 중요하다.



높이 10에서 수평 4, 6, 8로 내려오는 세 경사면과 세케드 값

탐구

높이 12에 수평 이동 3인 경우와 수평 이동 6인 경우 중 어느 쪽이 더 가파른가?

풀이와 확인

수평 이동 3인 쪽이 더 가파르다. 수평/높이는 각각 1/4과 1/2이므로 가파른 쪽의 세케드가 더 작다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

세케드로 밑변 되찾기

경사량과 높이를 알면 피라미드의 수평 크기를 계산할 수 있다.

세케드가 5.25팜이면 큐빗 단위 비율은 5.25/7=3/4다. 높이가 24큐빗인 피라미드의 면 가운데 단면에서 수평 거리는 24×3/4=18큐빗이다. 이것은 밑변의 절반이므로 전체 한 변은 36큐빗이다.

계산은 단위 변환과 비율 적용과 두 배의 세 단계다. 팜 값을 큐빗으로 바꾸지 않고 높이에 바로 곱하면 7배의 오류가 생긴다. 마지막에 절반 길이를 전체 밑변으로 바꾸는 단계도 빠뜨리지 않아야 한다.

답을 얻으면 역방향으로 검산한다. 밑변 36의 절반 18을 높이 24로 나누면 3/4이다. 이를 7팜에 곱하면 처음 세케드 5.25팜을 되찾는다. 계산 경로를 거꾸로 따라가는 검산은 단위 오류를 찾는 데 유용하다.

$$5.25\text{팜} \div 7 = 3/4$$

$$24 \times 3/4 = 18$$

$$\text{밑변} = 18 \times 2 = 36$$

세케드와 높이에서 전체 밑변을 되찾는다.

탐구

세케드 3.5팜과 높이 30큐빗인 피라미드의 밑변 한 변을 구하자.

풀이와 확인

비율은 3.5/7=1/2다. 수평 반길이는 15큐빗이며 전체 밑변 한 변은 30큐빗이다.

[012] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

원을 정사각형으로 가늠하기

지름에서 일부를 덜어 낸 길이의 제곱으로 원 넓이를 근사한다.

린드 파피루스의 원 넓이 계산과 관련해 지름의 1/9을 덜어 낸 뒤 남은 길이를 제곱하는 규칙이 알려져 있다. 지름이 9인 학습 그림에서는 1을 덜어 8을 만들고 넓이를 64로 계산한다. 이는 정확한 원 넓이 공식과는 다른 근사 규칙이다.

현대식으로 지름을 d라 쓰면 근삿값은 $(8d/9)^2$이다. 원의 정확한 넓이 $\pi d^2/4$와 비교하면 이 규칙은 π를 256/81로 사용하는 것과 같다. 약 3.16049이므로 오늘의 π보다 조금 크다. 현대 기호는 규칙을 비교하는 해설에 사용한다.

옛 문헌이 오늘의 π 기호와 같은 상수 개념을 그대로 적었다고 말하지 않는다. 구체적 절차를 현대 공식으로 바꾸어 분석한 것이다. 계산의 수치적 효과와 원문이 사용한 표현을 나누어 설명하면 과장 없이 의미를 전할 수 있다.

$$d = 9$$

$$(d - d/9)^2 = 8^2 = 64$$

$$\pi\text{에 대응하는 값} = 256/81$$

원 넓이의 역사적 근사 규칙을 현대 기호로 해설한다.

탐구

지름 18인 원에 이 규칙을 적용하면 근사 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

18의 1/9인 2를 빼면 16이다. 이를 제곱하면 256이다. 지름 9일 때 값 64의 네 배이기도 하다.

[012] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

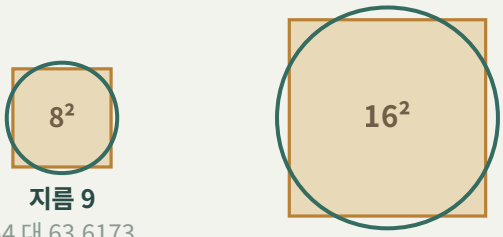
근사 규칙의 오차를 비교하기

크기가 바뀌어도 상대적인 오차는 일정하게 유지될 수 있다.

지름 9인 원의 정확한 넓이는 81π/4로 약 63.6173이다. 앞의 규칙이 주는 64는 약 0.3827만큼 크다. 정확한 값에 대한 비율로 보면 약 0.60퍼센트의 초과다. 넓이의 차이와 비율의 차이를 구별해 적는다.

지름을 두 배로 하면 두 넓이는 모두 네 배가 된다. 절대 오차도 네 배가 되지만 상대 오차는 그대로다. 따라서 큰 원에서 숫자 차이가 커졌다고 규칙의 상대적 정확도가 나빠졌다고 말할 수는 없다. 비교 기준을 먼저 정해야 한다.

이 계산은 현대의 π를 기준으로 한 평가다. 고대의 실제 측정 오차나 작업 목적까지 이 숫자 하나로 알 수는 없다. 규칙의 수학적 성능을 확인하되 현장 활용의 정밀도는 별도 자료가 필요한 문제로 남겨 둔다.



지름 9
64 대 63.6173

지름 18
256 대 254.4690

규칙의 넓이 − 원의 넓이
지름 9: 약 0.3827
지름 18: 약 1.5310
절대 오차는 4배
상대 오차는 둘 다 약 0.60%

지름 9와 18인 원에 한 변 8과 16인 정사각형을 겹쳐 오차 비교

탐구

지름 18에서 절대 오차가 지름 9일 때의 몇 배가 되는가?

풀이와 확인

네 배다. 넓이와 근사 넓이가 모두 네 배가 되기 때문이다. 상대 오차의 비율은 변하지 않는다.

[012] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

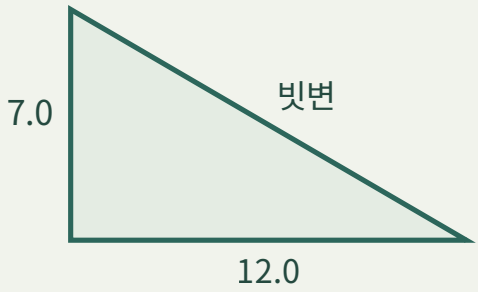
직사각형을 삼각형으로 나누기

같은 밑변과 높이를 가진 삼각형의 넓이는 사각형의 절반이다.

밑변 12와 높이 7인 삼각형의 넓이는 12×7÷2=42다. 높이는 꼭짓점에서 밑변이 놓인 직선까지의 수직 거리다. 비스듬한 변의 길이를 높이라고 바꾸어 넣으면 다른 양을 계산하게 된다. 도형에 직각 표시를 넣는 이유가 여기에 있다.

같은 삼각형을 하나 더 만들어 뒤집어 붙이면 밑변 12와 높이 7인 평행사변형을 만들 수 있다. 전체 넓이는 84이며 원래 삼각형은 절반이다. 이 도해는 넓이 관계를 설명하는 현대 학습용 그림으로 제시한다.

꼭짓점을 밑변과 평행하게 움직이면 모양은 달라져도 높이는 7로 유지된다. 따라서 넓이는 계속 42다. 그림의 기울어진 모습만 보고 넓이가 커졌다고 판단하지 말고 계산에 들어가는 밑변과 수직 높이를 확인한다.



수직 높이 7과 밑변 12가 만드는 직각삼각형의 넓이는 42다.

탐구

밑변 15와 수직 높이 8인 삼각형의 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

15×8÷2=60이다. 옆변 길이는 주어지지 않았지만 넓이를 구하는 데 꼭 필요하지 않다.

[012] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

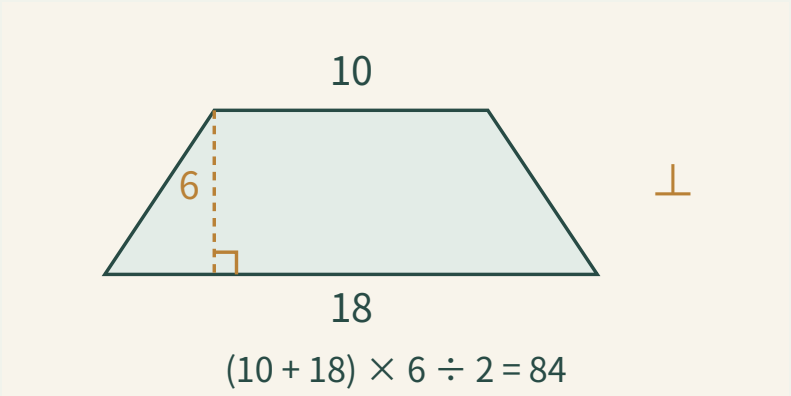
측량 그림에 조건 적기

지도처럼 보이는 도해도 실제로 주어진 조건을 확인해야 한다.

가상의 밭을 평행한 두 변이 10과 18인 사다리꼴로 그리자. 두 평행선 사이의 수직 거리가 6이면 넓이는 (10+18)×6÷2=84다. 짧은 변 10과 긴 변 18의 평균 14에 높이를 곱한 것과 같다.

모든 사각형에 두 마주 보는 변의 평균을 곱하는 공식을 무조건 적용할 수는 없다. 평행 여부와 높이의 의미가 달라지기 때문이다. 역사적 토지 문제에서도 그림이 대략 그려졌다는 이유만으로 모든 선이 정확히 직각 또는 평행이라고 가정하지 않는다.

학습 도해에는 평행 표시와 수직 높이를 넣어 사용할 공식을 정당화한다. 측정값을 소수 둘째 자리까지 썼다고 모양에 대한 가정이 자동으로 맞는 것은 아니다. 숫자의 정밀도와 모형의 타당성은 서로 다른 확인 항목이다.



평행한 두 변 10과 18 사이의 수직 높이가 6인 사다리꼴. 비스듬한 옆변을 높이로 쓰지 않는다.

탐구

위 사다리꼴을 같은 크기 하나와 붙여 평행사변형으로 만들면 밑변과 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

밑변은 10+18=28이며 높이는 6이다. 넓이는 168이고 원래 사다리꼴은 그 절반인 84다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

고대 오리엔트관 / 13

잘린 피라미드와 남겨진 질문

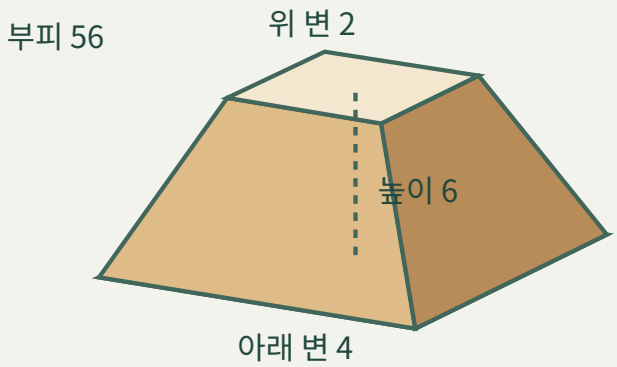
모스크바 파피루스의 입체 문제

작은 윗면과 큰 밑면을 가진 입체의 부피를 계산한 절차가 남아 있다.

모스크바 수학 파피루스의 14번 문제는 정사각형 밑면을 가진 잘린 피라미드의 부피와 연결된다. 아래 한 변 4와 위 한 변 2와 수직 높이 6을 다루는 계산으로 널리 알려져 있다. 이 책의 입체 그림은 문제를 이해하도록 다시 그린 것이다.

절차는 아래 변의 제곱 16과 두 변의 곱 8과 위 변의 제곱 4를 더해 28을 만든다. 여기에 높이의 1/3인 2를 곱하면 부피 56을 얻는다. 세 항을 모두 더해야 하며 가운데 곱을 생략하면 다른 값이 나온다.

오늘의 기호로 $V=h(a^2+ab+b^2)/3$이라 정리할 수 있다. 고대 문헌에 현대 문자 공식이 그대로 적힌 것은 아니다. 특정 수의 계산이 일반식과 일치한다는 사실과 그 일반식의 역사적 증명 과정을 아는 것은 구별해야 한다.



문제의 치수를 설명하는 현대 개념도. 원본 유물의 그림을 복제한 것이 아니다.

탐구

아래 변 4와 위 변 2의 세 넓이 항은 각각 무엇이며 합은 얼마인가?

풀이와 확인

$4^2=16$과 $4\times2=8$과 $2^2=4$다. 합은 28이며 높이 6의 1/3을 곱하면 56이다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

두 피라미드의 차로 이해하기

잘려 나간 꼭대기를 되붙이면 큰 피라미드와 작은 피라미드를 비교할 수 있다.

아래 변 4와 위 변 2가 서로 닮은 정사각형이므로 잘려 나간 작은 피라미드는 큰 피라미드의 길이 절반 크기다. 잘린 부분 아래의 높이가 6이면 작은 피라미드 높이도 6이고 큰 피라미드 전체 높이는 12가 된다.

큰 피라미드의 부피는 $4^2\times12/3=64$다. 작은 피라미드는 $2^2\times6/3=8$이다. 두 값을 빼면 56으로 앞의 계산과 일치한다. 이 설명은 오늘의 닮음과 피라미드 부피 공식을 이용한 검산이며 원문에 적힌 증명을 그대로 옮긴 것은 아니다.

입체를 비교할 때 작은 피라미드의 높이를 마음대로 정하면 안 된다. 두 정사각형의 변 비율이 높이 비율도 결정한다. 그림이 그럴듯한지보다 닮음 조건이 모든 길이와 일치하는지 확인해야 한다.

$$\text{큰 피라미드: } 16 \times 12 / 3 = 64$$
$$\text{작은 피라미드: } 4 \times 6 / 3 = 8$$
$$\text{잘린 입체: } 64 - 8 = 56$$

닮음을 이용한 현대 검산. 원문 증명의 복제가 아니다.

탐구

큰 피라미드의 길이가 작은 것의 두 배이면 부피는 몇 배인가?

풀이와 확인

길이의 세 방향이 모두 두 배가 되므로 부피는 여덟 배다. 위 예에서도 큰 부피 64는 작은 부피 8의 여덟 배다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

세 항의 대칭을 살펴보기

아래와 위의 이름을 바꾸어도 부피 식은 같은 값을 준다.

$V=h(a^2+ab+b^2)/3$에서 a와 b를 서로 바꾸면 세 항의 순서만 달라진다. 따라서 같은 두 정사각형을 위아래 뒤집어 놓아도 부피는 같다. 입체를 뒤집었다고 차지하는 공간이 달라지지 않는다는 직관과 식의 대칭이 일치한다.

아래 변 5와 위 변 3과 높이 6인 새 예제를 계산하면 25+15+9=49이며 부피는 98이다. 이 예제는 원자료의 수를 바꾼 현대 활동이다. 같은 절차가 다른 치수에서도 어떻게 작동하는지 확인하는 데 사용한다.

세 항 중 가운데 ab는 양 끝 넓이 a^2와 b^2의 단순한 합만으로는 담기지 않는 변화의 효과를 포함한다. 아직 일반 증명을 배우지 않았더라도 항을 빠뜨렸을 때 특별한 경우와 맞지 않는지 검토하며 식의 필요성을 살펴볼 수 있다.

$$5^2 + 5 \times 3 + 3^2 = 49$$

높이 6 → 부피 98

위아래를 바꾸어도 같은 값

현대 창작 예제에서 공식의 대칭을 확인한다.

탐구

아래 변 6과 위 변 2와 높이 3이면 부피는 얼마인가?

풀이와 확인

36+12+4=52이며 높이의 1/3이 1이므로 부피는 52다. 위아래를 바꾸어도 값은 같다.

[013] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [014] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

윗면이 같아질 때

특별한 경우를 대입하면 공식의 구조를 시험할 수 있다.

위아래 정사각형의 한 변이 모두 a라면 입체는 곧은 정사각기둥이 된다. 식에 b=a를 넣으면 $V=h(a^2+a^2+a^2)/3=ha^2$다. 밑넓이와 높이를 곱하는 기둥의 부피와 일치한다. 세 항이 필요하다는 점도 여기서 확인된다.

반대로 윗면의 한 변 b를 0으로 줄이면 꼭대기가 한 점인 피라미드가 된다. 식은 $V=ha^2/3$으로 바뀐다. 서로 다른 두 극단에서 익숙한 공식과 맞는지 보는 방법은 새 식의 오류를 찾는 데 유용하다.

특별한 경우가 맞는다고 모든 경우의 증명이 완성되는 것은 아니다. 일부 값에서 맞고 다른 값에서 틀리는 식도 있을 수 있다. 이 검사는 강력한 검산이지만 일반적인 논증을 대신하지 않는다는 한계를 함께 기억한다.

윗면 변	입체	부피
b = a	정사각기둥	ha^2
b = 0	피라미드	$ha^2/3$

특별한 경우를 대입해 식의 구조를 검산한다.

탐구

a=b=4이고 높이가 5일 때 식이 주는 부피를 구하자.

풀이와 확인

5×(16+16+16)/3=80이다. 밑넓이 16인 정사각기둥의 높이 5를 곱한 값과 같다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

중간 넓이만 쓰면 생기는 오차

위아래 넓이의 평균에 높이를 곱하면 언제나 맞는 것은 아니다.

아래 변 4와 위 변 2인 입체의 끝면 넓이는 16과 4다. 평균 넓이 10에 높이 6을 곱하면 60이다. 하지만 정확한 부피는 56이므로 4만큼 크다. 단면의 한 변은 일정하게 줄어들어도 넓이는 제곱으로 변하기 때문이다.

중간 높이에서 한 변은 3이고 넓이는 9다. 끝면 넓이의 평균 10과 다르다. 길이의 평균을 먼저 제곱하는 것과 제곱한 값의 평균을 구하는 것은 같은 연산이 아니다. 이 차이가 단순 평균법의 오류를 설명한다.

입체의 부피를 층별로 생각하면 얇은 단면들이 어떻게 바뀌는지 살필 수 있다. 각 층의 넓이를 정확히 반영하는 것이 중요하다. 이 활동은 고대 공식을 현대적으로 이해하는 보조 설명이며 당시 미적분 개념이 있었다는 주장은 아니다.



제곱의 평균과 평균의 제곱은 서로 다르다.

탐구

4와 2의 평균을 제곱한 값과 두 제곱의 평균을 비교하자.

풀이와 확인

평균 3의 제곱은 9다. 제곱 16과 4의 평균은 10이다. 두 값은 1만큼 다르다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

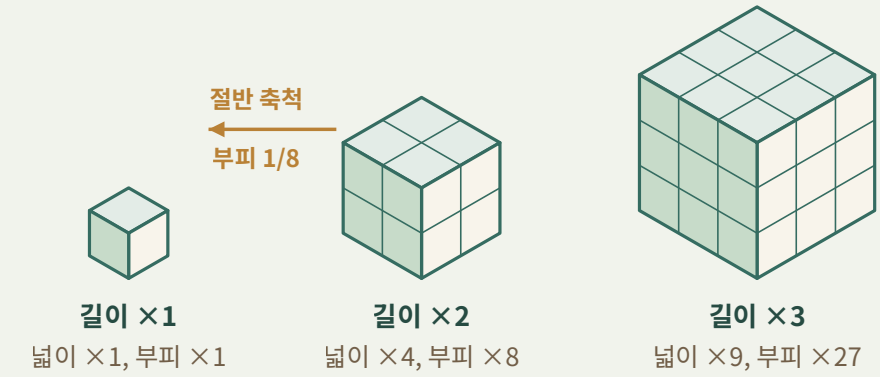
축척 모형의 재료를 계산하기

길이 배율을 세 번 적용해야 부피 배율이 나온다.

원래 입체와 닮은 모형을 모든 길이의 절반 크기로 만든다고 하자. 가로와 세로와 높이가 각각 절반이므로 부피는 1/8이 된다. 앞의 부피 56인 입체를 절반 축척으로 만들면 부피는 7이다. 필요한 재료의 양을 길이 배율 1/2만으로 줄이면 틀린다.

새 치수는 아래 변 2와 위 변 1과 높이 3이다. 공식에 넣으면 3×(4+2+1)/3=7로 확인된다. 일반 배율 원리와 직접 대입이 같은 값을 주므로 서로 독립적인 검산이 된다. 표에는 길이 배율과 넓이 배율과 부피 배율을 나란히 적는다.

빈 모형의 표면을 얇은 종이로 덮는 경우는 부피가 아니라 표면적이 중요하다. 같은 입체라도 무엇을 계산하는지에 따라 필요한 배율이 달라진다. 수학 문제를 현실 작업으로 옮길 때에는 재료가 내부를 채우는지 겉을 덮는지 먼저 확인한다.



한 모서리 1, 2, 3인 정육면체를 단위 정육면체로 쪼갠 배율 비교

탐구

모든 길이를 세 배로 만든 닮은 입체의 부피는 원래의 몇 배인가?

풀이와 확인

3×3×3=27배다. 표면적은 9배이므로 재료가 내부를 채우는지 표면을 덮는지에 따라 계산이 달라진다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

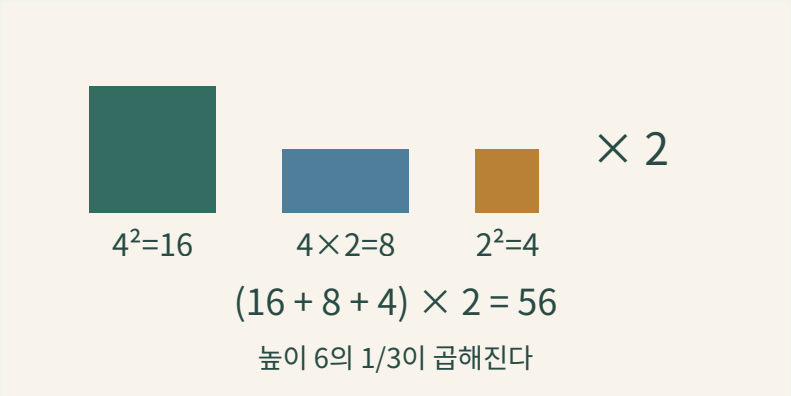
알고 있는 것과 모르는 것의 지도

정확한 계산이 남아 있어도 그 지식의 모든 경로가 함께 남는 것은 아니다.

모스크바 파피루스의 계산은 해당 치수에서 올바른 부피를 준다. 오늘의 공식으로도 같은 결과를 확인했다. 그러나 어떤 그림과 논증을 거쳐 절차를 얻었는지에 대해서는 연구자들이 여러 복원 가능성을 검토한다. 결과의 정확성과 유래의 확실성은 별개다.

이 관의 도해는 독자가 원리를 이해하도록 만든 것이다. 보기 좋고 수학적으로 맞는 그림이라도 고대인이 실제로 그 그림을 사용했다는 증거가 되지는 않는다. 도해 설명에 현대 재구성이라는 말을 붙이면 학습 효과와 역사적 정직함을 함께 지킬 수 있다.

수학사를 읽는 일은 위대한 발견의 이름을 외우는 데서 끝나지 않는다. 남은 기록으로 무엇을 확인할 수 있고 어떤 질문은 더 열려 있는지 판단하는 능력을 기른다. 답이 분명한 계산과 답이 열려 있는 역사 질문을 함께 다룰 수 있어야 한다.



아래 변 4와 위 변 2의 세 넓이 항을 같은 축척으로 비교했다. 세 항의 합 28에 높이의 1/3인 2를 곱한다.

탐구

공식을 현대적으로 증명했다면 고대의 증명 방법도 알아낸 것인가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 현대 증명은 공식이 성립함을 보여 준다. 고대의 실제 논증 방식은 동시대 기록이나 다른 역사 자료로 따로 확인해야 한다.

[013] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [014] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

세 단면을 결합해 부피를 되찾기

중간 단면에 적절한 무게를 주면 이차적으로 변하는 넓이를 정확히 반영한다.

정사각형 피라미드대의 아래 한 변을 a와 위 한 변을 b와 높이를 h라고 하자. 밑면과 평행하게 자른 중간 높이의 정사각형은 한 변이 (a+b)/2다. 따라서 아래 넓이 $A_0=a^2$와 중간 넓이 $A_m=(a+b)^2/4$와 위 넓이 $A_1=b^2$를 구할 수 있다.

끝면 평균만 사용한 $h(A_0+A_1)/2$는 앞에서 과대 추정을 만들었다. 이번에는 세 단면에 1대 4대 1의 무게를 주어 $h(A_0+4A_m+A_1)/6$을 계산한다. 가운데 항을 대입하면 괄호 안이 $a^2+(a+b)^2+b^2$가 된다.

이를 전개하면 $2a^2+2ab+2b^2$다. 따라서 전체는 $h(a^2+ab+b^2)/3$으로 정리되어 피라미드대의 부피 공식과 일치한다. 단면 넓이가 높이에 따라 이차식으로 변하는 이 입체에서는 세 단면의 가중합이 정확한 부피를 준다.

a=4와 b=2와 h=6을 넣으면 세 넓이는 16과 9와 4다. 계산은 6×(16+4×9+4)/6=56이다. 이것은 모스크바 파피루스의 결과를 다른 방식으로 검산하는 현대 설명이다. 같은 세 단면을 쓴다는 이유만으로 모양이 임의로 변하는 모든 입체에 정확히 적용해서는 안 된다.

단면	넓이	가중한 값
아래	16	16
중간	9	36
위	4	4
가중합	—	56

> **탐구**
>
> 아래 한 변 5와 위 한 변 3과 높이 6이면 세 단면 방식의 부피는 얼마인가?

풀이와 확인

중간 변은 4이므로 세 넓이는 25와 16과 9다. 6×(25+4×16+9)/6=98이다. 원래 공식 6×(25+15+9)/3=98과 일치한다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

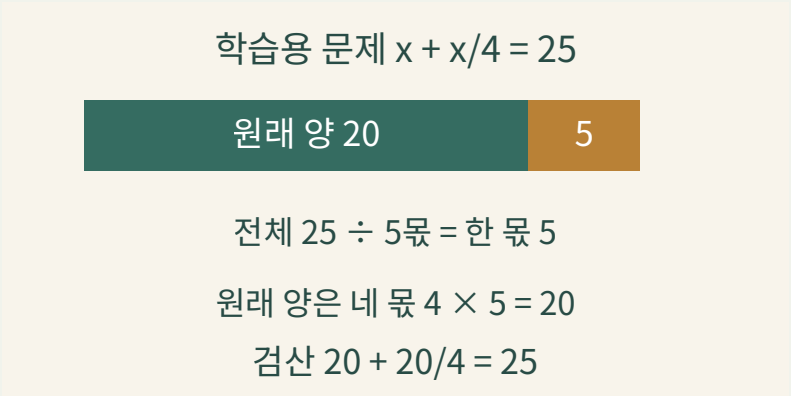
점토판에서 나의 계산책으로

기록하는 방식과 검산하는 태도를 오늘의 학습에 이어 본다.

이 관에서는 60진 자리값과 역수표에서 시작해 직사각형과 대각선과 분수와 입체를 살펴보았다. 각 주제의 계산법은 달랐지만 단위를 보존하고 중간값을 기록하고 다른 경로로 검산한다는 공통점이 있었다. 계산은 답을 내는 기술이면서 관계를 설명하는 언어다.

나만의 계산책 한 쪽을 만들 때에는 문제의 조건과 풀이와 그림과 검산을 모두 넣어 보자. 역사 자료에서 가져온 사실에는 자료 이름을 적고 새로 만든 예제에는 학습용이라고 표시한다. 읽는 사람이 수의 관계와 정보의 출처를 함께 확인할 수 있게 한다.

마지막 활동은 전시실 하나를 직접 편집하는 것이다. 가장 흥미로웠던 유물 하나와 계산 원리 하나를 고르고 두 내용이 어떻게 연결되는지 설명한다. 과장된 최초나 완벽이라는 말 대신 관찰과 계산으로 확인한 구체적인 문장을 써 보자.



나의 계산책에 넣을 현대 예제. 전체를 같은 다섯 몫으로 나누고 네 몫인 원래 양을 되찾는다.

탐구

완성한 계산책 한 쪽을 다른 사람이 검토할 때 확인할 세 가지는 무엇인가?

풀이와 확인

조건과 단위가 분명한지 확인한다. 계산과 검산이 일치하는지 살핀다. 역사 자료의 사실과 현대 재구성이 구별되어 있는지 확인한다.

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관 / [O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구

고대 오리엔트관 / 14

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[O1] 메트로폴리탄미술관 서기관 연습판
https://www.metmuseum.org/art/collection/search/321878

[O2] 미국 의회도서관 서기관 학교 연습판
https://www.loc.gov/item/2020741373/

[O3] 영국 개방대학교 바빌로니아의 수 체계
https://www.open.edu/openlearn/mod/oucontent/view.php?id=1976&section=1.3

[O4] 영국 개방대학교 바빌로니아 수학
https://www.open.edu/openlearn/mod/oucontent/view.php?id=1976&printable=1

[O5] 메트로폴리탄미술관 고바빌로니아 곱셈표
https://www.metmuseum.org/art/collection/search/324587

[O6] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식
https://www.math.stonybrook.edu/~tony/whatsnew/oct20/square.html

[O7] 브리티시컬럼비아대학교 YBC 7289 판독
https://personal.math.ubc.ca/~cass/Euclid/ybc/analysis.html

[O8] 컬럼비아대학교 도서관 플림프턴 컬렉션 전시
https://exhibitions.library.columbia.edu/exhibits/show/plimpton/mathematics/page-2

[O9] 스토니브룩대학교 플림프턴 322의 해석과 계산
https://www.math.stonybrook.edu/~tony/whatsnew/oct20/square.html

[O10] 세인트앤드루스대학교 이집트의 수 표기
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_numerals/

[O11] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_papyri/

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제
https://www.britishmuseum.org/blog/learn-maths-egyptian-secrets-rhind-mathematical-papyrus

[O13] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 개관
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Egyptian_mathematics/

[O14] 피라미드 부피 공식의 역사와 수학교육적 복원에 관한 연구
https://arxiv.org/abs/2207.04427

[O15] 제곱근 2의 근삿값이 계산된 방법에 관한 연구
https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0315086022000477

[O16] 대영박물관 린드 수학 파피루스 소장 기록
https://www.britishmuseum.org/collection/object/Y_EA10057

인도관 / 15

길이를 옮기고 수를 이어 가다



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

줄로 길이를 옮기는 일과 자릿값으로 수를 기록하는 일은 서로 다른 활동이지만 기준을 보존한다는 질문을 함께 던진다. 같은 줄을 사용했다고 넓이가 저절로 같아지는 것은 아니다. 같은 숫자를 썼다고 같은 값이 되는 것도 아니다. 무엇이 그대로 남아야 하는지 분명히 해야 도형의 변환과 수의 계산을 설명할 수 있다.

이 관의 탐구는 유한한 손의 조작에서 끝없이 이어지는 계산으로 넓어진다. 정수해를 찾는 반복은 이전 결과를 다음 단계의 재료로 삼는다. 무한급수는 어디에서 계산을 멈추더라도 남은 오차를 묻는다. 서로 다른 시대의 성과를 한 번의 도약으로 묶기보다 각 절차가 어떤 문제를 해결하고 어떤 조건에서 성립하는지 따라간다.

인도관 / 16

줄과 넓이의 기하학

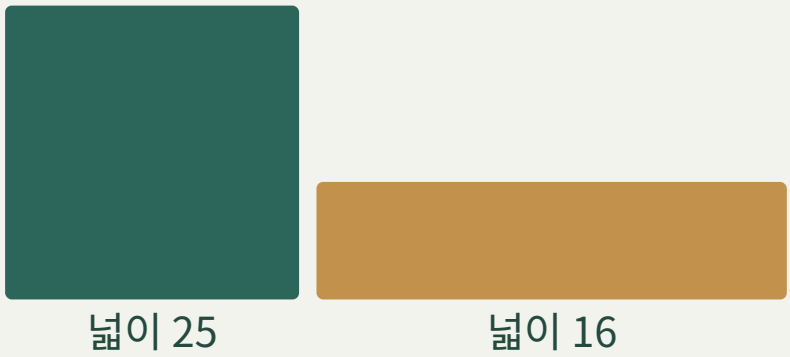
도형을 만드는 지식

슐바수트라의 기하학은 선을 바라보는 데서 그치지 않고 정해진 크기의 도형을 실제로 만드는 문제를 다룬다.

슐바수트라는 제단을 만드는 절차와 관련된 문헌군이다. 여러 저자와 전승이 있으므로 하나의 책이나 한 사람의 발명으로 묶기 어렵다. 여기서는 그 배경을 바탕으로 길이와 넓이를 보존하는 현대의 탐구 문제를 구성한다. 뒤에 나오는 수치 예제는 옛 문헌을 그대로 번역한 문제가 아니다.

팽팽한 줄은 두 점 사이의 선분을 나타낼 수 있다. 같은 길이를 다른 자리에 옮기거나 한 점에서 일정한 거리에 있는 위치를 찾는 데도 쓰인다. 줄의 길이가 일정하다는 조건을 유지하면 도형을 다시 그려도 비교할 기준이 남는다.

그러나 실제 줄은 늘어나고 매듭은 굵기를 갖는다. 기하학적 설명에서는 이런 물리적 오차를 잠시 제외한다. 먼저 이상적인 조건에서 성립하는 관계를 밝힌 뒤 실제 제작에서 생기는 차이를 따로 살피는 것이 측정과 증명의 차이를 이해하는 출발점이다.



둘레가 모두 20인 정사각형과 직사각형. 넓이는 다르다

탐구

같은 길이의 줄로 만든 도형은 언제나 넓이가 같을까?

풀이와 확인

그렇지 않다. 둘레가 20인 정사각형의 넓이는 25이다. 가로 8과 세로 2인 직사각형은 둘레가 같지만 넓이는 16이다.

[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review

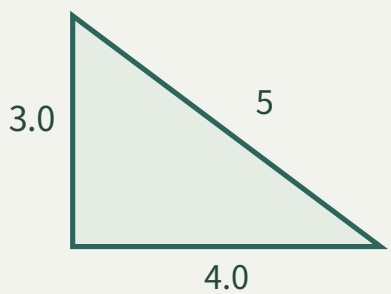
세 길이가 직각을 정한다

길이가 3과 4와 5인 세 변을 연결하면 직각삼각형을 만들 수 있다.

직각을 눈으로 가늠하는 것과 길이 관계로 확인하는 것은 다르다. 세 변의 길이가 정확히 3과 4와 5라면 $3^2+4^2=5^2$이 성립한다. 피타고라스 정리의 역을 적용하면 길이 5인 변의 맞은편 각이 직각임을 알 수 있다.

한 변에 대응하는 단위를 모두 두 배로 바꾸어도 관계는 유지된다. $6^2+8^2=10^2$에서는 양변이 원래 식의 네 배가 된다. 변의 비가 같은 삼각형은 모양이 같으며 길이만 일정한 비율로 커진다. 매듭 사이의 간격이 일정해야 하는 까닭도 여기에 있다.

역의 방향을 혼동해서는 안 된다. 직각삼각형이면 제곱의 합 관계가 성립한다는 명제와 그 관계가 성립하면 직각삼각형이라는 명제는 논리적으로 다른 주장이다. 이 예에서는 두 방향 모두 참이지만 모든 명제가 그런 것은 아니다.



직각을 확인하는 세 변 3과 4와 5

변	길이	제곱
첫째 변	3	9
둘째 변	4	16
가장 긴 변	5	25

탐구

길이가 9와 12와 15인 삼각형도 직각삼각형인가?

풀이와 확인

81+144=225이므로 직각삼각형이다. 세 변은 3과 4와 5를 각각 세 배 한 값이다.

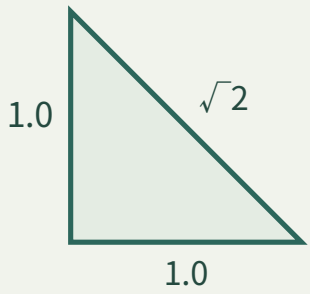
대각선으로 넓이를 두 배로

한 변이 1인 정사각형의 대각선은 넓이가 2인 새 정사각형의 한 변이 된다.

한 변이 1인 정사각형을 대각선으로 자르면 넓이가 1/2인 직각이등변삼각형 두 개가 생긴다. 같은 삼각형 네 개를 모아 대각선이 바깥 변이 되도록 배치하면 넓이가 2인 정사각형을 얻는다. 도형의 넓이를 세는 방법으로 새로운 길이를 설명한 셈이다.

이 대각선의 길이를 d라고 쓰면 $d^2=2$이다. 따라서 $d=\sqrt{2}$이며 길이 2와는 다르다. 넓이를 두 배로 만드는 일과 한 변을 두 배로 만드는 일을 구별해야 한다. 한 변이 두 배가 되면 넓이는 네 배가 된다.

종이를 잘라 옮기는 활동은 넓이가 보존된다는 생각을 눈에 보이게 한다. 조각이 겹치거나 틈이 생기면 논증이 완성되지 않는다. 각 조각이 어디로 이동했는지 표시하고 바깥 경계가 실제로 정사각형인지 확인해야 한다.



정사각형의 절반과 대각선

탐구

넓이가 18인 정사각형의 한 변은 넓이가 9인 정사각형의 몇 배인가?

풀이와 확인

한 변은 각각 $3\sqrt{2}$와 3이다. 따라서 길이의 비는 $\sqrt{2}$이다. 넓이의 비 2를 길이의 비로 그대로 쓰면 안 된다.

√2에 가까이 다가가기

분수로 표현한 근삿값의 품질은 소수 모양보다 제곱했을 때의 차이로 살필 수 있다.

술바 전통에서 알려진 $\sqrt{2}$의 근사 규칙 가운데 하나를 현대 기호로 쓰면 $1+1/3+1/12-1/408$이다. 통분하면 577/408이 된다. 이 값이 왜 유용한지는 정사각형의 넓이를 계산하면 드러난다. 577^2은 332929이며 2×408^2은 332928이다.

따라서 $(577/408)^2-2=1/166464$이다. 제곱한 값이 2보다 아주 조금 크므로 이 분수는 $\sqrt{2}$보다 크다. 근삿값이 어느 쪽으로 치우쳤는지를 소수 계산 없이도 판단할 수 있다. 이 관계의 계산은 이 책에서 직접 확인한 것이다.

정확한 값과 가까운 값은 역할이 다르다. 실제 제단이나 종이를 만들 때는 허용 오차 안의 근삿값이면 충분할 수 있다. 그러나 대각선의 일반적 성질을 증명할 때는 $\sqrt{2}$라는 정확한 표현이 필요하다. 목적을 먼저 정해야 필요한 정밀도도 정해진다.

$$577^2 = 332929$$
$$2 \times 408^2 = 332928$$
$$(577/408)^2 - 2 = 1/166464$$

제곱의 차 1로 확인하는 $\sqrt{2}$ 근삿값의 정확도

탐구

577/408을 한 변으로 하는 정사각형의 넓이는 2보다 큰가?

풀이와 확인

그렇다. 넓이 차가 정확히 1/166464이므로 부호가 양수이다. 길이의 오차와 넓이의 오차는 서로 다르다.

[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review

제곱의 오차에서 길이의 오차로

제단의 한 변을 얼마나 정확히 얻는지는 넓이 차이만으로 끝나지 않는다.

앞서 얻은 577/408을 a라고 하자. $a^2-2=1/166464$라는 정확한 관계를 알고 있다. 우리가 실제 길이를 정할 때 필요한 값은 $a-\sqrt{2}$이다. 제곱의 차를 인수분해하면 $(a-\sqrt{2})(a+\sqrt{2})=1/166464$이므로 길이 오차는 이 작은 분수를 $a+\sqrt{2}$로 나눈 값이다.

a와 $\sqrt{2}$는 모두 1.4보다 크므로 $a+\sqrt{2}>2.8$이다. 따라서 길이 오차는 1/466099.2보다 작으며 약 0.000002146보다 작다. 마지막 소수는 위쪽으로 잡은 안전한 경계이다. 정확한 $\sqrt{2}$의 긴 소수 전개를 먼저 알아야만 오차를 설명할 수 있는 것은 아니다.

한 변 1미터인 정사각형의 대각선을 이 비율로 제작한다면 근사 공식 때문에 생기는 길이 차는 약 0.002146밀리미터보다 작다. 이 계산에서는 처음 1미터가 정확하다고 가정했다. 줄의 신축이나 표시선의 두께는 이론적 근사 오차와 별도로 더해지는 제작 문제이다.

그러므로 좋은 보고서는 근사 공식의 오차와 실제 측정의 오차를 나누어 적는다. 역사적 근사 규칙이 매우 정밀하다는 사실과 모든 실제 제작물이 그 정밀도를 달성했다는 주장은 다르다. 이 구분을 통해 옛 계산의 정교함을 인정하면서도 남아 있지 않은 제작 성과를 꾸며 내지 않을 수 있다.

구분	직접 비교하는 양
제곱 오차	a^2-2
길이 오차	$a-\sqrt{2}$
실제 제작 오차	측정과 재료의 영향 포함

탐구

처음 변의 길이가 정확히 2미터이면 이 근사에 따른 대각선 오차의 상한은 어떻게 되는가?

풀이와 확인

길이 비율의 오차가 같으므로 상한도 두 배가 된다. 약 0.004292밀리미터보다 작다. 넓이 오차의 배율과 혼동하지 않는다.

같은 넓이와 다른 모양

변형 과정에서 보존할 양을 먼저 정하면 도형을 바꾸는 문제가 명확해진다.

가로 8과 세로 2인 직사각형을 가운데서 잘라 가로 4와 세로 2인 조각 두 개로 나누자. 두 조각을 위아래로 놓으면 한 변이 4인 정사각형이 된다. 두 도형의 넓이는 모두 16이며 조각을 움직이는 동안 종이의 총량은 변하지 않았다.

둘레는 보존되지 않는다. 처음 직사각형의 둘레는 20이지만 새 정사각형의 둘레는 16이다. 서로 맞닿은 변은 바깥 경계에서 사라지므로 조각의 모든 변 길이를 더한 값과 완성된 도형의 둘레도 구별해야 한다.

이 예는 넓이 보존을 설명하는 현대의 재구성이다. 역사적 작도 절차를 평가할 때도 무엇을 같게 만들려 했는지부터 확인한다. 길이와 넓이와 모양을 모두 보존한다고 막연히 생각하면 옳은 변형도 틀린 것으로 판단할 수 있다.



같은 넓이 16을 갖는 두 도형

도형	넓이	둘레
8×2 직사각형	16	20
4×4 정사각형	16	16
16×1 직사각형	16	34

탐구

넓이가 16인 모든 직사각형의 둘레는 16인가?

풀이와 확인

아니다. 가로 16과 세로 1인 직사각형의 둘레는 34이다. 같은 넓이라는 조건만으로 둘레를 결정할 수 없다.

작도 문장을 읽는 순서

짧은 지시문을 읽을 때는 도구와 대상과 보존 조건을 나누어 표시한다.

어떤 선분을 옮겨 놓으라는 문장은 길이를 옮기라는 뜻인지 방향까지 유지하라는 뜻인지 확인해야 한다. 두 조건은 다르다. 같은 길이의 줄로 원을 그릴 수 있지만 그 원 위의 여러 선분은 방향이 서로 다르다. 번역된 문장만으로 판단하기 어려우면 앞뒤 절차가 단서가 된다.

작도 그림은 설명의 일부이며 원문을 대신하지 않는다. 후대의 편집자가 덧붙인 그림이라면 당시 저자가 같은 그림을 보았다고 단정할 수 없다. 이 책의 도해 역시 관계를 이해하기 위해 새로 만든 것으로 실제 필사본의 복제도가 아니다.

읽기 기록에는 주어진 길이와 수행한 조작과 확인할 성질을 각각 적는다. 마지막에 길이 계산이나 넓이 계산을 붙이면 절차가 목표를 달성했는지 검사할 수 있다. 이 방식은 고전 문헌뿐 아니라 현대의 도형 문제를 읽을 때도 유용하다.

확인할 항목	기록 예
주어진 길이	줄의 길이 4
수행한 조작	같은 길이 옮기기
보존할 성질	옮긴 선분의 길이 4
완성 뒤 검사	

작도 지시를 조건과 조작과 검사로 나누는 읽기 기록 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

그림에 직각 표시가 없으면 직각 여부를 무엇으로 확인할 수 있을까?

풀이와 확인

문장의 조건이나 증명된 길이 관계를 사용한다. 보기 좋게 그려진 모양만으로 직각이라고 정하지 않는다.

[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review

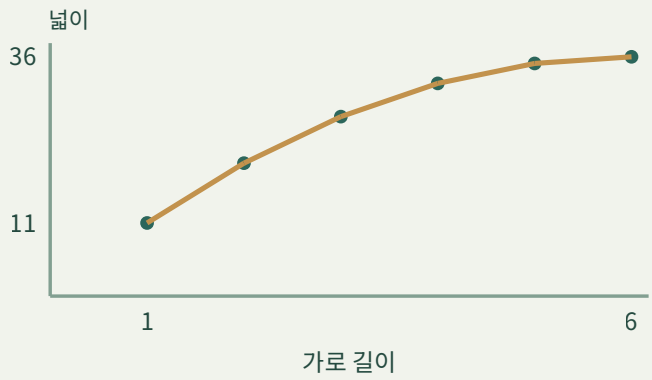
줄 격자로 만드는 실험

같은 둘레를 가진 직사각형을 여러 개 만들어 넓이의 변화를 관찰한다.

길이가 24인 줄을 준비했다고 가정하자. 직사각형의 가로를 a라고 정하면 세로는 12−a가 된다. 자연수 길이만 사용하면 가로를 1부터 6까지 바꾸어 중복되지 않는 모양을 조사할 수 있다. 가로 7인 경우는 가로 5인 경우를 회전한 모양과 같다.

각 도형을 격자에 그리고 넓이를 칸 수로 센다. 넓이의 목록은 11과 20과 27과 32와 35와 36이다. 증가량은 9에서 시작해 7과 5와 3과 1로 작아진다. 변 하나를 늘릴 때 다른 변을 줄여야 한다는 조건이 변화의 모양을 만든다.

실제 줄로 측정할 때는 매듭 위치와 장력을 일정하게 한다. 계산값과 측정값의 차이는 반올림 때문인지 줄의 변형 때문인지 기록한다. 실험 결과는 정사각형에서 최대가 된다는 추측을 돕지만 모든 실수 길이에 대한 증명은 이어지는 설명의 식이 맡는다.



둘레가 24인 직사각형의 넓이

가로	세로	넓이
2	10	20
4	8	32
5	7	35
6	6	36

탐구

가로가 5.5이면 세로와 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

세로는 6.5이다. 넓이는 35.75이므로 한 변이 6인 정사각형의 넓이 36보다 작다.

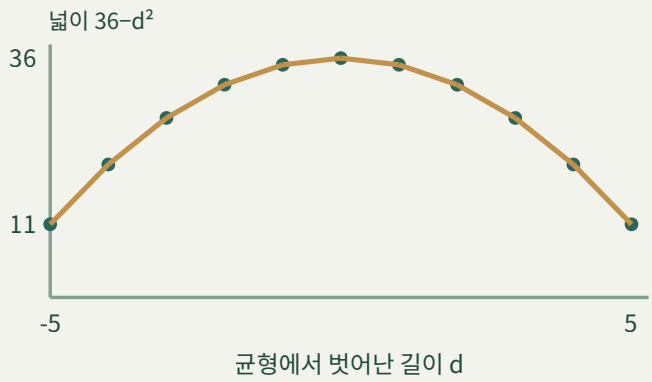
최대 넓이를 설명하는 식

관찰한 규칙을 모든 가능한 길이에 적용하려면 차이를 하나의 식으로 나타낸다.

둘레가 24인 직사각형의 두 변을 6+d와 6−d로 나타내자. 길이는 양수여야 하므로 $-6<d<6$이다. 넓이를 전개하면 $(6+d)(6-d)=36-d^2$이 된다. d^2은 언제나 0 이상이므로 넓이는 36보다 클 수 없다.

등호가 성립하는 경우도 확인해야 한다. $36-d^2=36$이려면 $d=0$이어야 한다. 이때 두 변은 모두 6이므로 정사각형이다. 최대값뿐 아니라 그 최대값을 만드는 도형이 무엇인지까지 설명했다. 넓이 손실 d^2은 두 변이 균형에서 얼마나 벗어났는지도 보여 준다.

이 식은 현대 기호를 사용한 풀이이며 옛 저자의 문장을 그대로 옮긴 것이 아니다. 고전의 문제를 오늘의 언어로 탐구할 때는 이런 구분을 밝혀야 한다. 역사적 맥락을 존중하면서도 새로운 증명을 덧붙일 수 있는 방법이다.



두 변이 6+d와 6−d일 때 넓이는 d=0에서 최대이다

탐구

가로와 세로의 차이가 4라면 정사각형보다 넓이가 얼마나 작을까?

풀이와 확인

두 변은 8과 4이며 $d=2$이다. 넓이는 32이므로 최대 넓이 36보다 4만큼 작다.

인도관 / 17

자리값과 아리아바타

짧은 시구와 긴 계산

아리아바타의 저술은 계산 규칙과 천문학적 문제를 가까이 놓았다.

아리아바타의 아리아바티야는 499년에 작성된 저술로 알려져 있다. 짧은 운문에 계산과 시간과 천체의 움직임을 압축했다. 출생지와 일부 전기 사항에는 불확실성이 있으므로 숫자 하나로 완성된 인물 연표처럼 다루지 않는 편이 정확하다.

규칙이 짧게 적혀 있다는 사실은 계산 과정도 짧았다는 뜻이 아니다. 예를 들어 제곱근을 구하라는 한 문장에는 자리값을 나누고 중간값을 기록하고 오차를 확인하는 여러 단계가 들어 있다. 독자는 주석과 예제를 통해 압축된 지식을 다시 펼쳤을 것이다.

이 장에서는 고대의 모든 계산법을 복원하려 하지 않는다. 자리값과 반복 계산의 원리를 현대의 작은 수로 실험한다. 본문에 쓴 아라비아 숫자와 등호는 읽기 편의를 위한 표기이며 당시의 문자 수표기와 동일한 모습이라고 생각해서는 안 된다.

압축된 표현	펼쳐 읽을 내용
계산 규칙	어떤 입력에 적용하는가
중간 과정	자리값과 연산 순서
예제의 결과	오차와 검산
주석	

짧은 규칙을 실행 가능한 설명으로 읽는 네 가지 질문 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

운문으로 된 계산 규칙을 읽을 때 예제가 필요한 까닭은 무엇인가?

풀이와 확인

문장에 생략된 중간 연산과 적용 조건을 확인할 수 있기 때문이다. 한 예제의 성공만으로 일반적인 정당성이 증명되는 것은 아니다.

[S2] University of St Andrews: Aryabhata I

같은 숫자의 다른 크기

자리값 표기에서는 숫자의 모양과 그 숫자가 놓인 자리가 함께 값을 결정한다.

507은 5×100+0×10+7로 풀어 쓸 수 있다. 5라는 숫자는 백의 자리에 있으므로 500을 뜻한다. 같은 5를 일의 자리에 쓰면 값은 5이다. 숫자 기호만 읽고 자리를 무시하면 전체 수의 크기를 판단할 수 없다.

50과 500에서 0은 빈 자리를 표시한다. 이 기능 덕분에 어떤 자리에서 수량이 없다는 사실을 다른 자리와 혼동하지 않는다. 빈 자리를 표시하는 기호가 있다는 것과 0에 대한 모든 연산 규칙을 갖추었다는 것은 서로 다른 문제이다.

자리값을 이해하는 좋은 방법은 분해한 식을 다시 합치는 것이다. 4×1000+2×10+9를 쓰면 4029이다. 백의 자리가 비었다는 이유로 429라고 쓰면 수 자체가 달라진다. 계산 알고리즘의 정확성도 이런 자리 정렬에서 시작한다.

백	십	일
5	0	7
500	0	

507에서 각 자리의 값 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

자리	숫자	나타내는 값
백	5	500
십	0	0
일	7	7

탐구

7030에서 두 개의 0은 각각 어떤 자리를 지키는가?

풀이와 확인

백의 자리와 일의 자리를 지킨다. 이 수는 $7\times1000+3\times10$이며 값이 703이나 730인 수와 다르다.

받아올림의 의미

받아올림은 숫자를 옮기는 요령이 아니라 같은 양을 다른 단위로 다시 묶는 과정이다.

287+156을 계산할 때 일의 자리에서는 7+6=13이 된다. 13개의 낱개를 1개의 열 묶음과 3개의 낱개로 바꾼다. 십의 자리에는 이 새 묶음까지 더해 8+5+1=14가 된다. 다시 1개의 백 묶음과 4개의 열 묶음으로 바꾸면 답은 443이다.

모든 단계에서 수량은 보존된다. 10개의 낱개와 1개의 열 묶음이 같은 양이라는 사실이 받아올림의 근거이다. 작은 1을 위에 적는 표기는 이 교환을 기억하기 위한 장치일 뿐이다. 그 1이 어떤 단위를 나타내는지 설명할 수 있어야 한다.

다른 진법에서도 묶음의 크기만 달라질 뿐 같은 생각을 쓴다. 다섯 개를 한 묶음으로 삼는다면 낱개 다섯 개가 다음 자리의 하나가 된다. 이 비교는 십진법이 익숙한 규칙인 동시에 선택된 표기 체계라는 점을 드러낸다.

단계	일	십	백
각 자리 합	7+6=13	8+5+1=14	2+1+1=4
아래 자리 결고	3	4	4
다음 자리 전딜	십 1개	백 1개	

287+156에서 낱개를 열 묶음과 백 묶음으로 바꾸는 과정 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

99+1에서 두 번의 받아올림이 일어나는 까닭을 설명해 보자.

풀이와 확인

낱개 열 개가 십의 자리 하나로 바뀐다. 기존 아홉 묶음과 합쳐 열 묶음이 되므로 다시 백의 자리 하나로 바뀐다.

곱셈을 분해해서 읽기

큰 곱을 작은 곱의 합으로 바꾸면 자리 정렬이 필요한 이유가 드러난다.

34×27은 34×(20+7)이다. 분배법칙에 따라 34×20과 34×7을 계산한 뒤 더하면 된다. 두 값은 680과 238이므로 전체는 918이다. 세로셈의 둘째 줄을 한 자리 옮기는 까닭은 2가 단순한 2가 아니라 20을 나타내기 때문이다.

넓이 모형으로도 같은 관계를 볼 수 있다. 가로 34인 직사각형의 높이 27을 20과 7로 나누면 두 부분의 넓이를 더하게 된다. 가로도 30과 4로 나누면 600과 80과 210과 28의 네 부분이 생긴다. 합은 여전히 918이다.

계산 순서는 달라져도 같은 분해 원리를 지키면 답이 같다. 이 사실은 여러 곱셈법을 비교할 때 유용하다. 겉모양이 낯설다는 이유로 다른 원리라고 판단하지 말고 각 중간값이 어떤 부분곱에 대응하는지 찾아보자.

×	20	7
30	600	210
4	80	

네 부분곱의 합은 918이다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

부분곱	값
30×20	600
4×20	80
30×7	210
4×7	28

> **탐구**
>
> 34×27을 34×30−34×3으로 계산해도 되는가?

풀이와 확인

된다. 27=30−3이므로 1020−102=918이다. 뺄셈을 포함한 분배법칙을 사용한 것이다.

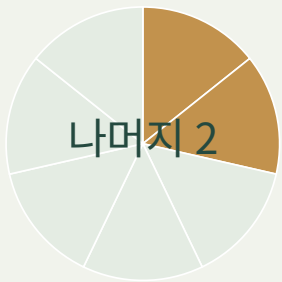
큰 주기를 작은 나머지로

천체의 반복 운동을 계산할 때는 지난 전체 횟수보다 현재 주기 안의 위치가 중요할 수 있다.

한 현상이 7일마다 반복된다고 가정하자. 시작 후 100일이 지났다면 100=7×14+2로 나눌 수 있다. 완전한 주기 14번을 제외하면 현재 위치는 시작점에서 2일 지난 곳이다. 이런 나머지 계산은 긴 시간의 수를 작게 줄여 준다.

실제 천체의 운동을 모두 정확한 정수 주기로 설명할 수 있다는 뜻은 아니다. 여기서는 반복을 계산하는 구조만 보기 위해 단순한 주기를 설정했다. 관측값과 이론적 주기의 차이는 장기간에 걸쳐 누적될 수 있으므로 따로 보정해야 한다.

시작 시각도 반드시 기록해야 한다. 같은 100일이라도 기준이 다르면 주기 안의 위치가 달라진다. 달력과 천문표를 읽을 때 단위와 기준 시점과 적용한 주기를 함께 확인하는 습관이 필요한 이유이다.



7칸을 한 주기로 삼을 때 100일의 위치

탐구

주기가 9인 현상에서 시작 후 250일의 위치는 얼마인가?

풀이와 확인

250=9×27+7이므로 나머지는 7이다. 시작점을 0으로 삼았을 때 일곱 칸 진행한 위치에 해당한다.

원주율 근사의 뜻

3.1416이라는 값은 원의 비율을 계산하는 데 유용하지만 원주율 자체와 같지는 않다.

아리아바타의 원주율 근사로 알려진 3.1416을 이용해 지름이 20인 원의 둘레를 계산해 보자. 곱셈 결과는 62.832이다. 여기서 정확한 둘레는 20π이며 62.832는 그 근삿값이다. 등호와 근사 기호를 구별하면 무엇을 알고 무엇을 어림했는지 분명해진다.

지름이 커지면 같은 원주율 오차가 더 큰 길이 오차를 만든다. 사용한 근삿값과 π의 차이를 e라고 하면 둘레의 차이는 지름 d에 대해 de이다. 원주율을 더 많은 자리까지 아는 일이 필요한지는 물체의 크기와 허용 오차에 달려 있다.

이 근사값이 제시되었다는 사실만으로 원주율의 무리수성이 엄밀하게 증명되었다고 말할 수는 없다. 근사 계산과 수의 성질에 대한 증명은 다른 성취이다. 역사적 설명에서도 어떤 주장이 문헌으로 확인되는지 범위를 좁혀 적어야 한다.

둘레의 정확한 값 dπ

근삿값 d × 3.1416

둘레 오차 d(3.1416 − π)

같은 원주율 근삿값을 쓸 때 둘레의 오차는 지름에 비례한다

탐구

지름을 10배로 키우면 같은 근삿값에서 생기는 둘레의 오차는 어떻게 되는가?

풀이와 확인

10배가 된다. 오차가 d×e이므로 지름에 비례한다. 상대적인 오차의 비율은 그대로이다.

[S2] University of St Andrews: Aryabhata I

자리를 바꿔 보는 활동

세 자리 수와 거꾸로 쓴 수의 차이를 자리값으로 설명한다.

백의 자리 숫자를 a로 놓고 십의 자리 숫자를 b로 놓고 일의 자리 숫자를 c로 놓자. 원래 수는 100a+10b+c이다. 거꾸로 쓴 수를 100c+10b+a로 표현한 뒤 두 수를 빼면 99a−99c만 남는다.

따라서 차이는 99(a−c)이다. 가운데 숫자는 차이에 영향을 주지 않는다. 예를 들어 742−247=495이며 이는 99×5와 같다. 숫자를 여러 번 바꾸어 보는 실험에서 얻은 규칙을 자리값 식으로 설명한 것이다.

맨 앞에 0이 오는 경우에는 표기에 주의한다. 520을 거꾸로 놓은 025는 정수로 25이다. 자리 배열로 보면 세 칸을 유지하지만 수를 읽을 때 앞의 0은 값을 더하지 않는다. 서로 다른 표현 관습을 명확하게 정하면 계산에 혼란이 없다.

자리	백	십	일
742	700	40	2
247	200	40	7
차이	500	0	

십의 자리는 사라지고 전체 차이는 500−5=495이다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

863과 368의 차이를 긴 뺄셈 없이 구해 보자.

풀이와 확인

99×(8−3)=495이다. 십의 자리 6은 양쪽에서 없어지므로 결과에 영향을 주지 않는다.

자리값이 만드는 검산

9로 나눈 나머지를 이용하면 어떤 계산 오류를 빠르게 찾을 수 있다.

10은 9로 나누면 나머지가 1이다. 따라서 100과 1000도 나머지가 1이 된다. 세 자리 수 100a+10b+c는 9로 나눈 나머지가 a+b+c와 같다. 자리 숫자의 합을 이용하는 검산이 가능한 까닭이다.

앞에서 계산한 34×27=918을 확인하자. 34의 숫자 합은 7이며 27의 숫자 합은 9이므로 곱의 나머지는 0이어야 한다. 918의 숫자 합은 18이므로 역시 나머지가 0이다. 이 검사는 결과와 모순되지 않는다.

하지만 나머지가 같다고 계산이 반드시 맞지는 않는다. 틀린 답 927도 숫자 합이 18이다. 검산은 일부 오류를 걸러 내는 장치이며 원래 계산을 증명하는 만능 도구가 아니다. 무엇을 찾아낼 수 있고 무엇을 놓치는지까지 이해해야 잘 활용할 수 있다.

수	숫자 합	9의 나머지
34	7	7
27	9	0
918	18	0
927	18	0

918과 잘못된 후보 927은 같은 나머지를 가져 이 검사로 구별되지 않는다

탐구

34×27의 답을 919라고 썼다면 9의 나머지 검사에서 잡히는가?

풀이와 확인

잡힌다. 919의 숫자 합은 19이며 나머지가 1이다. 곱의 나머지 0과 일치하지 않는다.

인도관 / 18

빈자리에서 수 0으로

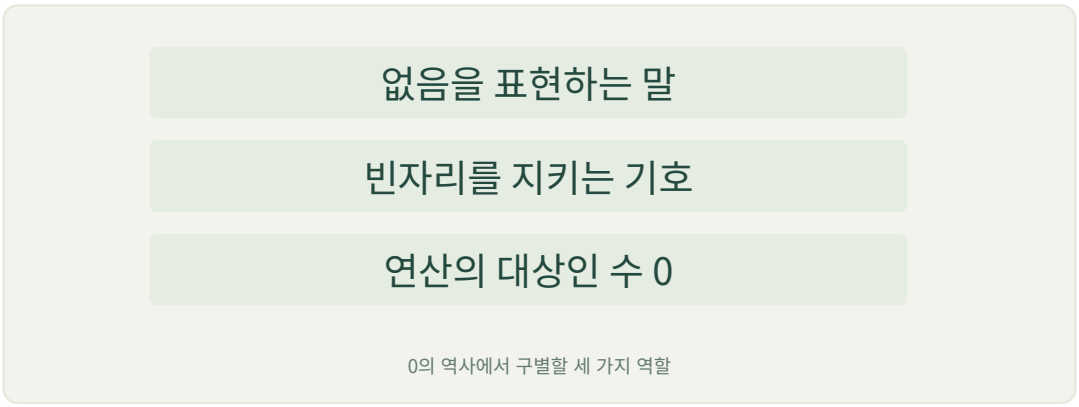
0의 여러 역할

수량이 없다는 말과 빈 자리를 표시하는 기호와 연산의 대상인 수는 구별해서 살펴야 한다.

사과가 하나도 없다는 상황을 말로 표현할 수 있다고 해서 자리값 표기법까지 갖춘 것은 아니다. 반대로 304에서 비어 있는 십의 자리를 표시한다고 해서 0으로 나누는 문제에 올바른 답을 알고 있는 것도 아니다. 비슷해 보이는 기능을 나누면 0의 역사가 한 번의 발명으로 끝나지 않는 이유를 이해할 수 있다.

현대 수학에서 0은 덧셈의 기준 역할을 한다. 어떤 수 a에 0을 더해도 a이며 같은 수를 빼면 0이 된다. 수직선에서는 양수와 음수를 나누는 기준점이기도 하다. 각각의 역할은 연결되지만 설명하는 질문이 다르다.

역사 자료를 읽을 때는 기호의 모양만 보고 오늘의 모든 개념을 적용하지 않는다. 해당 문헌에서 실제로 어떤 계산을 수행했는지 확인한다. 흔적이 남은 기호와 그 기호를 사용하는 규칙을 함께 읽어야 지식의 범위를 신중하게 파악할 수 있다.



0의 역사에서 구별할 세 가지 역할

탐구

빈 컵을 그린 그림만으로 덧셈의 항등원 개념을 사용했다고 말할 수 있을까?

풀이와 확인

말할 수 없다. 없음의 표현과 a+0=a라는 일반적인 연산 규칙은 서로 다른 증거를 요구한다.

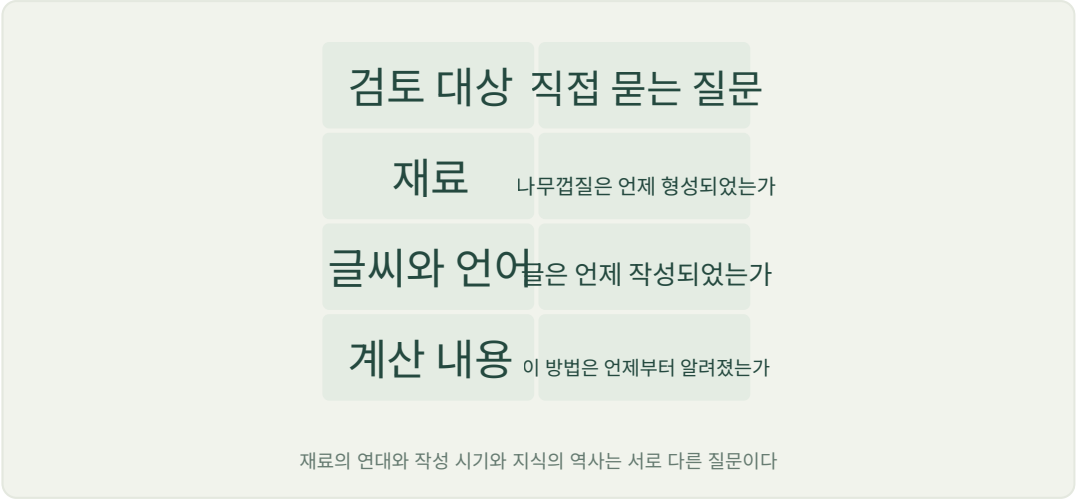
필사본의 나이를 읽기

재료의 연대와 글을 쓴 시기와 지식이 생겨난 시기는 같은 날짜가 아닐 수 있다.

바크샬리 필사본은 수학사에서 중요한 자료이지만 연대에 관한 보도를 읽을 때 주의가 필요하다. 옥스퍼드 연구진은 2024년에 방사성탄소 연대측정에 관한 새 보고서를 공개했다. 따라서 2017년의 초기 보도만으로 0의 최초 연대를 확정하는 설명은 피해야 한다.

방사성탄소 측정은 유기물 재료에 대한 정보를 제공한다. 그것만으로 모든 글자가 같은 때 쓰였거나 모든 계산법이 그때 처음 만들어졌다는 결론이 나오지는 않는다. 글씨체와 언어와 문헌 내용도 함께 검토해야 한다.

이 사례의 교육적 가치는 가장 오래된 기록을 경쟁적으로 찾는 데만 있지 않다. 새로운 측정이나 해석이 나오면 이전 설명을 수정하는 과정 자체가 중요하다. 자료에 적힌 주장과 측정으로 직접 확인한 사실을 따로 기록하는 습관을 길러 보자.



재료의 연대와 작성 시기와 지식의 역사는 서로 다른 질문이다

탐구

오래된 종이에 오늘 쓴 글의 내용은 종이의 연대와 같은 나이일까?

풀이와 확인

아니다. 재료의 연대는 글을 쓴 시기의 단서가 될 수 있지만 그 자체가 작성 연대를 보장하지 않는다.

[S4] Oxford University: Radiocarbon dating of the Bakhshālī manuscript. 2024

0을 더하는 규칙

변하지 않는 연산도 수의 체계를 정리하는 데 중요한 역할을 한다.

a+0=a라는 식은 아무 일도 하지 않는 것처럼 보인다. 그러나 덧셈의 출발점과 빈 합과 뺄셈의 결과를 통일해서 다루게 해 준다. 물건 다섯 개에 아무것도 보태지 않으면 다섯 개가 남는다는 경험을 모든 수에 대한 규칙으로 확장한 것이다.

0과 곱셈의 항등원 1을 혼동하지 말자. a×1=a이지만 a×0=0이다. 같은 수를 유지하는 값이 연산에 따라 달라진다. 어떤 수를 특별하다고 말할 때는 어느 연산에서 어떤 성질을 갖는지 함께 밝혀야 한다.

덧셈표의 한 행을 0부터 시작해 만들어 보면 기준점의 역할이 보인다. −2와 −1과 0과 1과 2에 각각 0을 더해도 결과는 그대로이다. 음수까지 포함해도 규칙이 일관되게 유지된다는 사실이 중요하다.

연산	기준값	결과
7+0	덧셈의 0	7
7×1	곱셈의 1	7
7×0	곱셈의 0	0

탐구

모든 수 a에 대해 a+x=a가 되게 하는 x는 무엇인가?

풀이와 확인

x=0이다. 특히 a=0을 넣으면 0+x=0이므로 x가 0임을 바로 확인할 수 있다.

0을 곱하면 왜 0일까

분배법칙과 덧셈의 규칙을 유지하려면 0과의 곱도 결정된다.

어떤 수 a에 대해 a×0을 b라고 놓자. 0+0=0이므로 a×(0+0)=b이다. 분배법칙을 적용하면 왼쪽은 a×0+a×0=b+b가 된다. 따라서 b+b=b이며 양변에서 b를 빼면 b=0이다.

이 설명은 물건이 없는 묶음을 세는 직관보다 적용 범위가 넓다. a가 음수이거나 분수여도 같은 연산 법칙을 지키면 결과는 0이다. 익숙한 규칙들이 서로 연결되어 있다는 점을 보여 주는 작은 증명이다.

다만 아무 체계에서나 모든 조작을 할 수 있는 것은 아니다. 여기서는 덧셈에 대한 역원이 있어서 양변에서 b를 뺄 수 있는 보통의 수 체계를 생각한다. 증명에 사용한 조건을 밝히는 습관은 더 복잡한 대수 구조를 배울 때도 이어진다.

$$b = a \times 0$$
$$b = a(0 + 0) = b + b$$
$$b + b = b \rightarrow b = 0$$

분배법칙과 뺄셈으로 확인하는 0의 곱셈 규칙

탐구

a×0=1이라고 정하면 분배법칙과 어떤 충돌이 생기는가?

풀이와 확인

a×(0+0)은 1이어야 하지만 분배하면 1+1=2가 된다. 같은 값을 1과 2로 만들므로 보통의 수 체계에서 일관되지 않는다.

0으로 나누기의 경계

역사적 시도와 오늘의 올바른 연산 규칙을 나란히 보되 섞어서는 안 된다.

브라마굽타는 0과 양수와 음수에 관한 규칙을 제시했지만 0으로 나누는 모든 경우를 현대적으로 옳게 처리하지는 못했다. 특히 0/0을 0으로 둔 설명은 오늘의 실수 연산 규칙과 다르다. 성취를 인정하는 일과 오류를 정확히 표시하는 일은 함께 할 수 있다.

나눗셈 a/b는 b×x=a를 만족하는 유일한 수 x를 찾는 것으로 이해할 수 있다. 5/0이라면 0×x=5가 되어 해가 없다. 0/0이라면 0×x=0이 되어 모든 실수 x가 맞는다. 하나는 해가 없고 다른 하나는 답을 하나로 정할 수 없다.

따라서 두 경우 모두 보통의 실수 나눗셈에서는 정의하지 않는다. 단순히 어렵기 때문에 금지한 것이 아니라 기존 곱셈과 맞물리는 유일한 값을 얻을 수 없기 때문이다. 이 차이를 식으로 설명하면 외운 금지 규칙보다 오래 기억할 수 있다.

나눗셈	곱셈으로 바꾼 조건	실수 해
0/7	7x=0	0 하나
7/0	0x=7	없음
0/0	0x=0	모든 실수

나눗셈은 곱셈 조건의 유일한 해를 요구한다

탐구

0/7과 7/0은 같은가?

풀이와 확인

다르다. $7\times x=0$의 유일한 해는 0이므로 $0/7=0$이다. $0\times x=7$은 해가 없으므로 $7/0$은 정의되지 않는다.

[S3] University of St Andrews: Brahmagupta

계산 오류의 숨은 나눗셈

틀린 증명은 한 줄의 무심한 약분에서 시작되기도 한다.

$a=b=1$로 놓고 $a^2=ab$에서 양변에 b^2을 빼면 $a^2-b^2=ab-b^2$이다. 인수분해하면 $(a-b)(a+b)=b(a-b)$가 된다. 여기까지는 모두 맞다. 하지만 양변을 $a-b$로 나누어 $a+b=b$라고 쓰는 순간 문제가 생긴다.

a와 b가 같으므로 $a-b$는 0이다. 0인 인수를 약분한 줄은 허용되지 않는다. 앞의 식은 단지 $0=0$을 말할 뿐이며 $a+b$와 b가 같다는 정보를 주지 않는다. 어떤 수에 0을 곱해도 결과가 같아진다는 점을 떠올리면 오류가 분명해진다.

긴 계산에서 결과만 살피면 이런 문제가 숨어들기 쉽다. 나누기나 약분을 하는 줄마다 분모가 0이 아닌지 적어 보자. 조건을 표시하는 짧은 습관이 계산의 논리적 빈틈을 막아 준다.

$$a = b = 1 \rightarrow a - b = 0$$

$$(a-b)(a+b) = b(a-b)$$

양변의 a−b를 나누면 0으로 나누게 된다

같은 인수가 보여도 그 값이 0이면 약분할 수 없다

탐구

0×3=0×8에서 양쪽 0을 지워 3=8이라 할 수 없는 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

0을 곱하는 연산은 서로 다른 수를 같은 0으로 보낸다. 결과가 같다는 사실로 원래 수의 같음을 되찾을 수 없다.

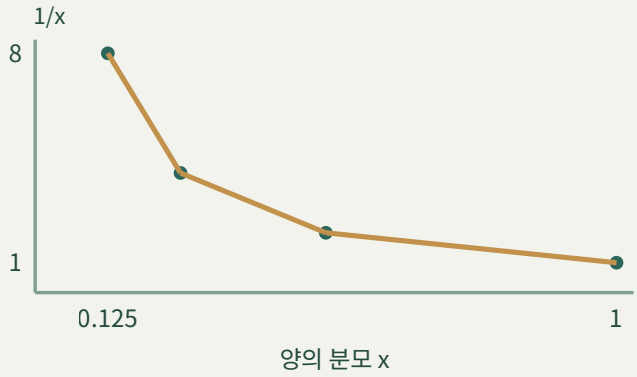
작은 분모와 0인 분모

0에 가까워지는 과정과 0을 직접 넣는 연산은 구별해야 한다.

1을 1과 0.1과 0.01로 나누면 값은 1과 10과 100으로 커진다. 양의 분모가 0에 가까워질 때 몫이 커지는 현상을 볼 수 있다. 그러나 이 목록의 어디에도 분모가 0인 항은 없다. 경향을 관찰했다고 마지막에 1/0이라는 실수 값이 생기지는 않는다.

음의 분모로 접근하면 결과는 −1과 −10과 −100으로 작아진다. 접근하는 방향에 따라 부호가 달라진다. 무조건 1/0=무한대라고 적으면 이런 차이를 지워 버리고 보통의 실수 연산과 극한을 혼동하게 된다.

무한대를 다루는 별도의 수학적 체계는 있지만 그 체계의 정의와 연산 규칙을 먼저 정해야 한다. 이 책의 계산에서는 실수와 유한한 분수를 기준으로 삼는다. 역사적 표현을 읽을 때도 당시 문맥과 현대적 해석의 범위를 구분한다.



분모가 작아질 때의 값. 0 자체는 대입하지 않는다

분모	1을 나눈 값
1	1
0.1	10
0.01	100
0.001	1000

탐구

1/0.001은 얼마이며 이것이 1/0의 값을 결정하는가?

풀이와 확인

값은 1000이다. 유한한 분모에 대한 한 계산이며 1/0의 실수 값을 결정하지는 않는다.

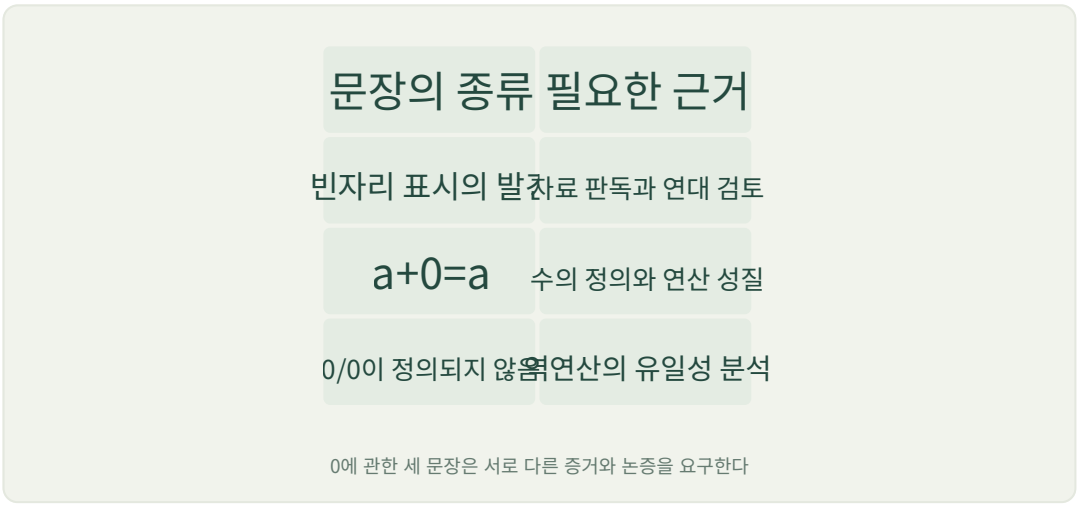
세 문장을 구분하는 활동

기호의 역사와 계산 규칙과 현대적 설명을 다른 색으로 기록해 보자.

활동지에 세 문장을 적는다. 첫 문장은 어떤 필사본에서 빈 자리를 나타내는 표시가 발견되었다는 내용이다. 둘째 문장은 a+0=a라는 연산 규칙이다. 셋째 문장은 0/0이 실수 나눗셈에서 정의되지 않는다는 설명이다. 모두 0을 다루지만 필요한 증거와 논증은 다르다.

첫 문장에는 실물 자료와 판독과 연대 검토가 필요하다. 둘째 문장은 수 체계의 정의와 연산 성질을 확인한다. 셋째 문장은 곱셈의 역연산으로서 나눗셈을 분석한다. 한 종류의 근거만으로 세 문장을 모두 설명하려 하면 빈틈이 생긴다.

마지막에는 읽은 자료의 발표 연도와 수정 여부를 적는다. 오래된 자료가 무조건 틀린 것도 아니며 최신 자료가 모든 문제를 해결한 것도 아니다. 서로 어떤 질문에 답하는지 비교해야 자료를 공정하게 평가할 수 있다.



0에 관한 세 문장은 서로 다른 증거와 논증을 요구한다

탐구

0의 역사를 한 문장으로 정리할 때 피해야 할 표현은 무엇인가?

풀이와 확인

한 사람이 어느 날 오늘의 0에 관한 모든 개념을 완성했다는 식의 단정이다. 표시와 연산과 전승의 여러 단계를 구분해야 한다.

인도관 / 19

재산과 빚의 산술

부호가 필요한 세계

양수와 음수는 수량의 크기에 방향이나 관계를 더해 준다.

브라마굽타의 산술 설명에는 재산과 빚을 이용해 양수와 음수의 관계를 나타내는 방식이 등장한다. 이 비유는 익숙한 상황을 통해 부호 규칙을 생각하게 한다. 다만 오늘의 회계 제도 전체를 옛 문헌에 투영하는 대신 계산 관계를 설명하는 비유로 읽는 편이 좋다.

재산 8과 빚 5를 합쳐 순자산을 계산하면 +8+(−5)=3이다. 물건의 개수만 세는 자연수와 달리 서로 반대되는 효과를 하나의 수로 정리한다. 빚을 진 상태도 계산의 대상이 되므로 0보다 작은 결과가 자연스럽게 나타난다.

음수는 부족함을 뜻할 때도 있지만 모든 상황에서 나쁜 값은 아니다. 기준보다 낮은 위치나 반대 방향의 이동을 나타낼 수도 있다. 먼저 기준점과 양의 방향을 정한 뒤 부호를 해석해야 같은 수를 서로 다르게 읽는 혼란을 피할 수 있다.



재산 8에서 빚 5의 효과를 빼면 순자산은 3이다

탐구

재산 4와 빚 9를 함께 기록하면 순자산은 얼마인가?

풀이와 확인

4−9=−5이다. 값 −5는 빚이 재산보다 5만큼 크다는 관계를 나타낸다.

[S3] University of St Andrews: Brahmagupta

수직선 위의 덧셈

부호 있는 수의 덧셈은 시작점과 이동량을 구분하면 읽기 쉬워진다.

수직선에서 −3에 서 있다고 생각하자. 여기에 +5를 더하면 오른쪽으로 다섯 칸 이동해 2에 도착한다. 시작점이 음수라는 사실과 이동량이 양수라는 사실은 서로 다른 정보이다. 두 부호를 한꺼번에 보고 방향을 정하지 않는다.

이번에는 2에서 −5를 더한다. 왼쪽으로 다섯 칸 가므로 결과는 −3이다. 두 이동은 서로를 되돌린다. +5와 −5를 차례로 더하면 총이동이 0이 되는 관계가 덧셈의 역원을 보여 준다.

그림을 그릴 때 간격을 일정하게 해야 한다. 숫자의 순서만 맞고 칸의 크기가 제각각이면 이동량을 눈으로 비교하기 어렵다. 수직선은 장식이 아니라 같은 길이가 같은 수의 차이를 나타내도록 약속한 수학적 모형이다.



동일한 간격으로 배치한 부호 있는 수

탐구

−7에서 +4만큼 이동한 뒤 −2만큼 이동하면 어디에 도착하는가?

풀이와 확인

−7+4−2=−5이다. 총이동은 오른쪽으로 2이며 시작점 −7에서 −5로 간다.

빚을 빼는 계산

음수를 빼는 연산은 반대 효과를 제거하는 일로 이해할 수 있다.

순자산이 −4인 사람이 빚 3만큼을 탕감받았다고 가정하자. 빚이라는 음의 항 −3을 장부에서 없애는 것이므로 −4−(−3)=−1이다. 빚을 줄였지만 아직 1만큼의 빚이 남아 있다. 무조건 양수가 되는 것이 아니라 값이 3만큼 커진 것이다.

기호만으로는 a−b=a+(−b)라는 규칙을 사용한다. b가 −3이면 그 반대 수는 +3이므로 뺄셈이 덧셈으로 바뀐다. 두 개의 빼기 기호를 기계적으로 지우는 대신 무엇을 빼고 있는지 괄호로 구분하면 오류가 줄어든다.

이 규칙은 수직선에서도 확인할 수 있다. −3만큼의 이동을 취소하면 +3만큼의 이동이 된다. 재산 비유와 이동 비유가 같은 결과를 주는지 비교하면 한 가지 상황에만 기대지 않고 개념을 이해할 수 있다.

순자산 −4

장부에서 빚 −3을 제거

$$-4-(-3)=-4+3=-1$$

빚을 빼는 계산은 음의 효과를 없애는 것이다

탐구

5−(−8)과 −5−8을 각각 계산해 보자.

풀이와 확인

첫째는 5+8=13이다. 둘째는 −5에 −8을 더하는 것이므로 −13이다. 괄호와 시작 부호를 구분해야 한다.

음수 두 개의 곱

부호 규칙은 분배법칙을 일관되게 유지하려는 요구와 연결된다.

3×(2+(−2))=3×0=0이다. 분배하면 3×2+3×(−2)=0이므로 3×(−2)=−6이다. 양수와 음수의 곱이 음수가 되는 규칙을 덧셈과 곱셈의 연결에서 확인했다.

이제 (3+(−3))×(−2)=0을 생각한다. 분배하면 3×(−2)+(−3)×(−2)=0이다. 앞에서 첫 항이 −6임을 알았으므로 둘째 항은 +6이어야 한다. 따라서 (−3)×(−2)=6이다.

이 설명은 음수가 나쁜 것이므로 나쁜 것 두 개가 좋은 것이라는 식의 비유에 기대지 않는다. 이미 정한 연산 법칙을 유지하기 위해 어떤 값이 필요한지 보여 준다. 수학적 규칙이 서로 충돌하지 않게 연결된 체계임을 확인할 수 있다.

$$(3 + (-3)) \times (-2) = 0$$
$$-6 + (-3)(-2) = 0$$
$$(-3)(-2) = 6$$

분배법칙을 유지하려면 음수 두 개의 곱은 양수여야 한다

탐구

(−4)×(−5)가 −20이라고 정하면 어떤 식과 충돌하는가?

풀이와 확인

(4+(−4))×(−5)=0이어야 한다. 하지만 분배한 두 항이 모두 −20이면 합이 −40이 되어 모순이다.

절댓값과 순서

0에서 멀리 떨어져 있다는 사실과 수가 크다는 사실은 다르다.

−8은 −3보다 작지만 0에서는 더 멀리 떨어져 있다. 수의 크기 비교는 수직선에서 오른쪽에 있는지를 살피고 절댓값은 0까지의 거리를 살핀다. 따라서 −8<−3이지만 |−8|>|−3|이다. 두 질문을 같은 것으로 생각하면 음수 비교에서 자주 틀린다.

온도가 −8도에서 −3도로 바뀌면 5도 오른 것이다. 그러나 온도의 절댓값은 8에서 3으로 줄었다. 절댓값이 줄었다고 온도가 내려갔다고 말하면 기준이 뒤섞인다. 상황을 해석할 때 무엇의 변화를 묻는지 먼저 확인해야 한다.

거리에는 음의 값이 없으므로 두 수 사이의 거리는 차이의 절댓값으로 나타낸다. −8과 −3 사이의 거리는 |−8−(−3)|=5이다. 어느 쪽에서 빼도 절댓값을 취하면 같은 거리를 얻는다.



수의 순서와 0에서의 거리를 구분한다

수	절댓값	0과의 관계
−8	8	왼쪽 8
−3	3	왼쪽 3
4	4	오른쪽 4

탐구

−6과 4 사이의 거리는 얼마인가?

풀이와 확인

|−6−4|=10이다. 0까지 6만큼 가고 다시 4만큼 가는 두 구간의 합으로도 확인할 수 있다.

두 표를 비교하기

덧셈표와 곱셈표는 같은 부호를 서로 다른 방식으로 처리한다.

양수 두 개를 더하면 양수이고 음수 두 개를 더하면 음수이다. 부호가 다른 두 수를 더할 때는 절댓값의 크기를 비교해야 한다. +7과 −2의 합은 양수이지만 +2와 −7의 합은 음수이다. 덧셈의 부호를 두 기호만 보고 정할 수 없는 경우이다.

곱셈에서는 두 수가 0이 아닐 때 부호가 같으면 양수이고 다르면 음수이다. 절댓값의 크기는 곱의 크기를 정하지만 부호를 바꾸지는 않는다. 덧셈 규칙을 곱셈에 옮기거나 그 반대로 적용하지 않도록 두 표를 나란히 적어 보자.

0이 포함되면 별도로 확인한다. 덧셈에서는 다른 수가 그대로 남고 곱셈에서는 0이 된다. 규칙을 외우기 전에 연산 이름을 읽는 작은 습관이 부호 계산의 오류를 크게 줄여 준다.

두 수	덧셈 결과	곱셈 결과
+7과 −2	+5	−14
+2과 −7	−5	−14
−3과 −2	−5	+6
4와 0	4	0

같은 두 부호도 덧셈과 곱셈에서 다른 규칙으로 처리한다

탐구

−9+4와 −9×4의 부호를 각각 어떻게 결정하는가?

풀이와 확인

합은 절댓값 9가 4보다 크므로 음수이며 값은 −5이다. 곱은 부호가 다르므로 음수이며 값은 −36이다.

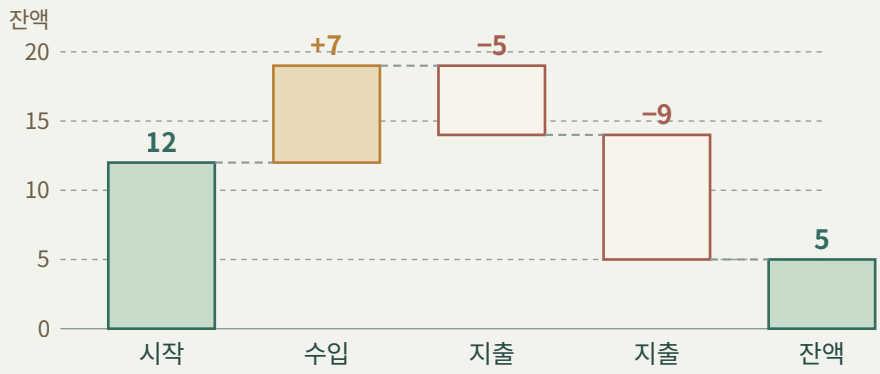
가계 모형으로 검산하기

수입과 지출을 부호 있는 수로 기록하되 단위를 일관되게 유지한다.

단위를 천 원으로 정하고 시작 잔액을 12로 놓자. 수입 7과 지출 5와 지출 9가 차례로 생기면 12+7−5−9=5이다. 장부에는 거래의 부호와 누적 잔액을 나누어 적는다. 지출액 9와 그 뒤의 잔액 5는 서로 다른 열의 정보이다.

순서를 바꾸어도 모든 거래를 빠짐없이 합치면 마지막 잔액은 같다. 하지만 중간 잔액은 달라질 수 있다. 먼저 9를 지출하면 잔액은 3이지만 수입을 먼저 기록하면 19가 된다. 마지막 합과 시간에 따른 상태를 구분해야 한다.

이 활동은 역사적 장부를 복원한 것이 아니라 부호 산술의 원리를 배우기 위한 모형이다. 실제 금융에서는 거래 순서와 조건이 수수료나 이자에 영향을 줄 수 있다. 단순화한 수학 문제의 조건을 분명히 적는 것이 해석의 첫 단계이다.



변화량 +7, −5, −9를 이어 붙이면 잔액이 12에서 5가 된다.

단계	변화	잔액
시작	0	12
수입	+7	19
지출	−5	14
지출	−9	5

탐구

시작 잔액 3에서 지출 8 뒤 수입 6이 생기면 중간 잔액과 마지막 잔액은 얼마인가?

풀이와 확인

중간 잔액은 −5이며 마지막 잔액은 1이다. 마지막이 양수여도 중간에 음수 상태가 있었음을 기록해야 한다.

부호 계산을 설명으로 마무리

답이 맞는지 확인할 때는 수치와 부호와 상황의 뜻을 모두 살핀다.

문제의 식이 $-6-(-4)+3\times(-2)$라고 하자. 곱셈을 먼저 계산하면 -6이 된다. 괄호 속 음수를 빼는 부분은 $+4$로 바뀌므로 전체는 $-6+4-6=-8$이다. 연산 순서를 지키는 것과 부호를 처리하는 것은 별도의 확인 항목이다.

다른 방식으로는 덧셈 항을 모을 수 있다. 음의 항 −6과 −6을 합쳐 −12로 만든 뒤 +4를 더해도 −8이다. 두 계산이 같은 답을 주면 중간 실수를 찾는 데 도움이 된다. 다만 같은 잘못된 규칙을 두 번 적용하는 검산은 충분하지 않다.

마지막에는 결과가 왜 음수인지 말로 설명한다. 음의 효과가 모두 12이고 양의 효과가 4이므로 음의 효과가 8만큼 크다. 기호 계산과 양의 비교를 연결하면 답을 다시 읽을 수 있다.

$$-6-(-4)+3\times(-2)$$
$$=-6+4-6$$
$$=-12+4=-8$$

곱셈과 괄호를 먼저 처리한 뒤 양과 음의 효과를 모은다

탐구

−2×(3−7)+5의 값을 두 방법으로 구해 보자.

풀이와 확인

괄호를 먼저 계산하면 (−2)×(−4)+5=13이다. 분배하면 −6+14+5=13으로 같은 결과를 얻는다.

인도관 / 20

방정식이 묻는 조건

문장을 식으로 옮기기

미지수의 이름보다 먼저 정할 것은 그 수가 무엇을 나타내는가이다.

어떤 수를 세 배 하고 5를 더했더니 26이 되었다고 하자. 그 수를 x로 정하면 3x+5=26이다. 양쪽에서 5를 빼고 3으로 나누면 x=7을 얻는다. 마지막에 원래 문장으로 돌아가 3×7+5=26인지 확인한다. 식을 푸는 과정과 상황에 맞는 답을 찾는 과정이 이어진다.

브라마굽타와 바스카라의 대수 전통에는 미지의 양을 다루는 계산이 포함된다. 여기의 문자식은 현대 표기로 새로 만든 연습 문제이다. 옛 문헌의 표현은 오늘날의 x와 등호를 그대로 사용하지 않았으므로 표기와 사고를 구분해서 읽어야 한다.

양쪽에 같은 연산을 하는 이유는 두 값의 같음을 유지하기 위해서이다. 단순히 항을 반대쪽으로 옮기면 부호가 바뀐다고 외우면 나눗셈과 곱셈에서 혼란이 생긴다. 각 줄이 앞줄과 같은 해를 갖는지 설명하면 계산의 근거가 남는다.

$$3x + 5 = 26$$

$$3x = 21$$

$$x = 7$$

문장을 식으로 옮기기의 계산 관계

탐구

어떤 수의 네 배에서 3을 뺀 값이 25라면 그 수는 얼마인가?

풀이와 확인

$4x-3=25$에서 $4x=28$이므로 $x=7$이다. 다시 대입하면 $28-3=25$가 된다.

[S3] University of St Andrews: Brahmagupta

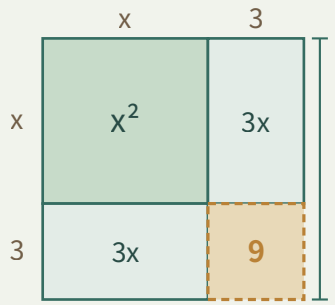
제곱을 완성하는 그림

이차식에 알맞은 작은 넓이를 보태면 정사각형을 만들 수 있다.

$x^2+6x=16$에서 x를 양의 길이라고 생각하자. 한 변이 x인 정사각형 옆에 넓이 $3x$인 띠 두 개를 붙인다. 두 띠가 만나는 모서리에 넓이 9인 작은 정사각형을 보태면 한 변이 $x+3$인 정사각형이 완성된다.

따라서 양쪽에 9를 더한 식은 $(x+3)^2=25$이다. 길이라는 조건 아래에서는 $x+3=5$이며 $x=2$이다. 처음 식에 대입하면 $4+12=16$이다. 덧붙인 넓이 9를 우변에도 더해야 같은 관계를 유지할 수 있다.

순수한 방정식으로 보면 x+3=−5도 가능해서 x=−8이라는 해가 하나 더 있다. 그러나 음의 길이는 이 그림의 조건에 맞지 않는다. 대수식의 해와 도형 문제의 답이 달라질 수 있음을 보여 주는 예이다. 그림이 무엇을 가정하는지 적어 두어야 한다.



$x^2 + 6x = 16$

$x^2 + 6x + 9 = 16 + 9$

$(x + 3)^2 = 25$

$x + 3 = 5, x = 2$

길이이므로 양의 값만 택한다

떠 두 개에 모서리 9를 보태 한 변이 x+3인 정사각형을 만든다.

탐구

$x^2+8x=20$을 같은 방법으로 풀면 양의 해는 무엇인가?

풀이와 확인

16을 더하면 $(x+4)^2=36$이다. 양의 길이 조건에서 $x+4=6$이므로 $x=2$이다.

두 근이 나타나는 까닭

제곱이 같은 두 수는 부호가 반대일 수 있다.

$x^2=49$에는 $x=7$과 $x=-7$이라는 두 해가 있다. 음수를 제곱해도 양수가 되므로 양의 제곱근만 적으면 방정식의 해를 하나 놓친다. $\sqrt{49}$라는 기호는 비음의 값 7을 가리키지만 $x^2=49$의 해집합에는 두 값이 들어간다.

바스카라 2세를 다룬 역사 자료에는 양과 음의 해를 논의한 사례가 소개된다. 다만 어떤 문제에서 음의 해를 받아들였는지는 그 문제의 뜻과 연결해서 읽어야 한다. 현대의 실수 체계를 과거의 모든 문장에 일괄적으로 덧씌우면 설명이 부정확해진다.

제곱의 그래프를 생각하면 두 해의 관계가 드러난다. 0에서 같은 거리만큼 떨어진 두 수는 같은 제곱값을 가진다. 반면 $x^2=0$에서는 두 후보가 모두 0으로 겹친다. $x^2=-1$에는 실수 범위의 해가 없으므로 사용할 수의 범위도 답의 일부이다.



−7과 7은 0에서 같은 거리에 있다

탐구

$\sqrt{81}$과 $x^2=81$의 해를 구분하여 적어 보자.

풀이와 확인

$\sqrt{81}$은 9이다. 방정식의 실수 해는 9와 −9이다. 제곱근 기호의 약속과 방정식의 해를 구별한다.

[S5] University of St Andrews: Bhaskara II

해를 잃어버리는 나눗셈

문자를 나누는 순간 그 문자가 0이 아닌지 확인해야 한다.

$x^2=3x$의 양쪽을 x로 나누면 $x=3$이 나온다. 그러나 $x=0$도 원래 식을 만족한다. 나눗셈을 하는 동안 x가 0인 경우를 제외했기 때문에 해 하나를 잃은 것이다. 미지수로 나눌 때는 그 값이 0일 가능성을 별도로 살핀다.

안전한 방법은 모든 항을 한쪽으로 모아 $x^2-3x=0$으로 쓰고 $x(x-3)=0$으로 인수분해하는 것이다. 두 실수의 곱이 0이면 적어도 하나가 0이므로 $x=0$ 또는 $x=3$이다. 이 논리는 특정한 값을 임의로 제외하지 않는다.

식의 모양을 간단하게 만드는 것이 언제나 동치 변형은 아니다. 어떤 연산은 해를 지우고 어떤 연산은 새로운 후보를 만든다. 각 줄 옆에 필요한 조건을 적는 습관은 계산 과정을 길게 만드는 대신 마지막의 오류를 줄여 준다. 간결한 식에서도 조건은 생략하지 않는다.

$$x^2 = 3x$$
$$x(x-3) = 0$$
$$x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

해를 잃어버리는 나눗셈의 계산 관계

탐구

$x^2=-2x$를 양쪽에서 x로 나누면 어떤 해를 놓치는가?

풀이와 확인

$x=0$을 놓친다. $x(x+2)=0$으로 쓰면 해는 0과 -2임을 알 수 있다.

제곱해서 생긴 가짜 후보

연산의 방향을 되돌릴 수 있는지 확인하면 불필요한 해를 걸러 낼 수 있다.

$\sqrt{(x+6)}=x$를 풀어 보자. 왼쪽이 비음수이므로 먼저 $x\geq 0$이어야 한다. 양쪽을 제곱하면 $x+6=x^2$이다. 인수분해하면 $(x-3)(x+2)=0$이어서 후보는 3과 -2이다. 그러나 -2는 처음 정한 조건을 만족하지 않는다.

원래 식에 직접 넣어도 확인된다. $x=3$이면 $\sqrt{9}=3$이므로 참이다. $x=-2$이면 $\sqrt{4}=-2$라는 거짓 식이 된다. 제곱은 두 수의 부호 차이를 지울 수 있으므로 제곱한 식을 만족한다고 원래 식까지 만족하는 것은 아니다.

이 문제에서는 가능한 수의 범위와 제곱 연산의 성질을 함께 사용했다. 풀이 끝에 검산을 넣는 것은 예의상 하는 절차가 아니라 연산 중 넓어진 후보 집합을 다시 줄이는 논리적 단계이다. 조건을 먼저 적어도 마지막 대입 확인은 유용하다.

$$\sqrt{(x+6)} = x \rightarrow x \geq 0$$

$$(x-3)(x+2) = 0$$

검산을 통과하는 값 3

제곱해서 생긴 가짜 후보의 계산 관계

탐구

√(x+2)=x를 풀면 제곱한 식에서 나오는 두 후보 중 어느 것이 답인가?

풀이와 확인

후보는 2와 −1이다. x≥0이어야 하므로 답은 2이다. √4=2로 확인된다.

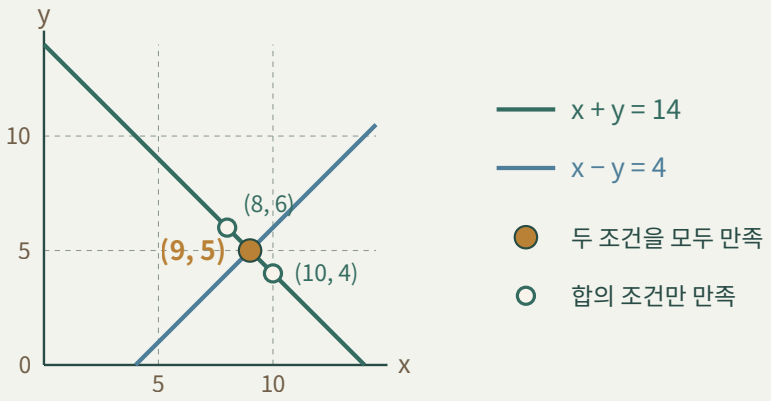
두 조건을 한꺼번에 풀기

각 조건을 따로 만족하는 수보다 두 조건을 동시에 만족하는 수가 필요하다.

두 수의 합이 14이고 차가 4라고 하자. 큰 수를 x로 놓고 작은 수를 y로 놓으면 x+y=14와 x−y=4이다. 두 식을 더하면 y가 사라지고 2x=18이 된다. 따라서 x=9이며 첫 식에서 y=5이다.

한 식만 보면 해가 많다. 합이 14인 두 수는 8과 6일 수도 있고 10과 4일 수도 있다. 차가 4라는 둘째 조건이 후보를 좁힌다. 연립방정식은 여러 정보를 동시에 만족시키는 대상을 찾는 방법이다.

두 식을 더할 때는 양쪽에 대응하는 항을 모두 더한다. 필요하다면 한 식의 양변에 같은 수를 곱한 뒤 더해 다른 문자를 없앨 수 있다. 그 연산이 두 조건의 공통 해를 보존하는지 이해하면 소거법을 단순한 줄맞춤 계산으로만 기억하지 않게 된다.



두 직선의 교점 (9, 5)만 합과 차의 조건을 함께 만족한다.

탐구

두 수의 합이 23이고 차가 7이면 두 수는 무엇인가?

풀이와 확인

두 식을 더하면 큰 수의 두 배가 30이다. 큰 수는 15이며 작은 수는 8이다.

조건이 모순될 때

방정식에 답이 없다는 결론도 계산으로 증명할 수 있다.

x+y=10과 2x+2y=25를 동시에 만족시키는 수가 있을까. 첫 식의 양쪽을 두 배 하면 2x+2y=20이다. 같은 왼쪽이 20이면서 25일 수는 없으므로 공통 해가 없다. 미지수를 끝까지 구하지 않아도 조건의 충돌이 드러난다.

반대로 둘째 식이 2x+2y=20이라면 첫 식과 같은 정보이다. 그 경우에는 해가 하나로 정해지지 않는다. x를 자유롭게 정하고 y=10−x로 놓으면 된다. 식이 두 개라는 사실만으로 독립적인 조건이 두 개라고 생각해서는 안 된다.

조건을 검토하는 일은 역사 자료의 계산을 읽을 때도 중요하다. 수치가 맞지 않으면 필사 오류인지 번역의 문제인지 서로 다른 단위를 섞었는지부터 살핀다. 현대의 예제에서는 조건 자체가 모순될 가능성도 열어 둔다. 억지로 숫자 하나를 내는 것이 목표는 아니다.

$$x + y = 10$$
$$2x + 2y = 20$$
$$2x + 2y = 25 \rightarrow \text{모순}$$

조건이 모순될 때의 계산 관계

탐구

3x+3y=30은 x+y=10에 새로운 정보를 더하는가?

풀이와 확인

더하지 않는다. 첫 식을 세 배 한 것과 같으므로 두 식은 같은 직선을 나타낸다.

풀이의 세 층을 기록하기

계산 과정과 적용 조건과 역사적 맥락을 나란히 적으면 풀이를 다시 읽을 수 있다.

정사각형의 한 변을 2만큼 늘렸더니 넓이가 40만큼 늘었다고 하자. 원래 변을 x로 놓으면 $(x+2)^2-x^2=40$이다. 전개하면 $4x+4=40$이어서 $x=9$이다. 원래 넓이 81과 새 넓이 121의 차는 실제로 40이다.

풀이 기록의 첫 층에는 전개와 정리 과정을 적는다. 둘째 층에는 $x>0$이라는 길이 조건과 단위 제곱이라는 넓이 단위를 표시한다. 셋째 층에는 이 문제가 고전 원문의 번역인지 역사적 주제에서 만든 현대 문제인지를 밝힌다.

세 층을 구분하면 계산이 맞지만 역사적 설명이 틀린 경우와 역사적 설명은 신중하지만 계산이 틀린 경우를 따로 찾아낼 수 있다. 이 책의 예제는 원문 인용으로 표시하지 않은 경우 교육을 위해 새로 구성한 문제이다. 독자도 숫자와 조건을 바꾸어 자신만의 문제를 만들 수 있다.

$$(x+2)^2 - x^2 = 40$$
$$4x + 4 = 40$$
$$x = 9 \rightarrow 121 - 81 = 40$$

풀이의 세 층을 기록하기의 계산 관계

탐구

한 변을 3만큼 늘려 넓이가 51만큼 증가했다면 원래 변은 얼마인가?

풀이와 확인

$(x+3)^2-x^2=6x+9=51$이므로 $x=7$이다. $100-49=51$로 검산한다.

인도관 / 21

쿠타카와 정수의 길

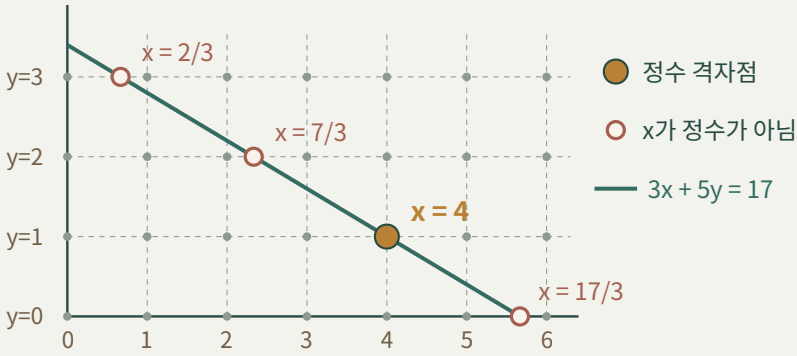
정수라는 조건

같은 방정식도 허용하는 수가 달라지면 풀이의 성격이 달라진다.

$3x+5y=17$을 실수 범위에서 풀면 x를 정할 때마다 $y=(17-3x)/5$가 따라온다. 그러나 x와 y가 물건의 개수라면 음이 아닌 정수여야 할 수 있다. 이때 가능한 값은 훨씬 적어진다. 수의 범위를 식과 함께 적어야 문제를 제대로 읽는다.

인도의 쿠타카 전통은 일차 부정방정식의 정수해를 찾는 방법과 관계가 있다. 이 장에서는 그 주제를 이해하기 위해 작은 수를 쓰고 현대 기호로 과정을 재구성한다. 옛 절차의 모든 세부를 그대로 복원한 것은 아니다.

예제에서 y는 0부터 3까지 조사하면 충분하다. y가 4 이상이면 5y가 이미 17보다 커진다. y=1일 때 3x=12이므로 x=4이다. 다른 세 경우에는 x가 정수가 아니다. 무작정 대입하는 방법도 범위를 논리적으로 줄이면 완전한 풀이가 된다.



직선 3x+5y=17이 지나는 음이 아닌 격자점은 (4, 1) 하나다.

탐구

3x+5y=17에서 음이 아닌 정수해는 몇 개인가?

풀이와 확인

x=4와 y=1인 한 쌍뿐이다. y의 가능한 값 0부터 3을 모두 조사했으므로 빠진 후보가 없다.

[S2] University of St Andrews: Aryabhata I

나머지로 후보 줄이기

큰 수를 직접 찾기 전에 나눗셈의 나머지 조건을 사용한다.

7x+3이 5의 배수가 되게 하는 정수 x를 찾자. 7은 5로 나누면 나머지가 2이므로 2x+3이 5의 배수이면 된다. x의 나머지를 0부터 4까지 조사하면 x가 1일 때 2x+3=5가 된다.

따라서 x=1+5t로 쓸 수 있다. 여기에 정수 t를 넣으면 7x+3=10+35t=5(2+7t)이다. 하나의 작은 해를 찾은 뒤 같은 나머지를 가진 모든 수를 표현한 것이다. x의 값이 끝없이 많아도 일정한 간격으로 묶을 수 있다.

나머지 조건은 필요조건인지 충분조건인지 확인해야 한다. 이 예에서는 전개한 식으로 모든 x=1+5t가 실제로 조건을 만족함을 보였다. 거꾸로 가능한 나머지를 다 조사했으므로 다른 형태의 해가 없다는 사실도 확인했다. 두 방향이 합쳐져 일반해가 된다.



해의 x값은 5씩 증가한다

탐구

7x+3이 5의 배수인 가장 작은 양의 x와 그다음 값은 무엇인가?

풀이와 확인

1과 6이다. 각각 10과 45를 만들며 x는 5씩 증가한다.

나눗셈을 거꾸로 읽기

최대공약수를 구한 기록은 정수해를 만드는 재료가 된다.

26을 7로 나누면 26=3×7+5이다. 다시 7=1×5+2이고 5=2×2+1이다. 마지막 나머지 1이 최대공약수이다. 이제 식을 거꾸로 읽어 1을 26과 7의 정수배 합으로 바꾸어 보자.

1=5−2×2이며 2=7−5이므로 1=3×5−2×7이다. 여기에 5=26−3×7을 넣으면 1=3×26−11×7을 얻는다. 실제로 78−77=1이다. 나눗셈 과정이 두 수 사이의 작은 차이를 만드는 계수를 찾아 주었다.

이 절차에서는 나머지가 점점 작아져 결국 멈춘다. 각 단계가 정수 관계를 유지한다는 점도 중요하다. 소수 근삿값을 사용하지 않으므로 큰 수를 다루어도 원리상 정확한 관계를 얻는다. 계산이 길어질수록 중간 나머지와 계수를 표로 기록하면 실수를 줄일 수 있다.



$26 = 3 \times 7 + 5$

$7 = 1 \times 5 + 2$

$5 = 2 \times 2 + 1$

$2 = 2 \times 1$

최대공약수 1

26×7 직사각형을 정사각형으로 채우면 마지막 한 변 1이 최대공약수다.

탐구

26a+7b=1을 만족하는 정수 한 쌍을 써 보자.

풀이와 확인

a=3과 b=−11이다. 26×3+7×(−11)=1로 직접 확인된다.

해가 존재하는 조건

공약수로 나누어떨어지지 않는 우변은 정수해를 가질 수 없다.

6x+10y=7에는 정수해가 없다. 왼쪽의 두 항이 모두 짝수이므로 합도 짝수인데 오른쪽은 홀수이기 때문이다. 더 일반적으로 6과 10의 최대공약수 2는 왼쪽을 언제나 나누어떨어지게 한다. 따라서 우변도 2의 배수여야 한다.

우변이 8이면 6x+10y=8을 2로 나누어 3x+5y=4로 만들 수 있다. x=3과 y=−1을 넣으면 9−5=4가 되어 정수해를 하나 찾는다. 음의 값을 허용하는 정수해와 음이 아닌 정수해는 여기서도 구별해야 한다.

최대공약수가 우변을 나눈다는 조건은 일차 방정식 ax+by=c의 정수해가 존재하는 기준이다. 두 계수가 모두 0인 특수한 경우는 따로 다룬다. 이 기준은 시행착오를 시작하기 전에 해의 가능성을 판정해 주며 불가능한 문제에 시간을 쓰지 않게 한다.

$$\gcd(6\ 10) = 2$$

$$6x + 10y = 7 \rightarrow \text{정수해 없음}$$

$$6 \times 3 + 10 \times (-1) = 8$$

해가 존재하는 조건의 계산 관계

탐구

12x+18y=15는 정수해를 갖는가?

풀이와 확인

갖지 않는다. 왼쪽은 항상 6의 배수이지만 15는 6의 배수가 아니다.

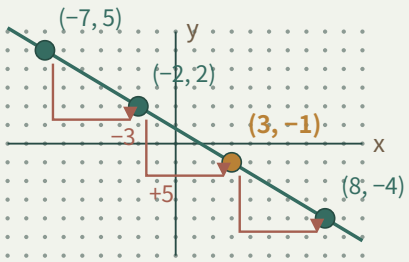
하나의 해에서 모든 해로

두 변수를 함께 움직이면 같은 합을 유지할 수 있다.

3x+5y=4의 해 하나는 x=3과 y=−1이다. x를 5만큼 늘리면 첫 항은 15만큼 증가한다. 동시에 y를 3만큼 줄이면 둘째 항이 15만큼 감소한다. 따라서 x=3+5t와 y=−1−3t는 모든 정수 t에 대해 해가 된다.

다른 해가 이 형태에 들어가는지도 확인하자. 두 해의 차이를 u와 v로 쓰면 3u+5v=0이다. 3u=−5v에서 3과 5가 서로소이므로 u는 5의 배수이다. u=5t를 넣으면 v=−3t가 된다. 그래서 앞의 표현이 모든 정수해를 포함한다.

일반해를 구한 뒤 실제 상황의 제한을 넣을 수 있다. x와 y가 모두 음이 아니어야 한다면 t가 만족해야 할 부등식을 각각 얻는다. 두 범위가 겹치는지 확인하면 가능한 물건 개수나 횟수를 빠짐없이 찾아낼 수 있다.



$$3x + 5y = 4$$

$$x = 3 + 5t$$

$$y = -1 - 3t$$

$$3 \times 5t + 5 \times (-3t) = 0$$

해 (3, −1)에서 (+5, −3)씩 움기면 직선 위의 모든 정수해에 닿는다.

탐구

t=−1일 때 해를 구하고 원래 식으로 확인하자.

풀이와 확인

x=−2와 y=2이다. 3×(−2)+5×2=4이므로 조건을 만족한다.

두 주기의 만남

서로 다른 반복이 다시 겹치는 날은 나머지 조건으로 찾을 수 있다.

어떤 신호는 오늘부터 4일마다 켜지고 다른 신호는 오늘보다 하루 늦게 시작해 7일마다 켜진다고 하자. 오늘을 0일로 놓으면 첫 신호의 날은 4의 배수이며 둘째 신호의 날은 7로 나눈 나머지가 1이다. 따라서 t=4x이고 4x=7y+1이어야 한다.

4의 배수를 차례로 보면 4와 8 중에서 8이 7로 나누어 나머지 1이다. 첫 만남은 8일 뒤이다. 두 주기가 모두 원래 위치로 돌아오는 간격은 최소공배수 28일이므로 이후에는 36일 뒤와 64일 뒤에도 만난다.

이 문제는 천체 자체의 실제 주기를 복원한 것이 아니라 주기 계산의 구조를 보여 주는 모형이다. 시작일을 포함하는지와 날짜를 0부터 세는지를 밝혀야 한 칸 차이가 나는 오류를 막을 수 있다. 기준점의 선택은 계산 결과를 해석하는 데 필수적이다.



두 주기가 만나는 날은 28일 간격이다

탐구

두 신호가 만나는 날을 일반식으로 쓰면 어떻게 되는가?

풀이와 확인

$t=8+28k$이다. 미래의 만남만 고르면 k는 0 이상의 정수이다.

값을 바꾸어 역으로 설계하기

풀이를 아는 사람이 조건을 만들어 보면 해의 구조가 선명해진다.

정수해가 있는 문제를 직접 만들기 위해 계수 8과 13을 고르고 $x=2$와 $y=-1$을 정하자. 우변은 $8\times2+13\times(-1)=3$이다. 이렇게 만든 $8x+13y=3$은 적어도 하나의 정수해를 갖는다. 답부터 출발해 문제를 구성한 것이다.

일반해는 $x=2+13t$와 $y=-1-8t$이다. x의 변화가 13이고 y의 변화가 -8인 까닭은 두 항의 변화량 $104t$가 서로 상쇄되기 때문이다. 계수와 변화 간격이 교차해서 나타나는 구조를 확인할 수 있다.

이번에는 양의 정수해를 갖게 하고 싶다면 처음부터 $x=2$와 $y=1$을 골라 우변을 29로 만든다. 문제의 난이도는 숫자의 크기뿐 아니라 허용 범위와 찾으라는 해의 종류에 따라 달라진다. 문제를 설계하는 활동은 계산법의 조건을 능동적으로 점검하게 한다.

$$8 \times 2 + 13 \times (-1) = 3$$

$$x = 2 + 13t$$

$$y = -1 - 8t$$

값을 바꾸어 역으로 설계하기의 계산 관계

탐구

8x+13y=29에서 x=2와 y=1 다음에 나오는 정수해 하나를 구하자.

풀이와 확인

t=1을 쓰면 x=15와 y=−7이다. 120−91=29이다. 이 해는 정수해이지만 양의 정수해는 아니다.

정수 풀이의 검사표

존재 여부와 해 하나와 일반해와 범위 제한을 순서대로 확인한다.

11x+7y=100을 음이 아닌 정수 범위에서 풀어 보자. 11과 7은 서로소이므로 정수해가 존재한다. 7로 나눈 나머지를 보면 4x≡2 (법 7)이어서 x≡4 (법 7)이다. 따라서 x=4+7t이며 대입하면 y=8−11t이다.

두 수가 음이 아니려면 4+7t≥0과 8−11t≥0이어야 한다. 정수 t에 대해서는 첫 조건이 t≥0을 요구하고 둘째 조건이 t≤0을 요구한다. 따라서 t=0만 가능하며 답은 x=4와 y=8이다. 44+56=100으로 확인된다.

이 풀이에서는 정수해가 무한히 존재하지만 상황에 맞는 답은 하나였다. 마지막에 범위를 제한하지 않으면 문제를 덜 푼 셈이다. 반대로 처음부터 많은 값을 대입하면 가능한 답을 놓칠 위험이 있다. 네 단계를 분리해 기록하면 어디서 논증이 끝났는지 알 수 있다.

$$x = 4 + 7t$$

$$y = 8 - 11t$$

$$t \geq 0 \text{ 그리고 } t \leq 0 \rightarrow t = 0$$

정수 풀이의 검사표의 계산 관계

탐구

정수 제한을 없애고 실수로 풀면 답이 하나인가?

풀이와 확인

아니다. $y=(100-11x)/7$이므로 무한히 많다. 두 값이 음이 아니라는 조건을 넣어도 선분 위의 많은 실수 해가 남는다.

인도관 / 22

순환으로 찾는 큰 해

제곱 두 개의 작은 차이

큰 제곱수끼리 빼서 1을 만드는 문제는 근삿값과 정수론을 연결한다.

$x^2-2y^2=1$의 양의 정수해를 찾자. $y=1$이면 $x^2=3$이어서 정수 x가 없다. $y=2$이면 $x^2=9$이므로 $x=3$이다. $3^2-2\times2^2=1$이라는 관계는 $3/2$가 $\sqrt{2}$에 가까운 수임을 뜻한다. 양변을 y^2으로 나누면 $(x/y)^2-2=1/y^2$이 되기 때문이다.

인도 수학의 부정 이차방정식 연구는 브라마굽타와 바스카라 등의 작업에서 중요한 자리를 차지한다. 흔히 펠 방정식이라는 이름으로 소개되지만 그 명칭만으로 역사를 설명할 수는 없다. 이 장의 기호와 예제는 현대적으로 구성했다.

큰 해를 찾을 때 모든 y를 하나씩 대입하는 방식은 비효율적이다. 이미 아는 해를 결합해 새 해를 만드는 규칙이 있다면 큰 수로 빠르게 이동할 수 있다. 계산의 속도뿐 아니라 왜 새 값도 같은 식을 만족하는지 증명하는 것이 핵심이다.

$$3^2 - 2 \times 2^2 = 1$$
$$17^2 - 2 \times 12^2 = 1$$
$$(x/y)^2 - 2 = 1/y^2$$

제곱 두 개의 작은 차이의 계산 관계

탐구

x=17과 y=12는 $x^2-2y^2=1$을 만족하는가?

풀이와 확인

$289-2\times144=1$이므로 만족한다. 17/12의 제곱은 2보다 정확히 1/144만큼 크다.

[S5] University of St Andrews: Bhaskara II

곱셈이 해를 이어 준다

제곱근을 포함한 두 식의 곱에서 정수 계수를 따로 읽는다.

$(3+2\sqrt{2})$를 제곱하면 $9+12\sqrt{2}+8=17+12\sqrt{2}$이다. 새 계수 17과 12는 앞에서 확인한 해를 만든다. 다시 $3+2\sqrt{2}$를 곱하면 $99+70\sqrt{2}$가 된다. 실제로 $99^2-2\times70^2=9801-9800=1$이다.

이 규칙의 근거는 짝을 이루는 식에 있다. $(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})=1$이다. 같은 수를 여러 번 곱해도 두 짝의 곱은 1로 남는다. 그 결과 $A+B\sqrt{2}$와 $A-B\sqrt{2}$의 곱 A^2-2B^2가 1이 된다.

여기서 제곱근은 근사 소수로 바꾸지 않는다. 정확한 기호로 계산해야 작은 차이 1을 보존할 수 있다. 큰 제곱수끼리 뺄 때 반올림한 소수로 계산하면 이 작은 차이가 사라질 수 있다. 정수 관계를 끝까지 유지하는 이유이다.

$$(3+2\sqrt{2})^2 = 17+12\sqrt{2}$$
$$(17+12\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})$$
$$= 99+70\sqrt{2}$$

곱셈이 해를 이어 준다의 계산 관계

탐구

(17+12√2)(3+2√2)의 정수 부분과 √2의 계수를 구하자.

풀이와 확인

정수 부분은 51+48=99이다. √2의 계수는 34+36=70이다.

합성 공식의 구조

서로 다른 두 해를 결합하는 규칙은 전개로 확인할 수 있다.

$a^2-Db^2=1$과 $c^2-Dd^2=1$이라고 하자. 두 식에 대응하는 $a+b\sqrt{D}$와 $c+d\sqrt{D}$를 곱하면 정수 부분은 $ac+Dbd$이고 제곱근의 계수는 $ad+bc$이다. 이 두 값을 A와 B로 정하면 A^2-DB^2도 1이다.

직접 전개하면 가운데 항들이 사라지고 $(a^2-Db^2)(c^2-Dd^2)$가 남는다. 따라서 새 관계는 $1\times1=1$이다. 같은 계산은 오른쪽이 1이 아닌 경우에도 적용되어 두 오른쪽 값의 곱을 만든다. 특정 숫자에서 발견한 규칙이 일반 공식으로 확장된다.

D가 완전제곱수인 경우에는 문제의 성격이 달라지므로 여기서는 양의 비제곱 정수로 둔다. 공식의 조건을 먼저 적으면 어떤 예제가 원리를 잘 보여 주는지 선택할 수 있다. 오늘의 대수 전개는 역사적 합성법을 이해하는 하나의 다리이며 당시 표기의 복제는 아니다.

$$A = ac + Dbd$$

$$B = ad + bc$$

$$A^2 - DB^2 = (a^2 - Db^2)(c^2 - Dd^2)$$

합성 공식의 구조의 계산 관계

탐구

D=3이며 두 해가 모두 a=c=2와 b=d=1이면 새 해는 무엇인가?

풀이와 확인

A=4+3=7이고 B=2+2=4이다. $49-3\times16=1$로 확인된다.

작은 나머지를 고르는 발상

중간 관계가 꼭 1이 아니어도 다음 계산의 출발점이 될 수 있다.

D=13에 대해 $4^2-13\times1^2=3$이다. 이 관계의 오른쪽은 원하는 1이 아니지만 작다. 4와 1에 대응하는 식에 $m+\sqrt{13}$을 곱하면 정수 부분은 $4m+13$이고 제곱근의 계수는 $4+m$이다. 두 계수가 3으로 나누어떨어지도록 m을 선택해 보자.

m=2를 고르면 두 계수는 21과 6이다. 3으로 나눈 새 값은 7과 2이며 $7^2-13\times2^2=-3$이다. 오른쪽은 $(2^2-13)/3=-3$으로 바뀐다. 나눗셈 뒤에도 정수 계수가 남도록 고르는 조건이 중요하다.

순환법을 소개할 때 작은 오른쪽 값을 얻는 선택과 정수성을 유지하는 조건을 함께 설명해야 한다. 작은 값만 고르면 중간 계수가 분수가 될 수 있다. 여기서는 한 단계를 검산하며 원리를 맛보고 이어지는 설명에서 같은 D로 이어 간다.

$$4^2 - 13 = 3$$

$$m = 2 \rightarrow (21 + 6\sqrt{13})/3$$

$$7^2 - 13 \times 2^2 = -3$$

작은 나머지를 고르는 발상의 계산 관계

탐구

4+m이 3의 배수여야 한다면 m을 3으로 나눈 나머지는 무엇인가?

풀이와 확인

2이다. m=2와 5와 8 등이 후보이며 그중 계산 목적에 맞는 값을 고른다.

같은 문제를 한 걸음 더

중간값의 부호가 달라도 정확한 관계를 유지하면 계산을 이어 갈 수 있다.

앞의 $7^2-13\times2^2=-3$에서 m=4를 선택하자. 7+2m=15이므로 3으로 나누어떨어진다. $(7+2\sqrt{13})(4+\sqrt{13})=54+15\sqrt{13}$이다. 양의 3으로 나누면 $18+5\sqrt{13}$을 얻는다.

따라서 $18^2-13\times5^2=324-325=-1$이다. 오른쪽이 −1인 해를 제곱하면 오른쪽이 +1인 해가 된다. $(18+5\sqrt{13})^2$의 정수 부분은 324+325=649이고 제곱근 계수는 180이다. 마침내 $649^2-13\times180^2=1$을 얻었다.

몇 단계만으로 큰 해에 도달했지만 각 단계의 나눗셈 조건을 생략하면 마술처럼 보인다. 중간의 3과 −3과 −1이 어떤 관계에서 나왔는지 기록해야 재현할 수 있다. 여기의 전개는 순환적 계산을 설명하는 현대적 예시이며 일반 알고리즘의 모든 선택 규칙을 대신하지 않는다.

$$18^2 - 13 \times 5^2 = -1$$

$$(18 + 5\sqrt{13})^2 = 649 + 180\sqrt{13}$$

$$649^2 - 13 \times 180^2 = 1$$

같은 문제를 한 걸음 더의 계산 관계

탐구

마지막 큰 수의 관계를 정수 계산으로 확인하자.

풀이와 확인

$649^2=421201$이며 $13\times180^2=421200$이다. 두 값의 차는 정확히 1이다.

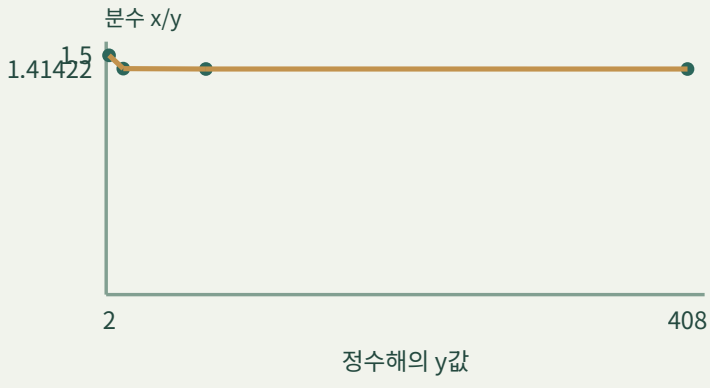
분수 근삿값의 오차

좋은 근삿값인지 판단하려면 실제 값과의 차이를 제어해야 한다.

$x^2-Dy^2=1$이고 x와 y가 양수이면 x/y는 $\sqrt{D}$보다 크다. 제곱의 차를 인수분해하면 $(x/y-\sqrt{D})(x/y+\sqrt{D})=1/y^2$이다. 따라서 길이의 오차는 1을 $y^2(x/y+\sqrt{D})$로 나눈 값이다.

$D=2$와 $x=17$과 $y=12$를 넣으면 오차는 $1/[144(17/12+\sqrt{2})]$이다. 분모의 괄호가 2보다 크므로 오차는 $1/288$보다 작다. 더 나은 하한을 넣으면 오차의 상한도 더 작게 만들 수 있다. 정확한 $\sqrt{2}$의 소수를 몰라도 품질을 평가할 수 있다.

제곱의 오차 $1/y^2$을 길이의 오차와 같다고 쓰지 않도록 주의한다. 두 오차 사이에는 합 $x/y+\sqrt{D}$가 끼어 있다. 도형의 크기나 물리량을 근사할 때도 원래 양과 변환된 양의 오차를 구별해야 한다.



$x^2-2y^2=1$에서 얻는 $\sqrt{2}$의 근삿값

탐구

$x^2-2y^2=-1$인 양의 해에서는 x/y가 $\sqrt{2}$보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

작다. $(x/y)^2$이 2보다 작고 두 값이 모두 양수이므로 $x/y<\sqrt{2}$이다.

부호를 뒤집어도 길은 이어진다

정수해를 만드는 합성은 작은 차이가 음수인 경우에도 작동한다.

$1^2-2\times1^2=-1$이다. 앞에서 주로 보았던 오른쪽 1과 달리 이번에는 오른쪽이 -1이다. 이에 대응하는 $1+\sqrt{2}$를 제곱하면 $3+2\sqrt{2}$가 된다. 새 계수는 $3^2-2\times2^2=1$을 만족한다. 합성 과정에서 오른쪽 값도 곱해져 $(-1)^2=1$이 된 것이다.

$1+\sqrt{2}$를 세 번 곱하면 $7+5\sqrt{2}$이고 $7^2-2\times5^2=-1$이다. 네 번 곱하면 $17+12\sqrt{2}$이며 오른쪽이 다시 1이다. 곱하는 횟수의 홀짝에 따라 차이의 부호가 번갈아 바뀐다. 작은 해 하나가 제곱근의 위쪽과 아래쪽 근삿값을 함께 만들어 준다.

분수 1과 7/5는 제곱이 2보다 작아 $\sqrt{2}$의 아래쪽에 놓인다. 3/2와 17/12는 제곱이 2보다 커 위쪽에 놓인다. 서로 이웃한 위쪽 값과 아래쪽 값을 함께 적으면 목표 길이를 둘러싼 구간을 얻는다. 단일 근삿값의 소수 자릿수보다 이 구간이 더 직접적인 보증이 된다.

각 분수의 분모가 커진다는 사실만으로 구간이 좁아진다고 단정하지 않는다. 표의 대소관계를 실제 교차곱으로 확인하고 제곱의 차를 검산한다. 이 설명은 인도의 합성 연구와 연결되는 현대적 대수 탐구이다. 모든 양의 비제곱 정수 D에서 오른쪽 −1의 정수해가 존재한다는 주장은 하지 않는다.

곱한 횟수	정수 계수	제곱 차
1	1과 1	−1
2	3과 2	1
3	7과 5	−1
4	17과 12	1

탐구

D=3에서 $x^2-3y^2=-1$이 불가능함을 3으로 나눈 나머지로 설명하라.

풀이와 확인

이 식은 x^2이 3으로 나누어 2를 남겨야 한다는 뜻이다. 정수의 제곱을 3으로 나누면 0 또는 1만 남으므로 불가능하다.

커지는 수를 다루는 기술

큰 수가 나온다는 사실보다 그 수를 어떻게 확인하는지가 중요하다.

99^2은 $(100-1)^2=10000-200+1=9801$로 계산할 수 있다. 70^2은 4900이므로 두 배가 9800이다. 두 큰 값의 차가 1임을 긴 곱셈 없이 확인했다. 수의 구조를 이용하면 검산이 짧아진다.

다음 해를 만드는 반복식은 A=3x+4y와 B=2x+3y이다. x=99와 y=70을 넣으면 A=577과 B=408이다. 첫 장에서 본 √2의 근삿값 577/408이 여기서 다시 나타난다. 같은 수가 서로 다른 문제의 맥락에서 만나는 이유를 탐구할 수 있다.

다만 수가 같다는 사실만으로 역사적 전달 관계를 증명할 수는 없다. 전파를 주장하려면 문헌과 연대와 접촉의 증거가 더 필요하다. 수학적 연결과 역사적 계보는 다른 종류의 주장이다. 둘을 구분하면 흥미로운 일치를 발견하면서도 성급한 결론을 피할 수 있다.

$$A = 3x + 4y$$

$$B = 2x + 3y$$

$$x = 99\ y = 70 \rightarrow A = 577\ B = 408$$

커지는 수를 다루는 기술의 계산 관계

탐구

$577^2 - 2 \times 408^2$의 값은 얼마인가?

풀이와 확인

$332929 - 332928 = 1$이다. 따라서 $577/408$은 이 장의 정수해에서도 나오는 $\sqrt{2}$의 근삿값이다.

순환 계산의 결과표

작은 해에서 큰 해로 가는 과정을 값과 불변 관계로 함께 기록한다.

D=2의 양의 해를 차례로 기록하면 3과 2에서 시작해 17과 12가 나오고 99와 70과 577과 408로 이어진다. 각 쌍은 앞의 반복식으로 계산된다. 숫자는 빠르게 커지지만 제곱의 차는 언제나 1로 남는다.

계산표의 마지막 열에 $x^2 - 2y^2$을 적으면 각 행을 독립적으로 검사할 수 있다. 앞 행의 오타가 다음 행으로 전해질 수도 있으므로 반복식만 다시 적용하는 검산에 의존하지 않는다. 불변 관계를 확인하면 다른 종류의 검사 하나가 추가된다.

이 활동의 목표는 가능한 해를 모두 분류하는 완전한 이론을 만드는 것이 아니다. 반복 절차와 증명된 관계를 결합해 큰 결과를 신뢰하는 방법을 배우는 것이다. 알고리즘을 사용할 때 무엇이 보존되는지 찾는 태도는 현대의 계산 프로그램에서도 중요하다.

x	y	x^2-2y^2
3	2	1
17	12	1
99	70	1
577	408	1

값은 커져도 제곱의 차는 1로 남는다

탐구

처음 쌍을 잘못 적어 x=3과 y=1로 시작했다면 불변 관계 검사는 무엇을 보여 주는가?

풀이와 확인

$3^2-2\times1^2=7$이므로 1이 아니다. 반복식이 돌아가더라도 원하는 방정식의 해를 만드는 출발점이 아님을 알 수 있다.

인도관 / 23

운율에서 조합으로

두 길이의 리듬

짧음과 김을 구분하는 운율 문제는 배열을 세는 수학과 만난다.

산스크리트 운율을 다룬 전통에서는 음절의 성질을 구분하고 가능한 배열을 살폈다. 핑갈라에 관한 연구는 이러한 절차를 조합론의 역사와 연결한다. 여기서는 짧은 음절을 S로 쓰고 긴 음절을 L로 쓰는 현대적 모형으로 계산한다.

세 자리가 각각 S 또는 L이라면 첫 자리는 두 가지 선택이 있고 둘째와 셋째도 두 가지씩 있다. 따라서 배열은 $2\times2\times2=8$개이다. SSS와 SSL처럼 각 자리가 다르면 다른 배열로 센다. 전체를 뒤집은 두 배열도 별개의 것으로 약속한다.

이 수학적 부호화가 고전 시의 실제 발음과 의미를 모두 담는 것은 아니다. 운율의 세부 규칙이나 언어적 조건을 제외한 단순 모형이다. 모형에서 무엇을 남기고 무엇을 제외했는지 밝히면 역사적 주제에서 정확한 수학 문제를 만들 수 있다.

S 또는 L

세 자리 $2^3 = 8$

네 자리 $2^4 = 16$

두 길이의 리듬의 계산 관계

탐구

네 자리에 S와 L을 자유롭게 넣는 배열은 몇 개인가?

풀이와 확인

각 자리마다 두 선택이 있으므로 $2^4=16$개이다. 순서가 다른 배열을 다르게 센다는 조건이 필요하다.

[S6] Jayant Shah: A History of Piṅgala's Combinatorics

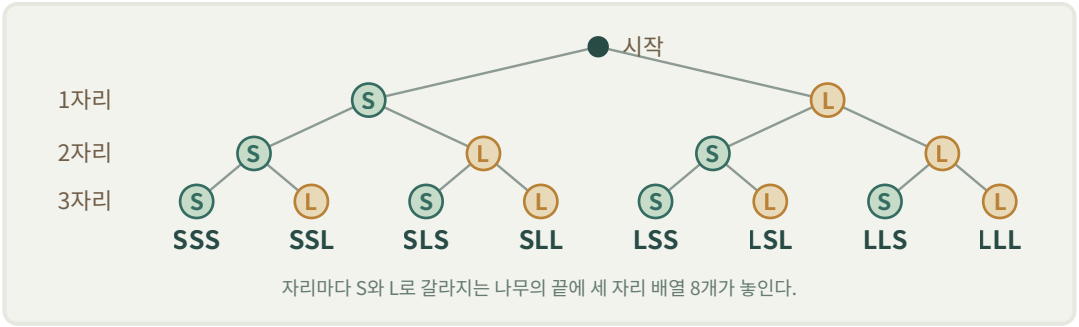
빠짐없이 나열하기

일정한 순서를 정하면 중복과 누락을 검사할 수 있다.

세 자리 배열을 첫 글자로 나누면 S로 시작하는 네 개와 L로 시작하는 네 개가 된다. 앞의 묶음은 SSS와 SSL과 SLS와 SLL이다. 뒤의 묶음은 LSS와 LSL과 LLS와 LLL이다. 각 묶음에서 마지막 두 글자의 순서가 같다.

이 방식은 두 자리 배열 앞에 S를 붙인 목록과 L을 붙인 목록을 만드는 재귀적 절차이다. 길이가 하나 늘어날 때 전체 개수가 두 배가 되는 이유도 보인다. 목록이 길어져도 같은 규칙을 적용할 수 있다.

목록의 순서는 우리가 정한 현대적 약속이다. 이를 고대 문헌의 실제 배열 순서와 동일하다고 단정하지 않는다. 역사 자료의 알고리즘을 비교할 때는 어떤 기호가 먼저 오는지와 어느 자리를 먼저 바꾸는지까지 확인해야 한다. 개수가 같아도 나열 방식은 다를 수 있다.



자리마다 S와 L로 갈라지는 나무의 끝에 세 자리 배열 8개가 놓인다.

탐구

S로 시작하고 마지막이 L인 세 자리 배열은 몇 개인가?

풀이와 확인

SSL과 SLL의 두 개이다. 가운데 자리만 자유롭게 선택하므로 2가지이다.

숫자로 배열 찾기

두 기호를 0과 1에 대응시키면 배열에 번호를 붙일 수 있다.

S를 0으로 놓고 L을 1로 놓자. 네 자리의 값을 왼쪽부터 8과 4와 2와 1로 정하면 LSLL은 1×8+0×4+1×2+1=11이다. 모든 네 자리 배열은 0부터 15까지의 정수 하나와 대응한다.

번호 6을 배열로 되돌려 보자. 6=4+2이므로 이진 표기는 0110이다. 약속한 부호로 바꾸면 SLLS이다. 숫자와 배열 사이의 대응이 일대일이면 전체 목록을 적지 않고도 원하는 항목을 찾을 수 있다.

자리의 방향을 반대로 정하거나 S와 L의 숫자를 바꾸면 번호가 달라진다. 번호 자체보다 대응 규칙이 핵심이다. 고전 운율 알고리즘을 현대 이진법과 비교할 때도 두 체계의 공통 구조와 다른 표기 관습을 함께 적어야 한다. 닮았다는 말만으로 두 문화의 사용 목적까지 같아지지는 않는다.

자리값	8	4	2	1
기호	L	S	L	L
숫자	1	0	1	1
값	8	0	2	1

약속한 대응에서 LSLL의 번호는 11이다

탐구

이 약속에서 LSSL은 몇 번인가?

풀이와 확인

1001에 해당하므로 8+1=9이다. 앞의 1과 뒤의 1은 서로 다른 자리값을 갖는다.

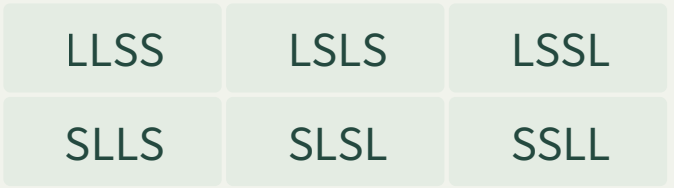
긴 음절 두 개만 고르기

전체 배열 수와 특정 기호 개수를 고정한 배열 수는 다르다.

네 자리에 L을 정확히 두 개 넣는 방법을 세자. L의 위치 두 곳을 고르면 나머지는 자동으로 S가 된다. 가능한 위치는 앞에서부터 12와 13과 14와 23과 24와 34의 여섯 쌍이다. 여기서 12는 첫째와 둘째 자리를 뜻하는 위치 표시이다.

첫 L의 위치를 네 가지로 고르고 둘째를 세 가지로 고르면 12가 되지만 각 배열을 두 번 센다. 첫째 자리와 셋째 자리를 고르는 두 순서는 같은 최종 배열을 만들기 때문이다. 따라서 4×3을 2로 나누어 6을 얻는다.

선택 순서가 결과를 바꾸는지 먼저 판단해야 순열과 조합을 구별할 수 있다. 서로 다른 두 역할을 맡길 때는 순서가 중요하지만 같은 L 두 개의 위치를 정할 때는 고르는 순서가 중요하지 않다. 문제의 대상이 계산 공식보다 먼저이다.



네 자리 중 L이 두 개인 배열 6개

탐구

다섯 자리 중 L이 정확히 두 개인 배열은 몇 개인가?

풀이와 확인

5×4를 2로 나누어 10개이다. 두 위치를 고르는 순서의 중복을 제거한다.

앞줄에서 다음 줄로

조합수의 삼각형은 마지막 자리를 기준으로 경우를 나누면 설명된다.

다섯 자리 중 L이 두 개인 배열을 마지막 글자에 따라 나누자. 마지막이 S이면 앞의 네 자리에서 L 두 개를 고른다. 마지막이 L이면 앞의 네 자리에서 L 한 개만 고른다. 따라서 개수는 6+4=10이다.

이를 일반적으로 쓰면 n자리에서 k개를 고르는 수는 n−1자리에서 k개를 고르는 수와 k−1개를 고르는 수의 합이다. 양끝의 값은 1이다. 아무것도 고르지 않거나 모두 고르는 방법은 각각 하나이기 때문이다.

이 규칙으로 1에서 시작해 1과 1을 만들고 다음 줄 1과 2와 1을 만든다. 여러 수학 전통에서 나타나는 삼각형 배열은 한 사람의 이름만으로 전체 역사를 설명하기 어렵다. 여기서는 운율 문제에서 해당 규칙이 왜 자연스럽게 나오는지에 집중한다.



앞줄에서 다음 줄로의 계산 관계

탐구

다섯 자리에서 L 두 개인 경우와 세 개인 경우의 수가 같은 까닭은 무엇인가?

풀이와 확인

모든 S와 L을 서로 바꾸면 두 L 배열과 세 L 배열이 일대일로 대응한다. 두 경우 모두 10개이다.

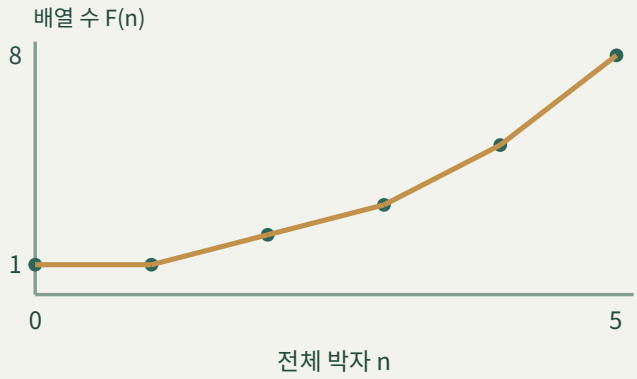
박자의 길이를 고정하기

자리 수를 고정할 때와 전체 길이를 고정할 때는 다른 수열이 생긴다.

짧은 음절 S는 1박이고 긴 음절 L은 2박이라고 정하자. 전체 3박을 만드는 배열은 SSS와 SL과 LS의 세 개이다. 자리 수가 서로 달라도 총길이가 같으면 모두 센다. 앞에서 세 자리를 고정해 8개를 얻은 문제와 조건이 다르다.

전체 n박의 배열은 S로 시작하거나 L로 시작한다. S를 떼면 n−1박이 남고 L을 떼면 n−2박이 남는다. 따라서 개수 F(n)는 F(n−1)+F(n−2)이다. 빈 배열을 한 가지로 세면 F(0)=1이고 F(1)=1이다.

이 규칙으로 2박은 2개이며 3박은 3개이고 4박은 5개가 된다. 빈 배열을 포함하는 약속은 점화식을 끝까지 일관되게 쓰게 해 준다. 수열의 이름을 먼저 외우기보다 어떤 경우 분류에서 같은 덧셈 규칙이 생겼는지 설명해 보자.



S가 1박이고 L이 2박일 때의 개수

탐구

전체 5박을 만드는 S와 L의 배열은 몇 개인가?

풀이와 확인

F(5)=F(4)+F(3)=5+3=8개이다. 맨 앞이 S인 다섯 경우와 L인 세 경우로 나뉜다.

박자 수와 음절 수를 함께 세기

같은 리듬을 서로 다른 기준으로 분류하면 점화식과 조합식이 만난다.

전체가 n박인 배열에서 긴 음절 L을 k개 사용한다고 하자. L 하나가 2박이므로 짧은 음절 S는 n−2k개 필요하다. 따라서 실제 음절의 총개수는 n−k개이다. 그 자리 가운데 L이 들어갈 k곳을 고르면 배열이 하나로 정해진다.

전체 6박을 생각하면 k는 0부터 3까지 가능하다. 긴 음절이 없으면 여섯 S만 놓는 한 가지이다. L이 하나이면 다섯 자리 중 하나를 고르는 5가지이다. L이 둘이면 네 자리 중 둘을 고르는 6가지이다. L이 셋이면 LLL 하나뿐이다.

네 경우를 합하면 1+5+6+1=13이다. 앞서 점화식으로 구한 6박의 배열 수와 같다. 첫 음절을 때는 분류와 긴 음절의 개수를 고정하는 분류가 같은 대상을 빠짐없이 나누었다. 한 결과를 서로 다른 분류로 증명하는 것이 조합론의 중요한 방법이다.

이 수식은 두 길이만 허용한 학습 모형에 대한 정확한 설명이다. 실제 운율 전통의 언어적 조건을 모두 포함하지 않는다. 길이가 정해진 자리 배열과 박자가 정해진 배열을 구분하면 비슷한 이진 부호가 왜 서로 다른 수열을 만드는지도 설명할 수 있다.

6박에서 L의 수	전체 음절 수	배열 수
0	6	1
1	5	5
2	4	6
3	3	1

탐구

7박에서 긴 음절이 정확히 두 개인 배열은 몇 개인가?

풀이와 확인

짧은 음절은 세 개이며 전체 음절 수는 다섯 개이다. 다섯 자리 중 L 두 자리를 고르므로 10개이다.

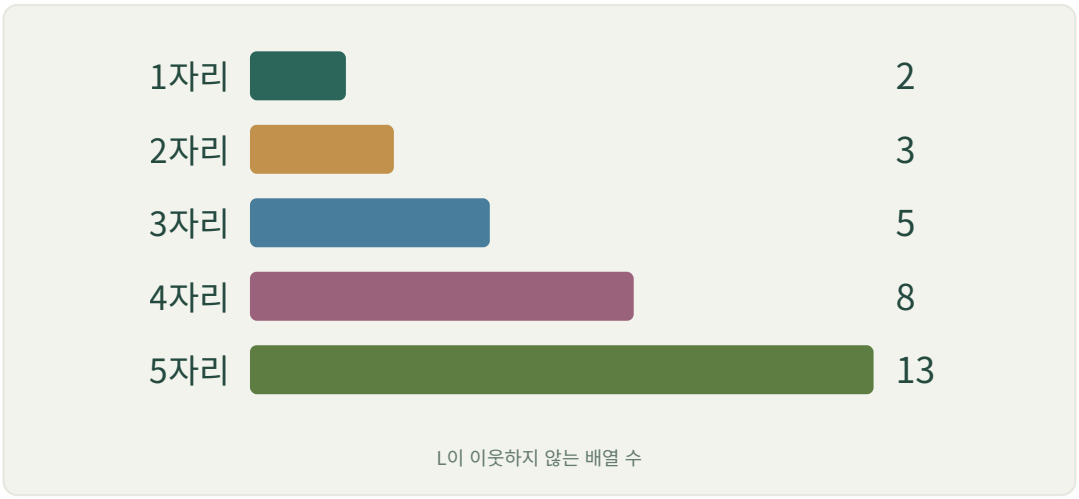
제한 하나가 바꾸는 점화식

지수적으로 늘어나는 목록도 제한 조건 하나로 성장 방식이 바뀐다.

길이가 다섯 자리인 S와 L 배열은 제한이 없으면 32개이다. 이제 L이 이웃하면 안 된다는 조건을 넣자. 마지막이 S인 배열은 앞의 네 자리에서 유효한 배열을 그대로 이어 붙이면 된다. 마지막이 L이면 그 앞은 반드시 S여야 한다.

따라서 마지막 두 글자가 SL인 경우를 따로 세면 앞의 세 자리 유효 배열 수가 남는다. 길이 n의 개수를 A(n)이라 할 때 A(n)=A(n−1)+A(n−2)이다. 초기값 A(0)=1과 A(1)=2에서 시작하면 다섯 자리는 13개이다.

앞쪽에서 S나 L의 박자를 나누었던 문제와 같은 점화식이지만 초기값과 대상은 다르다. 식이 같다고 두 문제를 같은 문제라고 할 수 없다. 어떤 대응을 만들 수 있는지 검토하면 서로 다른 상황 사이의 수학적 연결을 발견할 수 있다.



탐구

L이 이웃하지 않는 세 자리 배열은 몇 개인가?

풀이와 확인

A(3)=5이다. SSS와 SSL과 SLS와 LSS와 LSL이 가능하다.

운율 문제를 직접 설계하기

기호와 길이와 순서와 제한을 정하면 새로운 조합 문제를 만들 수 있다.

다섯 자리 중 L이 두 개이며 두 L이 이웃하지 않는 배열을 세어 보자. 제한이 없을 때는 10개이다. 이웃하는 두 자리를 고르는 방법은 12와 23과 34와 45의 네 가지이므로 제외하면 6개가 남는다.

다른 풀이로는 두 L 사이에 최소 한 S가 있다고 생각할 수 있다. L의 위치를 i와 j로 쓰고 i<j라 하면 j≥i+2이다. 두 번째 위치를 한 칸 당긴 j−1과 첫 위치 i를 고르면 네 자리 중 서로 다른 두 자리를 고르는 문제로 바뀐다. 따라서 6개이다.

직접 나열한 목록과 두 계산법이 같은 결과를 주는지 비교하자. 역사적 운율의 구체적 언어 규칙을 모두 옮기지 않아도 조건을 분명히 한 모형은 풍부한 탐구를 제공한다. 자신이 만든 제한을 원래 전통에 있었던 규칙처럼 소개하지 않는 것이 중요하다.

다섯 자리 중 L 두 개 10
이웃한 두 위치 4
이웃하지 않는 배열 10 − 4 = 6

운율 문제를 직접 설계하기의 계산 관계

탐구

여섯 자리 중 L이 두 개이며 이웃하지 않는 배열은 몇 개인가?

풀이와 확인

전체 15개에서 이웃한 다섯 쌍을 제외해 10개이다. 다섯 자리 중 두 위치를 고르는 수와도 같다.

인도관 / 24

수열로 읽는 변화

같은 차이로 늘어나는 양

수열의 규칙은 항의 값과 항 사이의 변화를 함께 보면 드러난다.

첫날에 3단위를 이동하고 날마다 2단위씩 더 이동한다고 가정하자. 이동량은 3과 5와 7과 9로 이어진다. n번째 날의 이동량은 $3+2(n-1)=2n+1$이다. 첫날에는 증가를 아직 한 번도 적용하지 않았으므로 n이 아니라 $n-1$을 곱한다.

바스카라의 릴라바티는 수열을 포함한 여러 계산 문제를 다룬다. 여기서는 그 주제와 연결되는 새 예제를 사용한다. 실제 이동에는 휴식과 지형의 영향이 있지만 일정한 증가라는 조건만 남기면 규칙을 식으로 설명할 수 있다.

표를 만들 때 날짜와 이동량을 다른 열에 쓴다. 첫 항의 번호를 0부터 정한다면 식도 달라진다. 같은 수열을 서로 다른 번호로 표현할 수 있으므로 식의 모양만 보고 틀렸다고 판단하지 않는다. 번호를 붙이는 약속과 첫 값을 함께 확인해야 한다.



날마다 2씩 늘어나는 이동량

탐구

이 규칙에서 열째 날의 이동량은 얼마인가?

풀이와 확인

2×10+1=21단위이다. 첫날 3에서 아홉 번에 걸쳐 2씩 증가한다.

[S5] University of St Andrews: Bhaskara II

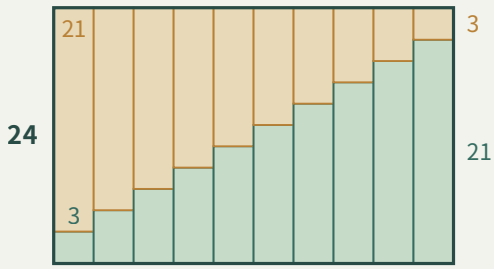
앞뒤를 짝지어 더하기

같은 차이로 늘어나는 수열은 양끝의 합이 일정하다.

3부터 21까지 홀수 열 개를 더하자. 첫 항 3과 마지막 항 21의 합은 24이다. 다음 두 항 5와 19도 24이며 이 방식으로 다섯 쌍이 만들어진다. 전체 합은 24×5=120이다. 항의 수가 짝수이면 직접 짝을 지을 수 있다.

항의 수가 홀수일 때도 같은 원리를 쓸 수 있다. 수열을 거꾸로 쓴 목록과 원래 목록을 나란히 더하면 각 열의 합이 첫 항과 마지막 항의 합이 된다. 전체 합을 두 번 센 것이므로 마지막에 2로 나누면 된다.

따라서 n개 항의 합은 n×(첫 항+마지막 항)/2이다. 공식을 사용하는 동안 마지막 항을 잘못 구하면 합도 틀리므로 항의 수를 따로 확인한다. 간격이 일정하지 않은 목록에는 이 공식을 그대로 적용할 수 없다. 양끝 합이 일정하다는 조건이 증명의 핵심이다.



수열과 뒤집은 수열을 쌓으면 열마다 높이 24인 직사각형이 된다.

탐구

2와 5와 8과 11과 14의 합을 양끝 짝으로 계산하자.

풀이와 확인

양끝 합은 16이며 다섯 항이 있다. 합은 5×16/2=40이다.

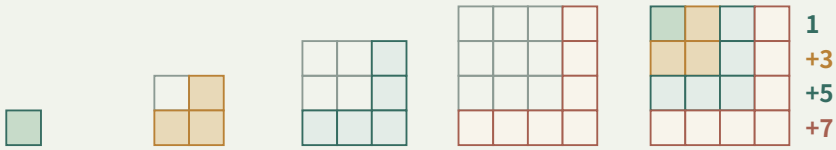
홀수의 합이 정사각형인 이유

한 겹씩 덧붙이는 도형은 수열의 합을 넓이로 바꾸어 준다.

한 변이 n인 정사각형에 바깥쪽 한 줄을 덧붙여 한 변이 n+1인 정사각형을 만들자. 새 칸의 수는 $(n+1)^2-n^2=2n+1$이다. 기존 정사각형을 감싸는 ㄱ자 모양의 한 겹은 언제나 홀수 개의 칸으로 이루어진다.

1칸에서 시작해 3칸을 더하면 4칸이 되고 5칸을 더하면 9칸이 된다. 다음에 7칸을 더하면 16칸이다. 따라서 처음 n개의 양의 홀수 합은 n^2이다. 그림의 각 겹과 수열의 각 항이 대응한다.

도형 설명을 쓸 때 모서리 칸을 두 번 세지 않도록 주의한다. 새 가로줄 n+1칸과 새 세로줄 n칸으로 나누면 총 2n+1칸이다. 그림에서 보이는 규칙을 식으로 옮기면 모든 n에 대해 같은 이유가 성립함을 설명할 수 있다.



1 = 1^2 | 1 + 3 = 4 = 2^2 | 4 + 5 = 9 = 3^2 | 9 + 7 = 16 = 4^2 | 1 + 3 + 5 + 7 = 4^2

ㄱ자 모양의 홀수 겹을 덧붙일 때마다 다음 정사각형이 된다.

탐구

1부터 19까지 양의 홀수의 합은 얼마인가?

풀이와 확인

항이 열 개이므로 합은 10^2=100이다. 19=2×10−1로 항의 수를 확인한다.

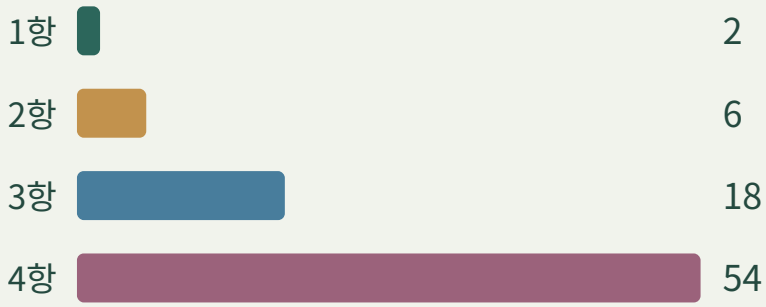
일정한 비율의 성장

매번 같은 수를 더하는 변화와 같은 수를 곱하는 변화는 다르다.

첫 항이 2이고 매번 세 배가 되는 수열은 2와 6과 18과 54로 이어진다. n번째 항은 2×3^(n−1)이다. 항 사이의 차이는 4와 12와 36으로 바뀌지만 뒤 항을 앞 항으로 나눈 비율은 늘 3이다.

같은 날마다 3을 더하는 수열 2와 5와 8과 11과 비교해 보자. 처음에는 값이 비슷해 보여도 시간이 지나면 곱셈으로 늘어나는 수열이 훨씬 커진다. 증가량이 같다는 말과 증가 비율이 같다는 말을 구분해야 한다.

성장 모형을 실제 현상에 적용할 때에는 비율이 계속 일정한지 확인한다. 자원과 공간이 제한된 상황에서 같은 비율의 성장이 무한히 이어진다고 가정하는 것은 지나친 단순화일 수 있다. 여기서는 수학적 규칙 자체의 결과를 계산하고 현실 적용의 범위는 별도로 판단한다.



매번 세 배가 되는 등비수열

탐구

첫 항 5에서 매번 두 배가 된다면 여섯째 항은 얼마인가?

풀이와 확인

$5 \times 2^5 = 160$이다. 첫 항 이후 다섯 번 두 배가 된다.

등비수열의 합을 빼기로 구하기

같은 목록을 비율만큼 곱한 뒤 빼면 가운데 항들이 사라진다.

S=1+2+4+8+16이라고 하자. 양쪽을 두 배 하면 2S=2+4+8+16+32이다. 두 식을 빼면 가운데 항들이 없어지고 S=32−1=31이 남는다. 긴 덧셈을 양끝 두 항의 차이로 바꾼 것이다.

일반적으로 첫 항 1과 공비 r의 n개 항을 더하면 S=1+r+...+r^(n−1)이다. rS에서 S를 빼면 (r−1)S=r^n−1이므로 r≠1일 때 S=(r^n−1)/(r−1)이다. r=1이면 모든 항이 1이므로 합은 n이다.

특수한 경우를 따로 쓰는 까닭은 분모가 0이 되는 식을 피하기 위해서이다. 공식을 암기할 때 조건을 떼어 내면 실제로 가장 단순한 공비 1에서 오류가 생긴다. 유도 과정을 알면 조건이 어디서 필요한지 이해할 수 있다.

$$S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16$$
$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32$$
$$S = 32 - 1 = 31$$

등비수열의 합을 빼기로 구하기의 계산 관계

탐구

1+3+9+27의 합을 이 방법으로 구하자.

풀이와 확인

3S−S=81−1이므로 2S=80이다. 따라서 S=40이다.

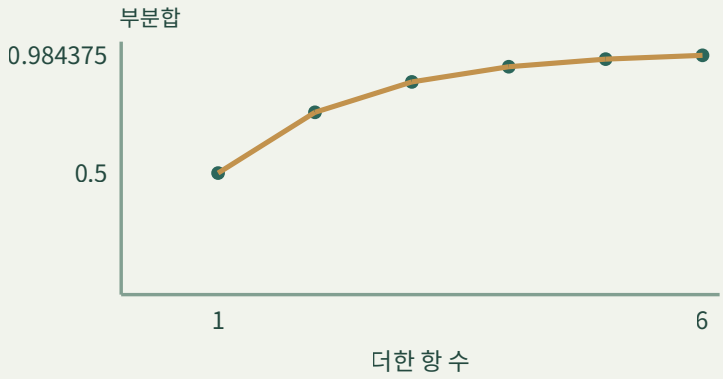
유한합과 무한 과정

끝없이 항을 더한다는 말은 매 단계의 부분합이 어디로 향하는지 묻는 말이다.

1/2+1/4+1/8을 더하면 7/8이다. 네 항까지 더하면 15/16이며 n개 항까지 더한 값은 1−1/2^n이다. 어떤 유한한 단계에서도 합은 1보다 작지만 남은 차이는 점점 작아진다.

이 경우 무한합이 1이라고 말하는 것은 마지막 항을 실제로 끝까지 더했다는 뜻이 아니다. 원하는 양의 오차보다 차이가 작아지도록 충분히 많은 항을 고를 수 있다는 뜻이다. 예를 들어 차이가 1/100보다 작게 하려면 일곱 항이면 된다. 1/128<1/100이기 때문이다.

항이 0에 가까워진다는 사실만으로 무한합이 존재하는 것은 아니다. 어떤 수열은 각 항이 작아져도 합이 계속 커진다. 여기서는 부분합의 정확한 식을 구했기 때문에 결론을 낼 수 있다. 무한을 다룰 때는 직관과 함께 오차를 제어하는 근거가 필요하다.



1에 가까워지는 유한한 부분합

탐구

1/2부터 여덟 항을 더한 부분합과 1 사이의 차는 얼마인가?

풀이와 확인

$1/2^8=1/256$이다. 부분합은 255/256이다.

작아지는 항인데 커지는 합

한 항의 크기와 전체 합의 크기는 다른 질문이다.

1+1/2+1/3+1/4+…을 생각하자. 각 항은 0에 가까워지지만 부분합은 한없이 커진다. 이를 보려면 분모가 2의 거듭제곱 사이에 있는 항들을 묶는다. 1/3+1/4는 1/4 두 개의 합보다 크므로 1/2보다 크다.

다음 묶음 1/5부터 1/8까지는 각 항이 1/8 이상이고 네 항이 있으므로 합이 1/2 이상이다. 1/9부터 1/16까지도 같은 이유로 1/2 이상이다. 새로운 묶음이 생길 때마다 적어도 1/2이 추가되므로 합에는 상한이 없다.

이 예는 무한급수에서 필요한 조건과 충분한 조건을 구분하게 한다. 수렴하려면 항이 0으로 가야 하지만 그것만으로 충분하지는 않다. 느린 발산은 짧은 계산표에서 잘 드러나지 않으므로 몇 개의 소수 결과만 보고 결론을 내리지 않는다.

$$1/3 + 1/4 \geq 2/4$$
$$1/5 + \cdots + 1/8 \geq 4/8$$
$$1/17 + \cdots + 1/32 \geq 16/32$$

작아지는 항인데 커지는 합의 계산 관계

탐구

1/17부터 1/32까지의 합은 왜 1/2 이상인가?

풀이와 확인

16개의 항이 있고 각 항이 1/32 이상이므로 전체가 16/32=1/2 이상이다.

수열의 조건을 비교하기

초기값과 변화 규칙과 합을 구하는 범위를 나누어 읽는다.

수열 A는 첫 항 1에서 매번 2를 더하고 수열 B는 첫 항 1에서 매번 두 배가 된다고 하자. 첫 네 항은 A가 1과 3과 5와 7이며 B가 1과 2와 4와 8이다. 넷째 항에서는 B가 더 크지만 앞의 네 항 합은 A가 16이고 B가 15이다.

한 항이 더 크다고 그때까지의 누적합도 반드시 더 큰 것은 아니다. 이전 항들이 남긴 차이가 있기 때문이다. 다섯 항까지 가면 A의 합은 25이고 B의 합은 31이 되어 순서가 바뀐다. 무엇을 비교하는지 제목에 명확하게 써야 한다.

표나 그래프를 만들 때 항의 값과 누적합을 서로 다른 계열로 표시한다. 두 규칙을 직접 계산한 뒤 식으로 일반화하면 처음의 관찰을 더 넓게 검토할 수 있다. 이 비교는 역사적 수열 문제를 현대의 데이터 읽기와 연결하는 작은 연습이다.

항 수	A의 합	B의 합
3	9	7
4	16	15
5	25	31
6	36	63

한 항의 값과 다른 누적합의 비교

탐구

두 수열의 여섯 항까지의 합은 각각 얼마인가?

풀이와 확인

A는 처음 여섯 홀수의 합이므로 36이다. B는 1부터 32까지 두 배 수열이므로 63이다.

인도관 / 25

케랄라의 무한급수

남인도의 계산 전통

케랄라 수학의 성취는 한 인물의 이름과 한 줄의 공식만으로 설명되지 않는다.

마드하바와 뒤를 이은 케랄라의 학자들은 천문 계산과 관련된 급수 및 근사법을 발전시켰다. 오늘날의 역사 연구는 후대 문헌의 기록과 해설을 비교해 이 전통을 재구성한다. 어떤 결과가 누구에게 귀속되는지와 어떤 원문이 남아 있는지는 구분해서 읽어야 한다.

이 장에서는 π/4=1−1/3+1/5−1/7+…이라는 교대급수를 현대 기호로 다룬다. 당시의 표현과 현대 해석학의 엄밀한 정의를 같은 것으로 보지는 않는다. 역사적 성취를 인정하는 일과 오늘의 증명 기준으로 다시 분석하는 일은 함께 할 수 있다.

핵심 질문은 무한히 이어지는 식을 어떻게 유한한 계산에 쓸 것인가이다. 몇 항을 더할지와 그때 오차가 어느 정도인지 알아야 실제 값으로 사용할 수 있다. 계산 결과에 소수 자리가 많아도 오차 평가가 없다면 그 자릿수를 모두 믿을 수는 없다.

$$\pi/4 = 1 - 1/3 + 1/5 - 1/7 + \cdots$$

유한한 계산 → 부분합

부분합과 참값 사이 → 오차

남인도의 계산 전통의 계산 관계

탐구

무한급수를 실제 계산에 쓰려면 공식 외에 어떤 정보가 필요한가?

풀이와 확인

중단할 항의 수와 남은 오차의 크기를 평가하는 방법이 필요하다. 반올림 오차도 별도로 살펴야 한다.

[S7] V. N. Krishnachandran: On Mādhava and his correction terms

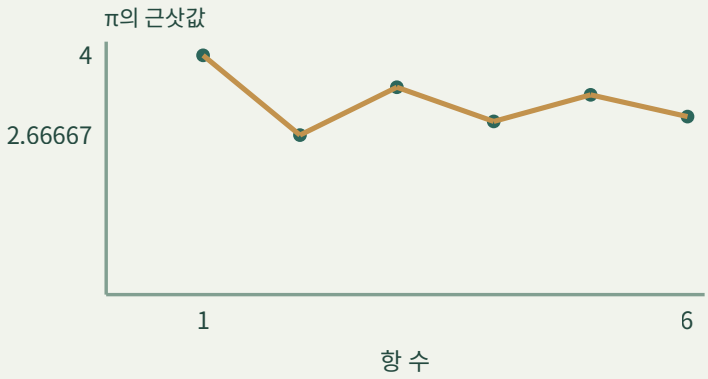
위아래로 번갈아 접근하기

교대하는 부호는 부분합이 참값의 양쪽에 놓이게 한다.

첫 항만 쓰면 π의 근삿값은 4이다. 두 항을 쓰면 4(1−1/3)=8/3이다. 세 항은 52/15이며 네 항은 304/105이다. 값이 커졌다 작아졌다 하면서 실제 π를 사이에 두고 움직인다.

항의 크기 1과 1/3과 1/5는 감소하며 0으로 간다. 이 조건을 가진 교대급수에서는 홀수 개 항의 부분합과 짝수 개 항의 부분합이 양쪽 경계를 만든다. 단순히 부호가 번갈아 나온다는 사실만으로 이런 결론을 쓰면 안 된다. 항 크기의 조건도 필요하다.

부분합의 그래프를 그릴 때 가로축을 항의 수로 정하고 세로축을 π의 근삿값으로 정한다. 연속된 두 값의 차이는 새로 더한 항의 네 배이다. 이 차이가 줄어드는 모습을 계산과 그림에서 함께 확인할 수 있다.



교대급수의 부분합은 위아래로 움직인다

탐구

다섯째 항을 더하면 네 항의 근삿값에서 얼마나 커지는가?

풀이와 확인

다섯째 항은 +1/9이므로 π의 근삿값은 4/9만큼 커진다.

다음 항으로 오차 묶기

교대급수에서는 계산하지 않은 첫 항이 오차의 상한을 줄 수 있다.

π/4의 급수를 n개 항까지 더한 부분합을 S(n)이라 하자. 다음 항의 크기는 1/(2n+1)이다. 교대급수 오차 평가를 적용하면 $|\pi - 4S(n)| \le 4/(2n+1)$이다. 부분합 자체를 정확히 계산했다는 조건에서 얻는 경계이다.

오차를 0.01보다 작게 보장하려면 $4/(2n+1)<0.01$이어야 한다. 즉 $2n+1>400$이므로 n=200이면 충분하다. 소수 둘째 자리 정도의 작은 오차를 위해서도 많은 항이 필요하다. 이 급수는 이해하기 쉽지만 수렴이 느리다.

오차 상한이 0.01보다 작다는 말과 반올림한 소수 둘째 자리가 반드시 같다는 말은 완전히 동일하지 않다. 참값이 반올림 경계에 얼마나 가까운지도 영향을 준다. 계산의 정확성을 설명할 때는 어떤 기준의 오차인지 명확하게 표현한다.

항 수 n	오차 상한
20	4/41
200	4/401
2000	4/4001

π의 오차를 다음 항으로 묶는 표

탐구

오차를 0.001보다 작게 보장하려면 몇 항이면 충분한가?

풀이와 확인

4/(2n+1)<0.001에서 2n+1>4000이다. 따라서 n=2000이면 충분하다.

남은 꼬리를 보정하기

부분합 뒤의 영향을 어림해 덧붙이면 적은 계산으로 정확도를 높일 수 있다.

무한급수의 앞부분만 더하면 뒤에 남은 항들의 효과가 오차가 된다. 그 꼬리를 근사하는 별도의 식을 덧붙이는 것이 보정항의 발상이다. 마드하바에게 귀속되는 보정항은 현대 연구에서도 원문과 설명을 비교하며 분석한다.

여기서는 단순한 교육용 보정을 사용한다. π/4의 n항 부분합에 다음 항의 절반인 (−1)^n/[2(2n+1)]을 더한다. 이것은 연속한 두 부분합의 평균과 같다. 참값이 두 부분합 사이에 있으므로 평균을 쓰면 보장되는 최대 오차가 그 간격의 절반으로 줄어든다.

이 간단한 평균을 역사적 마드하바 보정 공식이라고 부르지는 않는다. 보정이라는 생각을 보여 주는 현대의 예시이다. 역사에 알려진 방법을 설명할 때는 실제 전승 공식과 수업을 위해 만든 쉬운 대안을 구분해야 독자가 출처를 오해하지 않는다.

참값은 S(n)과 S(n+1) 사이

평균 = S(n) + (−1)^n/[2(2n+1)]

최대 거리 = 구간 길이의 절반

남은 꼬리를 보정하기의 계산 관계

탐구

두 근삿값 3.0과 3.4 사이에 참값이 있다고만 알 때 평균을 쓰면 최대 오차는 얼마인가?

풀이와 확인

평균은 3.2이며 최대 오차는 0.2이다. 구간의 절반 길이로 오차를 묶는다.

[S7] V. N. Krishnachandran: On Mādhava and his correction terms

전승된 보정항을 직접 계산하다

남은 항들의 효과를 추정하는 공식은 적은 계산으로도 큰 차이를 만든다.

케랄라 문헌의 보정항을 검토한 연구는 n항 부분합 뒤에 붙이는 근사량 $n/(4n^2+1)$을 소개한다. 현대 기호로 S(n)=1−1/3+...+(−1)^(n−1)/(2n−1)이라 적으면 π/4를 S(n)+(−1)^n n/(4n²+1)로 근사한다. 여기서는 전승 공식과 우리가 하는 수치 검산을 구분한다.

n=2이면 S(2)=2/3이다. 보정량은 2/17이며 부호가 양수이므로 합은 40/51이다. 네 배 하면 π의 근삿값 160/51을 얻는다. 소수로 약 3.1372549이다. 보정 전의 8/3보다 원주율에 훨씬 가까워졌다.

n=4에서는 S(4)=76/105이고 보정량은 4/65이다. 두 분수를 더한 뒤 네 배 하면 4288/1365이며 약 3.1413919이다. 기준값 π≈3.1415926536과 비교한 절대오차는 약 0.0002007이다. 네 항만 사용했을 때의 성능을 직접 확인한 결과이다.

두 사례의 성공이 모든 n에 대한 오차 보증을 대신하지는 않는다. 일반적인 정확도를 말하려면 남는 차이를 평가하는 별도 논증이 필요하다. 또한 앞의 두 부분합을 평균하는 학습용 보정과 이 전승 공식은 다르다. 닮은 목적을 가진 절차라도 실제 식과 출처를 함께 적어야 한다.

사용한 항 수	보정 뒤 π 근삿값	대략적인 절대오차
2	160/51	0.0043378
4	4288/1365	0.0002007

탐구

n=3일 때 보정량을 더해야 하는가 빼야 하는가?

풀이와 확인

$(-1)^3=-1$이므로 3/37을 뺀다. 세 항의 부분합은 π/4보다 크다. 보정의 부호를 빠뜨리면 오히려 그 차이를 키운다.

[S7] V. N. Krishnachandran: On Mādhava and his correction terms

변수를 넣은 급수

같은 구조의 급수도 입력값에 따라 수렴 속도가 달라진다.

아크탄젠트의 급수를 현대 기호로 쓰면 $\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \dots$이다. $|x| \le 1$에서 적절한 수렴 해석으로 사용할 수 있으며 x=1을 넣으면 π/4의 급수가 된다. 여기서 각도는 라디안으로 측정한다.

x=1/2이면 항의 크기가 1/2와 1/24와 1/160으로 빠르게 작아진다. 첫 두 항의 합은 11/24이다. 다음 항의 크기 1/160이 오차의 상한을 준다. x=1일 때보다 거듭제곱이 작아지는 효과가 추가되어 계산이 빨라진다.

입력값을 작게 만든 뒤 각도의 덧셈 관계로 원하는 값을 복원할 수 있다면 효율이 좋아진다. 다만 그런 변환을 쓸 때는 각도가 속한 범위를 확인해야 한다. 삼각함수의 주기 때문에 같은 탄젠트값이 곧 같은 각도를 뜻하지 않을 수 있기 때문이다.

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \cdots$$

$$x = 1/2$$

$$1/2 - 1/24 + 1/160 - \cdots$$

변수를 넣은 급수의 계산 관계

탐구

x=1/2에서 첫 세 항의 부호와 분모를 적어 보자.

풀이와 확인

+1/2와 −1/24와 +1/160이다. 각 항은 x의 홀수 거듭제곱을 그 홀수로 나눈 값이다.

기하급수에서 출발하는 설명

적분을 이용하면 아크탄젠트 급수의 형태가 어디서 나오는지 볼 수 있다.

$|t|<1$에서 $1/(1+t^2)=1-t^2+t^4-t^6+\ldots$이다. 이는 공비가 $-t^2$인 기하급수이다. 0부터 x까지 적분하면 각 거듭제곱의 차수가 하나 늘고 새 지수로 나누어져 $x-x^3/3+x^5/5-\ldots$이 나타난다.

왼쪽 적분은 arctan x이다. 다만 무한합을 항별로 적분하는 데에는 정당화가 필요하다. $|x|<1$인 닫힌 구간에서 수렴을 제어한 뒤 진행하고 끝점 x=1은 추가 논증으로 다룬다. 계산 모양이 자연스럽다고 모든 무한 연산을 자유롭게 바꿀 수 있는 것은 아니다.

이 쪽의 유도는 현대 미적분을 이용한 설명이다. 이를 케랄라 원문의 증명 문장과 동일하다고 소개하지 않는다. 같은 공식을 여러 방식으로 이해할 수 있지만 각 설명이 쓰는 개념과 시대적 배경은 분명히 밝혀야 한다.

$$1/(1+t^2) = 1 - t^2 + t^4 - \cdots$$

0부터 x까지 적분

$$\arctan x = x - x^3/3 + x^5/5 - \cdots$$

기하급수에서 출발하는 설명의 계산 관계

탐구

$-t^2$을 0부터 x까지 적분하면 왜 $-x^3/3$이 되는가?

풀이와 확인

$t^3/3$의 미분이 t^2이므로 부정적분은 $-t^3/3$이다. 0과 x의 값을 빼면 $-x^3/3$이 된다.

작은 두 각도로 원주율을 계산하기

급수의 입력을 줄이면 같은 항 수에서도 오차가 빠르게 작아진다.

α=arctan(1/2)와 β=arctan(1/3)이라 하자. 탄젠트 덧셈공식에 넣으면 tan(α+β)=(1/2+1/3)/(1−1/6)=1이다. 두 각은 양수이며 각각 π/4보다 작으므로 합은 0과 π/2 사이이다. 이 범위에서 탄젠트가 1인 각은 π/4이다.

따라서 π=4[arctan(1/2)+arctan(1/3)]이다. 두 아크탄젠트에 앞서 배운 교대급수를 적용할 수 있다. x=1을 바로 넣는 급수와 달리 거듭제곱 항에 각각 1/4과 1/9의 감소 비율이 추가된다. 입력을 줄이는 변환이 계산 비용을 낮춘 것이다.

각 급수를 다섯 항까지 더하면 각각의 다음 항 크기는 (1/2)^11/11과 (1/3)^11/11이다. 두 오차를 더한 뒤 4를 곱하면 π에 대한 절대오차는 약 0.0001797보다 작다. 원래 x=1 급수의 열 항에 적용한 상한 4/21보다 훨씬 작다.

이 항등식과 오차 비교는 현대의 독자를 위해 제시한 계산 전략이다. 특정 케랄라 학자가 이 두 입력을 사용했다는 역사적 주장은 하지 않는다. 수렴이 빠른 식을 선택하는 일과 그 식의 전승 경로를 입증하는 일을 구분하면서도 같은 수학적 발상을 확장할 수 있다.

계산 방식	총 사용 항 수	π 오차의 상한
x=1 급수	10	4/21
두 작은 입력의 급수	5+5	약 0.0001797 미만

> **탐구**
>
> 탄젠트값이 같다는 사실만으로 두 각이 같다고 해도 되는가?

풀이와 확인

안 된다. 탄젠트는 주기가 π이다. 이 예에서는 두 각의 합이 0과 π/2 사이임을 확인했으므로 π/4로 결정할 수 있다.

빠른 계산과 검증

계산기를 이용해도 어떤 수를 더했는지 남기면 결과를 재현할 수 있다.

π의 교대급수를 프로그램이나 표로 계산한다면 항 번호 k를 0부터 시작해 4(−1)^k/(2k+1)을 더하면 된다. n개 항은 k=0부터 n−1까지이다. 시작 번호를 1로 바꾸면서 식을 그대로 두면 첫 항 4를 빠뜨리는 오류가 생긴다.

결과 옆에는 항의 수와 오차 상한 4/(2n+1)을 함께 기록한다. 계산기가 표시한 소수 열다섯 자리가 실제로 열다섯 자리의 정확도를 보장하지는 않는다. 계산한 부분합의 반올림 정밀도와 무한급수의 절단 오차는 서로 다른 문제이다.

검산에는 처음 두세 항을 손으로 계산한 값과 프로그램의 중간값을 비교하는 방법이 유용하다. 부호가 바뀌는 순서와 분모가 홀수로 증가하는 규칙을 확인한다. 큰 계산을 하기 전에 작은 사례에서 구조를 확인하면 눈에 띄지 않는 반복 오류를 줄일 수 있다.

항 k = 4(−1)^k/(2k + 1)

k = 0부터 n−1까지

기록 부분합 / 항 수 / 오차 상한

빠른 계산과 검증의 계산 관계

탐구

k=0부터 k=9까지 더했다면 항의 수와 오차 상한은 무엇인가?

풀이와 확인

열 항을 더했다. π에 대한 오차 상한은 4/21이다. 마지막 번호 9를 항의 수로 사용하면 안 된다.

발견과 전파를 구분하기

비슷한 공식이 두 곳에 나타났다는 사실만으로 전달 경로가 확정되지는 않는다.

수학사에서 어떤 결과가 먼저 기록되었는지와 그 지식이 다른 지역에 전달되었는지는 다른 질문이다. 전자는 문헌의 연대와 내용을 검토하고 후자는 접촉 경로와 번역과 인용 같은 증거를 찾는다. 공식이 같다는 이유만으로 그 사이의 경로가 자동으로 채워지지는 않는다.

케랄라 급수와 유럽의 후대 결과를 비교할 때에도 각 전통의 문제와 표현과 증명 방식을 함께 살펴야 한다. 발견의 가치를 인정하려고 확인되지 않은 전파 이야기를 보탤 필요는 없다. 불확실한 부분을 남겨 두는 설명이 더 정확할 수 있다.

독서 기록에는 확인된 문헌 사실과 현대적 수학 해석과 전파 가설을 구분해 적어 보자. 어떤 주장이 새 자료로 바뀔 수 있는지도 표시한다. 이 태도는 역사적 공로를 단순한 순위 경쟁으로 줄이지 않고 지식이 자라는 여러 방식을 이해하게 한다.

문헌의 내용과 연대
접촉과 번역의 증거
확인된 사실과 가설을 구분

발견과 전파를 구분하기의 계산 관계

탐구

두 책에 같은 급수가 있을 때 전달을 입증하려면 어떤 추가 자료가 도움이 되는가?

풀이와 확인

한 저자가 다른 책을 읽었다는 기록과 번역본 및 구체적 접촉 경로 등이 도움이 된다. 공식의 일치만으로는 충분하지 않다.

인도관 / 26

사인표와 하늘의 계산

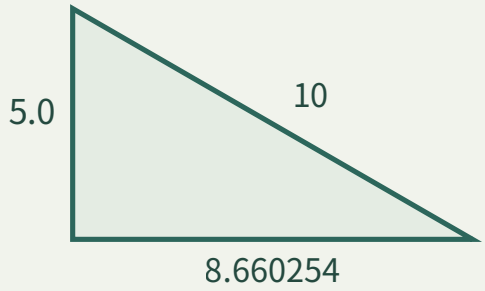
각도를 길이로 바꾸기

원의 한 각도에 대응하는 높이를 기록하면 반복되는 천문 계산을 돕는 표가 된다.

반지름이 1인 원에서 중심각 θ를 정하고 원 위 점에서 가로축으로 수선을 내리자. 그 높이가 현대의 sin θ이다. 반지름을 R로 바꾸면 높이는 R sin θ가 된다. 비율인 사인값과 실제 길이를 나타내는 값은 구별해야 한다.

아리아바타의 저술에는 사인 계산과 표가 등장한다. 역사적 표를 오늘의 계산기 출력과 비교할 때는 사용한 반지름과 각도 간격과 반올림 규칙을 확인해야 한다. 숫자의 크기만 보고 오늘의 사인값과 다르다고 판단하면 단위를 놓치게 된다.

이 장의 그림과 표는 현대 정의로 새로 만든 학습 자료이다. 실제 필사본의 수치 배열을 복제한 것은 아니다. 원과 직각삼각형을 오가며 각도에서 길이를 얻는 구조를 이해하면 서로 다른 시대의 표가 수행한 역할을 더 쉽게 읽을 수 있다.



30도에 대응하는 높이 5. 밑변 표시는 근삿값

> **탐구**
>
> 반지름이 10이고 각도가 30도이면 수직 높이는 얼마인가?

풀이와 확인

$\sin 30^\circ = 1/2$이므로 높이는 $10 \times 1/2 = 5$이다. 사인값 1/2와 길이 5는 다른 양이다.

[S2] University of St Andrews: Aryabhata I

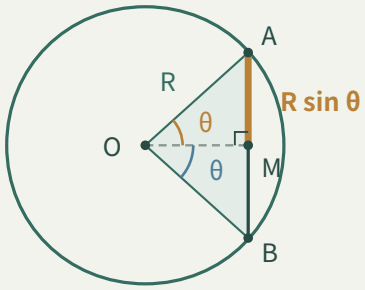
현과 반현의 관계

같은 원에서도 어떤 선분을 재는지에 따라 표에 들어가는 값이 달라진다.

중심각이 2θ인 현의 양끝을 원의 중심과 이으면 이등변삼각형이 된다. 중심에서 현의 중점으로 수선을 내리면 두 직각삼각형으로 나뉜다. 현의 절반 길이는 $R \sin \theta$이므로 전체 현은 $2R \sin \theta$이다.

중심각 60도의 현을 반지름 1인 원에서 구하면 $2\sin 30^\circ = 1$이다. 이 경우 중심과 양끝이 만드는 삼각형은 정삼각형이다. 반면 $\sin 60^\circ$는 $\sqrt{3}/2$이므로 두 값을 그대로 비교하면 서로 다르다. 각도를 절반으로 바꾸는 관계가 끼어 있다.

고전 삼각법의 표를 비교할 때 현과 반현을 같은 이름으로 섞지 않는다. 어느 각도에 어느 선분이 대응하는지 도형에 표시하면 번역된 용어의 차이도 정리할 수 있다. 그림은 단순한 삽화가 아니라 정의를 정확히 읽기 위한 도구이다.



중심각 AOB = 2θ

반현 AM = R sin θ

현 AB = 2R sin θ

2θ = 60°이면 AB = 2R sin 30° = R

중심에서 내린 수선이 현을 반으로 나누어 반현 R sin θ를 만든다.

탐구

반지름 5인 원에서 중심각 60도인 현의 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

$2\times5\times\sin30°=5$이다. 반지름과 같은 길이가 된다.

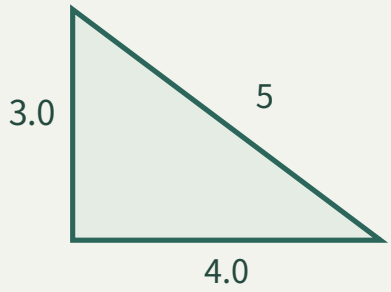
직각삼각형의 세 비율

같은 각도를 가진 닮은 삼각형은 변의 비율을 공유한다.

높이가 3이고 밑변이 4이며 빗변이 5인 직각삼각형을 생각하자. 밑변에 붙은 예각을 θ로 놓으면 $\sin\theta=3/5$이고 $\cos\theta=4/5$이며 $\tan\theta=3/4$이다. 모두 같은 각도를 기준으로 하지만 분모와 비교 대상이 다르다.

삼각형의 모든 변을 두 배로 늘리면 6과 8과 10이 된다. 각도는 같고 세 비율도 그대로이다. 그래서 사인표 하나를 여러 크기의 삼각형에 적용할 수 있다. 원래 길이를 얻으려면 마지막에 실제 크기를 곱해야 한다.

어느 예각을 기준으로 삼는지도 중요하다. 다른 예각을 택하면 높이와 밑변의 역할이 바뀌어 사인과 코사인이 서로 바뀐다. 도형을 돌려 그렸다고 비율이 바뀌는 것은 아니지만 기준 각도를 바꾸면 이름에 대응하는 변이 바뀐다.



밑변 오른쪽의 예각을 기준으로 읽는 직각삼각형

탐구

빗변이 20이며 sin θ=3/5이면 맞은편 변의 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

20×3/5=12이다. 원래 3과 4와 5인 삼각형을 네 배 한 경우와 같다.

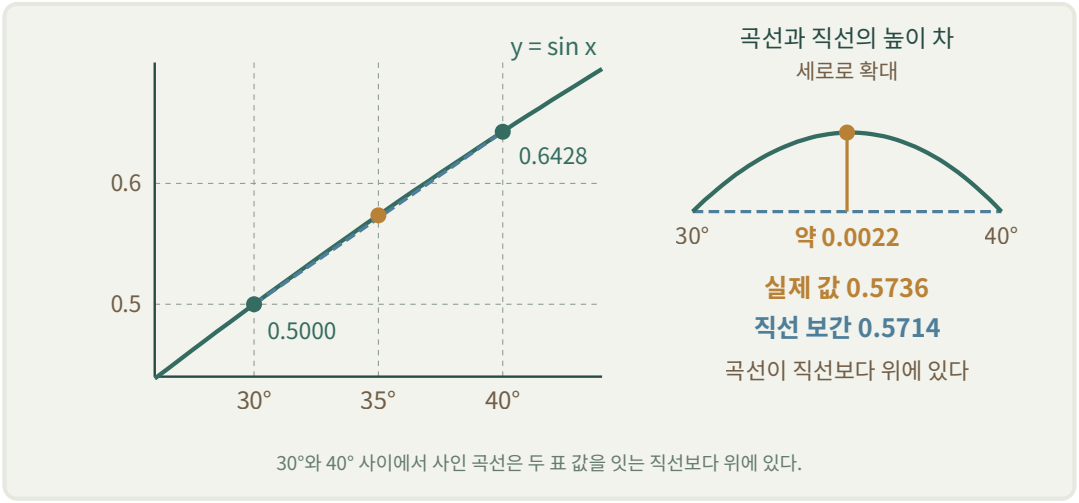
표 사이의 값을 읽기

계산표에 없는 각도는 주변 값으로 근사하되 그 방법의 한계를 함께 적는다.

학습용 표에서 sin30°=0.5000과 sin40°≈0.6428을 알고 있다고 하자. 35도는 두 각도의 가운데이므로 선형 보간을 하면 두 값의 평균 0.5714를 얻는다. 실제 sin35°는 약 0.5736이므로 차이는 약 0.0022이다.

사인 그래프는 직선이 아니므로 각도의 중간값이 사인값의 정확한 중간값은 아니다. 표의 간격을 줄이면 보간 오차가 줄어들 수 있지만 반올림 오차도 남는다. 보간법 자체의 오차와 표에 저장된 수치의 오차를 구분해서 기록한다.

이 예의 각도와 숫자는 원리를 보이기 위해 새로 구성했다. 역사적 표를 다룰 때에는 실제 문헌이 어떤 차분과 보간 규칙을 사용했는지 별도의 자료로 확인해야 한다. 오늘의 편리한 방법을 과거의 계산법으로 잘못 귀속하지 않는 것이 중요하다.



30°와 40° 사이에서 사인 곡선은 두 표 값을 잇는 직선보다 위에 있다.

탐구

같은 두 표 값으로 32도를 선형 보간하면 얼마인가?

풀이와 확인

30도에서 전체 간격의 2/10만큼이므로 0.5000+0.2×0.1428=0.52856이다. 이는 근삿값이다.

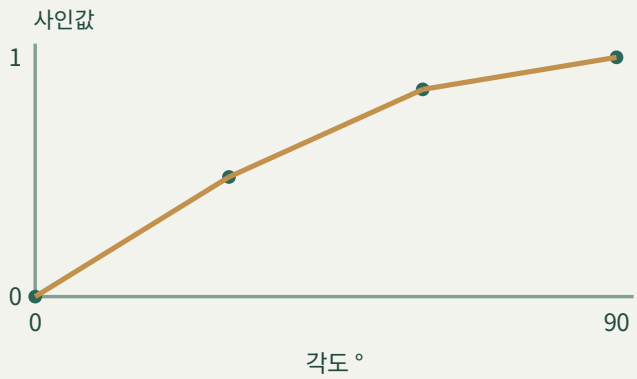
차분으로 표의 변화를 보기

값의 차이를 기록하면 증가 속도가 어떻게 바뀌는지 보인다.

sin0°와 sin30°와 sin60°와 sin90°의 값은 각각 0과 1/2과 √3/2과 1이다. 소수로 읽으면 0과 0.5000과 약 0.8660과 1.0000이다. 각도 간격은 모두 30도이지만 사인값의 증가량은 약 0.5000과 0.3660과 0.1340으로 작아진다.

따라서 사인이 0도에서 90도까지 증가한다는 말과 일정한 속도로 증가한다는 말은 다르다. 처음에는 같은 각도 변화가 큰 높이 변화를 만들지만 꼭대기에 가까워질수록 높이가 덜 변한다. 원 위 점의 이동을 상상하면 이유를 직관적으로 이해할 수 있다.

차분표는 이러한 변화의 크기를 압축해서 기록한다. 다만 간격을 바꾸면 차분도 달라지므로 서로 다른 표를 비교할 때 간격을 함께 확인한다. 현대의 차분 계산을 연습하면서 역사적 표가 반복 계산에 어떤 도움을 주었을지 생각해 보자.



같은 30도 간격에서 줄어드는 증가량

탐구

60도에서 90도 사이의 사인값 증가량은 정확히 무엇인가?

풀이와 확인

$1-\sqrt{3}/2$이다. 약 0.1340이며 0도에서 30도까지의 증가량 1/2보다 작다.

라디안이 필요한 급수

삼각함수의 급수에 각도를 넣기 전에는 단위를 확인해야 한다.

현대의 사인 급수는 $\sin x = x - x^3/3! + x^5/5! - \dots$이다. 이 식에서 x는 라디안이다. 30도를 그대로 30이라고 넣으면 엉뚱한 계산이 된다. 30도는 $\pi/6$라디안이므로 먼저 단위를 바꾸어야 한다.

작은 값 $x = 0.1$라디안에서 두 항을 쓰면 $0.1 - 0.001/6 \approx 0.0998333$이다. 다음 항은 $0.00001/120$로 약 0.0000000833이다. 작은 각도에서 $\sin x$가 x에 가깝다는 사실과 그 차이를 급수로 확인할 수 있다.

라디안은 호의 길이를 반지름으로 나눈 비율이다. 반지름 1인 원에서는 호 길이가 곧 각도의 라디안 값이 된다. 도와 라디안은 같은 각도를 다른 척도로 나타내므로 숫자만 떼어 비교하지 않는다. 계산기의 각도 설정을 확인하는 습관도 이 정의에서 출발한다.

$$180^\circ = \pi \text{ 라디안}$$

$$\sin x = x - x^3/6 + x^5/120 - \cdots$$

$$x\text{는 라디안으로 입력}$$

라디안이 필요한 급수의 계산 관계

탐구

90도를 라디안으로 쓰면 무엇인가?

풀이와 확인

π/2이다. 한 바퀴 360도가 2π라디안이므로 그 4분의 1이다.

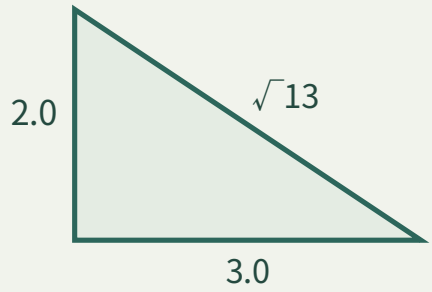
그림자로 높이 구하기

같은 태양 아래의 직각삼각형을 닮음으로 연결하면 직접 재기 어려운 길이를 구할 수 있다.

수직 막대의 높이가 2미터이고 그림자 길이가 3미터라고 하자. 같은 시각에 평평한 땅 위 탑의 그림자가 18미터라면 높이와 그림자의 비가 같다고 가정할 수 있다. h/18=2/3이므로 탑의 높이는 12미터이다.

이 모형은 태양광선을 평행하게 보고 막대와 탑이 수직이며 땅이 수평이라고 가정한다. 그림자의 끝이 흐리거나 지면이 기울어져 있으면 측정값이 달라진다. 계산식의 정확성과 실제 측정의 정확성을 따로 평가해야 한다.

같은 관계를 탄젠트로 쓰면 태양 고도각 θ에 대해 tan θ=높이/그림자이다. 먼저 비례로 풀어 본 뒤 삼각비 이름을 붙이면 공식이 왜 성립하는지 이해하기 쉽다. 역사적 측량의 특정 현장을 복원한 예는 아니며 기본 원리를 보여 주는 현대 활동이다.



수직 막대와 그림자가 이루는 직각삼각형

탐구

같은 조건에서 그림자가 15미터인 물체의 높이는 얼마인가?

풀이와 확인

15×2/3=10미터이다. 모든 길이는 같은 단위로 맞추어야 한다.

천문표를 읽는 네 가지 정보

숫자표를 사용할 때는 값보다 먼저 정의와 단위와 기준을 확인한다.

표의 열 제목이 각도이고 행에 30이라는 값이 있어도 그것이 도인지 분인지 라디안인지 알 수 없으면 계산할 수 없다. 사인이라는 이름 옆의 수 역시 비율인지 특정 반지름에 대응하는 길이인지 확인해야 한다. 표의 머리말은 숫자만큼 중요한 정보이다.

시간에 따른 천체 위치표라면 기준 날짜와 시간 척도도 필요하다. 같은 경도값이라도 기준 방향이 다르면 다른 위치를 뜻할 수 있다. 서로 다른 표를 비교하려면 먼저 같은 단위와 같은 기준으로 변환해야 한다.

독자는 작은 사인표를 직접 만들어 이 원칙을 연습할 수 있다. 제목에는 현대 정의에 따른 사인값이라고 쓰고 각도 단위와 반올림 자릿수와 계산 방법을 적는다. 표의 빈칸과 알 수 없는 값을 0으로 채우지 않는 것도 중요하다. 0은 실제 값이며 자료 없음의 표시와 다르다.

정의 어떤 길이 또는 비율인가
단위와 기준 무엇을 1로 삼는가
정밀도 어디까지 반올림했는가

천문표를 읽는 네 가지 정보의 계산 관계

탐구

사인표의 빈칸을 0으로 채우면 왜 문제가 되는가?

풀이와 확인

계산하지 않았다는 뜻을 실제 사인값이 0이라는 주장으로 바꾸기 때문이다. 자료 없음과 수치 0은 다른 정보이다.

인도관 / 27

라마누잔과 남겨진 노트

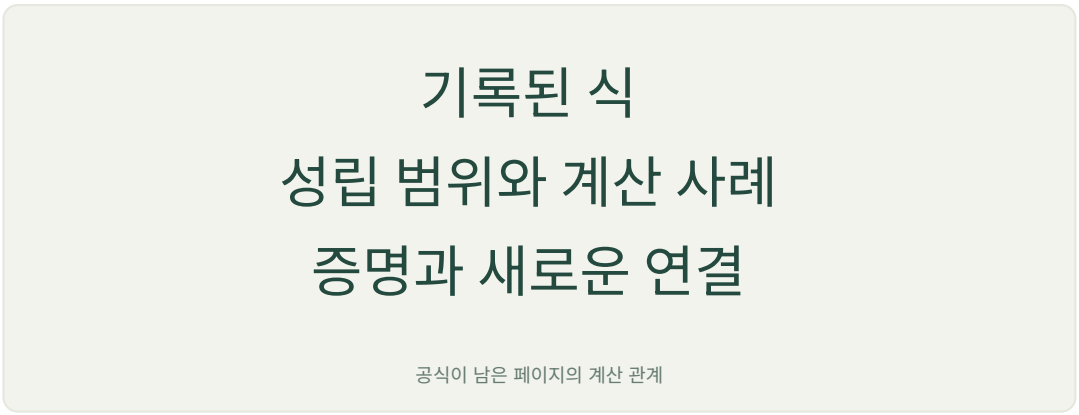
공식이 남은 페이지

짧게 기록된 결과는 독자에게 검증과 설명이라는 긴 작업을 남길 수 있다.

라마누잔의 노트는 수학적 결과가 어떻게 기록되고 다시 연구되는지 보여 주는 중요한 자료이다. 인도 수리과학연구소의 소개 자료와 케임브리지의 소장 기록은 노트와 관련 문헌을 살피는 출발점이 된다. 전기적 일화와 실제 수학 내용을 구분해서 읽는 편이 좋다.

노트에 식 하나가 적혀 있다고 해서 그 식을 둘러싼 모든 계산과 동기가 보존된 것은 아니다. 후대 연구자는 성립 범위를 찾고 증명을 구성하고 다른 결과와의 연결을 조사한다. 발견의 기록과 완성된 교과서의 설명은 서로 다른 목적을 가진다.

이 장에서는 라마누잔의 모든 고급 이론을 요약하려 하지 않는다. 정수의 분할과 수치 실험과 원고 읽기를 통해 결과를 발견하고 확인하는 태도를 연습한다. 수학자의 직관을 신비한 능력으로만 설명하기보다 기록된 식을 실제로 계산하고 질문하는 독자가 되어 보자.



탐구

노트에 정답만 있으면 무엇을 추가로 조사해야 하는가?

풀이와 확인

기호의 뜻과 성립 조건과 증명 및 관련된 다른 결과를 조사한다. 한두 사례의 성공은 일반적인 증명을 대신하지 않는다.

[S9] Institute of Mathematical Sciences: Ramanujan's Notebooks / [S10] Trinity College Cambridge: Ramanujan manuscript catalogue

정수를 나누는 방법

정수의 분할에서는 순서를 바꾸어도 같은 합으로 센다.

4를 양의 정수의 합으로 나타내는 방법을 순서와 무관하게 세어 보자. 4 자체와 3+1과 2+2와 2+1+1과 1+1+1+1의 다섯 가지이다. 3+1과 1+3은 같은 분할이므로 두 번 세지 않는다. 분할수 p(4)는 5이다.

빠짐없이 나열하려면 각 분할의 항을 큰 수부터 적는다. 첫 항이 4인 경우와 3인 경우와 2인 경우와 1인 경우로 나누면 중복을 피할 수 있다. 첫 항이 2이면 남은 합 2를 2 이하의 수로만 분할해야 한다.

순서를 구별하는 문제라면 답이 달라진다. 예를 들어 1+1+2와 1+2+1과 2+1+1은 그 경우 서로 다른 배열이다. 분할 문제의 첫 문장에는 순서를 구별하지 않는다고 명시하는 것이 좋다. 이름보다 세는 규칙이 먼저이다.

$$4$$
$$3+1 \,/\, 2+2$$
$$2+1+1$$
$$1+1+1+1$$

정수를 나누는 방법의 계산 관계

탐구

3의 분할을 모두 적고 p(3)을 구하자.

풀이와 확인

3과 2+1과 1+1+1의 세 가지이므로 p(3)=3이다.

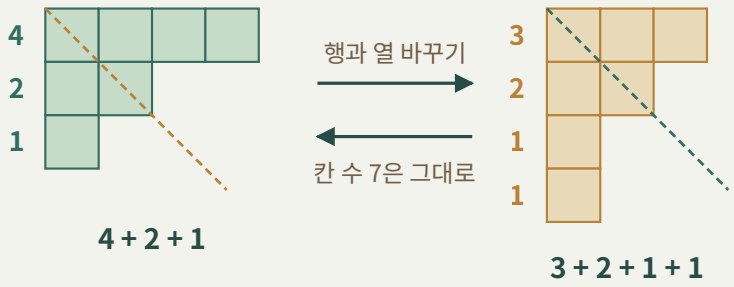
분할을 칸으로 그리기

같은 합을 도형으로 옮기면 수의 개수와 크기를 눈으로 비교할 수 있다.

분할 4+2+1을 왼쪽에 맞춘 세 줄의 칸으로 그리자. 첫 줄에는 네 칸이 있고 둘째 줄에는 두 칸이 있으며 셋째 줄에는 한 칸이 있다. 칸의 총수는 7이다. 이제 그림의 행과 열을 바꾸어 읽으면 열의 높이는 3과 2와 1과 1이다.

따라서 4+2+1과 3+2+1+1은 서로 대응한다. 이 변환을 한 번 더 하면 원래 그림으로 돌아간다. 가장 큰 항 4는 변환 뒤 항의 개수 4가 되고 원래 항의 개수 3은 새 가장 큰 항 3이 된다.

이 대응으로 n의 분할 중 가장 큰 항이 k인 경우와 항의 개수가 k인 경우의 수가 같다는 사실을 설명할 수 있다. 직접 두 목록을 세는 대신 뒤집을 수 있는 변환을 만든 것이다. 조합론에서는 이런 일대일 대응이 강력한 증명 도구가 된다.



4+2+1의 칸 그림을 대각선으로 뒤집으면 3+2+1+1이 된다.

탐구

분할 3+3+1의 그림을 행과 열을 바꾸어 읽으면 무엇인가?

풀이와 확인

열의 높이는 3과 2와 2이므로 3+2+2가 된다. 전체 칸 수 7은 그대로이다.

생성함수의 작은 모형

선택을 곱셈으로 묶으면 합의 종류를 계수로 읽을 수 있다.

1과 2만 사용해 정수를 분할한다고 하자. 1을 사용하는 횟수는 0번부터 가능하므로 $1+x+x^2+x^3+\dots$으로 기록한다. 2를 사용하는 횟수는 $1+x^2+x^4+x^6+\dots$으로 기록한다. 두 식을 곱할 때 지수는 사용한 수의 합이 된다.

x^4의 계수는 3이다. 첫 인수의 x^4와 둘째의 1을 고르는 경우 및 x^2와 x^2를 고르는 경우 및 1과 x^4를 고르는 경우가 있다. 이는 1+1+1+1과 2+1+1과 2+2에 대응한다.

여기서 x는 수치를 넣기 위한 변수라기보다 합을 기록하는 표지로 볼 수 있다. 일정한 차수의 계수만 구한다면 그보다 큰 차수의 항은 계산에서 제외해도 된다. 무한한 식의 모양에 놀라기보다 작은 목표 차수부터 전개하면 구조를 이해할 수 있다.

$$(1 + x + x^2 + \cdots)(1 + x^2 + x^4 + \cdots)$$

$$x^4\text{의 계수} = 3$$

지수는 합을 기록한다

생성함수의 작은 모형의 계산 관계

탐구

1과 2만 사용한 5의 분할은 몇 개인가?

풀이와 확인

2를 0개와 1개와 2개 쓰는 세 가지이다. 나머지는 1로 채우므로 x^5의 계수도 3이다.

분할표를 채우는 작은 알고리즘

중복 없는 경우 분류를 사용하면 손으로 세기 어려운 분할수를 계산할 수 있다.

1부터 k까지의 수만 사용하여 n을 분할하는 개수를 P(n과 k)라고 적자. 순서는 구별하지 않고 같은 수를 여러 번 써도 된다. 분할은 k를 전혀 쓰지 않는 경우와 k를 적어도 한 번 쓰는 경우로 나뉜다. 두 경우는 겹치지 않는다.

앞의 개수는 P(n과 k−1)이다. 뒤의 분할에서 k 하나를 떼면 합이 n−k인 분할이 남고 여전히 k까지 사용할 수 있다. 따라서 뒤의 개수는 P(n−k와 k)이다. n≥k일 때 두 값을 더하면 P(n과 k)가 된다. n<k이면 k를 사용할 수 없어 앞의 값만 남는다.

출발점도 중요하다. 0의 분할은 빈 분할 하나로 세며 양수를 아무 수 없이 만드는 방법은 0개이다. 이 기준에서 표를 채우면 P(5와 5)=7을 얻는다. 가장 큰 수를 하나씩 허용하는 순서를 지키면 같은 분할을 항의 순서만 바꾸어 여러 번 세지 않는다.

이 알고리즘은 라마누잔의 원래 계산 과정을 복원한 것이 아니라 분할수의 정의를 현대적으로 구현한 것이다. 직접 목록을 만들 수 있는 작은 n으로 먼저 검산한 뒤 큰 값에 적용한다. 앞에서 본 합동식을 확인할 자료를 얻을 수 있지만 계산표가 일반적인 합동식의 증명 자체가 되지는 않는다.

허용하는 가장 큰 수	합 5의 분할 수
1	1
2	3
3	5
4	6
5	7

탐구

1과 2와 3만 허용할 때 5의 분할은 몇 개인가?

풀이와 확인

다섯 개이다. 1과 2만 사용한 세 경우에 3+2와 3+1+1이 추가된다. 표에서도 P(5와 3)=P(5와 2)+P(2와 3)=3+2=5이다.

[S11] NIST Digital Library of Mathematical Functions: Unrestricted Partitions

나머지에서 발견하는 규칙

분할수의 특정 항에 나타나는 나눗셈 규칙은 새로운 질문을 만든다.

라마누잔의 이름과 연결되는 대표적인 분할 합동식 가운데 하나는 p(5n+4)가 5의 배수라는 것이다. n=0이면 p(4)=5이고 n=1이면 p(9)=30이다. 두 예는 규칙에 맞지만 모든 n에 대한 증명을 대신하지는 않는다.

이 명제는 p(n)이 항상 5의 배수라는 뜻이 아니다. 입력값이 5로 나누어 나머지 4인 경우를 따로 고른다. 입력의 나머지와 출력의 나머지를 연결하는 주장이다. 식을 읽을 때 어느 부분에 조건이 붙는지 먼저 확인한다.

더 많은 값을 계산하면 오류를 찾거나 추측을 세우는 데 도움이 된다. 그러나 아무리 긴 유한한 목록도 자연수 전체의 무한한 경우를 직접 모두 검사한 것은 아니다. 계산 실험과 증명이 서로 다른 역할을 맡는다는 점이 이 사례에서 잘 드러난다.



입력이 5로 나누어 나머지 4인 세 분할수

탐구

n=2일 때 이 합동식이 말하는 입력값과 결론은 무엇인가?

풀이와 확인

입력값은 14이다. p(14)가 5의 배수라는 결론이며 실제 값 135가 이를 만족한다.

[S11] NIST Digital Library of Mathematical Functions: Unrestricted Partitions

같은 수를 두 방식으로

1729는 계산 자체를 해 보아야 이야기의 수학적 핵심이 드러난다.

1729는 1^3+12^3이며 동시에 9^3+10^3이다. 각각 계산하면 1+1728과 729+1000이 되어 같은 수를 얻는다. 두 양의 세제곱수의 합으로 서로 다른 두 방식이 있다는 사실을 직접 확인할 수 있다.

라마누잔과 하디에 관한 유명한 일화에서 이 수가 등장한다. 일화를 흥미롭게 읽더라도 두 표현의 존재와 그런 수 가운데 가장 작다는 주장은 다른 수준의 검증을 요구한다. 첫 주장은 네 번의 세제곱 계산으로 충분하지만 둘째는 더 작은 모든 후보를 배제해야 한다.

가장 작음을 확인하는 작은 탐색을 설계한다면 $a \le b$인 양의 정수쌍만 조사해 중복을 줄인다. 합이 1729보다 작으려면 b는 12 이하이면 충분하다. 합을 표로 모아 같은 값이 반복되는지 검사하면 최소성에 대한 유한한 확인 방법을 만들 수 있다.

$$1^3 + 12^3 = 1 + 1728$$
$$9^3 + 10^3 = 729 + 1000$$
두 합은 모두 1729

같은 수를 두 방식으로의 계산 관계

탐구

양의 정수 대신 0도 허용하면 조사할 후보쌍에 어떤 변화가 생기는가?

풀이와 확인

a=0인 경우가 추가된다. 세는 규칙이 달라지므로 원래 명제와 같은 조건인지 먼저 확인해야 한다.

[S9] Institute of Mathematical Sciences: Ramanujan's Notebooks

노트를 검증하는 작은 연구

한 결과를 읽고 시험하고 반례를 찾는 과정을 남기면 독서가 탐구로 바뀐다.

연속한 두 정수의 곱에 1을 더하면 언제나 소수라는 추측을 시험해 보자. n=1과 2와 3에서는 n(n+1)+1이 3과 7과 13이어서 맞는 것처럼 보인다. 그러나 n=4이면 21=3×7이므로 추측은 거짓이다.

좋아 보이는 패턴을 발견했을 때 일부러 실패할 사례를 찾는 일이 중요하다. 작은 값 몇 개의 성공은 자신감을 줄 수 있지만 일반 명제를 보장하지 않는다. 반례 하나는 언제나라는 주장을 무너뜨릴 수 있다. 반면 사례 하나가 실패해도 조건을 고치면 새로운 명제를 만들 수 있다.

수학자의 노트를 읽는 독자 역시 모든 줄을 무조건 참으로 받아들이거나 증명이 생략되었다는 이유로 무가치하다고 버리지 않는다. 정확히 무엇을 주장하는지 복원하고 성립 범위를 탐색한다. 존중과 검증은 함께 할 수 있는 태도이다.

$$n(n+1)+1$$

$$n = 1\,2\,3 \rightarrow 3\,7\,13$$

$$n = 4 \rightarrow 21 = 3 \times 7$$

노트를 검증하는 작은 연구의 계산 관계

탐구

n^2+n+41이 모든 음이 아닌 정수 n에서 소수일까?

풀이와 확인

아니다. $n=41$이면 $41^2+41+41=41\times43$으로 합성수이다. 많은 초기 성공만으로 일반화하면 안 된다.

인도관을 다시 엮는 지도

줄의 길이에서 무한급수까지 서로 다른 문제는 표현과 검증이라는 질문으로 이어진다.

첫 장의 줄 기하학은 길이와 넓이를 보존하는 방법을 물었다. 자리값과 0은 수를 표현하고 연산을 조직하는 문제로 이어졌다. 정수 방정식에서는 허용하는 수의 범위가 중요했고 운율에서는 세는 대상과 순서의 약속이 결과를 바꾸었다.

급수와 사인표는 정확한 관계를 유한한 근삿값으로 사용하는 방법을 보여 주었다. 라마누잔의 노트는 발견된 식을 다시 읽고 증명하는 후대의 작업을 생각하게 한다. 이 주제들은 한 줄의 발전 순서라기보다 서로 연결되면서도 각기 다른 목적을 가진 탐구들이다.

마지막 활동으로 한 문제를 골라 세 가지 표현을 만들어 보자. 문장으로 조건을 쓰고 도형이나 표로 구조를 나타낸 뒤 식으로 검산한다. 역사적 자료에서 온 사실과 자신이 만든 예제를 구별해 표시한다. 수학을 계산하는 독자이면서 자료를 신중히 읽는 독자가 되는 것이 이 관의 여정이다.

표현 문장과 그림과 식
조건 범위와 단위와 기준
검증 계산과 증명과 출처

인도관을 다시 엮는 지도의 계산 관계

탐구

가장 기억에 남는 문제를 다시 설명할 때 반드시 남길 세 요소는 무엇인가?

풀이와 확인

무엇을 가정했는지와 어떻게 계산했는지와 왜 답이 맞는지를 남긴다. 역사적 출처가 있는 주장이라면 그 근거도 함께 적는다.

인도관 / 28

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review
https://doi.org/10.1007/978-3-031-40846-5_114

[S2] University of St Andrews: Aryabhata I
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Aryabhata_I/

[S3] University of St Andrews: Brahmagupta
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Brahmagupta/

[S4] Oxford University: Radiocarbon dating of the Bakhshālī manuscript. 2024
https://ora.ox.ac.uk/objects/uuid%3A5a6d1dd7-f20c-4209-adb6-33849f5b08f4

[S5] University of St Andrews: Bhaskara II
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Bhaskara_II/

[S6] Jayant Shah: A History of Piṅgala's Combinatorics
https://sanskrit.uohyd.ac.in/Algorithms_in_Ancient_India/Material/Pingala.pdf

[S7] V. N. Krishnachandran: On Mādhava and his correction terms
https://arxiv.org/abs/2405.11134

[S9] Institute of Mathematical Sciences: Ramanujan's Notebooks
https://www.imsc.res.in/~rao/ramanujan/images/KSRchap3.pdf

[S10] Trinity College Cambridge: Ramanujan manuscript catalogue
https://archives.trin.cam.ac.uk/index.php/informationobject/browse?levels=233&query=Srinivasa+Ramanujan&sort=startDate&sortDir=asc&sq0=Srinivasa+Ramanujan&topLod=0

[S11] NIST Digital Library of Mathematical Functions: Unrestricted Partitions
https://dlmf.nist.gov/27.14

동아시아관 / 29

수를 놓는 공간과 도형을 보는 눈



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

계산 도구는 손의 움직임을 논리의 일부로 만든다. 산가지의 위치를 바꾸거나 주판의 알을 움직일 때에는 값이 보존되는 교환과 계산 결과가 달라지는 조작을 구별해야 한다. 종이에 남은 숫자만 읽으면 보이지 않는 과정이 있다. 이 관의 도해는 어떤 자리가 같은 단위를 뜻하는지 먼저 확인하도록 구성했다.

기하학의 그림도 스스로 이유를 말하지 않는다. 원이 맞닿는 것처럼 보이더라도 중심 사이의 거리와 반지름의 관계를 따로 세워야 한다. 수의 배열과 도형 문제를 오가면서 계산 절차를 설명하는 문장과 답을 뒷받침하는 논증을 함께 읽는다. 서로 다른 시대와 지역의 도구를 한 장면에 놓은 이 삽화는 비교를 위한 구성이다.

동아시아관 / 30

산가지가 만든 계산의 공간

숫자를 놓는 자리

같은 막대도 놓인 자리가 바뀌면 서로 다른 크기를 나타낸다.

산가지를 이해하는 첫걸음은 모양을 외우는 일이 아니라 자릿값을 읽는 일이다. 여기서는 역사적 산가지 글꼴을 그대로 재현하기보다 백의 자리와 십의 자리와 일의 자리를 나눈 계산판을 사용한다. 각 칸의 숫자는 그 칸이 나타내는 단위가 몇 개인지를 알려 준다.

백의 자리에 3을 놓고 십의 자리를 비워 두며 일의 자리에 7을 놓으면 307이다. 가운데 칸을 없애고 두 숫자를 붙여 읽으면 37이 되어 값이 달라진다. 비어 있는 자리는 아무 의미가 없는 공간이 아니라 십이 하나도 없다는 정보를 가진다.

이 원리를 그림으로 나타낼 때에는 막대의 개수와 수 전체의 크기를 혼동하지 않아야 한다. 백의 자리의 막대 하나는 일의 자리의 막대 백 개에 해당한다. 계산판은 작은 도구로 큰 수를 다루게 하는 약속의 공간이다.

백	십	일
3	0	7
3	7	

가운데 자리를 보존해야 두 수를 구분할 수 있다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

자리	백	십	일
307	3	0	7
370	3	7	0

탐구

307과 370에서 같은 숫자 7이 나타내는 값은 어떻게 다른가?

풀이와 확인

307에서는 7이 일곱을 뜻하고 370에서는 칠십을 뜻한다. 7의 모양이 변한 것이 아니라 기준 단위가 열 배가 되었다. 두 수의 차는 63이며 이는 70에서 7을 뺀 결과와 같다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

열 개를 하나로 바꾸기

받아올림은 숫자를 쓰는 요령이면서 단위를 바꾸는 과정이다.

새로 만든 계산 문제 268+157을 계산판에서 생각해 보자. 일의 자리에는 8+7=15가 모인다. 일 열 개를 십 하나로 바꾸면 일의 자리에는 5가 남고 십의 자리에는 하나가 더해진다. 이때 전체의 양은 변하지 않는다.

십의 자리는 원래 6과 5에 받아온 1을 더하므로 12가 된다. 십 열 개를 백 하나로 바꾸면 십의 자리에는 2가 남는다. 백의 자리는 2+1+1=4가 되어 최종 결과는 425이다. 받아올림을 생략하면 서로 다른 단위의 양을 같은 칸에 남겨 두는 셈이다.

계산 과정을 설명할 때에는 작은 1을 올려 쓴다고만 말하지 말고 무엇 열 개를 무엇 하나로 바꾸었는지를 밝혀 보자. 이 설명은 십진법의 구조를 보여 준다. 같은 생각으로 16진법이나 시간의 분 단위도 다룰 수 있지만 묶는 개수는 각각 다르다.

묶음	계산	남는 값
일	8+7=15	일 5와 십 1
십	6+5+1=12	십 2와 백 1
백	2+1+1=4	백 4

탐구

일의 자리 계산을 먼저 하지 않고 백의 자리부터 더해도 되는가?

풀이와 확인

가능하다. 200+100=300에 60+50=110과 8+7=15를 차례로 합하면 425이다. 다만 각 단계의 중간값을 남겨야 한다. 오른쪽부터 계산하는 방식은 단위 교환을 한 번에 정리하기 편한 절차이다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

빈 칸을 건너는 뺄셈

받아내림에서 빌리는 것은 숫자가 아니라 상위 단위 하나이다.

402−178을 계산할 때 일의 자리 2에서 8을 바로 뺄 수는 없다. 십의 자리가 비어 있으므로 백 하나를 십 열 개로 바꾼다. 다시 십 하나를 일 열 개로 바꾸면 402는 백 3과 십 9와 일 12로 나타난다. 표현은 달라졌지만 합은 여전히 402이다.

이제 일의 자리에서 12−8=4를 계산한다. 십의 자리에서는 9−7=2이며 백의 자리에서는 3−1=2이다. 따라서 차는 224이다. 백을 먼저 교환하고 십을 다시 교환했다는 두 단계를 표시하면 빈 칸을 사이에 둔 계산에서 생기는 오류를 줄일 수 있다.

검산은 224+178이 402가 되는지 확인하는 일이다. 여기에 대략적인 크기 확인도 덧붙일 수 있다. 402에서 약 180을 빼므로 답은 약 220이어야 한다. 정확한 역산과 어림을 함께 쓰면 자릿값을 잘못 옮긴 실수까지 찾아내기 쉽다.

표현	백	십	일
처음	4	0	2
첫 교환	3	10	2
둘째 교환	3	9	12

탐구

402를 백 3과 십 10과 일 2로 바꾼 뒤 십 10을 그대로 두면 왜 안 되는가?

풀이와 확인

십 하나를 일 열 개로 바꾸었다면 십의 개수는 9로 줄어야 한다. 십 10과 일 12를 함께 남기면 전체가 412가 된다. 교환은 한쪽의 증가와 다른 쪽의 감소를 동시에 기록해야 한다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

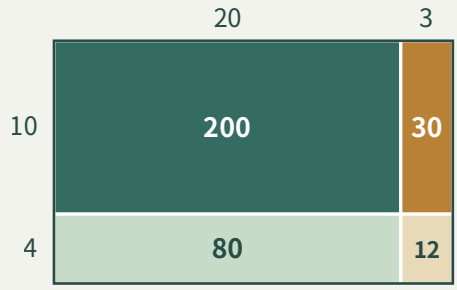
곱셈판을 나누어 읽기

큰 곱을 작은 곱의 합으로 바꾸면 계산의 구조가 보인다.

23×14를 한 번에 외우려 하지 말고 23×10과 23×4로 나누어 보자. 앞의 곱은 230이고 뒤의 곱은 92이므로 합은 322이다. 이 계산은 곱하는 수를 10+4로 분해한 뒤 같은 양을 각각 곱하는 분배법칙에 따른다.

계산판의 두 수를 20+3과 10+4로 모두 나누면 작은 곱이 네 개 생긴다. 20×10=200과 20×4=80과 3×10=30과 3×4=12를 합한 결과 역시 322이다. 직사각형을 네 조각으로 나누어 넓이를 더하면 같은 관계를 눈으로 확인할 수 있다.

산가지 계산을 오늘의 세로셈과 비교할 때에는 도구가 다르다는 점과 수학적 관계가 같다는 점을 함께 살핀다. 중간 결과를 어디에 놓는지는 표현의 선택이다. 그러나 십을 곱한 결과를 한 자리 옮겨야 한다는 이유는 어느 표현에서도 자릿값에 있다.



23×10 = 200 + 30 = 230

23×4 = 80 + 12 = 92

23×14 = 230 + 92 = 322

20+3과 10+4로 나눈 직사각형의 네 넓이를 더하면 322이다.

부분	10	4
20	200	80
3	30	12

> **탐구**
> 23×14에서 23×1=23을 그대로 적으면 어떤 값이 빠지는가?

풀이와 확인

14의 1은 일 하나가 아니라 십 하나이다. 따라서 해당 부분곱은 23이 아니라 230이어야 한다. 23+92=115는 23×5와 같으며 십을 일로 잘못 읽은 결과이다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

나눗셈을 되돌아보기

나눗셈의 몫과 나머지는 곱셈과 덧셈으로 원래 수를 복원한다.

187을 12씩 묶는 교육용 문제를 생각해 보자. 열 묶음을 만들면 120을 사용하므로 67이 남는다. 다섯 묶음을 더 만들면 60을 사용하여 7이 남는다. 따라서 몫은 15이고 나머지는 7이다. 계산의 마지막에는 187=12×15+7이 성립해야 한다.

나머지가 12 이상이라면 적어도 한 묶음을 더 만들 수 있으므로 계산이 끝난 것이 아니다. 나머지는 0 이상이면서 나누는 수보다 작아야 한다. 이 조건을 함께 적어야 같은 수를 여러 방식으로 표현하는 가운데 표준적인 몫과 나머지를 정할 수 있다.

계산판에서는 덜어 낸 양과 남은 양의 위치를 분명하게 나누는 것이 좋다. 이미 사용한 120을 다시 빼거나 몫의 십의 자리를 일의 자리로 읽으면 전체 관계가 깨진다. 중간 단계에서도 원래 수가 사용한 양과 남은 양의 합인지 확인하면 오류를 일찍 찾을 수 있다.

단계	묶음 수	사용량	남은 양
처음	10	120	67
다음	5	60	7
합계	15	180	7

탐구

187=12×14+19도 참인데 왜 몫 14와 나머지 19라고 하지 않는가?

풀이와 확인

등식은 참이지만 나머지 19가 나누는 수 12보다 크다. 19에서 12를 한 번 더 덜어 몫을 15로 늘리고 나머지를 7로 줄여야 한다. 나머지의 범위를 정하면 결과가 하나로 정해진다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

부호를 공간으로 구별하기

반대 방향의 양을 구분하면 빚과 잔고를 하나의 계산으로 다룰 수 있다.

같은 크기의 양이라도 들어오는 양과 나가는 양은 서로 다른 역할을 한다. 교육용 장부에서 수입 8과 지출 5를 각각 +8과 −5로 적으면 합은 +3이다. 여기의 부호 표기는 현대적 설명이다. 역사 자료의 막대 색과 배치 규칙을 현대 기호와 완전히 같은 것으로 단정하지 않는다.

서로 반대인 한 쌍을 지워도 전체 차이는 변하지 않는다. 양의 표식 여덟 개와 음의 표식 다섯 개를 놓고 다섯 쌍을 지우면 양의 표식 세 개가 남는다. 이 표현은 8+(−5)=3을 설명한다. 반대로 양이 적으면 음의 표식이 남는다.

뺄셈에서는 없애야 하는 표식이 부족할 때 양과 음의 쌍을 함께 추가할 수 있다. 쌍의 합은 0이므로 전체 값은 유지된다. 계산 규칙을 무조건 외우기 전에 어떤 변환이 값을 보존하는지 확인하는 것이 부호 있는 계산을 이해하는 핵심이다.



양과 음의 위치를 나타내는 현대식 수직선

상황	식	결과
수입이 더 많음	8−5	3
지출이 더 많음	3−5	−2
서로 같은 양	5−5	0

탐구

3−5를 표식으로 계산하려면 어떤 조작이 필요한가?

풀이와 확인

양의 표식 세 개에 양과 음의 쌍 두 개를 더한다. 전체 값은 여전히 3이다. 양의 표식 다섯 개를 없애면 음의 표식 두 개가 남으므로 답은 −2이다. 표식 추가와 제거를 각각 기록하면 부호의 뜻이 분명해진다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

기록하지 않은 중간 단계

움직이는 계산 도구를 읽을 때에는 사라진 절차를 함부로 채우지 않는다.

종이에 쓰인 식은 계산 뒤에도 남지만 계산판 위의 막대는 다음 단계에서 옮겨질 수 있다. 따라서 완성된 답만 보아서는 어떤 중간 배열을 거쳤는지 알기 어렵다. 역사적 계산을 재현하려면 기록에 분명하게 나오는 지시와 현대 독자가 보충한 절차를 구별해야 한다.

예를 들어 36×25=900이라는 결과에는 여러 계산 경로가 가능하다. 36×100을 4로 나눌 수도 있고 30×25와 6×25를 더할 수도 있다. 답이 같다는 사실은 두 방법이 수학적으로 동등함을 보여 주지만 특정한 옛 계산자가 어느 방법을 썼는지까지 알려 주지는 않는다.

재현 활동에서는 계산 전 배열과 한 번 움직인 뒤의 배열을 나란히 남겨 보자. 무엇이 바뀌었고 어떤 값이 보존되었는지 설명하면 도구의 사용법을 검토할 수 있다. 빈틈을 감추기보다 재구성한 부분을 밝히는 태도가 역사 읽기와 수학 검증을 함께 정확하게 만든다.

탐구

36×25를 두 방법으로 계산한 뒤 공통으로 확인할 관계는 무엇인가?

풀이와 확인

36×25=36×100÷4와 36×25=30×25+6×25가 각각 성립하는지 확인한다. 첫 방법은 25=100÷4를 이용한다. 둘째 방법은 36=30+6과 분배법칙을 이용한다. 어느 방법을 역사적으로 사용했는지는 별도의 근거가 필요하다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

나만의 계산판 설명서

좋은 계산 설명은 결과보다 단위와 보존 관계를 먼저 보여 준다.

이 장의 정리 활동은 405+287−196을 계산판으로 설명하는 것이다. 처음에는 백과 십과 일의 칸을 마련한다. 405와 287을 더하면 일의 자리 5+7에서 십 하나가 생기므로 692가 된다. 이어서 196을 빼는 과정을 별도로 남긴다.

692에서 일의 자리의 뺄셈을 위해 십 하나를 일 열 개로 바꾸면 백 6과 십 8과 일 12가 된다. 다시 십의 자리에서 9를 빼기 위해 백 하나를 십 열 개로 바꾸면 백 5와 십 18과 일 12로 나타낼 수 있다. 각 교환이 전체 값을 보존하는지 확인한다.

마지막으로 일은 6이 남고 십은 9가 남으며 백은 4가 남는다. 따라서 답은 496이다. 설명서에는 최종 답뿐 아니라 중간 배열과 교환 이유를 함께 넣는다. 다른 사람이 설명만 보고 같은 계산을 재현할 수 있다면 도구의 규칙을 충분히 전달한 것이다.

단계	값
덧셈 결과	692
뺄셈 결과	496
다른 순서	405+91=496

탐구

계산 순서를 405+(287−196)으로 바꾸어 검산하라.

풀이와 확인

287−196=91이다. 405+91=496이므로 앞의 결과와 같다. 이 순서에서는 받아올림이 줄어 계산이 간단해진다. 원래 식에서 괄호를 옮겨도 되는 이유를 덧셈과 뺄셈의 관계로 설명하되 모든 괄호 이동이 허용된다고 일반화하지 않는다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals

동아시아관 / 31

구장산술의 문제를 읽는 법

생활 문제와 일반 절차

특정한 수치의 문제에서도 여러 상황에 다시 쓰이는 계산법을 찾을 수 있다.

구장산술은 넓이와 곡물과 분배와 방정식 등 다양한 계산 문제를 담은 고전이다. 전승 과정에서 본문과 주석이 겹쳐졌으므로 한 사람의 한 번의 집필로 완성된 책처럼 소개하지 않는다. 유휘가 263년에 남긴 주석은 이 책을 이해하는 중요한 층위이다.

이 장에서는 원문 문제를 길게 옮기지 않고 구조를 살린 새로운 교육용 수치를 사용한다. 곡식 84단위를 세 사람에게 같은 양으로 나누면 한 사람의 몫은 28단위이다. 여기서 중요한 것은 84라는 수 자체보다 전체량을 받는 사람 수로 나눈다는 관계이다.

문제를 읽을 때에는 어떤 양이 주어졌는지와 무엇을 구하는지와 단위가 무엇인지를 먼저 표시한다. 그 다음에 계산 절차를 쓰고 마지막에 결과를 원래 상황으로 해석한다. 계산이 맞더라도 서로 다른 단위의 양을 더했다면 문제에 맞는 해답이 될 수 없다.



84를 같은 세 몫으로 나누면 각 몫은 28이다.

탐구

곡식 84단위를 네 사람에게 나누는 문제로 바꾸면 무엇을 고치고 무엇을 유지하는가?

풀이와 확인

나누는 수를 3에서 4로 바꾸어 84÷4=21을 계산한다. 전체량을 사람 수로 나눈다는 구조와 한 사람의 몫이라는 해석은 유지된다. 수치가 달라져도 같은 절차가 적용된다는 점이 일반적인 계산법의 힘이다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

분수는 같은 크기의 조각

분모가 다른 분수를 더하려면 조각의 크기부터 맞추어야 한다.

교육용 문제에서 밭의 2/3를 먼저 일구고 다른 밭의 같은 전체 크기를 기준으로 1/4만큼을 더 일구었다고 하자. 두 비율을 더하려면 전체를 같은 수의 조각으로 나누어야 한다. 3등분과 4등분을 함께 표시하면 12개의 같은 조각을 만들 수 있다.

2/3는 8/12이고 1/4는 3/12이다. 따라서 합은 11/12이다. 분자를 더하면서 분모를 3+4=7로 바꾸는 방식은 조각의 크기와 개수를 동시에 뒤섞는다. 3등분 조각 두 개와 4등분 조각 한 개가 7등분 조각 세 개가 되는 것은 아니다.

공통분모는 반드시 최소일 필요는 없다. 24를 사용하면 16/24+6/24=22/24이고 약분하면 같은 결과가 나온다. 다만 작은 공통분모를 쓰면 중간 수가 작아져 계산이 편리하다. 효율과 정당성을 구분하면 여러 풀이를 비교할 수 있다.

비율	12등분 표현
2/3	8/12
1/4	3/12
합	11/12

탐구

11/12에서 1/6을 빼고 남은 비율을 구하라.

풀이와 확인

1/6은 2/12이므로 11/12−2/12=9/12=3/4이다. 전체를 12칸으로 나눈 그림에서 표시된 11칸 중 두 칸을 지우면 아홉 칸이 남는다. 이 결과를 네 등분의 세 조각으로 다시 묶을 수 있다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

약분으로 단위를 정리하기

약분은 양을 줄이는 일이 아니라 같은 비율을 더 작은 수로 쓰는 일이다.

곡물 42단위 가운데 30단위를 배분했다면 배분한 비율은 30/42이다. 분자와 분모를 6으로 나누면 5/7이 된다. 전체량과 배분량을 동시에 같은 묶음으로 세었으므로 비율은 변하지 않는다. 분자만 나누면 다른 양을 나타내게 된다.

공약수를 찾는 한 방법은 큰 수에서 작은 수를 반복해서 덜어 내는 것이다. 42−30=12이고 30에서 12를 두 번 덜면 6이 남는다. 12가 6으로 나누어떨어지므로 두 수의 최대공약수는 6이다. 오늘의 나머지 연산으로 이 과정을 더 짧게 기록할 수 있다.

같은 비율인지 확인할 때에는 교차곱도 쓸 수 있다. 30×7과 42×5가 모두 210이므로 두 분수는 같다. 다만 계산의 뜻을 잊지 않도록 칠 등분한 전체 가운데 다섯 몫이라는 해석을 함께 적는다. 약분은 수의 표기를 간단하게 하면서 관계를 보존한다.

나눗셈	나머지
42=30×1+12	12
30=12×2+6	6
12=6×2	0

탐구

30/42와 15/21 가운데 어느 것이 더 큰가?

풀이와 확인

두 분수는 같다. 30과 42를 각각 2로 나누면 15와 21이 된다. 두 번째 분수를 다시 3으로 나누면 5/7이다. 분자만 비교하면 30이 더 커 보이지만 분모까지 함께 고려해야 한다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

몫이 다른 분배

같은 전체라도 분배 기준이 달라지면 각자의 몫이 달라진다.

세 팀이 각각 2일과 3일과 5일 동안 같은 속도로 일했다고 가정하자. 보상 120단위를 작업일수에 비례하여 나누려면 비의 합 2+3+5=10을 먼저 구한다. 비 한 몫의 값은 120÷10=12이므로 세 팀은 각각 24와 36과 60을 받는다.

여기에는 같은 속도로 일한다는 조건이 들어 있다. 하루의 작업량이 서로 다르면 일수만으로 분배할 수 없다. 첫 팀이 하루에 두 배를 일했다면 작업량의 비는 4:3:5가 되고 몫도 달라진다. 비례배분은 계산식 이전에 어떤 기준을 선택했는지가 중요하다.

배분 뒤에는 세 몫의 합이 전체 120과 일치하는지 확인한다. 또한 24÷2와 36÷3과 60÷5가 모두 12인지 확인하면 같은 기준이 적용되었는지 알 수 있다. 전체 합 검산과 비율 검산은 서로 다른 종류의 오류를 발견한다.

팀	작업 일수	몫
가	2	24
나	3	36
다	5	60

탐구

작업량의 비가 4:3:5라면 120단위를 어떻게 나누는가?

풀이와 확인

비의 합은 12이고 한 몫은 10이다. 따라서 40과 30과 50으로 나눈다. 앞의 배분과 비교하면 총량은 같지만 기준이 바뀌었으므로 몫이 달라진다. 어느 배분이 적절한지는 문제에서 정한 기준을 확인해야 한다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

두 가정으로 찾는 참값

결과가 일정한 비율로 변하면 두 번의 가정 사이에서 답을 찾을 수 있다.

물건 한 개의 값을 모르는 상황을 새로 만들어 보자. 다섯 개를 사고 포장비 6을 더하여 총 41을 지불했다. 한 개의 값을 5로 가정하면 총액은 31로 10이 부족하다. 값을 9로 가정하면 총액은 51로 10이 남는다.

두 가정이 참값에서 같은 거리만큼 어긋났으므로 답은 5와 9의 가운데인 7이다. 이를 식으로 적으면 5x+6=41이다. 총액은 물건 한 개의 값이 1 증가할 때마다 5씩 증가하므로 오차가 일차적으로 변한다. 이 조건이 두 가정을 이용하는 방법을 가능하게 한다.

오차의 크기가 다르면 단순한 평균을 쓰면 안 된다. 가정값 6과 10의 총액은 36과 56이다. 각각 5가 부족하고 15가 남으므로 참값은 두 가정의 가운데보다 6에 더 가깝다. 부족한 양과 남는 양의 비를 가정값 사이 거리의 비로 옮기는 것이 핵심이다.

가정값	총액	41과의 차
6	36	−5
7	41	0
10	56	15

탐구

가정값을 6과 10으로 잡았을 때 오차를 이용해 답을 구하라.

풀이와 확인

총액은 36과 56이므로 각각 5가 부족하고 15가 남는다. 전체 오차 차 20 가운데 부족분 5의 비율은 1/4이다. 가정값 사이의 차 4의 1/4만큼 6에서 이동하면 7이다. 단순 평균 8은 답이 아니다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

두 번의 가정을 잇는 직선

가정법의 성공 조건을 밝히면 적용할 수 없는 문제도 알아볼 수 있다.

계산 결과를 $f(x)=ax+b$라고 적자. 목표값 T를 두고 서로 다른 가정 u와 v를 넣으면 오차는 $f(u)-T$와 $f(v)-T$이다. a가 0이 아니면 오차가 x에 따라 일정한 비율로 변한다. 따라서 두 결과 사이에서 선형 보간하여 정확한 답을 찾을 수 있다.

$5x+6=41$에서 u=6은 5가 부족하고 v=10은 15가 남는다. 전체 오차 변화 20 가운데 부족분이 차지하는 비율은 1/4이다. 가정값 차이 4의 1/4만큼 6에서 이동하면 7이다. 두 오차의 부호를 포함해 기록해야 이동 방향을 잃지 않는다.

같은 절차를 $x^2=2$에 사용하면 한 번에 정확한 답을 얻지 못한다. 1을 넣으면 1이 부족하고 2를 넣으면 2가 남는다. 선형 보간값은 4/3이지만 그 제곱은 16/9이다. 목표 2와 차이가 남는 까닭은 제곱 함수가 두 점 사이에서 직선으로 변하지 않기 때문이다.

이 실패는 가정법의 가치를 낮추지 않는다. 오히려 정확한 풀이가 되는 조건과 근사 한 단계가 되는 조건을 구분해 준다. 역사적 계산 절차를 현대적으로 해석할 때에도 어떤 관계에 적용했는지를 읽어야 한다. 절차의 이름만 같다고 모든 문제에서 같은 정밀도를 기대할 수는 없다.

관계	두 가정	보간의 결과
5x+6=41	6과 10	7은 정확한 해
$x^2=2$	1과 2	4/3은 근삿값

> **탐구**
>
> $x^2=2$에서 얻은 4/3은 참값보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

$(4/3)^2=16/9<2$이고 4/3은 양수이므로 $\sqrt{2}$보다 작다. 이 값으로 한쪽 경계를 갱신할 수 있지만 정확한 해라고 적어서는 안 된다.

방정식의 줄을 지우기

소거는 정보를 없애는 대신 같은 정보를 더 간단한 형태로 바꾸는 일이다.

쌀 두 묶음과 콩 한 묶음의 값이 19이고 쌀 한 묶음과 콩 두 묶음의 값이 17이라고 하자. 쌀의 값을 x와 콩의 값을 y로 정하면 2x+y=19와 x+2y=17이다. 여기의 문자는 계산 구조를 읽기 위한 현대적 표기이다.

첫 식을 두 배로 만들면 4x+2y=38이 된다. 여기에서 둘째 식을 빼면 3x=21이므로 x=7이다. 다시 2×7+y=19에 넣으면 y=5이다. 두 식에서 같은 양의 콩을 지웠기 때문에 쌀만 남은 관계를 얻을 수 있다.

계수를 줄과 칸으로 배열하면 같은 조작을 숫자표에도 적용할 수 있다. 다만 표에서 어느 칸이 어느 미지수인지 표시해야 한다. 한 줄 전체를 같은 수로 곱하는 것과 일부 칸만 곱하는 것은 다르다. 등식의 오른쪽 상수까지 함께 바꾸어야 해집합이 유지된다.

관계	x의 계수	y의 계수	값
첫째	2	1	19
둘째	1	2	17
소거 결과	3	0	21

탐구

x=7과 y=5가 두 조건을 모두 만족하는지 확인하라.

풀이와 확인

2×7+5=19이고 7+2×5=17이다. 첫 조건만 만족하는 수는 여러 개일 수 있으므로 두 조건을 모두 확인해야 한다. 소거 과정에서 부호나 배수를 잘못 적용했다면 두 번째 대입에서 드러날 수 있다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

넓이와 길이를 구별하기

밭의 모양이 바뀌어도 넓이를 유지할 수 있으며 길이는 반대로 변한다.

넓이가 180인 직사각형 밭을 생각하자. 폭이 12이면 길이는 15이다. 폭을 18로 늘리면서 넓이를 유지하려면 길이는 180÷18=10이 되어야 한다. 폭이 1.5배가 된 만큼 길이는 그 역수인 2/3배가 된다.

폭과 길이가 모두 같은 비율로 늘어나는 닮음 확대와 이 상황을 구별해야 한다. 두 길이를 모두 1.5배로 만들면 넓이는 2.25배가 된다. 넓이 고정 문제에서는 한 길이가 늘면 다른 길이가 줄어든다. 같은 비례라는 말 아래 서로 다른 관계를 섞지 않는 것이 중요하다.

표를 만들 때에는 폭과 길이의 곱을 마지막 열에 적어 보자. 각 줄에서 곱이 같다는 사실이 반비례 관계를 보여 준다. 그래프를 그린다면 직선이 아니라 곡선이 된다. 자료 몇 개만 보고 변화량이 일정하다고 생각하면 중간값을 잘못 예측할 수 있다.

폭	길이	넓이
12	15	180
15	12	180
18	10	180

탐구

폭이 15일 때 길이를 양 끝의 길이 15와 10의 평균으로 정해도 되는가?

풀이와 확인

안 된다. 넓이 180을 폭 15로 나누면 길이는 12이다. 폭의 중간값에서 길이가 양 끝 길이의 평균이 되는 것은 직선 관계의 성질이다. 여기서는 곱이 일정하므로 나눗셈으로 값을 구해야 한다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

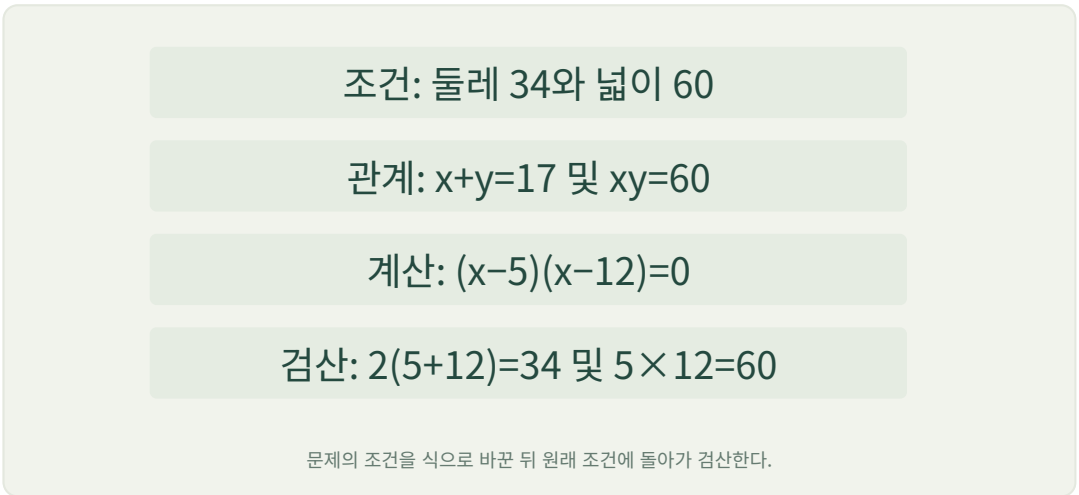
문제와 해설 사이의 거리

옛 문제의 상황과 오늘의 풀이 기호를 분리하면 비교가 더 정확해진다.

구장산술을 읽을 때 본문 문제와 답과 절차와 후대 주석은 각각 다른 역할을 한다. 문제는 조건을 제시하고 답은 계산 결과를 말한다. 절차는 같은 종류의 문제를 푸는 방법을 설명하며 주석은 그 절차가 성립하는 까닭을 더 깊게 다룰 수 있다.

수업에서 이 구조를 새 문제에 적용해 보자. 직사각형의 둘레가 34이고 넓이가 60일 때 두 변을 구한다. 조건에서 $x+y=17$과 $xy=60$을 얻고 한 변을 x로 놓으면 $x(17-x)=60$이다. 이를 정리하면 $x^2-17x+60=0$이며 두 변은 5와 12이다.

이 풀이를 원문에 없던 기호로 적었다면 현대적 해설이라고 밝혀야 한다. 그렇다고 현대 기호를 쓰는 일이 잘못인 것은 아니다. 어떤 관계를 쉽게 보여 주는지 설명하면서 원문 자체가 그 기호를 썼다는 인상을 피하면 역사 이해와 개념 학습을 함께 할 수 있다.



문제의 조건을 식으로 바꾼 뒤 원래 조건에 돌아가 검산한다.

탐구

문제의 조건에 두 변 가운데 짧은 변을 구하라고 덧붙이면 답은 무엇인가?

풀이와 확인

짧은 변은 5이다. 방정식의 두 근 5와 12는 직사각형의 두 변을 서로 바꿔 부른 경우에 해당한다. 두 근을 모두 계산한 뒤 문제의 질문에 맞는 값을 골라야 한다. 둘레 34와 넓이 60을 각각 검산한다.

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art

동아시아관 / 32

유휘와 도형을 나누는 생각

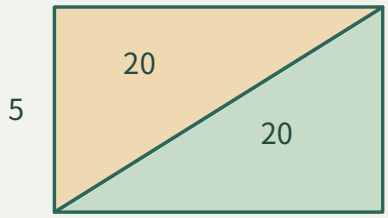
절차에 까닭을 붙이다

공식의 결과를 아는 일과 그 결과가 나오는 이유를 아는 일은 다르다.

유휘의 주석을 읽을 때에는 수치 답만 찾기보다 계산 절차를 정당화하는 설명에 주목할 필요가 있다. 도형을 자르고 옮기는 생각은 서로 다른 모양 사이에서 넓이나 부피가 유지되는 관계를 드러낸다. 다음의 활동은 그러한 관점을 배우기 위해 새로 만든 도형 문제이다.

가로 8과 세로 5인 직사각형을 대각선으로 자르면 서로 겹쳐지는 두 삼각형이 된다. 직사각형의 넓이가 40이므로 각 삼각형의 넓이는 20이다. 여기서 절반이라는 결론은 그림이 비슷해 보이기 때문이 아니라 두 삼각형을 정확하게 포갤 수 있기 때문에 성립한다.

그림을 그릴 때 대각선이 아닌 임의의 선분으로 잘랐다면 두 조각의 넓이가 같다고 말할 수 없다. 같은 공식처럼 보이는 주장도 어떤 조건에서 만들어졌는지 확인해야 한다. 증명은 계산 결과를 꾸미는 문장이 아니라 조건과 결론을 이어 주는 논리이다.



가로 8과 세로 5인 직사각형의 대각선은 넓이가 같은 두 삼각형을 만든다.

탐구

가로 8과 세로 5인 직사각형의 한 꼭짓점에서 반대쪽 변의 중점까지 자르면 두 조각의 넓이가 같은가?

풀이와 확인

일반적으로 같지 않다. 잘려 나온 삼각형의 밑변이 4이고 높이가 5라면 넓이는 10이다. 나머지 사각형의 넓이는 30이다. 대각선으로 자른 상황의 절반 관계를 다른 절단에 그대로 적용하면 안 된다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

평행사변형을 옮겨 놓기

기울어진 옆변의 길이는 넓이 공식에 들어가는 높이와 다르다.

밑변이 9이고 수직 높이가 4인 평행사변형을 그려 보자. 한쪽 끝의 삼각형을 잘라 반대편으로 옮기면 가로 9와 세로 4인 직사각형을 만들 수 있다. 겹침이나 빈틈이 없다면 전체 넓이는 바뀌지 않으므로 넓이는 36이다.

옆변이 5라고 해서 9×5를 계산하면 안 된다. 옆변을 기울이면 길이는 그대로여도 수직 높이는 달라진다. 높이는 평행한 두 밑변 사이의 최단 거리이며 밑변과 직각을 이루는 선분으로 표시한다. 도형의 외곽 길이와 내부의 넓이 정보를 구분해야 한다.

이 조각 옮기기는 직사각형으로 바꾸는 과정에서 무엇이 보존되는지 확인하게 한다. 그림이 같은 모양이 될 필요는 없다. 각 조각의 크기가 그대로이고 조각 사이에 겹침과 누락이 없다는 사실이 중요하다. 잘라 옮긴 조각에 번호를 붙이면 대응을 추적하기 쉽다.



수직 높이가 4인 평행사변형을 넓이 36인 직사각형으로 재배열하는 모형

탐구

밑변 9와 옆변 5가 같은 두 평행사변형의 넓이가 서로 다를 수 있는가?

풀이와 확인

가능하다. 수직 높이가 4이면 넓이는 36이고 높이가 3이면 넓이는 27이다. 옆변의 길이가 5인 상태에서도 기울기를 바꾸어 두 높이를 만들 수 있다. 넓이를 정하려면 수직 높이 또는 이에 해당하는 각도 정보가 더 필요하다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

사다리꼴 두 개를 잇기

평균을 이용한 넓이 공식은 두 도형을 합치는 장면에서 이해할 수 있다.

윗변 6과 아랫변 10과 높이 5인 사다리꼴을 하나 더 복사하여 거꾸로 붙인다. 두 도형은 밑변이 16이고 높이가 5인 평행사변형을 이룬다. 합친 넓이는 80이므로 원래 사다리꼴 하나의 넓이는 40이다.

이를 식으로 쓰면 $(6+10)\times 5\div 2$이다. 윗변과 아랫변의 평균인 8에 높이 5를 곱해도 같은 값이다. 그러나 평균이라는 말을 외우기만 하면 왜 평행한 두 변을 골라야 하는지 놓치기 쉽다. 복사한 도형을 붙여 길이가 합쳐지는 두 변이 바로 그 변들이다.

사다리꼴을 삼각형 둘로 나누는 풀이도 가능하다. 두 삼각형의 밑변은 각각 6과 10이고 높이는 모두 5이므로 넓이는 15와 25이다. 서로 다른 분할이 같은 결과를 준다는 사실을 비교하면 도형의 구조를 더 유연하게 읽게 된다.

풀이	계산	넓이
두 개 이어 붙이기	16×5÷2	40
삼각형으로 나누기	6×5÷2+10×5÷2	40

탐구

윗변을 6에서 8로 늘리고 아랫변과 높이를 유지하면 넓이는 얼마나 증가하는가?

풀이와 확인

넓이는 (8+10)×5÷2=45이므로 5만큼 증가한다. 새로 늘어난 삼각형 부분의 밑변이 2이고 높이가 5라고 보아도 2×5÷2=5이다. 공식 계산과 추가된 부분의 넓이가 서로 일치한다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

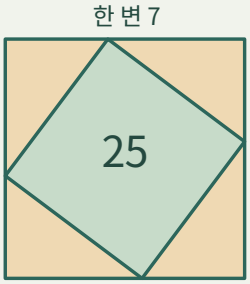
구고 관계를 넓이로 보기

직각삼각형의 세 변 관계는 정사각형의 넓이를 비교하는 문장이다.

직각을 끼는 두 변이 3과 4인 삼각형의 빗변을 c라 하자. 구고 관계를 오늘의 기호로 쓰면 $c^2=3^2+4^2$이다. 따라서 $c^2=25$이고 길이가 양수이므로 c=5이다. 여기에서 제곱은 단순한 계산 기호이면서 각 변 위에 만든 정사각형의 넓이를 나타낸다.

같은 직각삼각형 네 개를 한 변이 7인 큰 정사각형 안에 배열하면 가운데에 빗변을 한 변으로 하는 정사각형을 남길 수 있다. 큰 정사각형 넓이 49에서 삼각형 네 개의 넓이 24를 빼면 가운데 넓이는 25이다. 이 구성은 독자를 위한 현대적 재구성 도해이다.

도해의 힘은 숫자를 바꾸어도 같은 절차가 성립한다는 데 있다. 두 직각변을 a와 b로 적으면 큰 정사각형의 넓이는 $(a+b)^2$이고 삼각형 네 개의 넓이는 2ab이다. 차를 정리하면 a^2+b^2이 남는다.



큰 정사각형 49 − 삼각형 네 개 24 = 25

직각변 3과 4인 삼각형 네 개를 한 변 7인 정사각형 안에 놓은 정확한 넓이 모형

탐구

직각변이 5와 12인 경우 빗변을 구하고 넓이 관계를 확인하라.

풀이와 확인

$5^2+12^2=25+144=169$이므로 빗변은 13이다. 세 길이가 삼각형을 이루는지 확인하면 $5+12>13$이다. 단순히 세 수의 제곱 관계만 보는 데서 멈추지 않고 길이와 직각 조건을 함께 해석한다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

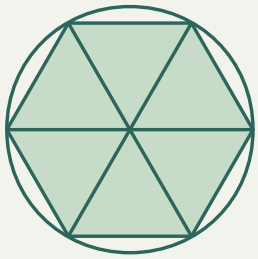
원 안의 다각형

곡선을 직접 재기 어려울 때 곧은 변으로 둘러싼 도형을 이용할 수 있다.

반지름이 1인 원 안에 정육각형을 그리면 한 변의 길이는 1이다. 중심과 꼭짓점을 연결하면 정삼각형 여섯 개가 생긴다. 각 삼각형의 넓이는 $\sqrt{3}/4$이므로 정육각형의 넓이는 $3\sqrt{3}/2$로 약 2.598이다. 원의 넓이는 이보다 크다.

정다각형의 변 수를 늘리면 원과 다각형 사이의 빈 부분이 작아진다. 유휘의 원 연구를 소개할 때 중요한 점은 단순히 긴 소수를 적는 것이 아니라 다각형을 세분하여 남는 차이를 다룬다는 생각이다. 이 책의 삼각함수 표기는 그 구조를 보여 주는 현대적 도구이다.

반지름 1인 원에 내접한 정n각형의 넓이는 $n\times\sin(360°/n)\div2$이다. n을 6에서 12로 늘리면 넓이는 3이 된다. 값이 원의 넓이에 가까워진다는 관찰과 어느 범위 안에 있음을 엄밀히 보이는 일은 구별해야 한다.



단위원에 내접한 정육각형을 여섯 정삼각형으로 나누면 넓이는 3√3/2이다.

탐구

정육각형 넓이 2.598과 정십이각형 넓이 3 가운데 원의 넓이에 더 가까운 것은 무엇인가?

풀이와 확인

두 다각형이 같은 원에 내접하고 십이각형이 육각형을 포함하도록 배치되므로 3이 더 가깝다. 두 값 모두 원의 넓이보다 작다. 그러나 3이라는 값만으로 원의 넓이가 3.1보다 작은지까지 판단할 수는 없다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

안쪽 값과 바깥쪽 값

근삿값 하나보다 양쪽 경계가 오차를 더 분명하게 알려 준다.

반지름 1인 원에 내접하는 정다각형과 외접하는 정다각형을 함께 그려 보자. 내접 다각형의 넓이는 원보다 작고 외접 다각형의 넓이는 원보다 크다. 두 넓이 사이에 원의 넓이가 끼어 있으므로 계산값의 범위를 말할 수 있다.

정사각형을 쓰면 안쪽 넓이는 2이고 바깥쪽 넓이는 4이다. 이 구간은 너무 넓지만 도형을 더 세분하면 범위를 좁힐 수 있다. 여기서는 내접과 외접을 짝지은 현대적 학습 모형을 사용한다. 이를 특정 역사 문헌의 계산 순서와 똑같다고 주장하지 않는다.

오차를 설명할 때 3.14가 가까워 보인다고만 말하는 대신 참값이 어떤 두 수 사이에 있는지 제시해 보자. 예를 들어 3.141<π<3.142를 알면 3.1415를 쓸 때의 절대오차는 0.0005보다 작다. 양 끝과의 거리를 비교하면 이 결론을 얻을 수 있다.



반지름 1인 원의 내접 정사각형 넓이 2와 외접 정사각형 넓이 4를 비교한다.

탐구

π가 3.141과 3.142 사이에 있다는 정보만 있을 때 3.141을 쓰면 오차는 얼마보다 작은가?

풀이와 확인

절대오차는 0.001보다 작다. 왼쪽 끝을 사용했으므로 실제 값과의 거리는 구간의 전체 길이를 넘지 않는다. 가운데 값 3.1415를 쓰면 가능한 최대 거리가 절반으로 줄어든다. 어느 값을 택했는지도 오차 평가에 영향을 준다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

부피를 층으로 나누기

입체의 겉모습이 달라도 같은 높이에서의 단면을 비교할 수 있다.

밑면이 가로 6과 세로 4이며 높이가 5인 직육면체의 부피는 120이다. 높이를 1씩 나누면 넓이 24인 층이 다섯 개 쌓여 있다. 층의 두께와 단면 넓이의 곱을 모두 더한다는 생각은 부피를 조직적으로 다루는 출발점이다.

각 층을 옆으로 조금씩 밀어 비스듬한 모양을 만들더라도 층마다 차지하는 양은 그대로이다. 다만 겹치거나 빠지는 부분 없이 입체가 정의되어야 한다. 종이 모형의 유한한 층과 연속적인 입체 사이에는 차이가 있으므로 모형 관찰만으로 모든 입체에 대한 정리를 끝냈다고 보지 않는다.

밑면 넓이가 높이에 따라 달라지는 각뿔에서는 각 층을 똑같이 계산할 수 없다. 높이의 절반 지점에서 단면의 길이가 절반이라면 넓이는 1/4이 된다. 길이의 비와 넓이의 비를 구별해야 부피의 변화도 제대로 이해할 수 있다.



두께 1인 각 층의 부피는 24이다. 다섯 층을 더하면 120이다.

탐구

닮은 입체의 모든 길이가 두 배가 되면 부피는 몇 배가 되는가?

풀이와 확인

가로와 세로와 높이에 각각 2가 곱해지므로 부피는 8배가 된다. 밑면 넓이가 먼저 4배가 되고 높이가 다시 2배가 된다고 설명해도 같다. 길이만 두 배라는 이유로 부피도 두 배라고 답하면 차원의 변화를 놓친 것이다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

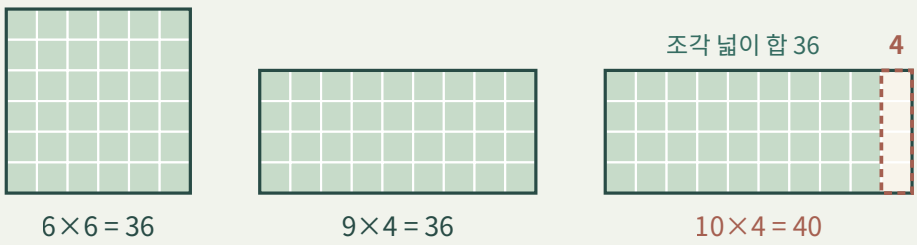
잘라 붙이기 탐구의 검산

눈으로 그럴듯한 그림과 빈틈없는 넓이 증명은 구별해야 한다.

넓이 36인 정사각형을 여러 조각으로 잘라 다른 직사각형처럼 배열했다고 하자. 새 외곽이 가로 9와 세로 4라면 넓이는 여전히 36이다. 그러나 외곽이 가로 10과 세로 4라고 주장한다면 조각 사이의 틈이나 겹침 또는 경계선의 오독을 의심해야 한다.

퍼즐 그림에서는 거의 직선처럼 보이는 경계가 실제로는 서로 다른 기울기를 가진 선분일 수 있다. 확대했을 때 아주 좁은 틈이 드러나기도 한다. 길이와 좌표와 기울기를 계산하면 시각적 인상을 넘어 정확한 검증이 가능하다.

활동에서는 조각마다 넓이를 적고 전체 합과 외곽 도형의 넓이를 독립적으로 계산한다. 두 결과가 다르면 어느 전제가 잘못되었는지 찾아본다. 도형을 나누어 설명하는 방식의 가치는 아름다운 배치 자체보다 각 조작이 무엇을 보존하는지 명확하게 보여 주는 데 있다.



조각 36칸으로는 10×4 외곽을 채우지 못하고 4칸이 빈다.

탐구

작은 조각들의 넓이 합이 36인데 외곽 직사각형 넓이가 40이면 어떤 결론을 내릴 수 있는가?

풀이와 확인

겹침이 없다는 조건 아래 빈 부분의 넓이는 4이다. 반대로 조각을 겹쳐 놓았다면 외곽과 조각 넓이의 차만으로 빈틈의 크기를 바로 정할 수 없다. 빈틈과 겹침을 각각 구분한 뒤 넓이의 합을 세워야 한다.

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui

동아시아관 / 33

조충지와 근삿값의 정밀도

원주율을 둘러싼 두 수

정밀한 계산은 많은 자릿수뿐 아니라 믿을 수 있는 범위를 남긴다.

조충지는 원주율에 관한 정밀한 결과와 355/113이라는 분수 근삿값으로 알려져 있다. 그의 저술은 완전한 형태로 전하지 않으므로 구체적인 계산 경로를 모두 알고 있는 것처럼 서술해서는 안 된다. 알려진 결과와 그것을 오늘 재현하는 방법은 별도로 제시해야 한다.

3.1415926<π<3.1415927이라는 범위는 폭이 0.0000001이다. 두 끝값 사이의 구간이 좁다는 것은 실제 값이 있을 수 있는 위치를 매우 세밀하게 제한한다는 뜻이다. 이 범위 자체와 355/113이 주는 근삿값의 오차는 서로 다른 정보를 제공한다.

분수 355/113은 약 3.1415929204이다. 따라서 이 분수는 위의 상한 3.1415927보다 조금 크다. 좋은 근삿값이라고 해서 반드시 알려진 좁은 구간 안에 들어가는 것은 아니다. 값의 비교를 직접 해 보면 서로 다른 정확도 주장을 혼동하지 않게 된다.

왼쪽 경계	실제 값	오른쪽 경계
3.1415926	π	3.1415927
	구간 폭 0.0000001	

경계 사이의 간격이 원주율의 가능한 위치를 제한한다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

355/113과 3.1415927 가운데 어느 것이 큰지 소수 계산으로 확인하라.

풀이와 확인

355÷113을 계산하면 약 3.1415929204이므로 분수 쪽이 더 크다. 둘의 차는 약 0.0000002204이다. 조충지의 구간 결과와 분수 근삿값을 같은 정확도의 표현으로 취급하지 않는 것이 중요하다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

분수가 가까운 정도

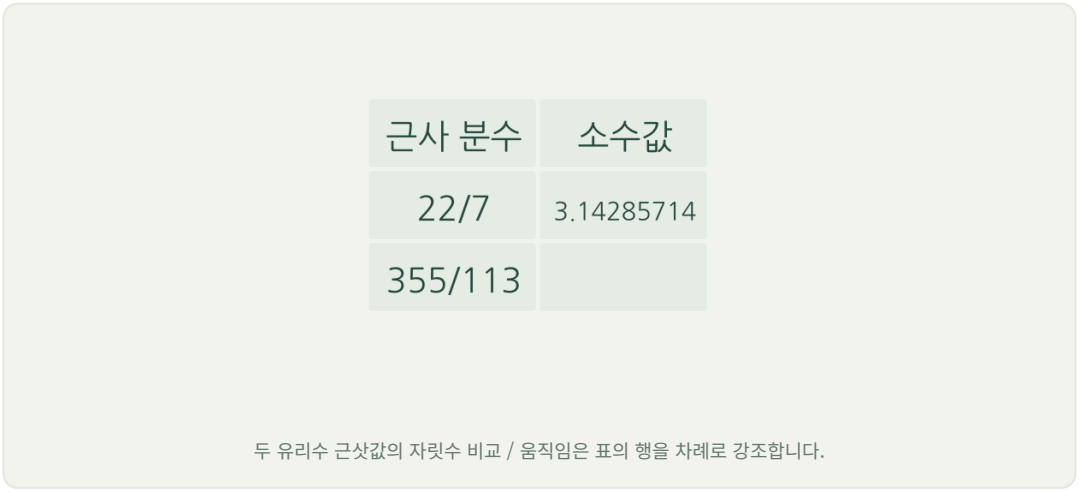
분모가 작다는 장점과 오차가 작다는 장점은 함께 비교할 수 있다.

원주율의 근삿값으로 3과 22/7과 355/113을 비교해 보자. 각각 계산의 편리함이 다르다. 3은 곱하기 쉽지만 오차가 크다. 22/7은 약 3.142857이고 355/113은 약 3.1415929204이다. 작은 분수로 정밀한 비율을 나타낼 수 있다는 점이 흥미롭다.

비교를 위해 π≈3.1415926536을 기준값으로 사용하면 절대오차는 각각 약 0.141593과 0.00126449와 0.0000002668이다. 이 기준값도 유한소수이지만 여기에서 비교하는 오차보다 충분히 세밀하다. 계산에 사용한 기준 자릿수를 밝혀 두면 검산이 가능하다.

근삿값을 고를 때에는 목적을 먼저 생각한다. 빠른 어림에는 3이 편리할 수 있고 정밀한 설계에는 더 정확한 값이 필요할 수 있다. 자릿수가 많은 수를 무조건 택하는 대신 입력 자료의 정확도와 요구되는 결과의 오차를 함께 고려한다.

근사 결과를 기록할 때에는 사용한 분수와 비교 기준과 오차의 방향을 함께 적는다. 이 예에서는 355/113이 기준값보다 약 0.0000002668 크다. 역사적 기록에 있는 결과와 오늘 직접 계산한 비교값을 구분하면 검산의 근거가 분명해진다.



두 유리수 근삿값의 자릿수 비교 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

근삿값	소수 표현	대략적인 절대오차
3	3	0.141593
22/7	3.14285714	0.00126449
355/113	3.14159292	0.000000267

탐구

22/7의 오차와 355/113의 오차는 대략 몇 배 차이가 나는가?

풀이와 확인

0.00126449를 0.0000002668로 나누면 약 4740이다. 즉 이 기준에서는 355/113의 절대오차가 수천 배 더 작다. 분모는 약 16배 커졌지만 오차 개선 정도는 그보다 훨씬 크다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

큰 원에서 커지는 오차

같은 비율의 오차라도 길이가 커지면 결과의 절대오차가 커진다.

지름이 100인 원의 둘레를 πd로 계산한다고 하자. π 대신 3.14를 쓰면 둘레는 314이다. 기준값 π≈3.1415926536을 사용한 둘레는 약 314.15926536이므로 차는 약 0.15926536이다. 지름이 1000이면 같은 근삿값을 쓸 때 차도 열 배가 된다.

이는 둘레 공식에서 지름과 원주율이 곱해지기 때문이다. 원주율 근삿값의 오차를 e라 하면 둘레의 오차는 d×e이다. 지름이 정확하게 주어졌다는 가정 아래 이 관계가 성립한다. 지름 측정에도 오차가 있으면 두 원인을 함께 살펴야 한다.

정밀한 계산이 필요하다는 말에는 대상의 크기와 허용 오차가 포함되어야 한다. 작은 모형에서 보이지 않던 차이가 큰 원형 구조에서는 문제가 될 수 있다. 반대로 입력 지름을 거칠게 측정했다면 원주율의 자릿수만 늘리는 것이 전체 정확도를 크게 높이지 못한다.



π 대신 3.14를 썼을 때 둘레의 오차

탐구

지름이 200인 원에서 π를 3.14로 쓰면 둘레 오차는 대략 얼마인가?

풀이와 확인

원주율 오차 약 0.0015926536에 200을 곱하면 약 0.31853072이다. 지름 100인 경우의 두 배이다. 길이 단위가 cm라면 결과도 cm이며 넓이 단위로 적지 않아야 한다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

반올림과 잘라 버리기

마지막 자리를 처리하는 방식에 따라 오차의 방향과 범위가 달라진다.

3.1415926을 소수 셋째 자리까지 나타낼 때 잘라 버리면 3.141이고 반올림하면 3.142이다. 두 값은 모두 근삿값이지만 첫 값은 원래 수보다 작고 둘째 값은 크다. 무엇을 했는지 쓰지 않고 자릿수만 표시하면 정확도에 대한 해석이 모호해진다.

양수를 소수 셋째 자리에서 잘라 버리면 오차는 0 이상 0.001 미만이다. 가장 가까운 값으로 반올림하면 절대오차는 보통 0.0005 이하로 제한된다. 정확히 중간인 경우의 처리 규칙은 별도로 정할 수 있다. 계산 프로그램마다 이 규칙이 다를 수 있음도 알아 두자.

긴 계산에서는 매 단계마다 반올림하는지 마지막에만 반올림하는지도 결과에 영향을 준다. 중간값의 자릿수를 너무 일찍 줄이면 작은 오차들이 누적될 수 있다. 가능한 경우 계산 도중에는 여분의 자릿수를 유지하고 마지막 표시 단계에서 필요한 정확도로 정리한다.

처리 방법	소수 셋째 자리까	원래 값과 비교
잘라 버리기	3.141	작음
가장 가까운 값	3.142	

3.1415926을 줄이는 두 방법은 서로 다른 방향의 오차를 만든다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

3.1415926을 소수 넷째 자리까지 반올림한 값과 잘라 버린 값을 구하라.

풀이와 확인

반올림한 값은 3.1416이고 잘라 버린 값은 3.1415이다. 다섯째 자리 숫자가 9이므로 반올림에서는 넷째 자리 숫자 5를 6으로 올린다. 두 표현의 차는 0.0001이다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

사이 분수의 위치

두 분수의 분자와 분모를 각각 더하면 사이에 놓이는 분수를 만들 수 있다.

양의 분모를 가진 3/1과 22/7을 보자. 분자를 더하고 분모를 더한 25/8은 3.125이다. 이 값은 3과 22/7 사이에 있다. 이러한 사이 분수의 성질은 유리수의 순서를 탐구하는 좋은 출발점이다. 여기의 활동은 특정 인물의 발견 과정을 재현한다고 주장하지 않는다.

일반적으로 a/b<c/d이고 b와 d가 양수라면 a/b<(a+c)/(b+d)<c/d이다. 첫 부등식은 a(b+d)<b(a+c)를 정리하면 ad<bc가 되어 확인된다. 둘째 부등식도 같은 조건으로 돌아간다. 분모가 양수라는 조건이 부등식 방향을 유지하게 한다.

이 성질을 이용하면 알려진 두 경계 사이에 새 분수를 만들 수 있다. 다만 사이에 있다는 사실만으로 목표값에 더 가깝다고 보장되지는 않는다. 목표값이 어느 쪽에 있는지 추가로 비교하면서 경계를 바꾸어 나가야 유용한 근사 절차가 된다.

왼쪽 경계	사이 분수	오른쪽 경계
1/3	2/5	1/2
약 0.3333	0.4	

1/3과 1/2 사이의 분수 2/5 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

1/3과 1/2의 사이 분수를 구하고 두 경계 사이에 있는지 확인하라.

풀이와 확인

사이 분수는 2/5이다. 1/3≈0.3333이고 2/5=0.4이며 1/2=0.5이므로 사이에 있다. 분수 덧셈 1/3+1/2=5/6과는 다른 연산이다. 분자와 분모를 각각 더했다고 두 분수의 합이라고 부르면 안 된다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

분모를 고정하여 찾아보기

가까운 분수를 찾을 때에는 분모와 분자를 따로 조절해 볼 수 있다.

분모를 7로 정하고 π에 가까운 분수를 찾으려면 7π에 가까운 정수를 고르면 된다. 7π≈21.9911이므로 분자는 22가 적절하다. 분모를 113으로 정하면 113π≈354.99997이므로 분자 355가 매우 가까운 값을 만든다.

이 관찰은 왜 특정 분수가 좋은 근삿값인지를 수치적으로 설명하지만 그 분모를 처음에 어떻게 찾았는지까지 설명하지는 않는다. 결과를 확인하는 일과 탐색 절차를 밝히는 일은 구별해야 한다. 역사 자료가 남지 않은 부분에 현대 계산을 넣을 때에도 이 구분이 필요하다.

직접 탐구할 때에는 분모를 1부터 20까지 바꾸면서 가장 가까운 정수 분자를 정하고 오차를 표로 만들 수 있다. 모든 분모가 이전보다 좋은 근삿값을 주는 것은 아니다. 오차가 특별히 작아지는 지점을 찾으면 유리수 근사의 불규칙한 모습을 볼 수 있다.

분모	분모×π의 근삿값	선택한 분수
7	21.9911	22/7
10	31.4159	31/10
113	354.99997	355/113

탐구

분모 10과 분모 14에서 π에 가장 가까운 정수 분자를 골라 보자.

풀이와 확인

분모 10에서는 $10\pi \approx 31.416$이므로 31/10을 고른다. 분모 14에서는 $14\pi \approx 43.982$이므로 44/14=22/7을 고른다. 분모가 커졌다고 반드시 약분되지 않는 새로운 분수가 생기는 것은 아니다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

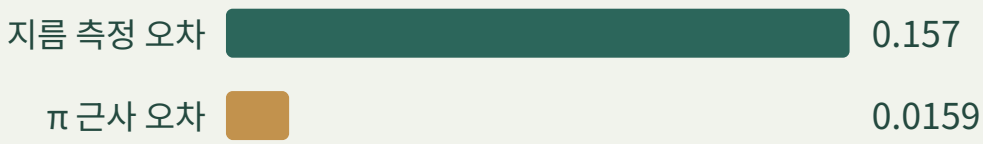
측정 오차와 계산 오차

입력값의 불확실성은 정밀한 상수만으로 없앨 수 없다.

지름을 10.0cm로 측정했지만 실제로는 9.95cm에서 10.05cm 사이일 수 있다고 하자. 원주율을 충분히 정확하게 사용해도 둘레에는 약 0.157cm의 편차가 생길 수 있다. 지름의 최대 편차 0.05cm에 π를 곱한 값이다.

이때 π를 3.1415926536까지 쓰면서 둘레를 소수 열 자리로 발표하면 측정 수준보다 지나치게 정밀한 인상을 준다. 계산기가 보여 주는 자릿수와 결과가 실제로 믿을 만한 자릿수는 다르다. 수치를 전달할 때에는 측정 방법과 단위와 오차 범위를 함께 생각해야 한다.

원주율을 3.14로 쓰는 데서 생기는 오차와 지름 측정에서 생기는 오차를 비교하면 개선 방향이 보인다. 지름 10cm에서 상수 근사 때문에 생기는 오차는 약 0.0159cm이다. 이 예에서는 지름을 더 정확히 재는 일이 우선적으로 도움이 된다.



지름 10cm인 예에서 계산한 둘레 오차의 크기 비교. 두 막대의 단위는 cm이다.

탐구

지름의 오차를 0.05cm에서 0.005cm로 줄이면 둘레의 입력 오차는 어떻게 바뀌는가?

풀이와 확인

약 0.157cm에서 약 0.0157cm로 열 분의 일로 줄어든다. 이 정도가 되면 π를 3.14로 쓸 때의 상수 근사 오차와 비슷한 규모가 된다. 전체 정확도를 높이려면 두 원인을 함께 조절해야 한다.

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi

동아시아관 / 34

손자산경과 나머지의 만남

세 조건으로 수를 찾다

하나의 나머지는 불완전하지만 여러 나머지는 수의 범위를 좁힌다.

손자산경에는 3으로 나누면 2가 남고 5로 나누면 3이 남으며 7로 나누면 2가 남는 수를 찾는 문제가 나온다. 가장 작은 양의 답은 23이다. 책의 성립 시기는 정확히 확정하기 어렵다. 병법서의 손자와 같은 저자라고 보아서도 안 된다.

먼저 3으로 나누어 2가 남는 수를 적으면 2에서 시작하여 3씩 늘어난다. 이 가운데 5로 나누어 3이 남는 수를 고르면 8과 23과 38 등이 남는다. 다시 7에 대한 조건을 확인하면 23을 찾을 수 있다.

이 방식은 가능한 수를 차례로 거르는 탐색이다. 세 조건을 한 번에 머릿속으로 해결하는 대신 조건 하나를 만족하는 목록부터 만든다. 마지막 답은 원래의 세 나눗셈으로 각각 검산해야 한다. 한 조건의 확인만으로는 충분하지 않다.

수	3의 나머지	5의 나머지	7의 나머지
8	2	3	1
23	2	3	2
38	2	3	

후보를 조건별로 검사하는 현대식 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

23의 세 나머지를 직접 확인하라.

풀이와 확인

23=3×7+2이고 23=5×4+3이며 23=7×3+2이다. 따라서 세 조건을 모두 만족한다. 목록에서 먼저 등장한 8은 처음 두 조건만 만족하므로 답으로 선택할 수 없다.

[EA05] University of St Andrews. Sun Zi

같은 나머지가 돌아오는 간격

반복되는 조건을 합치면 새로운 반복 주기가 생긴다.

3으로 나누어 2가 남고 5로 나누어 3이 남는 수는 8에서 시작하여 15씩 늘어난다. 15는 3과 5의 공배수이므로 더해도 두 나머지가 바뀌지 않는다. 8과 23과 38과 53은 같은 두 조건을 공유한다.

반대로 두 수가 이 조건을 함께 만족하면 두 수의 차는 3과 5로 모두 나누어진다. 3과 5가 서로소이므로 차는 15의 배수이다. 그러므로 확인하지 않은 다른 갈래의 답이 중간에 숨어 있지 않다는 것도 설명할 수 있다.

세 번째 조건까지 합치면 반복 간격은 105가 된다. 23에 105를 더한 128도 같은 나머지를 가진다. 가장 작은 양의 답을 묻는 문제와 가능한 모든 정수 해를 묻는 문제는 답의 형식이 다르다.



처음 두 조건을 만족하는 후보의 간격은 15이다.

탐구

손자산경 문제에서 128은 답인가?

풀이와 확인

128도 세 조건을 만족한다. 다만 가장 작은 양의 정수를 요구했다면 23을 적어야 한다. 모든 정수 해는 정수 k에 대하여 23+105k로 나타낼 수 있다.

하나의 조건만 바꾸는 수

다른 나머지를 건드리지 않는 수를 만들면 조건을 조립할 수 있다.

3에 대해서는 나머지가 1이고 5와 7에 대해서는 나머지가 0인 수를 찾아보자. 5×7=35의 배수를 보면 70이 이 조건을 만족한다. 같은 방법으로 21은 5에 대해서만 1이 남고 15는 7에 대해서만 1이 남는다.

이 세 수를 나머지 조절 장치처럼 사용할 수 있다. 70을 두 번 쓰면 3에 대한 나머지가 2가 된다. 21을 세 번 쓰면 5에 대한 나머지가 3이 된다. 15를 두 번 쓰면 7에 대한 나머지가 2가 된다.

모두 더한 233은 원하는 세 조건을 만족한다. 여기서 105를 두 번 빼면 23을 얻는다. 이 설명은 역사적 계산 규칙을 현대의 나머지 언어로 해석한 것이다. 각 수의 역할을 검산하면 마술 같은 공식이 논리적인 구성으로 바뀐다.

장치	÷3	÷5	÷7
70	1	0	0
21	0	1	0
15	0	0	1

각 조절 장치가 남기는 나머지

탐구

70 대신 35를 사용하면 왜 첫 번째 나머지가 달라지는가?

풀이와 확인

35를 3으로 나누면 2가 남는다. 원하는 조절 장치의 나머지는 1이므로 35를 두 배 한 70을 사용한다. 70은 여전히 5와 7의 배수이므로 나머지 두 조건에는 영향을 주지 않는다.

[EA05] University of St Andrews. Sun Zi

곱셈을 거꾸로 푸는 나머지

나머지 세계에서는 곱셈의 역을 조건부로 찾을 수 있다.

5의 배수 가운데 7로 나누면 1이 남는 수를 찾자. 5를 차례로 곱하면 나머지는 5에서 3과 1로 바뀐다. 따라서 5×3은 7을 기준으로 1과 같은 나머지를 가진다. 이를 현대 용어로 3이 5의 법 7에 대한 역원이라고 한다.

여기에서 1/5라는 보통의 분수를 계산하는 것은 아니다. 나머지만 비교하는 새로운 관계에서 곱셈을 되돌리는 수를 찾는다. 5x를 7로 나눈 나머지가 4라면 양쪽에 3을 곱하여 x의 나머지가 12와 같다는 것을 얻는다.

12를 7로 나누면 5가 남으므로 x는 7로 나누어 5가 남는 수이다. 실제로 5×5=25는 7로 나누어 4가 남는다. 계산을 마친 뒤 원래 조건으로 돌아가면 기호 조작의 뜻을 확인할 수 있다.

x	1	2	3	4	5
5x의 법 7 나머지	5	3	1	6	4

곱셈표에서 역원을 찾는 활동

탐구

3x를 5로 나눈 나머지가 1일 때 x의 가장 작은 양의 값을 구하라.

풀이와 확인

3×2=6은 5로 나누면 1이 남으므로 x=2이다. 이때 2가 3의 법 5에 대한 역원이다. x에 5의 배수를 더해도 같은 조건을 만족한다.

서로소가 아닐 때

공통 인수가 있는 주기는 조건끼리 충돌할 수도 있다.

4로 나누면 1이 남고 6으로 나누면 3이 남는 수를 찾자. 4의 조건을 만족하는 수는 모두 홀수이다. 6의 조건도 홀수를 요구하므로 두 조건은 적어도 홀짝에서 충돌하지 않는다. 실제로 9가 두 조건을 만족한다.

이때 반복 간격은 4×6=24보다 작은 12이다. 두 수의 최소공배수가 12이기 때문이다. 따라서 모든 해는 9+12k로 나타낼 수 있다. 서로소인 경우의 곱을 언제나 그대로 쓰면 가장 짧은 반복 주기를 놓칠 수 있다.

반면 4로 나누어 1이 남고 6으로 나누어 2가 남는 조건은 불가능하다. 첫 조건은 홀수를 요구하고 둘째 조건은 짝수를 요구한다. 더 일반적으로 두 나머지의 차는 나누는 두 수의 최대공약수로 나누어져야 한다.



서로소가 아닌 두 조건의 공통 주기는 최소공배수로 정한다.

탐구

4로 나누면 2가 남고 6으로 나누면 4가 남는 가장 작은 양의 수는?

풀이와 확인

10이다. 10=4×2+2이며 10=6+4이다. 두 나머지의 차 2가 최대공약수 2의 배수이므로 조건은 양립한다. 답은 12씩 반복된다.

나머지 조건이 만날 수 있는 까닭

최대공약수 조건은 정수 방정식의 존재 조건과 연결된다.

어떤 정수 x를 m으로 나눈 나머지가 a이고 n으로 나눈 나머지가 b라고 하자. 첫 조건은 x=a+mu로 쓸 수 있다. 둘째 조건 x=b+nv와 같게 놓으면 mu−nv=b−a이다. 두 나머지의 만남을 일차 정수 방정식으로 바꾼 셈이다.

d를 m과 n의 최대공약수라고 하면 왼쪽은 반드시 d의 배수이다. 따라서 b−a도 d로 나누어 떨어져야 한다. 이 조건을 어기면 아무리 큰 수까지 검색해도 해를 찾을 수 없다. 계산을 시작하기 전에 불가능함을 판정하는 이유가 여기에 있다.

조건이 맞으면 나눗셈을 거꾸로 읽어 d를 m과 n의 정수배 합으로 나타낼 수 있다. 그 식에 (b−a)/d를 곱하면 필요한 u와 v가 생긴다. 이렇게 얻은 한 해에 최소공배수를 더해도 두 나머지는 유지된다. 인도관의 쿠타카와 연결해 읽을 수 있는 현대적 대수 설명이다.

예를 들어 x가 6으로 나누어 1을 남기고 8로 나누어 3을 남긴다고 하자. 차이 2는 최대공약수 2의 배수이다. 6u−8v=2의 해 u=3과 v=2를 사용하면 x=19이다. 반복 간격은 24이므로 모든 해는 19+24k이다. k는 정수이다.

조건	차이	판정
법 6에서 1과 법 8에서 3	2	해 19와 주기 24
법 6에서 1과 법 8에서 4	3	정수 해 없음

탐구

두 번째 나머지를 3에서 4로 바꾸면 어떤 일이 생기는가?

풀이와 확인

차이 4−1=3은 최대공약수 2의 배수가 아니다. 첫 조건은 홀수를 요구하고 둘째 조건은 짝수를 요구하므로 공통 해가 없다.

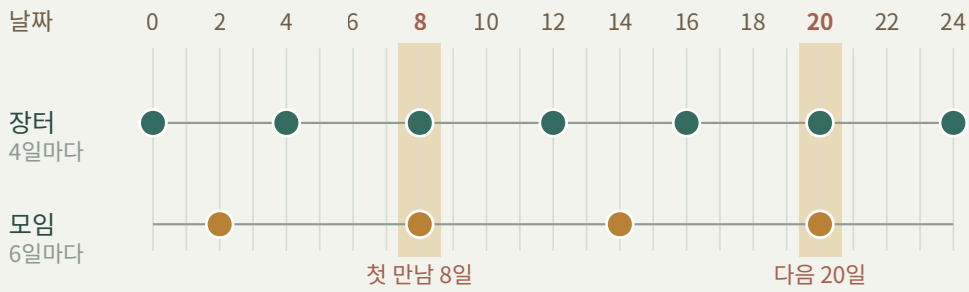
달력 문제의 모형

주기 계산은 실제 달력과 연결되지만 모형의 가정을 먼저 밝혀야 한다.

가상의 마을에서 장터는 4일마다 열리고 관측 모임은 6일마다 열린다고 하자. 오늘 두 행사가 함께 열렸다면 12일 뒤 다시 겹친다. 공통 주기를 찾는 계산은 달력의 여러 반복을 함께 생각하는 기초가 된다.

출발점이 다르면 주기만 알아서는 부족하다. 장터가 오늘 열리고 관측 모임이 이틀 뒤 열린다면 날짜 t는 4의 배수이면서 6으로 나누어 2가 남아야 한다. 후보 0과 4와 8을 차례로 확인하면 8일 뒤가 첫 만남이다.

실제 천문 현상의 주기는 정수 일수로 정확히 나누어지지 않을 수 있다. 이 페이지의 계산은 정해진 간격으로 반복되는 행사 모형이다. 달과 태양의 운동을 동일한 정수 주기표로 완전히 설명했다고 해석하지 않아야 한다.



4일 주기 장터와 2일에 시작하는 6일 주기 모임은 8일과 20일에 만난다.

탐구

두 행사 간격이 5일과 7일이고 오늘 함께 열렸다면 다음 만남은 언제인가?

풀이와 확인

35일 뒤이다. 5와 7은 서로소이므로 최소공배수는 35이다. 오늘을 0일로 세었으며 오늘 자체를 다음 만남에 포함하지 않았다는 조건도 함께 확인한다.

나머지로 오류 찾기

짧은 검사는 일부 실수를 잡지만 정답을 완전히 보장하지 않는다.

십진수는 9로 나눈 나머지를 각 자리 숫자의 합으로 검사할 수 있다. 10은 9로 나누면 1이 남으므로 10의 거듭제곱도 같은 나머지를 갖기 때문이다. 347의 숫자 합 14와 원래 수는 모두 9로 나누면 5가 남는다.

23×14=322를 검사하면 23의 나머지 5와 14의 나머지 5를 곱한 25는 나머지 7을 준다. 322의 숫자 합도 7이다. 이 검사는 계산 결과가 모순되지 않는다는 신호를 준다.

그러나 331도 숫자 합이 7이다. 따라서 나머지 검사를 통과한 오답이 존재한다. 검사에서 틀리면 계산 오류가 확실하지만 검사에서 맞았다고 전체 계산이 옳다고 결론 내릴 수는 없다. 검사의 힘과 한계를 함께 기록하자.

$$347 = 3\times100 + 4\times10 + 7$$
$$\text{법 9에서 } 100\text{과 } 10\text{은 } 1\text{과 같다.}$$
$$3 + 4 + 7 = 14 \rightarrow \text{나머지 } 5$$

십진 자릿값과 9의 나머지 관계

탐구

322를 232로 잘못 적으면 9의 나머지 검사로 찾을 수 있는가?

풀이와 확인

찾을 수 없다. 자리의 순서를 바꾸어도 숫자 합은 7로 같다. 자리 바꿈 오류를 확인하려면 어림이나 다른 나머지 검사 또는 직접 역산을 함께 사용해야 한다.

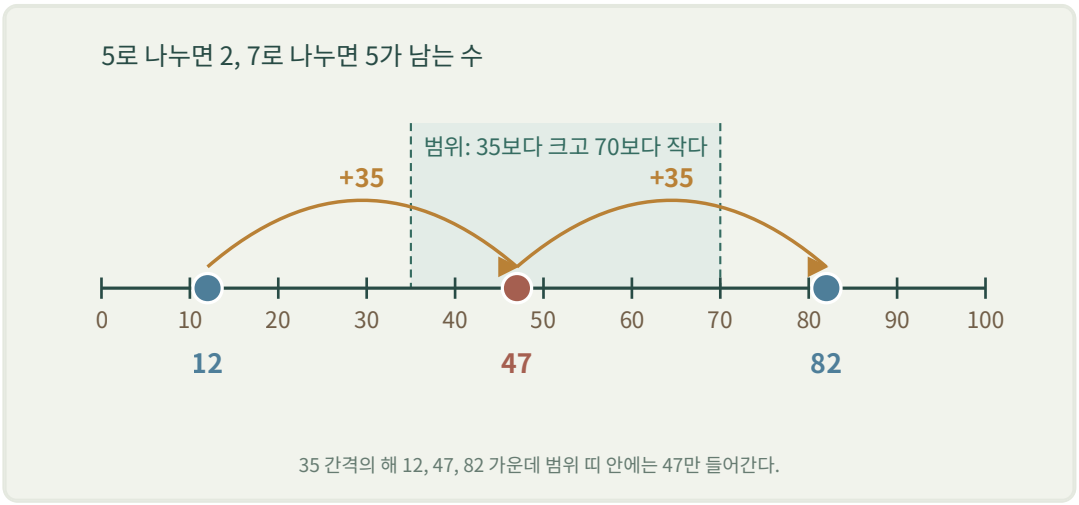
나머지 문제를 설계하기

조건의 개수보다 조건이 서로 어울리는지가 중요하다.

직접 문제를 만들려면 먼저 숨길 수를 하나 정하고 여러 나눗셈의 나머지를 구하는 방법이 편리하다. 예를 들어 47을 정한 뒤 5와 7에 대한 나머지를 구하면 각각 2와 5이다. 다만 이 두 조건만으로 47을 유일하게 결정할 수는 없다.

두 조건은 35마다 반복되므로 12도 같은 나머지를 가진다. 수가 35보다 크고 70보다 작다는 범위를 추가하면 47이 하나로 정해진다. 나머지 정보와 범위 정보가 서로 다른 역할을 한다는 것을 볼 수 있다.

좋은 문제에는 찾으려는 대상의 범위와 답의 의미가 분명하게 적혀 있다. 가장 작은 양의 정수인지 주어진 구간의 정수인지 모든 정수인지 밝히자. 만든 문제를 다른 사람이 풀었을 때 예상과 다른 답이 나온다면 조건이 부족하지 않았는지 먼저 살핀다.



35 간격의 해 12, 47, 82 가운데 범위 띠 안에는 47만 들어간다.

탐구

5로 나누면 2가 남고 7로 나누면 5가 남는 0 이상 100 이하의 수를 모두 구하라.

풀이와 확인

12와 47과 82이다. 가장 작은 비음수 해 12에서 공통 주기 35를 더하여 찾는다. 다음 수 117은 범위를 벗어난다. 숨긴 수만 맞히는 활동과 모든 가능한 수를 찾는 활동은 다르다.

동아시아관 / 35

진구소와 계산 절차의 설계

문제를 방정식으로 옮기기

현실의 조건과 수학적 식 사이에는 해석의 단계가 있다.

진구소의 수서구장은 1247년에 나온 수학서로 방정식과 나머지 문제를 비롯한 다양한 계산을 다룬다. 제목이 비슷한 구장산술과는 서로 다른 책이다. 토지와 측량 등의 문제를 수량 관계로 바꾸는 일이 중요한 특징이다.

여기서는 새로운 교육용 문제로 가로가 세로보다 3만큼 긴 직사각형의 넓이가 40이라고 하자. 세로를 x로 두면 가로는 x+3이고 넓이 조건은 $x(x+3)=40$이다. 정리하면 $x^2+3x-40=0$이 된다.

수학적 식의 해는 5와 −8이지만 길이라는 조건에는 양수 5만 맞는다. 식을 푸는 일 뒤에는 답을 현실의 조건에 되돌려 검사하는 단계가 필요하다. 가로 8과 세로 5를 곱하여 넓이 40을 확인하면 모델링이 끝난다.



이 장에서 새로 만든 직사각형 문제

탐구

넓이가 54이며 가로가 세로보다 3만큼 길다면 세로는?

풀이와 확인

6이다. $x^2+3x-54=(x-6)(x+9)$이므로 양의 해는 6이다. 가로는 9가 된다. 음의 해 −9는 방정식에는 맞지만 양의 길이 조건에 맞지 않는다.

[EA06] University of St Andrews. Qin Jiushao

계수를 줄로 놓기

문자의 모양을 줄여도 각 계수의 자리는 남아 있어야 한다.

다항식 $2x^3+0x^2-5x+7$을 계수만으로 기록하면 2와 0과 −5와 7의 줄이 된다. 차수가 내려가는 순서라는 약속이 있어야 원래 식을 복원할 수 있다. 가운데 0을 빼면 −5가 제곱항의 계수로 잘못 읽힐 수 있다.

산가지의 배열과 현대의 계수 표는 서로 같은 도구는 아니지만 자리가 역할을 정한다는 생각을 비교할 수 있다. 수의 자릿값에서 빈 칸이 중요했던 것처럼 다항식에서도 빠진 항의 자리를 보존해야 한다.

x=2를 넣으면 2×8−5×2+7=13이다. 계수 줄을 다루는 모든 절차는 이 직접 대입과 같은 값을 내야 한다. 기호를 간단히 적는 목적은 의미를 없애는 것이 아니라 반복 계산의 구조를 잘 드러내는 데 있다.

차수	3	2	1	0
계수	2	0	−5	7

빈 항까지 보존한 현대식 계수 배열

탐구

x^3-4의 계수 줄은 어떻게 쓰는가?

풀이와 확인

내림차순으로 1과 0과 0과 −4를 쓴다. 제곱항과 일차항이 없으므로 두 자리에 0이 필요하다. 최고차항 계수 1도 배열에서는 명시하면 혼동을 줄일 수 있다.

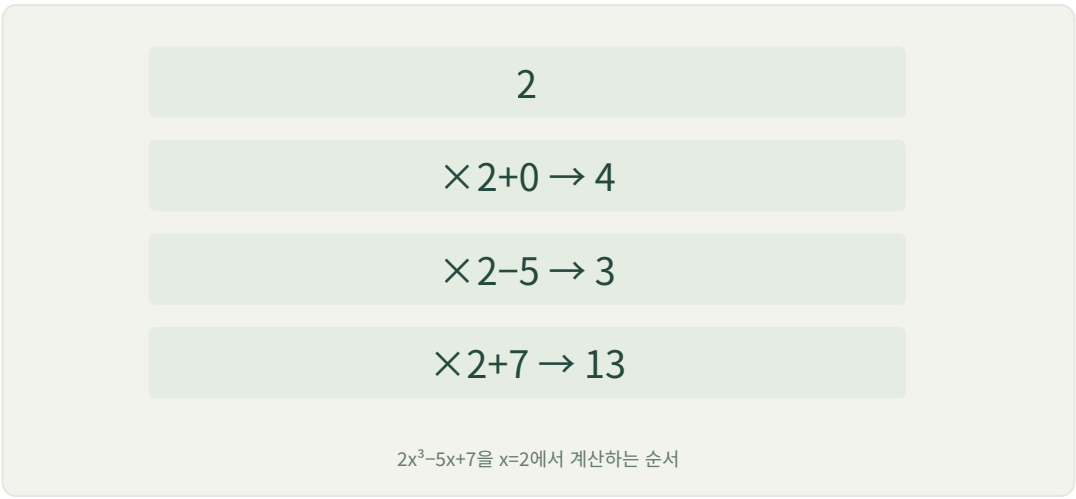
중첩하여 계산하기

거듭제곱을 따로 만들지 않아도 다항식의 값을 구할 수 있다.

$2x^3-5x+7$은 $((2x)x-5)x+7$로 쓸 수 있다. x=2를 넣을 때 2에서 시작하여 2를 곱하고 0을 더하면 4가 된다. 다시 2를 곱하고 −5를 더하면 3이 된다. 마지막으로 2를 곱하고 7을 더하면 13이다.

각 단계가 곱하고 다음 계수를 더하는 같은 모양을 갖는다. 계수에 0이 있는 자리도 한 단계를 차지한다. 이 구조는 계산을 일정한 순서로 수행하게 하며 필요한 곱셈의 수를 줄인다.

오늘날 호너 방식이라고 부르는 형태의 계산과 중국의 다항식 수치 계산 전통을 비교할 수 있다. 현대의 이름이 그 생각의 모든 역사를 대표하지는 않는다. 다만 현재의 괄호와 문자 표기를 역사적 원문의 표기라고 제시하지는 않아야 한다.



$2x^3-5x+7$을 x=2에서 계산하는 순서

탐구

x^3+2x^2+3x+4를 x=2에서 중첩 계산하라.

풀이와 확인

1에서 시작한다. 1×2+2=4이다. 4×2+3=11이다. 11×2+4=26이다. 직접 계산한 8+8+6+4와 같은 값이다.

[EA06] University of St Andrews. Qin Jiushao

답이 놓인 구간 찾기

정확한 해를 모르더라도 해의 위치부터 좁힐 수 있다.

$x^2-2=0$의 양의 해를 찾으려면 1과 2를 먼저 넣어 보자. 결과는 각각 −1과 2이다. 제곱 함수가 이 구간에서 연속적으로 증가하므로 해는 두 수 사이에 있다. 이제 중간값 1.5를 넣으면 0.25이므로 오른쪽 경계를 1.5로 옮긴다.

새 구간의 중간값 1.25에서는 −0.4375가 나온다. 따라서 해는 1.25와 1.5 사이에 있다. 이처럼 부호와 연속성을 이용하여 구간을 절반씩 좁히는 것은 현대적으로 설명한 탐색 활동이다.

구간 길이는 단계를 거칠 때마다 절반이 된다. 처음 길이가 1이면 열 단계 뒤 길이는 1/1024이다. 답의 소수 자릿수를 막연히 늘리기보다 어느 구간 안에 있다는 보장을 얻는 것이 이 방법의 장점이다.



양의 제곱근을 둘러싼 경계를 좁히는 과정

탐구

1.375의 제곱은 2보다 큰가 작은가? 다음 구간은?

풀이와 확인

$1.375^2=1.890625$로 2보다 작다. 앞의 구간이 1.25에서 1.5였으므로 새 구간은 1.375에서 1.5이다. 양수 영역에서 제곱이 증가한다는 조건을 함께 사용했다.

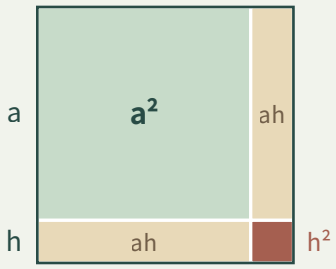
자리 하나를 더 얻는 법

정수 해를 찾은 다음에는 작은 단위로 다시 살필 수 있다.

$\sqrt{2}$가 1과 2 사이에 있다는 것을 안다면 소수 첫째 자리 후보 1.1부터 1.9까지 제곱해 볼 수 있다. $1.4^2=1.96$이고 $1.5^2=2.25$이므로 해는 1.4와 1.5 사이에 있다. 소수 둘째 자리에서도 같은 방식으로 1.41과 1.42 사이를 찾는다.

제곱을 매번 처음부터 계산할 필요는 없다. 이미 a^2를 안다면 $(a+h)^2=a^2+2ah+h^2$를 이용하여 늘어난 부분만 계산할 수 있다. h가 작은 새 자리의 값이다. 이 관계는 도형의 넓이를 덧붙이는 그림으로도 볼 수 있다.

이 활동은 자리별 근사 계산의 원리를 설명하기 위한 재구성이다. 역사서의 구체적인 배열과 계산 순서를 그대로 복원했다고 주장하지 않는다. 어느 단계까지 계산했는지와 마지막 구간의 폭을 기록하면 근삿값의 의미가 분명해진다.



$a = 1.4$, $h = 0.01$

$a^2 = 1.96$

$2ah = 0.028$, $h^2 = 0.0001$

$1.41^2 = 1.9881$

h의 폭은 확대하여 그림

한 변 a에 h를 덧붙이면 넓이는 두 띠 2ah와 h^2만큼 늘어난다.

탐구

1.41^2을 1.4^2에서 출발하여 구하라.

풀이와 확인

h=0.01로 두면 1.96+2×1.4×0.01+0.0001=1.9881이다. 따라서 1.41은 √2보다 작다. 다음 후보 1.42의 제곱은 2.0164이다.

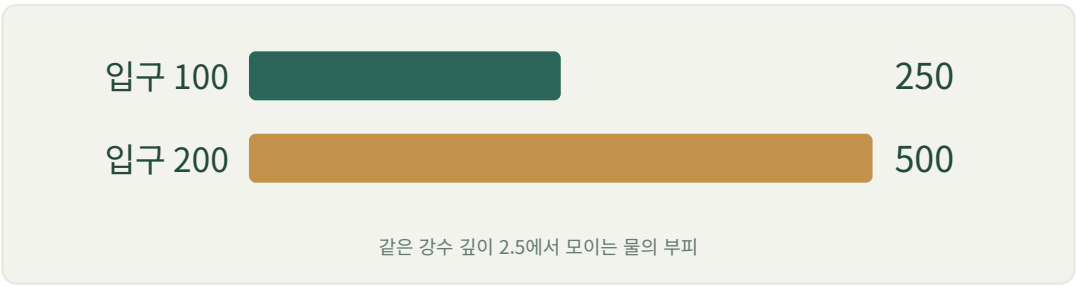
빗물의 높이와 부피

넓이가 바뀌는 그릇에서는 높이를 그대로 비교할 수 없다.

입구가 넓고 바닥이 좁은 그릇에 모인 빗물의 높이를 평평한 땅에 내린 비의 깊이로 곧바로 읽을 수는 없다. 진구소의 수학서에는 빗물을 받는 그릇의 형태와 관련된 문제가 등장한다. 관측값을 해석하려면 그릇의 기하가 필요하다.

단순한 교육용 모형으로 입구 넓이가 100이고 모인 물의 부피가 250이라고 하자. 손실 없이 입구 전체에서 빗물을 받았다면 강수 깊이는 250÷100=2.5이다. 이 계산의 분모는 그릇 바닥 넓이가 아니라 비를 받은 입구 넓이이다.

증발이나 튀는 물이나 바람은 여기서 제외하였다. 실제 측정에서는 이런 조건이 결과에 영향을 준다. 부피를 알고 있다는 가정과 높이만 읽었다는 상황도 구분해야 한다. 높이를 부피로 바꾸려면 그릇 단면이 어떻게 변하는지 알아야 한다.



같은 강수 깊이 2.5에서 모이는 물의 부피

탐구

입구 넓이를 두 배로 하고 같은 깊이의 비를 받으면 물의 부피는?

풀이와 확인

손실이 없다는 모형에서는 두 배이다. 강수 깊이는 부피를 입구 넓이로 나눈 값이므로 변하지 않는다. 큰 그릇에 물이 많이 모였다는 사실만으로 비가 더 많이 왔다고 판단해서는 안 된다.

[EA06] University of St Andrews. Qin Jiushao

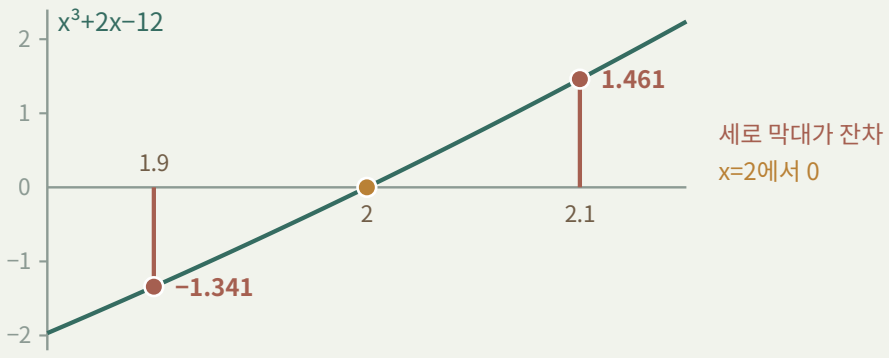
수치 답의 검산

복잡한 계산도 원래 관계에 넣어 보면 오류의 흔적이 드러난다.

새로 만든 삼차방정식 $x^3+2x-12=0$에서 계산 결과가 $x=2$라고 하자. 대입하면 $8+4-12=0$이므로 정확한 해이다. 반면 $x=1.9$를 넣으면 $6.859+3.8-12=-1.341$이 나온다. 이 값은 식을 얼마나 벗어나는지 보여 준다.

다항식에 근삿값을 넣어 얻은 차를 잔차라고 부른다. 잔차가 작으면 도움이 되지만 언제나 해 자체의 오차가 작다고 보장하는 것은 아니다. 함수가 매우 완만한 곳에서는 작은 잔차에도 해의 위치가 크게 달라질 수 있다.

따라서 검산 보고서에는 대입 결과뿐 아니라 해를 둘러싼 구간과 함수의 변화 양상도 함께 제시하면 좋다. 정답 숫자 하나보다 어떤 기준으로 믿을 만하다고 판단했는지가 중요하다. 이 원칙은 역사 계산을 현대 프로그램으로 재현할 때에도 같다.



$x^3+2x-12$의 그래프에서 1.9와 2.1의 잔차를 세로 막대로 나타냈다.

탐구

$x^2=10000$의 근삿값 99.9를 넣으면 잔차는 얼마인가?

풀이와 확인

$99.9^2-10000=-19.99$이다. 해의 오차는 -0.1이지만 잔차의 크기는 약 20이다. 두 수는 다른 양이므로 잔차를 곧바로 해의 오차라고 부르면 안 된다.

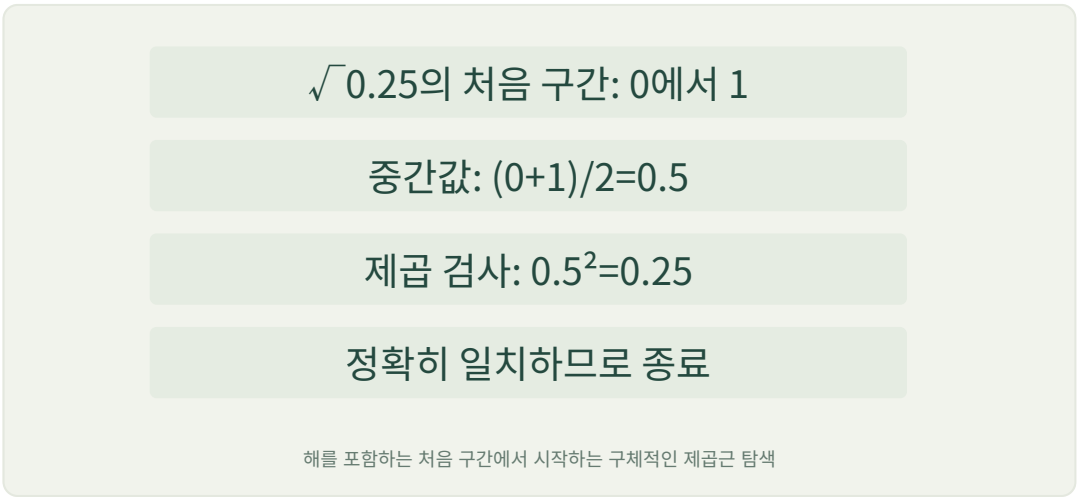
절차를 설명하는 문장

계산법은 시작값과 반복 규칙과 종료 조건을 갖추어야 한다.

알고리즘을 설명할 때 단순히 계속 계산한다고 쓰면 독자는 언제 멈추어야 하는지 알 수 없다. 제곱근 구간 탐색이라면 처음 구간을 정하고 중간값을 계산한 뒤 어느 경계를 바꿀지 설명해야 한다. 구간 폭이 원하는 정확도보다 작아지면 종료한다.

같은 규칙을 다른 수에 적용해 보아야 절차의 일반성을 확인할 수 있다. $\sqrt{2}$에 맞는 숫자를 외운 것과 임의의 양수의 제곱근을 찾는 절차를 이해한 것은 다르다. 입력이 0이거나 1보다 작은 경우에는 처음 구간도 조정해야 한다.

설명 문장을 실제 계산 순서로 바꾸어 쓰면 숨은 가정이 드러난다. 음수의 실수 제곱근처럼 이 절차의 대상이 아닌 입력도 분명히 표시한다. 계산법의 역사에서 중요한 질문은 어떤 답을 얻었는지뿐 아니라 어떤 종류의 문제를 다룰 수 있었는지이다.



해를 포함하는 처음 구간에서 시작하는 구체적인 제곱근 탐색

탐구

√0.25를 찾으면서 처음 구간을 1과 2로 잡으면 무엇이 잘못되는가?

풀이와 확인

정답 0.5가 처음 구간 안에 없다. 구간을 줄이는 절차는 애초에 해를 포함한 구간에서 시작해야 한다. 0과 1로 시작하면 제곱값이 0.25를 양쪽에서 둘러싼다.

동아시아관 / 36

양휘의 삼각형과 수의 배열

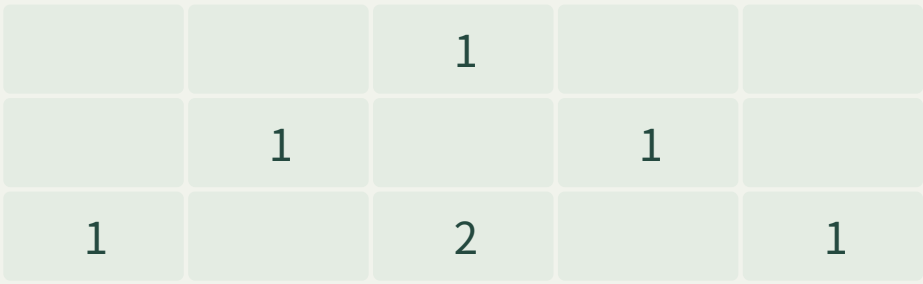
이웃을 더하는 삼각형

간단한 덧셈 규칙이 여러 수학적 관계를 한 배열에 모은다.

양휘의 저술에는 오늘날 이항계수 삼각형으로 읽는 배열이 전한다. 양휘는 앞선 가헌의 연구를 전하는 중요한 경로이기도 하다. 유럽 인물의 이름으로만 이 배열을 부르면 여러 지역에 걸친 역사가 가려질 수 있다.

맨 위에 1을 놓고 다음 줄의 양 끝에도 1을 놓는다. 가운데 칸은 바로 위의 이웃한 두 수를 더하여 채운다. 처음 다섯 줄은 1에서 시작하여 1과 1인 줄과 1과 2와 1인 줄로 이어진다.

규칙을 따라 만드는 일과 왜 그런 규칙이 성립하는지를 설명하는 일은 다르다. 이 장에서는 곱셈 전개와 선택의 개수와 경로 세기를 통해 같은 배열을 다시 읽는다. 여러 해석이 만나면 외운 수열이 의미 있는 구조로 바뀐다.



처음 세 줄을 벌려 놓은 이항계수 배열

탐구

1과 4와 6과 4와 1인 줄 다음을 구하라.

풀이와 확인

양 끝에 1을 놓고 이웃한 수를 더하면 1과 5와 10과 10과 5와 1이 된다. 가운데의 10은 4+6 또는 6+4에서 나온다. 좌우 대칭도 유지된다.

[EA07] University of St Andrews. Yang Hui

제곱을 펼치는 계수

삼각형의 한 줄은 두 항의 거듭제곱을 전개하는 계수이다.

$(a+b)^2$을 곱셈으로 펼치면 $a^2+ab+ba+b^2$이다. ab와 ba가 같으므로 $a^2+2ab+b^2$로 정리된다. 여기의 계수 1과 2와 1은 삼각형의 해당 줄과 일치한다.

한 번 더 a+b를 곱하면 $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$이 된다. 같은 항을 모을 때 바로 앞 전개의 이웃한 계수가 더해진다. 이항계수 삼각형의 덧셈 규칙은 다항식 곱셈 안에서도 자연스럽게 생긴다.

중요한 것은 계수뿐 아니라 지수의 순서이다. a의 지수는 한 칸씩 줄고 b의 지수는 한 칸씩 늘며 두 지수의 합은 일정하다. 수만 외우고 항의 순서를 잃으면 올바른 전개식을 만들 수 없다.

$$(a+b)^2 = a^2+2ab+b^2$$

$$(a+b)^3 = a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$$

계수: 1 → 1 1 → 1 2 1

현대 문자로 읽는 이항계수

탐구

$(a+b)^3$에서 a=b=1로 두면 계수 합은 얼마인가?

풀이와 확인

왼쪽은 $2^3=8$이다. 오른쪽 계수의 합도 1+3+3+1=8이다. 이 관계는 전개 과정에서 항을 빠뜨리지 않았는지 확인하는 간단한 검산이 된다.

선택을 두 갈래로 나누기

어떤 사람을 포함하는 경우와 제외하는 경우를 나누면 개수를 더할 수 있다.

다섯 사람 가운데 두 사람을 뽑는 경우를 생각하자. 특정한 한 사람을 정하여 그 사람이 포함되는 선택과 포함되지 않는 선택으로 나눈다. 포함된다면 나머지 네 사람 중 한 사람을 뽑는 4가지가 있다.

포함되지 않는다면 나머지 네 사람 중 두 사람을 뽑아야 한다. 그 경우는 6가지이므로 전체는 10가지이다. 두 갈래는 겹치지 않으면서 모든 선택을 포함한다. 이것이 앞줄의 이웃한 두 수를 더하는 규칙의 또 다른 이유이다.

순서를 세는 문제인지도 확인해야 한다. 두 사람을 대표와 부대표로 구분하면 같은 두 사람이라도 역할을 바꾸는 경우가 달라진다. 삼각형의 계수는 이 페이지처럼 역할 순서를 구분하지 않는 선택을 센다.

5명 중 2명

특정인 포함: 4

특정인 제외: 6

합계: 10

겹치지 않는 두 경우로 나누어 세기

탐구

네 사람 가운데 세 사람을 뽑는 경우는 몇 가지인가?

풀이와 확인

4가지이다. 뽑지 않을 한 사람을 고르는 것과 대응시킬 수 있다. 뽑는 사람들의 순서를 따로 세면 같은 선택을 여러 번 세게 된다.

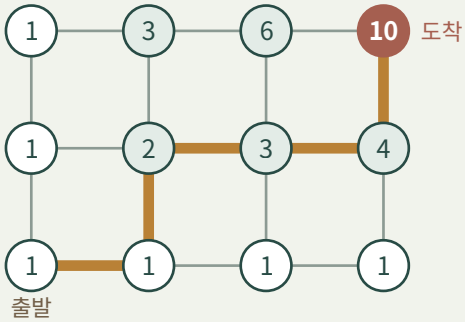
격자 길과 이항계수

오른쪽과 위쪽으로만 움직이는 길에도 같은 덧셈이 나타난다.

가로 세 칸과 세로 두 칸의 격자에서 왼쪽 아래부터 오른쪽 위까지 최단 경로로 이동한다고 하자. 오른쪽으로 세 번과 위쪽으로 두 번 움직여야 한다. 다섯 번의 이동 중 위로 갈 두 자리를 고르면 경로가 정해진다.

각 격자점에 도착하는 길의 수는 왼쪽 점에서 오는 수와 아래 점에서 오는 수의 합이다. 끝점에 들어오는 마지막 방향은 둘 중 하나이며 서로 겹치지 않는다. 가장자리 점의 경로 수는 모두 1이다.

안쪽을 덧셈으로 채우면 끝점의 값은 10이 된다. 도형의 경로를 세던 문제가 사람을 뽑는 문제와 같은 구조를 가진다. 다만 되돌아가는 이동을 허용하면 더 이상 이 작은 표만으로 모든 경로를 셀 수 없다.



각 점의 수 = 왼쪽 점 + 아래 점

예: 6 = 3 + 3, 10 = 4 + 6

오른쪽 3번, 위쪽 2번

5번 이동 중 위로 갈 2자리 고르기

금색 길은 그 가운데 하나

가로 3칸과 세로 2칸 격자의 각 점에 도착하는 최단 경로의 수

탐구

가로 두 칸과 세로 두 칸의 최단 경로는 몇 개인가?

풀이와 확인

6개이다. 네 이동 가운데 위로 가는 두 자리를 고르는 수와 같다. 경로 순서를 직접 적거나 격자점의 값을 덧셈으로 채워 서로 검산할 수 있다.

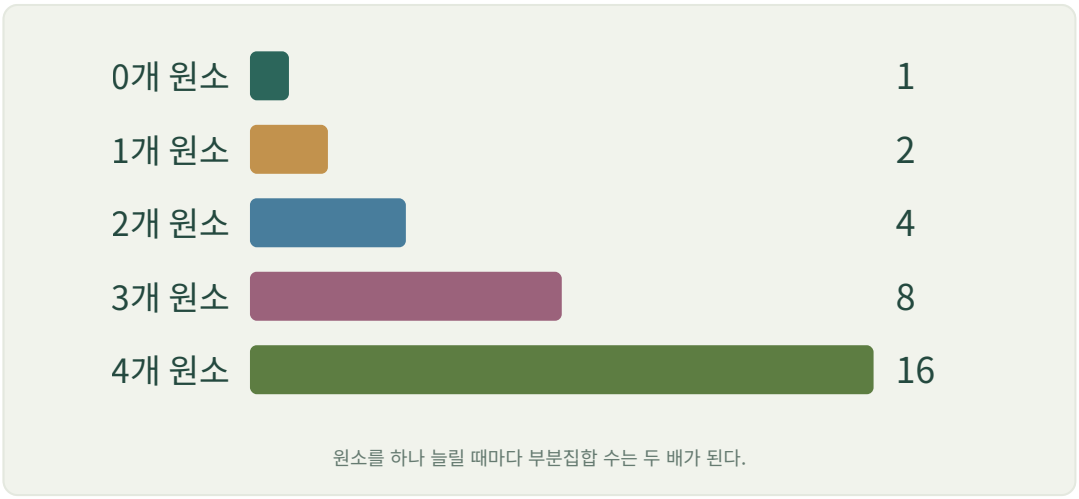
줄을 더하면 두 배가 된다

부분집합을 모두 세면 거듭제곱이 나타난다.

원소가 네 개인 집합에서 아무것도 고르지 않는 경우부터 네 개를 모두 고르는 경우까지 세어 보자. 각각의 개수는 1과 4와 6과 4와 1이다. 합하면 16이 된다. 이는 원소마다 고를지 말지 두 선택이 있기 때문에 2^4로도 셀 수 있다.

새 원소 하나를 추가하면 기존의 모든 선택에 두 갈래가 생긴다. 새 원소를 넣거나 넣지 않는 것이다. 따라서 다음 줄의 합은 이전 줄의 두 배이다. 이 성질은 삼각형을 작성한 뒤 전체적인 오류를 찾는 데 유용하다.

그러나 합이 맞는다고 각 칸이 모두 맞는 것은 아니다. 한 칸을 1 크게 쓰고 다른 칸을 1 작게 쓰면 합은 유지된다. 줄의 합 검사와 이웃 덧셈 검사를 함께 사용해야 배열을 더 확실하게 확인할 수 있다.



원소를 하나 늘릴 때마다 부분집합 수는 두 배가 된다.

탐구

원소가 여섯 개인 집합의 부분집합은 모두 몇 개인가?

풀이와 확인

$2^6=64$개이다. 공집합과 전체 집합도 포함한다. 적어도 하나를 고르는 경우만 묻는다면 공집합 하나를 빼서 63개가 된다.

대칭을 증명하는 짝짓기

같은 개수라는 주장은 서로 대응시키면 분명해진다.

다섯 사람 중 두 사람을 뽑는 방법과 세 사람을 뽑는 방법은 모두 10가지이다. 이는 삼각형이 예쁘게 대칭이어서 우연히 같은 것이 아니다. 두 사람의 선택마다 남은 세 사람을 연결하면 일대일 대응이 된다.

이 대응은 거꾸로도 가능하다. 세 사람을 주면 뽑히지 않은 두 사람이 하나로 정해진다. 어느 선택도 빠지거나 겹치지 않는다. 따라서 실제 목록을 모두 작성하지 않아도 두 개수가 같다는 것을 증명할 수 있다.

수학에서 대칭은 눈에 보이는 모양을 넘어 구조를 보존하는 대응으로 해석할 수 있다. 이항계수의 좌우 대칭을 이해한 뒤에는 격자 경로를 뒤집는 대응도 찾아보자. 같은 명제를 서로 다른 대상으로 설명하는 능력이 길러진다.



선택과 여집합 사이의 대응

탐구

여덟 사람 가운데 일곱 사람을 고르는 수를 빠르게 구하라.

풀이와 확인

한 사람을 제외하는 선택과 대응하므로 8가지이다. 복잡한 곱셈 공식을 먼저 사용하지 않아도 된다. 제외하는 사람을 하나씩 지정하면 모든 선택을 정확히 한 번씩 얻는다.

마방진의 조건을 검사하기

줄의 합이 같은 배열에는 여러 조건이 동시에 걸려 있다.

양휘의 수학 전통에는 수의 배열에 관한 탐구도 보인다. 여기서는 1부터 9까지를 한 번씩 사용하는 3×3 마방진을 현대식 표로 살펴본다. 모든 행과 열과 두 대각선의 합이 같아야 한다.

아홉 수의 합은 45이다. 세 행이 같은 합을 가지므로 각 행의 합은 15가 되어야 한다. 다만 합이 15라는 조건만 알아도 배열이 저절로 완성되는 것은 아니다. 수의 중복 여부와 열과 대각선도 따로 확인해야 한다.

가운데 수가 5인 예에서는 중심을 사이에 둔 두 수가 10을 이룬다. 배열을 회전하거나 뒤집어도 합 조건은 유지된다. 서로 다른 모양의 답을 세려면 회전한 배열을 같은 것으로 볼지 먼저 정해야 한다.

8	1	6
3	5	7
4	9	2

각 행과 열과 두 대각선의 합이 15인 배열

탐구

아래 배열에서 세로 두 번째 열과 두 대각선의 합을 확인하라.

풀이와 확인

두 번째 열은 1+5+9=15이다. 대각선은 8+5+2=15와 6+5+4=15이다. 행만 확인하면 놓칠 수 있는 조건을 함께 검사하였다.

[EA07] University of St Andrews. Yang Hui

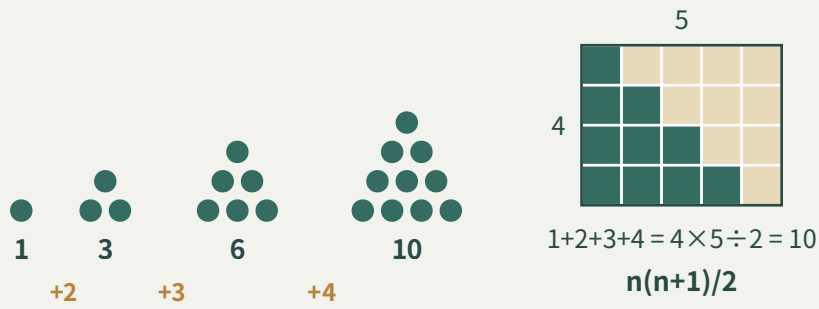
발견한 규칙의 범위

몇 줄에서 보인 모습은 추측의 근거이지 끝난 증명은 아니다.

배열을 탐구하다 보면 대각선에 자연수나 삼각수가 나타나는 것을 볼 수 있다. 예를 들어 왼쪽에서 세 번째 대각선은 1과 3과 6과 10으로 이어진다. 연속된 두 항의 차는 2와 3과 4로 증가한다.

이 수는 차례로 1부터 n까지를 더한 값과 연결된다. n(n+1)/2라는 식은 같은 계단 배열을 뒤집어 붙여 직사각형을 만드는 방법으로 설명할 수 있다. 그림이 숫자 패턴의 이유를 제공한다.

처음 몇 항을 계산하여 규칙을 추측한 뒤에는 다음 항에도 적용되는 이유를 찾아야 한다. 이름이 붙은 유명한 배열이라도 관찰과 증명과 역사적 귀속은 서로 다른 질문이다. 어떤 문장이 어느 종류의 주장인지 표시하며 탐구를 마무리하자.



삼각수 1, 3, 6, 10과 계단 두 개로 만든 4×5 직사각형

탐구

1부터 20까지의 합을 구하고 짝짓기로 설명하라.

풀이와 확인

처음과 끝을 짝지으면 각 쌍의 합이 21이며 열 쌍이 있다. 따라서 합은 210이다. 20×21/2도 같은 결과를 준다. 항이 홀수 개일 때에는 가운데 항의 처리까지 설명해야 한다.

동아시아관 / 37

주세걸과 미지수의 배열

하나를 모른다고 정하기

미지수는 무엇을 모르는지 정확하게 지정하는 이름이다.

주세걸의 산학계몽은 1299년에 간행되었고 사원옥감은 1303년에 나왔다. 두 저술은 방정식과 여러 미지수를 다루는 전통을 보여 준다. 천원술 등의 역사적 표현을 현대 문자식과 비교하면 계산의 구조를 이해하기 쉽다.

다만 x와 y가 인쇄된 현대 방정식을 원문 표기처럼 제시해서는 안 된다. 이 장의 식은 독자의 이해를 위한 번역이다. 역사적 배열의 위치와 명칭이 현대의 문자 역할과 어떻게 대응하는지 따로 확인해야 한다.

가령 두 수의 합이 11이고 차가 3이면 작은 수를 x로 놓고 큰 수를 x+3으로 쓸 수 있다. 합 조건은 2x+3=11이므로 x=4이다. 미지수를 하나 정하면 다른 양을 그 수로 표현하는 것이 첫 단계이다.

표현을 바꾸는 활동에서는 문장과 곱의 형태와 전개식과 계수 배열을 차례로 연결한다. 한 수와 그보다 3 큰 수의 곱이 40이라는 조건은 x(x+3)=40이며 계수 배열에서는 1과 3과 −40을 사용한다. 각 표기가 보존하는 정보와 쉽게 보여 주는 관계를 설명한다.

$$\text{작은 수: } x$$

$$\text{큰 수: } x+3$$

$$x+(x+3)=11 \rightarrow x=4$$

이 장의 현대식 미지수 표현

탐구

합이 18이며 큰 수가 작은 수의 두 배이면 두 수는?

풀이와 확인

작은 수를 x라 하면 큰 수는 2x이다. 3x=18이므로 작은 수 6과 큰 수 12를 얻는다. 합과 배수 조건을 각각 검산한다.

[EA08] University of St Andrews. Zhu Shijie

제곱항을 없애는 소거

같은 소거 원리를 서로 다른 차수의 두 조건에도 적용할 수 있다.

두 수 x와 y가 $x^2+y=11$과 $x^2-y=7$을 만족한다고 하자. 이번에는 x가 제곱으로 나타나므로 앞 장의 일차 연립방정식과 다르다. 두 식을 빼면 x^2이 사라져 2y=4가 된다. 따라서 y=2이다. 소거는 특정 문자만 지우는 요령이 아니라 같은 형태의 항을 맞추어 제거하는 생각이다.

$y=2$를 첫 식에 넣으면 $x^2=9$이다. 실수 범위에서는 $x=3$과 $x=-3$이 모두 가능하다. 따라서 순서쌍은 두 개이다. x가 양의 길이라는 조건을 추가한 경우에만 $x=3$으로 좁힐 수 있다. 식을 정리하는 일과 해의 범위를 선택하는 일은 분리해야 한다.

두 식을 더하는 경로도 가능하다. 이때 y가 없어져 $2x^2=18$이 된다. 먼저 x를 찾은 뒤 y를 복원하면 같은 두 해를 얻는다. 어떤 항을 먼저 없애는지 바꾸어도 원래 조건의 공통 해는 유지되어야 한다. 서로 다른 경로를 비교하면 부호 실수를 찾기 쉽다.

이 예제는 다변수 소거의 구조를 이해하기 위한 현대적 구성이다. 주세걸의 실제 배열이나 원문 문제를 복제한 것은 아니다. 앞 장의 일차 소거와 이번 제곱항 소거를 함께 읽으면 미지수의 수와 차수가 서로 다른 난점임을 알 수 있다.

단계	남는 관계
두 식의 차	$2y=4$
두 식의 합	$2x^2=18$
실수 해	$x=3$ 또는 -3이며 $y=2$

탐구

두 식의 우변을 각각 18과 14로 바꾸면 실수 해는 어떻게 되는가?

풀이와 확인

두 식을 빼면 $y=2$이다. 더하면 $x^2=16$이므로 $x=4$ 또는 $x=-4$이다. 두 순서쌍을 각각 원래 식에 대입하면 18과 14가 나온다.

[EA08] University of St Andrews. Zhu Shijie

항마다 두 가지 차수가 있다

두 미지수의 식에서는 한 줄만으로 항의 위치를 정하기 어렵다.

$3x^2+2xy+4y^2-5$를 계수 배열로 나타내려면 x의 차수와 y의 차수를 함께 기록해야 한다. $2xy$는 x의 차수가 1이며 y의 차수도 1인 항이다. 단순히 전체 차수 2라고만 쓰면 x^2과 구분되지 않는다.

행을 y의 차수로 정하고 열을 x의 차수로 정하면 각 항이 하나의 칸을 차지한다. 없는 항의 칸은 0으로 남긴다. 이런 배열은 문자식의 구조를 공간으로 옮기는 현대적인 학습 방법이다.

x=1과 y=2를 대입하면 3+4+16−5=18이다. 배열에서 같은 계산을 해 보고 문자식의 결과와 비교한다. 표기 방식이 바뀌어도 항의 뜻과 최종 값이 보존되어야 한다.

y차수 / x차수	0	1	2
0	−5	0	3
1	0	2	0
2	4	0	0

$3x^2+2xy+4y^2-5$의 현대식 계수 배열

탐구

2xy와 $2x^2y$는 어떤 칸에서 구별되는가?

풀이와 확인

y의 차수는 둘 다 1이다. 그러나 x의 차수는 각각 1과 2이다. 따라서 같은 행의 서로 다른 열에 놓인다. 계수가 모두 2라는 이유로 같은 항으로 합칠 수 없다.

곱셈은 차수를 이동시킨다

식에 문자를 곱하면 배열의 위치가 일정하게 바뀐다.

다항식 2x+3에 x를 곱하면 $2x^2+3x$가 된다. 각 항의 x 차수가 하나씩 증가한다. 계수는 그대로이며 위치가 이동한다. 수의 자릿값에서 10을 곱할 때 자리가 바뀌는 모습과 비교할 수 있지만 두 개념을 동일시해서는 안 된다.

두 미지수의 배열에서는 y를 곱할 때 y 차수 방향으로 한 칸 이동한다. xy를 곱하면 두 방향으로 각각 한 칸씩 움직인다. 같은 칸에 도착한 항들은 계수를 더하여 합친다.

이 설명을 이용하여 (x+y)(x+2y)를 계산하면 $x^2+3xy+2y^2$가 된다. 네 부분곱 가운데 xy와 2xy가 같은 칸에 놓여 3xy가 된다. 배열은 항을 빠뜨리거나 다른 종류의 항을 잘못 합치는 실수를 줄이는 데 도움을 준다.

×	x	2y
x	x^2	2xy
y	xy	$2y^2$

부분곱을 만든 뒤 같은 항을 모은다.

탐구

(x+2)(x+3)을 전개하라.

풀이와 확인

$x^2+3x+2x+6=x^2+5x+6$이다. x항 두 개를 합치되 제곱항이나 상수항과 섞지 않는다. x=1을 넣으면 왼쪽 12와 오른쪽 12가 같아 검산할 수 있다.

대입으로 차원을 줄이기

한 조건에서 미지수를 표현하면 다른 조건에 넘겨줄 수 있다.

두 수의 합이 7이고 곱이 12인 문제를 살펴보자. 합 조건에서 y=7−x를 얻는다. 곱 조건 xy=12에 이를 넣으면 x(7−x)=12이다. 정리하면 $x^2-7x+12=0$이 된다.

인수분해하면 (x−3)(x−4)=0이므로 x는 3 또는 4이다. 각각에 대해 y는 4 또는 3이 된다. 두 수의 역할을 구분하지 않으면 하나의 짝이지만 x와 y의 자리를 구분하면 두 수쌍이다.

미지수를 없애는 과정에서 해의 정보를 잃거나 가짜 해를 만들지 않았는지 확인해야 한다. 이 예의 대입은 합 조건을 그대로 사용했으며 나누거나 제곱하지 않았다. 마지막에는 두 수쌍을 원래 합과 곱에 넣어 검사한다.

$$x+y=7$$

$$y=7-x$$

$$xy=12$$

$$x^2-7x+12=0$$

두 조건을 하나의 미지수 식으로 모으는 과정

탐구

합이 10이고 곱이 21인 두 양수는?

풀이와 확인

3과 7이다. $x^2-10x+21=(x-3)(x-7)$이므로 두 후보를 얻는다. 순서가 있는 수쌍이라면 $x=3$과 $y=7$인 경우와 그 반대 경우를 모두 적는다.

제곱합을 다른 정보로 구하기

새로운 양을 직접 찾지 않고 관계식을 이용할 수 있다.

$x+y=7$이며 $xy=12$일 때 x^2+y^2을 구하는 데 두 수를 먼저 풀 필요는 없다. $(x+y)^2=x^2+2xy+y^2$이므로 제곱합은 $49-24=25$이다. 원하는 답에 필요한 정보만 선택하는 방식이다.

차의 제곱도 $(x-y)^2=(x+y)^2-4xy$로 구한다. 따라서 이 경우 차의 제곱은 $49-48=1$이다. 차의 크기가 1임을 알지만 $x-y$의 부호까지는 정할 수 없다. 어느 수가 큰지라는 정보가 더 필요하다.

이와 같은 항등식은 특정 숫자에만 맞는 우연한 공식이 아니다. 곱셈을 전개하면 모든 실수 x와 y에 대해 성립함을 확인할 수 있다. 문제에 주어진 합과 곱이 답을 얼마나 결정하는지 살피는 활동이다.

$$x^2+y^2 = (x+y)^2-2xy$$

$$(x-y)^2 = (x+y)^2-4xy$$

합 7과 곱 12 → 제곱합 25

합과 곱을 다른 양으로 바꾸는 항등식

탐구

x+y=10이며 xy=21이면 x^2+y^2과 차의 크기를 구하라.

풀이와 확인

제곱합은 100−42=58이다. 차의 제곱은 100−84=16이므로 차의 크기는 4이다. x−y는 순서에 따라 4 또는 −4일 수 있다.

차이를 한 번 더 살피기

수열의 값보다 이웃한 값의 차이가 규칙을 더 잘 드러낼 수 있다.

제곱수 1과 4와 9와 16과 25를 늘어놓자. 이웃한 차는 3과 5와 7과 9이다. 이 차들의 차는 모두 2이다. 원래 값은 빨리 커지지만 두 번째 차이는 일정하다.

n^2과 $(n+1)^2$의 차를 식으로 구하면 2n+1이다. 따라서 첫 번째 차이가 홀수로 늘어나는 이유를 설명할 수 있다. 첫 값과 차이 규칙을 알면 다음 값을 거듭제곱 없이 덧셈으로 만들 수 있다.

차분은 수열과 다항식의 관계를 탐구하는 도구이다. 몇 항이 일정한 두 번째 차이를 가진다고 해서 모든 미래 항이 반드시 제곱 규칙을 따른다고 단정할 수는 없다. 무한히 계속되는 정의를 제시했는지 유한한 관측표만 제시했는지 구분한다.

제곱수	1	4	9	16	25
첫 차이		3	5	7	9
둘째 차이			2	2	2

제곱수의 두 번째 차이는 일정하다.

탐구

제곱수 25 다음 값을 차이만 이용하여 구하라.

풀이와 확인

앞의 차이 9 다음은 11이므로 25+11=36이다. 다음 차이는 13이므로 그 뒤는 49이다. $(n+1)^2-n^2=2n+1$이라는 일반식이 이 절차를 보장한다.

동아시아관 / 38

주판과 진겁기의 계산 문화

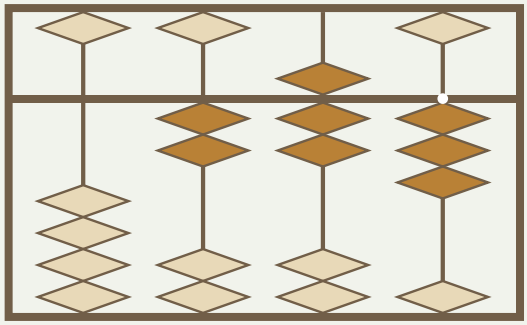
손으로 움직이는 자릿값

도구가 달라져도 한 자리의 단위는 계산 전체를 지탱한다.

일본의 소로반은 중국에서 전해진 주판과 연결된다. 요시다 미쓰요시의 진겁기는 1627년에 처음 간행되어 주판 계산과 생활의 여러 문제를 소개했다. 산가지와 주판을 함께 보면 같은 자릿값을 서로 다른 물리적 장치로 구현하는 방식을 알 수 있다.

이 장에서는 윗알 하나가 5를 나타내고 아랫알 네 개가 각각 1을 나타내는 현대식 소로반 모형을 사용한다. 역사상의 모든 주판이 이 구성과 같았던 것은 아니다. 기준대에 붙은 알만 계산에 참여하도록 약속한다.

한 줄의 알은 0부터 9까지를 표현하며 옆줄로 이동할 때 단위가 열 배 달라진다. 단위 줄을 어디로 정했는지 표시하지 않으면 같은 알 배열도 37이나 3.7처럼 다르게 읽힐 수 있다.



현대식 소로반에서 기준대 쪽으로 붙은 알을 읽으면 273이다.

탐구

윗알 하나와 아랫알 두 개가 기준대에 붙어 있으면 한 줄의 값은?

풀이와 확인

5+2=7이다. 그 줄이 십의 자리라면 전체 수에 70을 더한다. 알의 값과 자릿값을 곱해서 읽어야 한다.

[EA09] National Diet Library. Early Edo Period

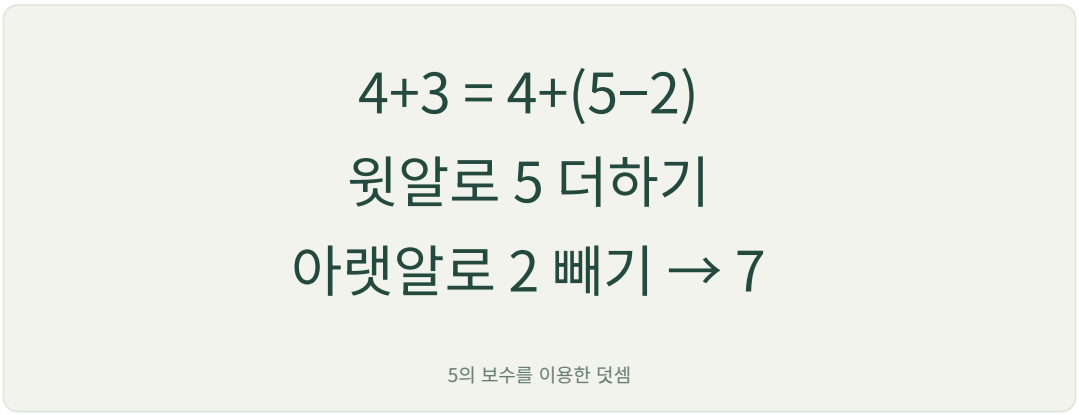
다섯을 이용하는 보수

알이 모자라면 같은 값을 다른 조작으로 바꾼다.

한 줄에 4가 놓여 있을 때 3을 더한다고 하자. 아랫알 네 개를 이미 사용했으므로 아랫알 세 개를 더 올릴 수 없다. 대신 5를 더한 뒤 2를 빼면 된다. 3=5−2라는 관계를 손의 움직임으로 바꾼 것이다.

따라서 윗알을 기준대에 붙이고 아랫알 두 개를 떼면 값은 7이 된다. 도구의 제약은 단순한 불편함이 아니라 수를 여러 방식으로 분해하는 연습 기회가 된다. 어떤 조작이 같은 양을 나타내는지 설명할 수 있어야 한다.

보수는 합이 정해진 기준에 이르도록 채우는 수이다. 5에 대한 3의 보수는 2이다. 이때 보수라는 말을 뺄셈 결과와 기계적으로 연결하기보다 3+2=5라는 짝 관계로 이해하면 응용하기 쉽다.



5의 보수를 이용한 덧셈

탐구

한 줄의 3에 4를 더하려면 5를 기준으로 어떻게 조작하는가?

풀이와 확인

4=5−1이므로 윗알로 5를 더하고 아랫알 하나를 빼면 7이 된다. 처음 값 3을 없애고 다시 답을 놓는 대신 값이 보존되는 조작을 연결한다.

열을 넘는 덧셈

한 줄을 넘어가면 다음 자리와 함께 움직여야 한다.

8에 7을 더하면 15이다. 주판에서는 7=10−3으로 생각하여 다음 자리에서 10을 더하고 현재 자리에서 3을 뺄 수 있다. 8이 5로 바뀌고 다음 자리가 하나 늘어나 전체가 15가 된다.

이때 현재 자리의 알을 5로 바꾸는 것만 하면 값은 5가 되어 10이 사라진다. 받아올림은 두 자리의 연동이다. 각 조작 뒤에 전체 수를 읽어 보면 어느 단계에서 양이 보존되는지 확인할 수 있다.

수 계산에 익숙해지면 손은 빠르게 움직이지만 학습 과정에서는 이유를 말로 설명하는 것이 유용하다. 10의 보수를 이용하는 규칙은 암산에도 그대로 쓸 수 있다. 48+7을 48+10−3으로 계산하면 55이다.



10의 보수를 이용한 암산과 주판의 공통 구조

탐구

76+8을 10의 보수로 계산하라.

풀이와 확인

8=10−2이므로 76+10−2=84이다. 86에서 2를 빼는 두 단계로 계산한다. 원래 수보다 8만큼 커졌는지 확인하면 보수를 잘못 선택한 실수를 잡을 수 있다.

소수점은 기준의 위치다

알의 배열보다 단위의 약속이 먼저이다.

주판의 같은 세 줄이 2와 7과 5를 나타내더라도 단위 줄을 어디로 정하느냐에 따라 275나 27.5나 2.75가 된다. 소수 계산은 특별한 알을 추가하는 일이 아니라 각 줄이 나타내는 단위를 정하는 일이다.

2.75+1.6을 계산할 때 1.6은 1.60과 같은 값이다. 일의 자리와 십분의 일 자리와 백분의 일 자리를 각각 맞추면 4.35가 된다. 숫자 개수를 맞추는 것보다 같은 단위끼리 더한다는 원리를 이해해야 한다.

계산 뒤에는 어림으로 소수점 위치를 검사하자. 약 3에 약 2를 더하는 문제의 답이 43.5나 0.435일 수는 없다. 정확한 알 조작을 했더라도 단위 기준을 잃으면 전체 결과가 열 배씩 달라진다.

수	일	1/10	1/100
2.75	2	7	5
1.60	1	6	0
합	4	3	5

같은 단위가 같은 열에 놓이는 소수 덧셈

탐구

0.48+2.7을 계산하고 단위 정렬을 설명하라.

풀이와 확인

2.7을 2.70으로 읽어 2.70+0.48=3.18을 얻는다. 백분의 일 자리끼리 0과 8을 더하고 십분의 일 자리에서 7과 4를 더하여 받아올림한다.

상인의 비율 문제

단가와 수량을 구분하면 장부의 관계가 선명해진다.

새로 만든 장부에서 천 3필의 값이 420이라고 하자. 종류와 품질이 같고 값이 수량에 비례한다면 한 필의 값은 140이다. 같은 천 5필은 700이다. 이 계산은 전체값을 단위값으로 바꾼 뒤 새 수량으로 늘리는 두 단계이다.

할인이나 고정 운송비가 있으면 단순 비례는 깨진다. 예를 들어 주문마다 운송비 30을 따로 받는다면 지불액은 140n+30이다. 3필 주문과 5필 주문의 총액을 곧바로 수량 비율로 비교하면 틀린다.

역사적 생활 문제를 풀 때에도 사용된 단위와 가격 조건을 읽어야 한다. 익숙한 비례식으로 바꾸기 전에 무엇이 일정한지 확인하자. 주판은 계산을 빠르게 하지만 잘못 세운 관계까지 바로잡아 주지는 않는다.

수량	상품값	운송비	총액
3	420	30	450
5	700	30	730

고정 비용을 분리한 교육용 장부

탐구

한 필 140에 주문별 운송비 30이면 5필 주문의 총액은?

풀이와 확인

140×5+30=730이다. 운송비는 필마다 붙는다고 하지 않았으므로 다섯 번 더하지 않는다. 조건이 달라지면 식도 달라진다.

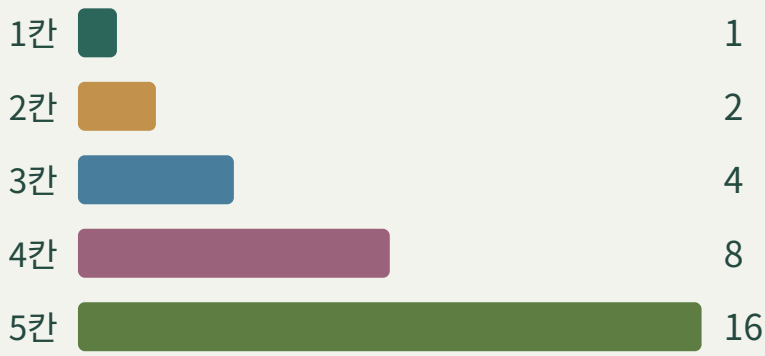
두 배가 쌓이는 이야기

작은 시작도 반복된 곱셈을 거치면 빠르게 커진다.

진겁기는 실용 계산과 함께 수학적 흥미를 불러일으키는 문제도 다루었다. 여기서는 첫 칸에 곡식 한 알을 놓고 다음 칸마다 두 배로 늘리는 새로운 활동을 해 보자. 여덟 칸의 수는 1과 2와 4와 8에서 128까지 이어진다.

첫 여덟 칸의 합은 255이다. 합을 S라 하면 2S는 2에서 256까지의 항을 더한 값이다. 2S에서 S를 빼면 가운데 항들이 사라지고 256−1이 남는다. 따라서 S=255이다.

이 계산은 두 배로 늘어나는 항들의 합을 직접 모두 더하지 않아도 구하는 방법이다. 처음 값이나 증가 비율이 달라지면 식을 수정해야 한다. 이야기의 큰 숫자에 놀라는 데서 멈추지 말고 반복 규칙이 합을 어떻게 결정하는지 살핀다.



두 배씩 증가하는 처음 다섯 칸의 값

탐구

처음 열 칸의 합은 얼마인가?

풀이와 확인

$1+2+\cdots+512=2^{10}-1=1023$이다. 마지막 칸의 값은 512이며 전체 합 1023과 다르다. 몇 번째 칸인지와 몇 칸까지의 합인지 구별한다.

[EA09] National Diet Library. Early Edo Period

빠른 계산과 설명하는 계산

숙련된 손동작을 이해 가능한 단계로 풀어 쓰는 일도 수학이다.

계산 도구를 오래 사용한 사람은 여러 조작을 하나의 움직임처럼 수행할 수 있다. 이를 처음 배우는 사람에게 보여 줄 때에는 생략된 단계를 다시 펼쳐야 한다. 속도가 빠른 시범만으로는 왜 답이 맞는지 알기 어렵다.

예를 들어 98+27을 100+25로 바꾸는 암산은 한쪽에서 2를 덜고 다른 쪽에 2를 더하여 합을 보존한다. 주판에서 비슷한 보수 조작을 쓸 수 있다. 그러나 손의 움직임과 종이 위의 등식은 표현 방식이 다르다.

설명에서는 시작값과 바뀐 값과 보존된 관계를 나란히 적어 보자. 독자가 각 단계를 혼자 재현할 수 있으면 좋은 설명이다. 계산 시간을 재는 활동과 절차의 타당성을 설명하는 활동은 서로 보완하지만 같은 평가 기준은 아니다.

수	바꾸기 전	조정	바꾼 뒤
첫째 수	98	+2	100
둘째 수	27	−2	25
합	125	0	125

한쪽에 더한 2를 다른 쪽에서 빼면 전체 합은 보존된다.

탐구

49+38을 합을 보존하는 방식으로 쉽게 계산하라.

풀이와 확인

49에서 1을 더해 50을 만들고 38에서 1을 빼서 37로 만들면 50+37=87이다. 한쪽만 늘리면 전체 합이 바뀌므로 반대 조작을 함께 해야 한다.

도구를 비교하는 실험

어떤 계산을 하느냐에 따라 도구의 장점이 달라진다.

같은 덧셈 열 문제를 종이와 주판과 암산으로 풀어 보자. 시간을 기록하는 것 외에 틀린 문제의 종류와 중간값을 다시 확인하기 쉬웠는지도 비교한다. 반복 연습량이 다르면 결과를 도구 자체의 우열로 해석하기 어렵다.

종이는 중간 계산을 남기기 좋고 주판은 수를 움직이며 연산하는 데 강점이 있다. 암산은 도구 없이 수행할 수 있지만 긴 중간 결과를 기억해야 한다. 목적이 정답 확인인지 계산 원리 학습인지에 따라서도 적절한 선택이 달라진다.

역사 속 도구는 사회의 필요와 학습 방식 속에서 사용되었다. 오늘의 전자 계산기가 있다고 이전 도구의 의미가 사라지는 것은 아니다. 도구를 통해 어떤 수의 구조가 보이고 어떤 단계가 숨겨지는지를 관찰하면 계산 문화의 차이를 이해할 수 있다.

비교 문제로 402−178을 골라 보자. 답 224뿐 아니라 비어 있는 십의 자리를 어떻게 처리했는지 기록한다. 종이에 남은 교환 표시와 주판에서 바뀐 알의 상태를 비교하면 두 도구가 중간 정보를 보존하는 방식의 차이가 드러난다.

비교 항목	관찰할 내용
정확도	맞힌 문제 수와 오류 유형
시간	같은 수량의 문제 풀이 시간
검토 가능성	중간값을 다시 찾을 수 있는가
조건	난도와 연습량 및 제시 순서

도구 비교에서 관찰 지표와 통제 조건을 분리한 실험 설계표

탐구

공정한 비교 실험을 위해 어떤 조건을 맞추어야 하는가?

풀이와 확인

문제의 난도와 수량과 제한 시간과 연습 기회를 맞춘다. 같은 문제를 반복하면 답을 기억하는 효과가 생기므로 순서를 바꾸거나 난도가 비슷한 다른 문제 묶음을 사용한다.

문제의 독자가 다음 저자가 된다

책 끝의 도전 문제는 계산 지식을 공개적인 연구 과제로 바꾸었다.

일본 국립국회도서관은 진겁기의 수학적 영향에서 도전 문제인 유제의 역할을 설명한다. 생활 계산을 익히던 독자는 답이 쉽게 보이지 않는 문제를 만나게 되었다. 뒤따른 수학서들은 더 어려운 문제를 제시하며 서로 응답했다. 책은 정답을 전달하는 매체이면서 새로운 질문을 유통하는 장소였다.

세키의 생전 간행물인 발미산법은 사와구치 가즈유키의 고금산법에 실린 문제 열다섯 개의 해답을 제시했다. 이 연결을 읽으면 한 수학자의 업적이 앞선 책과 독자의 요구 속에서 형성되었음을 알 수 있다. 사후에는 제자들의 편집과 출판이 다른 연구를 독자에게 전했다.

이 문화를 수업에서 재구성하려면 정답만 숨기는 것으로 끝내지 않는다. 출제자는 조건과 질문을 공개하고 풀이자는 필요한 가정을 확인한 뒤 해설을 제출한다. 출제자가 의도하지 않은 다른 풀이가 나오면 어떤 관계를 새로 발견했는지 함께 기록한다. 다음 문제는 그 차이에서 출발할 수 있다.

예를 들어 합이 12인 두 양수의 곱을 최대화하는 문제에서 시작하자. 풀이자가 $36-d^2$이라는 식을 제시하면 출제자는 양의 정수라는 제한을 추가하거나 합을 홀수로 바꿀 수 있다. 문제의 변형이 새 검토를 요구하는지 살피는 활동이다. 이 수치 예제는 역사적 유제의 번역이 아니라 독서 문화를 체험하기 위한 창작이다.

역할	남길 기록
출제자	범위와 조건
풀이자	계산과 증명
다음 독자	조건을 바꾼 새 질문

탐구

합이 13인 두 양의 정수의 곱은 언제 가장 큰가?

풀이와 확인

두 수의 차이가 가장 작은 6과 7에서 곱 42가 최대이다. 실수라면 6.5와 6.5에서 42.25가 되지만 정수 제한에서는 그 값을 택할 수 없다.

[EA09] National Diet Library. Early Edo Period / [EA10] National Diet Library. Seki Takakazu

동아시아관 / 39

세키와 다케베의 탐구

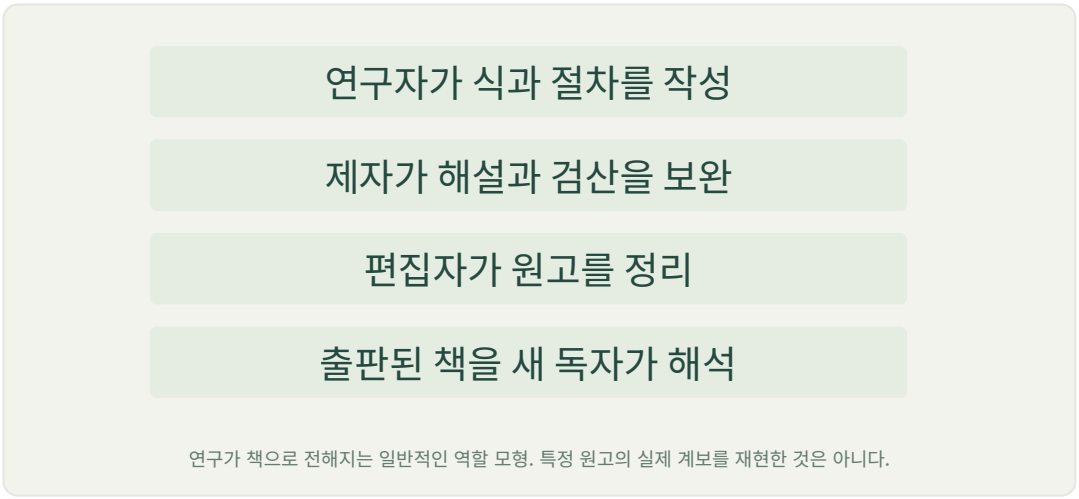
기호를 바꾸면 보이는 관계

표현의 개선은 다룰 수 있는 문제의 범위를 넓힌다.

세키 다카카즈는 1708년에 세상을 떠난 일본의 수학자이다. 출생 연도는 확정된 것으로 다루지 않는 편이 안전하다. 그의 연구는 식의 표현과 미지수의 소거를 발전시키는 데 중요한 역할을 했다. 제자들의 편집과 출판도 연구가 전해지는 데 기여했다.

다케베 가타히로는 세키의 연구를 해설하고 자신의 계산 방법도 발전시켰다. 스승 한 사람의 이름만으로 성과를 묶으면 기록을 정리하고 계산을 검토하며 책으로 만든 여러 사람의 역할이 보이지 않는다.

이 장의 예제는 당시 책의 문제를 그대로 옮긴 것이 아니라 표현과 근사의 원리를 배우기 위해 새로 만든 것이다. 비슷한 공식이 나온다는 이유만으로 당시 와산이 현대 미적분 전체와 같았다고 말하지 않는다.



연구가 책으로 전해지는 일반적인 역할 모형. 특정 원고의 실제 계보를 재현한 것은 아니다.

탐구

연구자와 저술의 관계를 읽을 때 저자 이름 외에 무엇을 확인하는가?

풀이와 확인

작성 시기와 출판 시기와 편집자와 해설자를 확인한다. 사후에 출판된 책이라면 어떤 원고를 바탕으로 누가 정리했는지도 중요하다. 하나의 책이 한 번에 완성되었다고 가정하지 않는다.

[EA10] National Diet Library. Seki Takakazu

두 조건을 한 수로 판별하기

소거가 가능한지 계수의 관계부터 살필 수 있다.

두 방정식 ax+by=e와 cx+dy=f를 생각하자. 첫 식에 d를 곱하고 둘째 식에 b를 곱한 뒤 빼면 (ad−bc)x=ed−bf가 된다. 여기에서 ad−bc가 0이 아니면 x를 하나로 결정할 수 있다.

2x+y=7과 x+3y=11에서는 ad−bc=6−1=5이다. x=(21−11)/5=2이며 y=3이다. 계수로 만든 하나의 수가 두 조건이 독립적으로 작용하는지 알려 준다.

이 페이지는 행렬식의 가장 작은 경우를 현대 기호로 설명한다. 세키의 소거 연구와 연결하여 생각할 수 있지만 현재의 행렬 표기까지 그가 사용했다고 주장하지 않는다. 역사적 아이디어와 오늘의 설명 도구를 구별한다.

$$ax+by=e \quad cx+dy=f$$

$$(ad-bc)x = ed-bf$$

$$ad-bc \neq 0 \rightarrow x\text{가 결정된다.}$$

두 방정식 소거에서 나타나는 계수 조합

탐구

x+2y=8과 2x+4y=16에서는 ad−bc가 얼마인가?

풀이와 확인

1×4−2×2=0이다. 둘째 식은 첫 식의 두 배이므로 새 조건을 주지 않는다. 한 가지 수쌍이 아니라 첫 식을 만족하는 많은 수쌍이 해가 된다.

[EA10] National Diet Library. Seki Takakazu

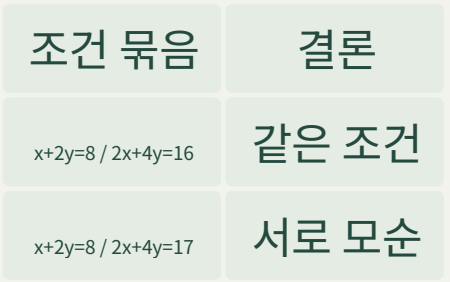
같은 방향의 두 조건

계수가 비례해도 오른쪽 값에 따라 해의 존재가 달라진다.

x+2y=8과 2x+4y=16은 같은 조건이다. 첫 식의 두 배가 둘째 식이므로 하나의 직선을 두 번 적은 셈이다. 그러나 둘째 식의 오른쪽이 17로 바뀌면 두 식을 동시에 만족하는 수는 없다.

첫 식을 두 배 하여 2x+4y=16을 얻은 뒤 17이라는 조건과 비교하면 모순이 드러난다. 계수의 행렬식이 0이라는 사실만으로 해가 무한히 많다고 결론 내릴 수 없는 이유이다. 해가 전혀 없을 수도 있다.

계산 절차에서 어떤 수로 나누기 전에는 그 수가 0인지 확인해야 한다. 0인 경우는 계산이 귀찮아진 예외가 아니라 문제의 구조가 달라지는 지점이다. 조건의 독립성과 모순을 문장으로 설명해 보자.



계수 비례와 해의 존재를 구분하기

탐구

3x+6y=24는 x+2y=8에 새로운 정보를 주는가?

풀이와 확인

주지 않는다. 모든 항을 3으로 나누면 같은 식이 된다. 반면 3x+6y=25라면 앞의 식과 충돌하므로 함께 만족할 수 없다.

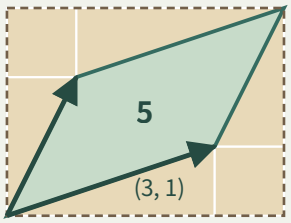
평행사변형의 넓이로 읽기

대수식 하나가 기하학적인 크기로도 나타난다.

두 벡터가 가로 세로 방향으로 각각 (3과 1)과 (1과 2)를 나타낸다고 하자. 두 벡터가 만드는 평행사변형의 넓이는 $|3\times2-1\times1|=5$이다. 2×2 행렬식의 절댓값이 넓이를 준다.

두 벡터가 같은 방향이면 평행사변형은 선분으로 눌려 넓이가 0이 된다. 이는 연립방정식에서 두 조건의 계수가 비례할 때 행렬식이 0이 되는 모습과 연결된다. 대수와 도형이 같은 관계를 다른 언어로 설명한다.

벡터의 순서를 바꾸면 행렬식의 부호는 바뀌지만 넓이는 바뀌지 않는다. 부호는 방향 정보를 담고 절댓값은 크기를 담는다. 이 해석은 현대의 설명이며 역사적 원문에 그대로 적힌 정의로 취급하지 않는다.



두 벡터 (3, 1)과 (1, 2)

바깥 직사각형 $4\times3=12$

옅은 조각 $1.5+1+1+1.5+1+1=7$

넓이 $12-7=5$

행렬식 $3\times2-1\times1=5$

벡터 (3, 1)과 (1, 2)가 만드는 평행사변형의 넓이는 12−7=5이다.

탐구

벡터 (2와 0)과 (0과 4)가 만드는 넓이는?

풀이와 확인

|2×4−0×0|=8이다. 가로 2와 세로 4의 직사각형이므로 보통의 넓이 계산과 일치한다. 두 벡터의 순서를 바꾸면 행렬식은 −8이지만 넓이는 여전히 8이다.

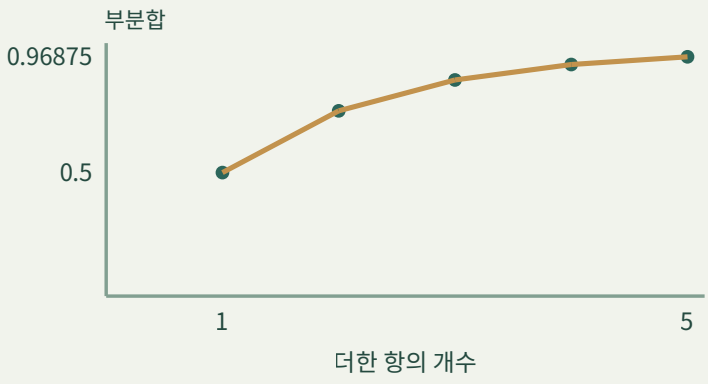
계산값의 규칙을 추측하기

정밀한 수치 표는 새로운 관계를 발견하는 출발점이 될 수 있다.

다케베의 연구를 읽을 때에는 수치 계산을 단순한 보조 작업으로만 보지 않는 것이 좋다. 많은 자릿수를 계산하고 결과의 규칙을 살피는 일은 수학적 탐구의 한 방식이다. 이 페이지에서는 간단한 분수 표로 그 태도를 연습한다.

1/2와 1/4와 1/8을 차례로 더하면 0.5와 0.75와 0.875를 얻는다. 합은 1보다 작지만 점점 가까워진다. n번째 합과 1의 차는 $1/2^n$이다. 차이의 규칙을 보면 합의 움직임이 더 분명해진다.

유한한 표는 추측을 돕지만 무한한 결론의 증명은 따로 필요하다. 이 경우 등비급수의 유한합을 계산하면 정확한 오차식을 얻는다. 수치 실험으로 찾은 규칙을 대수적 관계로 설명하는 흐름을 익혀 보자.



1/2에서 시작하는 등비급수의 부분합

탐구

처음 여섯 항의 합과 1의 차는 얼마인가?

풀이와 확인

차는 1/64이며 합은 63/64이다. 소수로는 0.984375이다. 아직 1과 같지 않으며 여섯 항만 더한 값이라는 점을 분명히 표시한다.

[EA11] University of St Andrews. Takebe Katahiro

오차를 지우는 조합

오차의 모양을 알면 두 근삿값을 결합하여 개선할 수 있다.

어떤 계산값 A(h)가 참값 L에 ch^2만큼의 오차를 더한 것이라고 가정하자. 간격을 절반으로 줄이면 $A(h/2)=L+ch^2/4$가 된다. 작은 간격의 값을 네 배 한 뒤 큰 간격의 값을 빼면 주된 오차가 사라진다.

따라서 $[4A(h/2)-A(h)]/3=L$을 얻는다. 실제 계산에 더 높은 차수의 오차가 있다면 완전히 정확해지는 대신 주된 오차가 줄어든다. 이 방법의 효과는 오차가 어떤 규칙을 따르는지라는 가정에 달려 있다.

예를 들어 참값 10에 대해 $A(h)=10.4$와 $A(h/2)=10.1$이면 조합값은 10이다. 두 값을 단순히 평균하는 것과 다르다. 역사적 근사 연구와 비교할 수 있는 현대적 실험으로 제시한다.

$$A(h) = L+ch^2$$

$$A(h/2) = L+ch^2/4$$

$$[4A(h/2)-A(h)]/3 = L$$

주된 오차가 제곱에 비례한다고 가정한 결합

탐구

A(h)=3.2와 A(h/2)=3.05일 때 조합값은?

풀이와 확인

(4×3.05−3.2)/3=3이다. 두 값의 오차가 정확히 네 배 관계라는 가정 아래 주된 오차가 상쇄된다. 어떤 숫자 두 개에나 적용하면 정확해지는 공식은 아니다.

작은 호와 현의 차이

가까워 보이는 두 길이도 같다는 결론을 서두르면 안 된다.

원 위의 두 점을 직선으로 연결한 길이는 현이다. 원을 따라가는 길이는 호이다. 같은 두 점을 잇더라도 현이 더 짧다. 중심각이 작아지면 두 길이의 차이가 줄어들지만 유한한 각에서는 보통 같지 않다.

반지름 1인 원에서 중심각 θ를 라디안으로 나타내면 호의 길이는 θ이고 현의 길이는 2sin(θ/2)이다. 예를 들어 θ=π/3이면 현은 1이며 호는 약 1.0472이다. 작은 차이가 여러 조각에 걸쳐 누적될 수 있다.

원의 둘레를 내접다각형으로 근사할 때 이 차이가 중요하다. 변의 수를 늘리면 각 현이 호에 더 가까워진다. 그림에서 거의 같아 보인다는 관찰과 오차가 어느 정도라는 수치적 주장을 구분해야 한다.



단위원을 여섯 부분으로 나눈 교육용 도식

탐구

단위원의 내접 정육각형 둘레는 얼마이며 원 둘레와 비교하면?

풀이와 확인

각 변이 1이므로 둘레는 6이다. 원 둘레 $2\pi \approx 6.2832$보다 작다. 현 여섯 개를 합한 길이이므로 원의 호를 따라간 둘레보다 짧다.

비슷한 공식과 다른 이론

닮은 계산을 발견해도 개념과 증명의 체계까지 살펴야 한다.

서로 다른 수학 전통에서 같은 수치나 비슷한 공식이 발견될 수 있다. 그러나 그것만으로 연구자들이 같은 개념 체계를 사용했다고 말할 수는 없다. 어떤 문제를 풀려고 했는지와 무엇을 근거로 삼았는지까지 읽어야 한다.

와산의 근사 계산을 현대의 극한이나 미적분으로 설명하면 오늘의 독자에게 도움이 된다. 동시에 그 설명이 해석이라는 사실을 밝혀야 한다. 현대 기호로 번역한 식을 역사적 원문의 직접 인용처럼 제시해서는 안 된다.

비교표를 만들 때에는 문제의 대상과 사용한 표현과 계산 절차와 정당화 방법을 따로 적는다. 비슷한 점과 다른 점이 같은 표 안에서 드러난다. 어느 지역이 먼저였는지만 묻는 경쟁에서 벗어나 수학적 생각이 자라난 조건을 살필 수 있다.

비교할 층위	확인할 질문
결과	같은 값이나 공식인가
문제	무엇을 구하려고 했는가
절차	어떤 계산을 했는가
근거	왜 옳다고 설명했는가

결과가 닮았다는 관찰을 개념과 증명 체계의 비교로 확장한다.

탐구

역사적 계산을 현대 프로그램으로 재현하면 무엇까지 확인할 수 있는가?

풀이와 확인

주어진 절차가 어떤 수치 결과를 내는지 확인할 수 있다. 그러나 프로그램이 실행되었다는 사실만으로 옛 연구자가 같은 개념이나 같은 세부 절차를 사용했다는 역사적 증거가 생기지는 않는다.

[EA10] National Diet Library. Seki Takakazu

동아시아관 / 40

산가쿠의 원과 도형

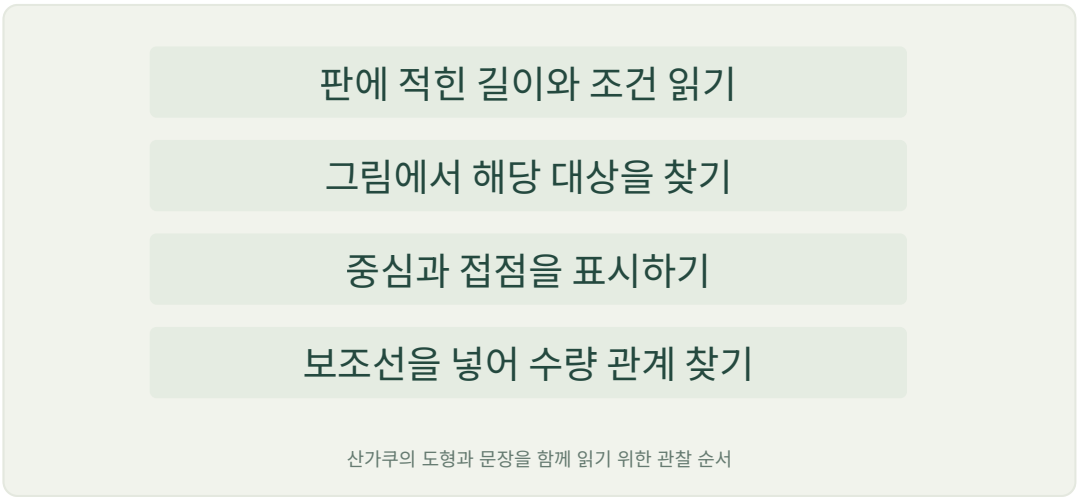
문제를 걸어 두는 장소

수학은 책뿐 아니라 사람들이 모이는 공간에서도 공유되었다.

산가쿠는 수학 문제와 도형 등을 적어 신사나 사찰에 봉납한 판이다. 에도 시대의 와산에서 연구 성과를 보여 주고 다른 사람의 관심을 끄는 통로가 되었다. 현존하는 판의 그림은 장식인 동시에 문제의 조건을 전달하는 자료이다.

이 장의 도형은 특정 산가쿠의 원본을 복제한 것이 아니라 접하는 원과 직각삼각형의 원리를 배우기 위해 새로 구성한 예제이다. 원본의 출처가 없는 그림을 실물 산가쿠라고 소개하지 않는다.

문제판을 읽을 때에는 그림만 보지 말고 크기와 접촉 조건을 적은 문장도 읽어야 한다. 보기에는 접해 보여도 문장에 그 조건이 없으면 증명에서 사용할 수 없다. 시각적인 매력과 논리적인 정확성이 함께 필요하다.



산가쿠의 도형과 문장을 함께 읽기 위한 관찰 순서

탐구

새 문제판을 만들 때 그림 외에 어떤 정보를 적어야 하는가?

풀이와 확인

주어진 길이와 원의 접촉 관계와 구하려는 양을 적는다. 직접 만든 문제임을 밝히고 해설에는 사용한 정리를 제시한다. 축척이 정확하지 않다면 도식임을 표시한다.

[EA12] National Diet Library. Master Institution and Mathematical Tablets

접점으로 향하는 반지름

원의 접선은 접점에서 반지름과 직각을 이룬다.

반지름 r인 원이 수평선에 접하면 원의 중심은 그 선에서 높이 r인 곳에 있다. 가장 짧은 거리인 수선이 접점을 향하기 때문이다. 접선과 반지름의 직각 관계는 접하는 원 문제의 핵심 출발점이다.

한 직선 위에 반지름이 다른 두 원을 놓으면 중심 높이도 각각의 반지름과 같다. 두 원이 서로 바깥에서 접할 때 중심 사이 거리는 두 반지름의 합이다. 서로 겹치거나 안쪽에서 접하는 상황과 구별해야 한다.

복잡한 그림에서도 먼저 원의 중심을 표시하고 접점까지 선분을 그어 보자. 부드러운 곡선들 사이에 직각삼각형이 드러나는 경우가 많다. 곡선을 직접 계산하기 전에 중심과 거리의 관계로 바꾸는 전략이다.

$$직선에\ 접한\ 중심\ 높이 = 반지름$$
$$바깥\ 접촉: 중심\ 거리 = R+r$$
$$안쪽\ 접촉: 중심\ 거리 = R-r$$

접촉 방식에 따른 중심 거리

탐구

반지름 3과 5인 두 원이 바깥에서 접하면 중심 사이 거리는?

풀이와 확인

3+5=8이다. 두 중심과 접점이 한 직선 위에 놓인다. 큰 원 안에서 작은 원이 안쪽으로 접하는 경우라면 중심 거리는 차 2가 되므로 상황을 구분해야 한다.

두 원 사이의 수평 거리

직각삼각형을 찾으면 곡선 문제를 제곱식으로 바꿀 수 있다.

반지름 R과 r인 두 원이 같은 수평선에 접하고 서로 바깥에서 접한다고 하자. 중심의 높이 차는 R−r이고 중심 사이 거리는 R+r이다. 두 중심의 수평 거리를 x라고 놓는다.

피타고라스 정리를 쓰면 $x^2+(R-r)^2=(R+r)^2$이다. 양쪽의 제곱을 전개하여 빼면 $x^2=4Rr$이 남는다. 따라서 $x=2\sqrt{(Rr)}$이다. 길이는 양수이므로 양의 제곱근을 택한다.

이 결과는 수평 거리가 단순히 반지름의 합이 아니라 기하평균과 관련됨을 보여 준다. 두 원의 크기가 같을 때에는 2R이 되어 익숙한 지름 관계로 돌아온다. 특수한 경우로 검산하면 식의 의미를 이해하기 쉽다.



반지름 9와 4인 접하는 원의 중심이 만드는 직각삼각형

탐구

R=9와 r=4이면 두 중심의 수평 거리는?

풀이와 확인

$2\sqrt{36}=12$이다. 높이 차는 5이고 중심 거리는 13이므로 $5^2+12^2=13^2$로 다시 확인할 수 있다. 같은 선에 접한다는 조건이 이 직각삼각형을 만든다.

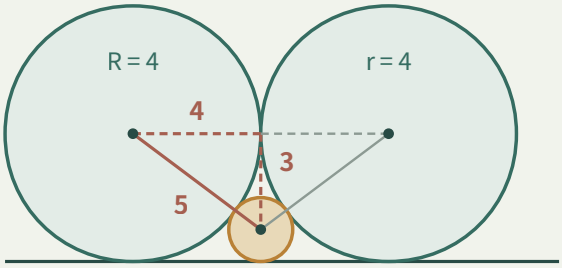
사이에 들어가는 작은 원

작은 원의 위치를 따져야 접촉 조건을 올바르게 합칠 수 있다.

반지름 R과 r인 두 원 사이의 아래쪽 빈틈에 반지름 t인 작은 원이 같은 직선과 두 원에 모두 접한다고 하자. 앞에서 구한 수평 거리 공식을 세 쌍의 원에 각각 적용할 수 있다.

작은 원 중심이 큰 두 원 중심 사이에 있으므로 $2\sqrt{(Rt)}+2\sqrt{(rt)}=2\sqrt{(Rr)}$이 성립한다. 양변을 정리하면 $1/\sqrt{t}=1/\sqrt{R}+1/\sqrt{r}$이다. 따라서 $t=Rr/(\sqrt{R}+\sqrt{r})^2$이다.

그림에서 작은 원의 위치가 달라지면 수평 거리를 더하는 방식도 바뀔 수 있다. 공식만 외우지 말고 어떤 선분의 길이를 합쳤는지 확인해야 한다. 이 식은 같은 직선에 접하는 아래쪽 틈의 배치를 전제로 한다.



$1/\sqrt{t} = 1/\sqrt{4} + 1/\sqrt{4}$

$= 1/2 + 1/2 = 1$

$t = 1$

검산: $3^2 + 4^2 = 5^2$

반지름 4인 두 원 사이에서 직선에 접하는 작은 원의 반지름은 1이다.

탐구

R=r=4이면 사이의 작은 원 반지름은 얼마인가?

풀이와 확인

$1/\sqrt{t}=1/2+1/2=1$이므로 t=1이다. 큰 두 원 중심 사이의 수평 거리 8은 작은 원까지의 거리 4와 4로 나뉜다.

반지름을 거꾸로 읽는 원의 사슬

접하는 원의 기하가 새로운 수의 덧셈 규칙으로 바뀐다.

같은 직선 위에 서로 접하는 두 원의 반지름을 R과 r라고 하자. 그 아래 빈틈에 끼는 작은 원의 반지름 t는 $1/\sqrt{t}=1/\sqrt{R}+1/\sqrt{r}$을 만족한다. 앞에서 중심 사이의 수평 거리를 합하여 얻은 식이다. 이번에는 반지름 자체보다 그 제곱근의 역수에 주목한다.

각 원에 $u=1/\sqrt{r}$이라는 새 수를 붙이면 빈틈에 생긴 원의 수는 양옆 두 원의 수를 더한 값이다. 반지름 1인 두 원에서 시작하면 두 수는 1과 1이다. 가운데 원에는 2가 붙고 반지름은 1/4이 된다. 원의 반지름을 직접 더하는 것과 전혀 다른 규칙이다.

이제 반지름 1인 왼쪽 원과 반지름 1/4인 원 사이를 채우자. 새 수는 1+2=3이므로 반지름은 1/9이다. 그다음 왼쪽 틈에는 4가 붙는 반지름 1/16의 원이 들어간다. 같은 쪽 틈을 반복해서 채우면 반지름이 단위분수의 제곱으로 이어진다.

대수 규칙만 보고 모든 원이 모든 이웃과 접한다고 가정해서는 안 된다. 매 단계에서 선택한 두 원과 기준 직선에 접하도록 새 원을 정한다. 새 원은 그 사이의 빈틈에 들어가므로 이전 원과의 배치를 보존한다. 이 사슬은 산가쿠의 실제 판을 복원한 것이 아니라 앞선 공식을 확장한 현대적 탐구이다.

붙인 수 u	반지름 $1/u^2$
1	1
2	1/4
3	1/9
4	1/16

탐구

새 수가 2인 원과 3인 원이 서로 접한다면 그 사이의 원 반지름은 얼마인가?

풀이와 확인

새 수는 5이므로 반지름은 1/25이다. 기존 반지름 1/4와 1/9를 공식에 넣어도 같은 결과가 나온다.

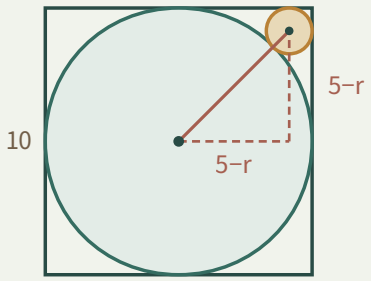
정사각형 안의 원

대칭을 이용하면 중심의 위치부터 결정할 수 있다.

한 변이 10인 정사각형에 내접한 원의 반지름은 5이다. 원이 네 변에 모두 접하므로 중심은 정사각형의 중심에 놓인다. 이 원과 오른쪽 위의 두 변에 접하는 작은 원을 모서리 빈틈에 넣는다고 하자.

작은 원의 반지름을 r라 하면 중심은 모서리에서 가로와 세로로 각각 r만큼 떨어진다. 큰 원 중심과의 가로 차이와 세로 차이는 모두 $5-r$이다. 중심 거리는 $\sqrt{2}(5-r)$이다.

두 원이 바깥에서 접하므로 이 거리는 $5+r$와 같다. 따라서 $r=5(3-2\sqrt{2})$이다. 대략 0.858이므로 그림에서 기대하는 작은 크기와도 맞는다. 모서리의 직각과 두 원의 접촉을 하나의 방정식으로 묶었다.



중심 거리 = $\sqrt{2}(5-r)$

바깥 접촉: 거리 = $5+r$

$$\sqrt{2}(5-r) = 5+r$$

$$r = 5(3-2\sqrt{2}) \approx 0.858$$

한 변 10인 정사각형의 모서리 원은 반지름 $5(3-2\sqrt{2})$이다.

탐구

정사각형의 한 변을 두 배로 하면 작은 원의 반지름은?

풀이와 확인

모든 길이가 두 배가 되므로 반지름도 두 배이다. 새 반지름은 $10(3-2\sqrt{2})$이다. 넓이의 배율 네 배와 길이의 배율 두 배를 구분한다.

반원의 넓이를 비교하기

길이의 합이 같아도 넓이의 합은 달라질 수 있다.

지름이 $a+b$인 반원 아래에 지름 a와 b인 두 반원을 나란히 놓는 도형을 생각하자. 큰 반원의 넓이는 $\pi(a+b)^2/8$이다. 작은 두 반원의 넓이 합은 $\pi(a^2+b^2)/8$이다.

큰 반원에서 작은 반원 둘을 뺀 영역은 $\pi ab/4$가 된다. 전개에서 생긴 $2ab$가 넓이 차이를 결정한다. 지름의 합이 같으므로 넓이도 같을 것이라는 추측은 제곱의 구조를 무시한 것이다.

a와 b의 합을 일정하게 두면 이 영역은 ab가 가장 클 때 넓어진다. 같은 합에서는 두 수가 같을 때 곱이 가장 크다. 그림의 모양을 바꾸어 보는 활동이 곱의 최대값 문제와 연결된다.

$$\text{큰 반원: } \pi(a+b)^2/8$$
$$\text{작은 두 반원: } \pi(a^2+b^2)/8$$
$$\text{차이: } \pi ab/4$$

반원의 지름과 넓이를 연결한 현대식 탐구

탐구

a=4와 b=6일 때 남는 영역의 넓이는?

풀이와 확인

π×4×6/4=6π이다. 큰 반원 넓이 12.5π에서 작은 반원 넓이 2π와 4.5π를 빼도 6π가 된다. 넓이 단위는 길이 단위의 제곱이다.

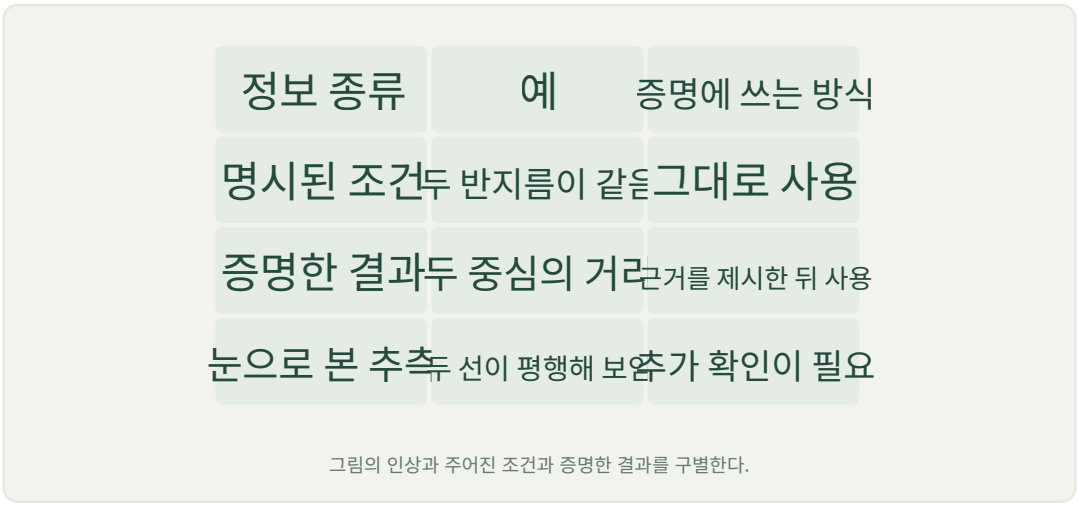
그림에서 읽으면 안 되는 것

도형의 인상은 추측을 돕지만 주어진 조건을 대신하지 않는다.

그림에서 두 선분의 길이가 비슷해 보인다고 해서 같다고 쓸 수는 없다. 원이 가운데 놓인 듯 보여도 중심이라는 조건이 필요하다. 산가쿠처럼 복잡한 도형에서는 시각적인 인상과 논리적인 조건을 특히 분리해야 한다.

증명을 시작하기 전에 조건을 세 종류로 나누어 적어 보자. 문제에 명시된 조건과 이미 증명한 결과와 그림만 보고 추측한 내용이다. 마지막 종류의 내용은 사용하기 전에 별도의 근거가 필요하다.

도형을 일부러 길쭉하게 다시 그려도 풀이가 유지되는지 확인해 볼 수 있다. 조건을 만족하는 여러 그림에서 같은 논리가 작동하면 우연한 축척에 의존할 위험이 줄어든다. 정확한 도식은 도움을 주지만 증명의 책임을 대신 지지 않는다.



그림의 인상과 주어진 조건과 증명한 결과를 구별한다.

탐구

그림에서 삼각형이 이등변처럼 보인다는 이유로 밑각이 같다고 해도 되는가?

풀이와 확인

안 된다. 두 변이 같다는 조건이나 그에 대한 증명이 먼저 필요하다. 각의 크기를 화면에서 재는 활동은 추측의 근거일 뿐 정확한 기하 증명이 아니다.

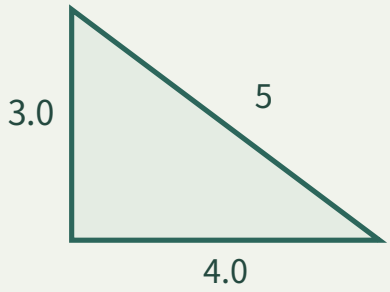
나만의 문제판 완성하기

아름다운 도형과 재현 가능한 해설을 함께 설계한다.

직접 만든 산가쿠 형식의 문제판에는 제목과 도형과 조건과 질문을 간결하게 배치한다. 도형의 색은 서로 다른 원이나 영역을 구별하는 데 사용한다. 색만으로 조건을 전달하면 흑백 인쇄에서 의미가 사라질 수 있으므로 이름이나 표식도 붙인다.

해설에는 중심을 잇는 보조선과 핵심 방정식을 보여 준다. 계산을 전부 한 줄에 몰아넣기보다 조건을 식으로 바꾸는 단계와 식을 푸는 단계를 구분한다. 독자가 그림과 식 사이를 오가며 따라갈 수 있어야 한다.

마지막에는 해의 크기가 도형에 맞는지 검사한다. 작은 원의 반지름이 큰 원보다 커졌다면 배치나 부호를 잘못 선택했을 수 있다. 직접 창작한 문제라는 표시와 사용한 개념을 남기면 역사에서 영감을 얻은 새로운 학습 자료가 된다.



반지름 4와 1인 접하는 두 원의 검산

탐구

반지름 4인 같은 두 원 사이의 작은 원 문제를 어떻게 검산하는가?

풀이와 확인

구한 반지름 1을 이용하면 큰 원과 작은 원의 중심 높이 차는 3이고 수평 거리는 4이다. 중심 거리는 5이므로 반지름 합 4+1과 일치한다. 두 쪽에 같은 검사를 적용한다.

동아시아관 / 41

바다를 건너고 책으로 남은 수학

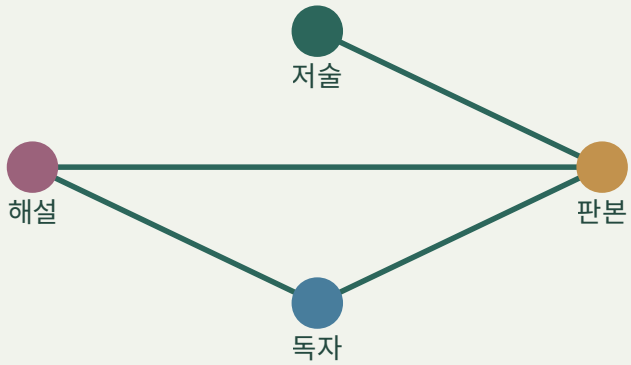
책이 이동하는 여러 경로

수학의 전파는 한 번의 전달로 끝나지 않는다.

중국의 산학서는 한반도와 일본 등에서 읽히고 다시 편집되었다. 일본 국립국회도서관의 와산 전시는 산학계몽이 일본의 방정식 연구에 끼친 영향을 설명한다. 책의 이동은 종이 묶음의 이동이면서 읽고 가르치는 방법의 변화이기도 하다.

같은 책이라도 독자마다 관심이 다를 수 있다. 상인은 계산에 주목하고 측량자는 도형에 주목하며 연구자는 어려운 문제를 확장한다. 수입한 책이 새로운 문제와 만날 때 내용은 다시 해석된다.

따라서 교류를 화살표 하나로 그리면 편리하지만 실제 과정이 단순해질 수 있다. 누가 책을 구했고 어떤 판본을 읽었으며 어디에서 가르쳤는지 같은 중간 고리를 찾아야 한다. 영향 관계는 닮은 공식만으로 확정하지 않는다.



책이 다시 읽히고 편집되는 일반적인 관계 모형

탐구

같은 제목의 책을 두 지역에서 발견하면 직접 전파를 단정할 수 있는가?

풀이와 확인

제목의 일치는 단서이지만 충분한 증거는 아니다. 판본의 특징과 기록된 소장 경로와 인용 내용 등을 함께 살펴야 한다. 공통의 다른 판본을 각자 읽었을 가능성도 있다.

[EA09] National Diet Library. Early Edo Period

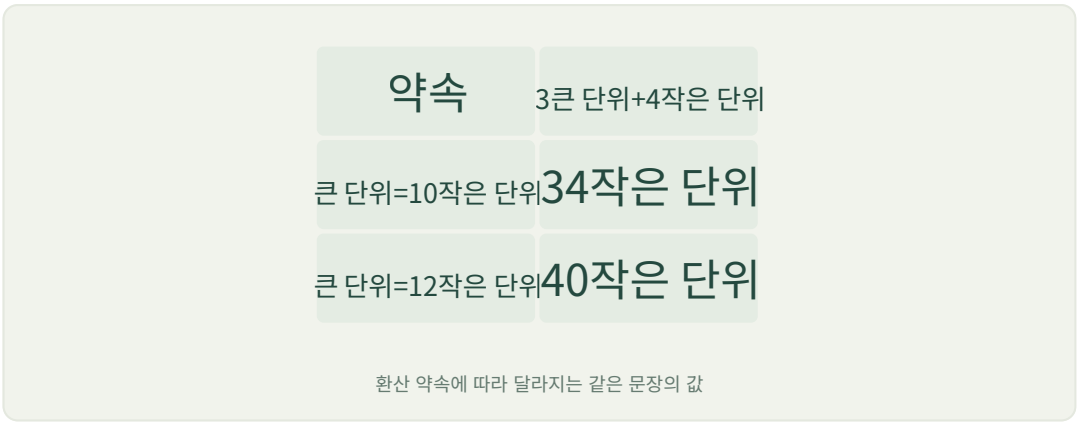
같은 낱말과 다른 단위

수학 문장을 옮길 때 단위의 역사도 함께 읽어야 한다.

옛 문헌에 자나 척이나 리 같은 단위 이름이 나온다고 해서 오늘의 고정된 길이로 즉시 바꾸어서는 안 된다. 같은 이름의 단위도 시대와 지역과 제도에 따라 값이 달라질 수 있다. 단위 환산은 문맥에 근거해야 한다.

교육용 문제에서는 가상의 단위 관계를 명시할 수 있다. 한 큰 단위를 작은 단위 열 개로 정하면 3큰 단위와 4작은 단위는 34작은 단위이다. 이 약속은 계산 연습용이며 특정 시대의 실제 제도를 재현한 것은 아니다.

원문의 단위를 유지한 계산과 현대 단위로 바꾼 계산을 나란히 제시하면 독자가 가정을 확인하기 쉽다. 환산 근거가 불확실하다면 정확한 현대 길이를 꾸며 쓰기보다 범위나 원래 단위로 남기는 편이 낫다.



환산 약속에 따라 달라지는 같은 문장의 값

탐구

가상의 큰 단위가 작은 단위 12개라면 3큰 단위와 4작은 단위는?

풀이와 확인

3×12+4=40작은 단위이다. 십진법의 자릿수처럼 34로 붙이면 틀린다. 단위 사이의 묶음 크기가 10인지 12인지 먼저 확인해야 한다.

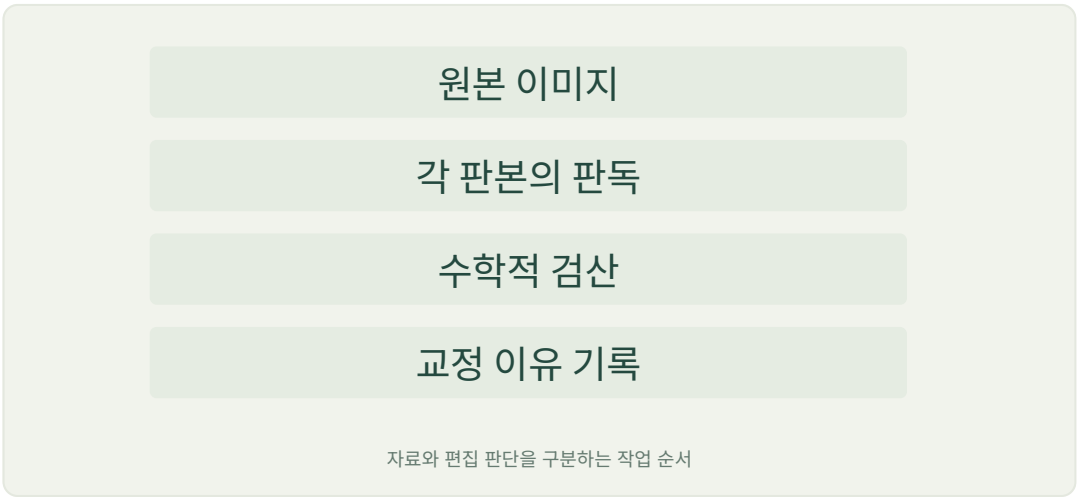
판본의 차이를 기록하기

오류처럼 보이는 차이도 먼저 자료로 남겨야 한다.

두 판본의 같은 문제에서 길이 하나가 12와 21로 다르게 적혀 있다고 하자. 어느 숫자가 맞는지 빨리 고치기 전에 두 독법을 각각 기록한다. 숫자 전도인지 편집 과정의 수정인지 문제 자체의 변형인지 확인할 필요가 있다.

수학적 검산은 판단을 도울 수 있다. 답이 60인 직사각형 문제에서 다른 변이 5라면 12가 넓이 조건에 맞는다. 그러나 이것만으로 21을 적은 판본의 제작 과정까지 알 수 있는 것은 아니다.

교정한 본문에는 무엇을 왜 고쳤는지 주석으로 남긴다. 독자가 원래 자료와 편집자의 판단을 구분할 수 있어야 한다. 디지털 자료에서도 원본 이미지와 판독문과 현대 해설을 별도로 보존하면 수정의 근거를 추적하기 쉽다.



자료와 편집 판단을 구분하는 작업 순서

탐구

두 판본의 숫자가 다르면 어느 쪽을 무조건 오래된 원문이라고 볼 수 있는가?

풀이와 확인

숫자만으로는 판단할 수 없다. 제작 시기와 판본 관계와 다른 문장의 특징을 함께 검토해야 한다. 수학적으로 자연스러운 값이 언제나 더 오래된 기록이라는 보장도 없다.

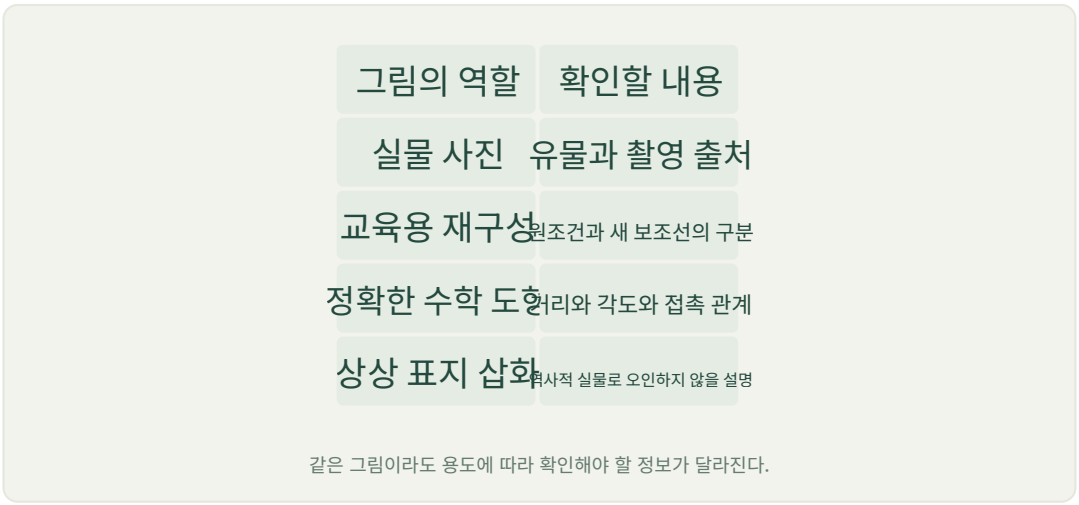
그림을 다시 그리는 책임

깨끗한 재현도 원자료에 없는 정보를 더할 수 있다.

옛 도형을 현대 프로그램으로 다시 그리면 선이 곧아지고 글자가 읽기 쉬워진다. 하지만 원본에 없던 직각 표식이나 길이 표시를 추가하면 독자는 그것을 원래 조건으로 오해할 수 있다. 재현과 해설의 경계를 분명히 해야 한다.

도형을 새로 만든 경우에는 교육용 재구성이라고 밝힌다. 실제 유물을 촬영한 사진과 상상하여 그린 표지 삽화도 구분한다. 역사적인 분위기를 전달하는 그림은 사실 확인용 도면과 역할이 다르다.

정확한 수학 그림에서는 길이와 각과 접촉을 계산으로 확인한다. 장식용 그림에서는 독자의 관심과 분위기를 고려하되 실제 유물의 형태를 증명하는 자료로 쓰지 않는다. 두 종류의 그림이 함께 있을 때에는 설명문이 오해를 막아 준다.



같은 그림이라도 용도에 따라 확인해야 할 정보가 달라진다.

탐구

새 도형에 보조선을 추가했다면 어떤 표시가 도움이 되는가?

풀이와 확인

보조선임을 설명하고 원래 조건을 나타내는 선과 시각적으로 구분한다. 예를 들어 가는 점선으로 그린 뒤 해설에서 왜 그었는지 적는다. 원본에 있던 선이라고 표현하지 않는다.

표가 남긴 계산의 흔적

결과값의 배열은 사용된 방법을 추측할 단서를 준다.

어떤 옛 계산표에서 간격이 같은 입력에 대한 출력이 남아 있다고 하자. 이웃 값의 차이를 구하면 계산법의 특징을 추측할 수 있다. 다만 같은 유한한 표를 만드는 규칙은 여러 개일 수 있다.

입력 1과 2와 3에 출력 2와 4와 6이 대응하면 y=2x가 자연스러운 후보이다. 그러나 y=2x+(x−1)(x−2)(x−3)도 이 세 입력에서는 같은 값을 준다. 다음 입력에서는 두 규칙이 달라진다.

따라서 표만으로 역사적 알고리즘을 유일하게 복원했다고 주장하면 안 된다. 절차를 설명한 문장이나 중간 계산 흔적이나 다른 표와의 관계가 추가 증거가 된다. 수학적으로 맞는 재구성과 역사적으로 확인된 방법은 구분해야 한다.

x	1	2	3	4
규칙 A	2	4	6	8
규칙 B	2	4	6	14

같은 처음 세 값에서 갈라지는 두 규칙

탐구

두 후보 식은 x=4에서 어떤 값을 주는가?

풀이와 확인

첫 식은 8이다. 둘째 식은 8+3×2×1=14이다. 세 관측값을 모두 만족한다는 사실만으로 다음 값이 하나로 정해지지는 않는다.

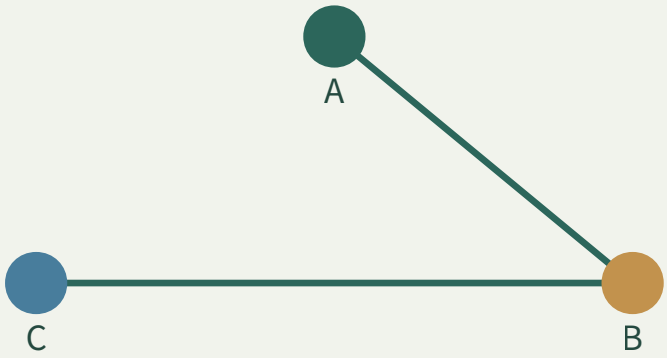
학습 관계를 선으로 나타내기

관계도는 무엇을 연결한 그림인지 밝혀야 읽을 수 있다.

수학자들의 관계를 그릴 때 한 선이 사제 관계인지 공동 저술인지 책의 인용인지 먼저 정해야 한다. 서로 다른 관계를 모두 같은 선으로 그리면 독자는 누구에게 무엇을 배웠는지 잘못 이해할 수 있다.

가상의 자료에서 A가 B를 가르쳤고 B가 C와 공동으로 책을 썼다면 두 선의 의미는 다르다. C가 A의 직접 제자라는 결론은 나오지 않는다. 관계를 따라갈 수 있다는 사실과 직접 연결되어 있다는 사실을 구분한다.

역사 자료가 부족한 부분은 빈칸으로 남길 수 있다. 그림을 보기 좋게 완성하려고 추측한 선을 사실처럼 추가하지 않는다. 추정 관계가 필요하면 다른 선 모양과 설명을 사용하고 근거 자료를 함께 적는다.



가상의 관계도에서는 선의 뜻을 별도로 정의해야 한다.

탐구

A가 B의 책을 읽고 B가 C의 제자였다면 A는 C의 제자인가?

풀이와 확인

그렇다고 말할 수 없다. 책을 통한 영향과 직접 가르침은 다른 관계이다. A가 C의 사상을 간접적으로 접했을 가능성은 논의할 수 있지만 별도의 증거가 필요하다.

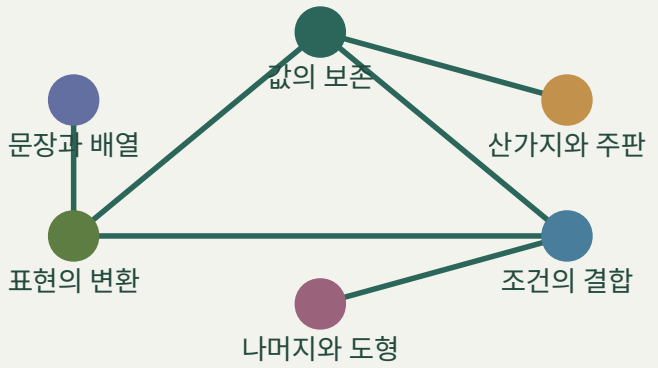
동아시아관을 나서며

답을 구하는 능력과 근거를 읽는 능력을 함께 가져간다.

이 책은 산가지의 자리에서 출발하여 나머지의 주기와 다항식의 배열과 접하는 원의 기하를 살펴보았다. 서로 다른 문제들이 값의 보존과 조건의 결합과 표현의 변환이라는 생각으로 연결된다. 각 장의 계산을 다시 보며 어떤 관계를 이용했는지 한 문장씩 적어 보자.

역사 읽기에서는 남아 있는 자료와 현대의 재구성을 구별하였다. 정확한 계산 결과가 나왔다고 역사적 경로까지 증명되는 것은 아니다. 반대로 자료가 불완전하다고 수학적 탐구 자체를 멈출 필요도 없다. 가정을 드러내고 검산 가능한 활동을 만들 수 있다.

마지막 과제로 한 도구나 한 문제를 골라 작은 전시를 구성해 보자. 역사적 근거 한 가지와 직접 계산한 예제 한 가지와 더 알고 싶은 질문 한 가지를 함께 담는다. 지식을 받아 적는 독자에서 근거를 확인하며 설명하는 독자로 한 걸음 나아가는 활동이다.



세 가지 공통 관점을 해당 장의 도구와 문제에 연결한 개념도

탐구

나머지 문제와 접하는 원 문제에 공통으로 필요한 태도는 무엇인가?

풀이와 확인

주어진 조건을 정확히 읽고 중간 관계를 설명하며 마지막 답을 원래 조건에 넣어 검산하는 태도이다. 계산 방식은 다르지만 어떤 가정 아래 결론이 나오는지 밝힌다는 원칙은 같다.

동아시아관 / 42

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[EA01] University of St Andrews. Chinese numerals
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Chinese_numerals/

[EA02] University of St Andrews. Nine Chapters on the Mathematical Art
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Nine_chapters/

[EA03] University of St Andrews. Liu Hui
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Liu_Hui/

[EA04] University of St Andrews. Zu Chongzhi
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zu_Chongzhi/

[EA05] University of St Andrews. Sun Zi
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Sun_Zi/

[EA06] University of St Andrews. Qin Jiushao
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Qin_Jiushao/

[EA07] University of St Andrews. Yang Hui
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Yang_Hui/

[EA08] University of St Andrews. Zhu Shijie
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Zhu_Shijie/

[EA09] National Diet Library. Early Edo Period
https://www.ndl.go.jp/math/e/s1/1.html

[EA10] National Diet Library. Seki Takakazu
https://www.ndl.go.jp/math/e/s1/2.html

[EA11] University of St Andrews. Takebe Katahiro
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Takebe/

[EA12] National Diet Library. Master Institution and Mathematical Tablets
https://www.ndl.go.jp/math/e/s1/3.html

이슬람 아랍관 / 43

관계를 옮기는 언어와 정밀한 눈금



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

책의 문장을 식으로 옮길 때에는 말의 순서보다 수량 사이의 관계를 보존해야 한다. 도형을 잘라 옮기는 설명도 넓이의 보존을 확인할 때 방정식과 연결된다. 이 관에서는 대수와 기하를 따로 외우기보다 같은 조건을 다른 표현으로 읽는 연습을 한다. 그림의 아름다움은 출발점이며 각 선이 뜻하는 양을 설명하는 일이 그다음이다.

아랍어로 쓰인 학술 자료를 하나의 민족이나 하나의 도시의 업적으로 좁히지 않는다. 원판의 눈금과 관측표 및 책의 계산은 여러 활동 속에서 읽혀야 한다. 근삿값의 자릿수가 많다는 사실만으로 관측까지 정확했다고 단정할 수도 없다. 계산의 정밀도와 측정의 오차를 나누어 살피면 역사와 수학을 함께 이해할 수 있다.

이슬람 아랍관 / 44

여러 언어가 만나는 수학

관의 이름을 읽는 세 가지 좌표

언어와 신앙과 활동 지역은 서로 다른 정보다.

이슬람 아랍관은 특정 민족 한 집단의 수학만을 모은 공간이 아니다. 아랍어가 학술 소통에 쓰인 여러 지역과 이슬람 문화권의 지적 활동을 함께 살핀다. 학자가 아랍어로 책을 썼다는 사실만으로 그의 모어와 민족적 배경과 신앙을 모두 결정할 수는 없다. 인물을 소개할 때에는 이름 옆에 활동 지역과 집필 언어와 확인된 종교적 배경을 나누어 기록하는 편이 정확하다.

이 구별은 자료를 분류하는 수학적 활동과도 닮았다. 같은 사람을 언어에 따라 묶으면 한 모임에 속하지만 지역에 따라 묶으면 다른 모임에 속할 수 있다. 분류 기준이 달라지면 결과도 달라진다. 따라서 지도에서 같은 색으로 표시된 사람들을 단일한 집단으로 받아들이기 전에 그 색이 무엇을 뜻하는지 확인해야 한다. 이 관의 문제와 수식은 특별한 표시가 없는 한 이해를 돕기 위한 현대적 재구성이다.

구분	확인할 내용
언어	어떤 언어로 지식을 기록했는가
지역	어디에서 활동했는가
신앙	어떤 근거로 알려져 있는가

탐구

아랍어 집필이라는 정보만으로 확인할 수 없는 사항은 무엇인가?

풀이와 확인

출생 지역과 모어와 신앙은 별도 자료가 필요하다. 집필 언어는 책이 어떤 독자와 만났는지 알려 주지만 저자의 모든 정체성을 대신하지 않는다. 여러 기준을 한 칸에 합치면 분류가 편리해지는 대신 중요한 차이가 사라진다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

도시 하나로 설명할 수 없는 연결망

학술 활동은 여러 장소와 사람을 통해 이어진다.

학문의 지도를 그릴 때 모든 선을 하나의 도시로 모으면 풍부한 교류가 보이지 않을 수 있다. 여기서는 실제 이동 경로를 단정하지 않는 가상의 연결망을 먼저 만든다. 도시 A에서 B로 책이 옮겨지고 B에서 C로 번역이 전달된다고 하자. 이때 A와 C가 직접 연결되지 않아도 두 단계의 경로가 있다. 책의 이동과 사람의 여행과 서신 교환은 서로 다른 종류의 선으로 표시해야 한다.

여섯 도시가 있을 때 가능한 두 도시의 짝은 $6\times5\div2=15$개다. 그러나 가능한 짝이 곧 확인된 교류는 아니다. 기록으로 확인된 선이 네 개뿐이라면 나머지 열한 개를 상상으로 채우지 않는다. 연결망은 빈칸을 감추는 장식이 아니라 알려진 관계의 범위와 아직 확인되지 않은 관계를 함께 보여 주는 도구다. 선의 굵기로 교류의 규모를 표현하려면 그 규모를 센 방법도 설명해야 한다.

관계	선의 의미
책의 이동	필사본이 다른 장소에서 확인됨
번역	다른 언어의 판본이 만들어짐
서신	편지의 발신과 수신이 확인됨

탐구

도시 다섯 곳의 모든 짝은 몇 개인가? 직접 연결이 없으면 교류가 불가능한가?

풀이와 확인

서로 다른 짝은 5×4÷2=10개다. A에서 B를 거쳐 C로 갈 수 있으므로 직접 연결이 없어도 간접 경로는 가능하다. 다만 이 계산은 가상 모형의 성질이며 실제 역사적 교류가 있었다는 증거는 아니다.

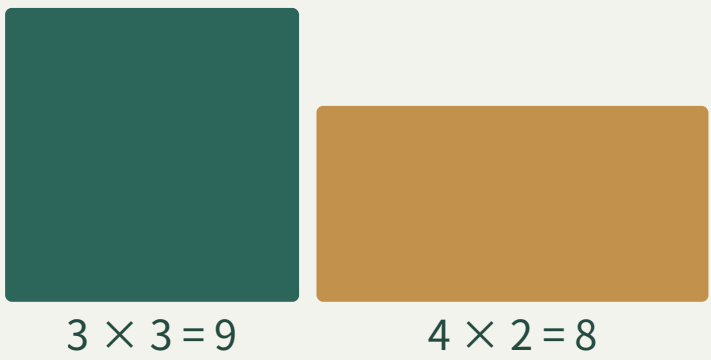
[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

번역은 단어를 바꾸는 일만이 아니다

길이와 수와 증명의 조건까지 함께 옮겨야 한다.

같은 문제를 두 언어로 옮겼는데 한쪽에는 길이라는 말이 있고 다른 쪽에는 넓이라는 말이 들어갔다고 하자. 숫자가 모두 같아도 두 문제는 다른 문제다. 한 변이 세 단위인 정사각형의 넓이는 아홉 제곱단위다. 세 단위라는 표현을 세 제곱단위로 잘못 옮기면 그림의 변과 면을 혼동하게 된다. 번역을 검토할 때에는 명사뿐 아니라 그 명사가 가리키는 수학적 대상도 살펴야 한다.

증명 속의 모든 것이라는 말과 어떤 것이라는 말도 바꾸어 쓸 수 없다. 모든 직사각형이 정사각형이라는 문장은 거짓이지만 어떤 직사각형은 정사각형이라는 문장은 참이다. 수학 번역은 이러한 범위의 차이를 보존해야 한다. 읽는 사람은 원문을 알지 못하더라도 번역된 주장에 반례를 대입하여 문장의 뜻을 점검할 수 있다. 번역과 검산이 만나는 지점이 바로 여기다.



왼쪽은 정사각형이며 오른쪽은 직사각형이지만 정사각형은 아니다

탐구

모든 정사각형은 직사각형이라는 문장의 역도 항상 참인가?

풀이와 확인

역은 모든 직사각형은 정사각형이라는 문장이다. 가로가 4이고 세로가 2인 직사각형은 네 각이 직각이지만 네 변의 길이가 같지 않으므로 반례가 된다. 한 사례만으로 모든 경우를 다루는 주장을 반박할 수 있다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

필사본의 두 수치를 비교하기

다른 숫자를 발견했을 때 먼저 계산 구조를 살핀다.

가상의 필사본 두 장에 같은 나눗셈의 답이 각각 24와 42로 적혀 있다고 하자. 어느 쪽이 오래되었는지만으로 정답을 결정하지 않는다. 문제가 168을 7로 나누는 것이라면 7×24=168이므로 24가 계산과 맞는다. 반면 7×42=294이므로 42는 맞지 않는다. 이러한 내부 검산은 숫자의 뒤바뀜을 찾는 데 유용하지만 실제 필사 과정에서 어떤 일이 일어났는지까지 증명해 주지는 않는다.

다른 가능성도 열어 두어야 한다. 답이 아니라 문제의 168이 잘못 옮겨졌을 수 있으며 서로 다른 문제의 해설이 섞였을 수도 있다. 자료를 고칠 때에는 원래 읽힌 숫자와 수정 제안과 수정 이유를 구별해 적는다. 오류를 조용히 지워 버리면 다음 독자가 판단할 근거가 사라진다. 계산으로 확인할 수 있는 것과 문헌 비교가 필요한 것을 나누는 태도가 좋은 교정의 출발점이다.

문제의 수	후보 답	검산	판정
168	24	7×24=168	일치
168	42	7×42=294	불일치
294	42	7×42=294	

답의 숫자만 떼지 않고 문제와 검산을 함께 비교한다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

문제의 수치가 294였다면 어느 답이 맞으며 판단은 어떻게 달라지는가?

풀이와 확인

294÷7=42이므로 42가 맞는다. 이 결과는 답만 떼어 놓고 어느 판본이 옳다고 결정하면 위험하다는 사실을 보여 준다. 문제와 풀이와 검산을 한 묶음으로 비교해야 숫자가 맡은 역할을 확인할 수 있다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

단위가 다른 장부를 맞추기

비교하려면 먼저 무엇을 한 단위로 삼았는지 정한다.

현대적 재구성 장부에서 한 상자는 작은 꾸러미 여덟 개이고 한 꾸러미는 물건 열두 개라고 정하자. 상자 세 개와 꾸러미 다섯 개를 합치면 꾸러미는 3×8+5=29개다. 물건 낱개로 바꾸면 29×12=348개가 된다. 여기서 여덟과 열둘은 실제 역사적 단위를 복원한 값이 아니라 단위 환산의 구조를 살피기 위해 설정한 값이다.

서로 다른 시장에서 꾸러미라는 이름을 똑같이 쓰더라도 한 꾸러미의 양이 같다는 보장은 없다. 이름이 같은 단위와 크기가 같은 단위를 구별해야 한다. 장부를 비교할 때 단위가 확인되지 않으면 합계가 정확해 보여도 의미가 흔들린다. 환산표에는 기준 시점과 지역을 적는 것이 좋다. 수학적 계산은 정해진 약속 아래에서 정확하며 그 약속 자체의 확인은 자료 해석의 몫이다.

수준	관계	이번 예의 양
상자	1상자=8꾸러미	3상자
꾸러미	1꾸러미=12낱개	추가 5꾸러미
전체	29×12	348낱개

탐구

한 꾸러미가 열 개라면 같은 상자 세 개와 꾸러미 다섯 개는 낱개 몇 개인가?

풀이와 확인

상자당 꾸러미 수가 여전히 여덟이면 꾸러미는 29개다. 낱개는 29×10=290개가 된다. 꾸러미 수는 변하지 않았지만 낱개의 합계는 58개 줄었다. 같은 숫자 기록도 환산 기준에 따라 다른 양을 가리킨다.

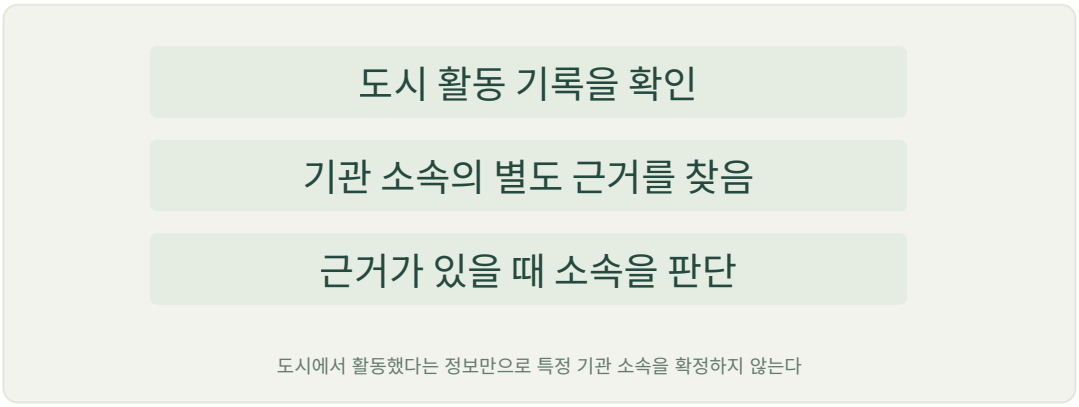
[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

지혜의 집을 읽는 신중한 시선

유명한 이름이 모든 활동을 설명해 주지는 않는다.

바그다드의 지혜의 집이라는 이름은 중세 학술을 소개할 때 자주 등장한다. 그러나 여러 세기에 걸친 번역과 연구를 모두 한 건물에서 동시에 이루어진 일처럼 그리면 복잡한 역사가 단순해진다. 특정 학자가 특정 기관에서 어떤 일을 했다고 말하려면 그 연결을 뒷받침하는 근거가 필요하다. 기관의 이름과 후원자의 역할과 실제 저술 활동을 구분해 읽는 편이 안전하다.

이를 논리 문제로 바꾸어 보자. 어떤 도시에서 활동한 학자라는 조건을 A라고 하고 특정 기관에 소속된 학자라는 조건을 B라고 하자. B에 속하면 A에 속할 수 있지만 A에 속한다는 이유만으로 B에도 속한다고 결론 내릴 수는 없다. 넓은 범주와 좁은 범주를 혼동하는 오류다. 유명한 장소의 그림을 사용할 때도 그림 설명에 그 장소와 인물의 관계가 확인된 사실인지 상징적 연출인지 밝혀야 한다.



탐구

어떤 도시의 학자라는 정보가 특정 기관의 소속을 증명하지 못하는 까닭은 무엇인가?

풀이와 확인

같은 도시에는 다양한 후원자와 공부 모임과 개인 작업 공간이 있을 수 있다. 도시라는 넓은 범주의 구성원이라는 사실만으로 더 좁은 기관 범주의 구성원임을 알 수 없다. 포함 관계의 방향을 거꾸로 적용해서는 안 된다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

사실과 해석과 재구성 구별하기

자료 읽기는 문장의 성격을 표시하는 데서 시작된다.

전시 설명의 문장을 세 칸으로 나누어 보자. 보존된 책에 어떤 문제가 실려 있다는 문장은 자료에서 확인하는 사실이다. 그 문제가 당시 교육에서 중요했을 것이라는 문장은 근거에 기초한 해석이다. 이해를 돕기 위해 숫자를 바꾸어 새 문제를 만든 것은 현대적 재구성이다. 세 종류가 한 문단에 함께 등장할 수 있지만 독자는 어느 부분이 어떤 성격인지 알아야 한다.

재구성은 역사적 사실보다 열등한 활동이 아니다. 어려운 논증을 작은 수로 바꾸거나 그림에 색을 넣으면 구조를 더 잘 볼 수 있다. 다만 재구성한 숫자를 원문에 있던 숫자처럼 소개하면 안 된다. 이 관에서는 현대 기호와 계산표와 좌표 그림을 적극적으로 사용한다. 그것들은 옛 수학자의 사고를 오늘의 독자가 살펴보는 보조 수단이며 원문과 완전히 동일한 표현은 아니다.

문장 유형	판단 질문
사실	어떤 자료에서 확인되는가
해석	어떤 근거로 추론했는가
재구성	무엇을 새롭게 설정했는가

탐구

현대 좌표축으로 그린 중세 방정식의 그림에는 어떤 설명이 필요한가?

풀이와 확인

현대 좌표와 기호로 관계를 재구성한 그림이라고 밝혀야 한다. 해당 수학자가 오늘날과 같은 좌표평면을 사용했다는 뜻이 아님을 구분하면 도해의 교육적 장점을 살리면서 역사적 오해도 줄일 수 있다.

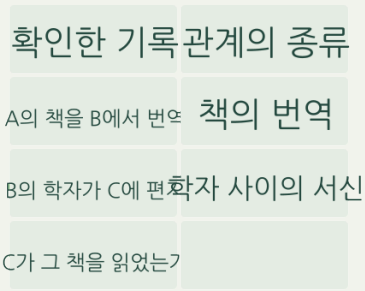
[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

연결망 읽기 활동의 해설

빠진 선을 채우는 대신 질문을 정확히 만든다.

가상의 자료 카드에 A도시의 책이 B도시에서 번역되었다는 기록과 B도시의 학자가 C도시의 학자에게 편지를 보냈다는 기록이 있다고 하자. 이 두 기록을 하나의 선으로 합치면 번역과 서신의 차이가 사라진다. 선을 두 종류로 나누면 A에서 C까지 지식이 전달되었을 가능성을 질문할 수 있지만 실제 전달이 확인되었다고 단정할 수는 없다.

활동의 좋은 결과는 선이 가장 많은 지도가 아니라 증거와 표시가 가장 잘 대응하는 지도다. 확인된 관계는 실선으로 그린다. 앞으로 살펴볼 관계는 점선 대신 별도의 질문 목록에 적어 실제 교류와 혼동하지 않게 한다. 지도 아래에는 도시를 고른 기준과 다루는 시기를 적는다. 서로 수백 년 떨어진 사람들을 동시에 만난 것처럼 배치하지 않으려면 시간도 관계의 중요한 조건으로 다루어야 한다.



탐구

두 기록만으로 A도시의 책을 C도시의 학자가 읽었다고 결론 내릴 수 있는가?

풀이와 확인

결론 내릴 수 없다. B도시에서 번역이 이루어졌고 B와 C 사이에 편지가 오갔다는 것까지만 확인된다. 그 편지에 해당 책이 언급되는지 또는 C에서 그 책의 필사본이 발견되는지와 같은 추가 근거가 필요하다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

이슬람 아랍관 / 45

자리값과 계산의 질서

숫자의 모양보다 자리의 역할

같은 기호도 놓인 위치에 따라 다른 양을 나타낸다.

알콰리즈미의 이름은 대수뿐 아니라 인도식 수 계산의 전승과도 연결된다. 여기서는 특정 필사본의 글자 모양을 복원하지 않고 십진 자리값의 원리를 살핀다. 507에서 5는 백이 다섯 개라는 뜻이며 7은 낱개 일곱 개라는 뜻이다. 가운데 0은 십의 자리에 해당하는 묶음이 없음을 나타낸다. 따라서 507과 57의 차이는 숫자를 하나 더 적었다는 데 그치지 않는다.

자리값 표현은 묶음의 크기를 열 배씩 바꾸는 약속이다. 507=5×100+0×10+7이라고 풀어 쓰면 각 기호의 역할이 드러난다. 숫자 표기가 짧아지는 대신 위치를 정확히 보존해야 하는 이유도 알 수 있다. 손으로 적은 자료를 읽을 때에는 흐릿한 0 하나가 수 전체를 바꿀 수 있음을 기억해야 한다. 빈자리를 표시하는 기능과 수로서 0을 다루는 문제는 관련되지만 완전히 같은 문제는 아니다.

표기	백의 자리	십의 자리	일의 자리
507	5	0	7
570	5	7	0
57	0	5	7

탐구

70과 7의 차이를 자리값으로 설명하라.

풀이와 확인

70은 십이 일곱 개이고 낱개가 없는 수다. 7은 낱개 일곱 개다. 같은 7이라는 기호를 쓰지만 왼쪽으로 한 자리 옮기면 맡는 값이 열 배가 된다. 오른쪽 0은 이 자리 배치를 유지하는 역할을 한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

묶음을 넘기는 덧셈

받아올림은 열 개를 한 묶음으로 바꾸는 과정이다.

248과 376을 더하는 현대 재구성 계산을 해 보자. 일의 자리에서는 8+6=14이므로 낱개 열 개를 십 하나로 바꾸고 낱개 넷을 남긴다. 십의 자리는 원래의 4와 7에 새로 생긴 1을 더해 12가 된다. 다시 십 열 개를 백 하나로 바꾸면 십 둘이 남는다. 백의 자리는 2+3+1=6이므로 전체 합은 624다.

받아올림의 작은 1은 언제나 같은 양을 뜻하지 않는다. 일의 자리에서 올라간 1은 십 하나이며 십의 자리에서 올라간 1은 백 하나다. 절차만 외우면 이 차이가 가려진다. 묶음 그림으로 생각하면 각각의 1이 어떤 단위인지 분명해진다. 검산은 합에서 한 수를 빼거나 두 수를 먼저 대략 250과 380으로 보고 결과가 630 근처인지 살피는 방식으로 할 수 있다.

자리	계산	남는 값
일	8+6=14	4
십	4+7+1=12	2
백	2+3+1=6	6

탐구

624−376을 계산해 덧셈을 검산하라.

풀이와 확인

낱개가 부족하므로 십 하나를 풀어 14−6=8을 얻는다. 십은 하나만 남아 백 하나를 다시 풀면 11−7=4가 된다. 백은 5−3=2이므로 248이다. 묶음을 만드는 덧셈과 묶음을 푸는 뺄셈이 서로 대응한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

곱셈표를 분해해서 읽기

긴 곱셈은 분배법칙을 배열한 계산이다.

23×14를 계산할 때 14를 10+4로 나누면 23×10과 23×4가 생긴다. 두 부분은 각각 230과 92이므로 합은 322다. 이번에는 23도 20+3으로 나누어 보자. 20×10과 20×4와 3×10과 3×4를 모두 더하면 200+80+30+12=322가 된다. 같은 곱셈을 두 가지 크기의 부분으로 나누어도 전체가 같은 이유는 넓이를 빠짐없이 분할했기 때문이다.

직사각형 그림은 계산의 각 항이 어디에서 나왔는지 보여 준다. 가로를 20과 3으로 나누고 세로를 10과 4로 나누면 네 칸이 생긴다. 네 칸의 넓이를 합치는 과정에서 겹침이나 빈틈이 없어야 한다. 세로의 10을 단순한 1로 읽으면 200과 30이 각각 20과 3으로 줄어들어 틀린 답이 된다. 긴 곱셈의 줄을 한 칸 옮기는 규칙은 이런 자리값을 표시하는 방법이다.

×	10	4
20	200	80
3	30	

현대 재구성: 23×14를 네 부분의 넓이로 나눈다. / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

곱셈	10	4
20	200	80
3	30	12

탐구

32×15를 같은 방식으로 네 부분으로 나누어 계산하라.

풀이와 확인

32=30+2이고 15=10+5다. 네 부분은 300과 150과 20과 10이다. 이를 더하면 480이다.
32×10+32×5=320+160으로 계산해도 같은 결과를 얻는다. 분할 방식이 달라도 전체 직사각형의 넓이는 변하지 않는다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

나머지가 말해 주는 조건

나눗셈은 몫과 남은 양을 함께 설명해야 끝난다.

물건 347개를 일곱 명에게 같은 수씩 나누면 한 명당 49개를 주고 네 개가 남는다. 이 결과는 347=7×49+4로 확인한다. 나머지는 나누는 수보다 작아야 한다. 나머지가 11이라고 썼다면 아직 한 명당 한 개씩 더 줄 수 있으므로 나눗셈을 끝낸 것이 아니다. 몫과 나머지의 조건을 함께 적어야 계산이 완성된다.

물건을 잘라 나눌 수 있다면 각자 49와 4/7개를 받는다고 나타낼 수도 있다. 하지만 의자처럼 쪼갤 수 없는 물건을 실제로 나누는 상황에서는 같은 표현을 그대로 실행할 수 없다. 수학적으로 같은 양을 표현하더라도 문제의 대상에 따라 적절한 답의 형태가 달라진다. 계산 결과를 해석할 때에는 정수만 허용하는지와 분할이 가능한지와 남은 물건을 어떻게 처리할지를 먼저 확인해야 한다.

$$347 = 7 \times 49 + 4$$

49상자에는 343개

남은 4개를 담으면 총 50상자

몫 49와 필요한 상자 수 50은 문제의 조건에 따라 구별한다

탐구

347개를 담는 상자에 최대 일곱 개씩 넣는다면 상자는 몇 개 필요한가?

풀이와 확인

49상자에 일곱 개씩 담으면 343개를 담고 네 개가 남는다. 남은 네 개를 담을 상자가 하나 더 필요하므로 모두 50상자다. 사람에게 나누는 문제의 몫 49를 그대로 상자 수의 답으로 쓰면 마지막 네 개가 빠진다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

서로 다른 분수의 기준 맞추기

분모는 조각의 크기를 정하는 약속이다.

전체의 1/3과 1/4을 더할 때 조각 수만 더해 2/7로 만들 수 없다. 세 등분한 조각과 네 등분한 조각의 크기가 다르기 때문이다. 전체를 열두 등분하면 1/3은 네 조각이고 1/4은 세 조각이 된다. 따라서 합은 일곱 조각에 해당하는 7/12다. 공통 분모를 정하는 일은 서로 다른 단위를 같은 크기의 조각으로 환산하는 과정이다.

이 계산을 그림으로 옮길 때에는 두 분수가 같은 전체를 기준으로 한다는 조건이 중요하다. 작은 빵의 1/3과 큰 빵의 1/4은 단순히 하나의 빵의 7/12라고 합칠 수 없다. 전체의 크기가 다르면 먼저 실제 무게나 넓이를 기준으로 바꾸어야 한다. 분수 계산이 정확해도 기준 전체를 잘못 잡으면 생활 속 해석은 틀릴 수 있다. 수학적 표현에 숨어 있는 전체를 항상 함께 읽자.

원래 분수	열두 등분한 표현
1/3	4/12
1/4	3/12
합	7/12

탐구

같은 전체의 2/5와 1/6을 더하면 얼마인가?

풀이와 확인

전체를 서른 등분하면 2/5는 12/30이고 1/6은 5/30이다. 합은 17/30이다. 두 분모의 곱 30을 공통 분모로 사용할 수 있다. 이 경우에는 5와 6이 서로소이므로 30이 가장 작은 공통 분모이기도 하다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

어림으로 오류 찾기

정확한 계산 전에 결과의 범위를 예상한다.

198×51의 답을 10098이라고 적었다면 먼저 200×50=10000과 비교해 보자. 답이 만 근처에 있으므로 크기의 수준은 자연스럽다. 정확히는 198×50+198=9900+198=10098이다. 만약 100980이라고 적었다면 자리 하나가 늘어난 오류를 어림으로 쉽게 발견할 수 있다. 어림은 정확한 계산을 대신하는 것이 아니라 이상한 결과를 빠르게 걸러 내는 장치다.

어림값과 참값의 차이를 확인하면 더 좋은 판단을 할 수 있다. 198을 200으로 바꾼 것은 늘리는 변화이며 51을 50으로 바꾼 것은 줄이는 변화다. 두 변화가 반대 방향이므로 어림값이 반드시 참값보다 크거나 작다고 단정할 수 없다. 실제 계산에서는 참값이 98만큼 크다. 단순히 반올림했다는 이유로 오차의 방향까지 안다고 생각하면 안 된다.

계산	결과	어림과 비교
200×50	10000	기준 어림
198×51	10098	차이 +98
잘못 쓴 결과	100980	

어림은 자릿수 오류를 찾지만 정확한 계산을 대신하지 않는다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

399×21의 크기를 먼저 예상한 뒤 정확히 계산하라.

풀이와 확인

400×20=8000으로 어림할 수 있다. 정확한 값은 399×20+399=7980+399=8379다. 어림값과의 차이는 379다. 83790은 어림한 크기보다 열 배가량 크므로 자리값을 다시 확인해야 한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

검산은 다른 길로 돌아오는 일

같은 절차를 반복하는 것보다 독립된 관계가 도움이 된다.

곱셈 37×24의 결과가 888이라고 나왔다고 하자. 같은 곱셈을 똑같은 순서로 다시 하면 같은 실수를 되풀이할 수 있다. 888÷24=37인지 확인하거나 37×6=222를 구한 뒤 네 배 하여 888인지 살펴보면 다른 경로의 검산이 된다. 계산의 모양을 바꾸는 것은 단순한 반복보다 오류를 발견할 기회를 넓혀 준다.

자리 숫자의 합을 이용한 아홉의 나머지 검산도 생각해 볼 수 있다. 37은 아홉으로 나눈 나머지가 1이고 24는 나머지가 6이므로 곱의 나머지는 6이어야 한다. 888의 숫자 합은 24이고 나머지는 6이어서 이 조건을 통과한다. 그러나 897도 숫자 합이 24이므로 통과한다. 간단한 검산은 오류를 찾는 데 도움이 되지만 조건을 통과했다고 정답이 보장되는 것은 아니다.

$$37 \times 24 = 888$$

$$37 \times 6 = 222 \rightarrow 222 \times 4 = 888$$

$$888 \div 24 = 37$$

부분곱과 역연산이라는 다른 경로로 같은 결과를 검사한다

탐구

아홉의 나머지 검산이 888과 897을 구별하지 못하는 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

두 수의 차이가 9이므로 아홉으로 나눈 나머지가 같다. 나머지 정보만 남기면 아홉의 배수만큼 차이 나는 수들이 구별되지 않는다. 검산 방법이 어떤 정보를 보존하고 어떤 정보를 버리는지 이해해야 결과를 과신하지 않는다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

계산 장부 완성하기

단위와 어림과 정확한 값을 한 표에서 비교한다.

현대 재구성 시장에서 천 한 묶음의 길이를 12m로 정하고 묶음 17개를 준비했다고 하자. 전체 길이는 204m다. 그 가운데 3/8을 판매했다면 204×3/8=76.5m를 판 셈이다. 남은 길이는 127.5m다. 여기서 0.5m는 반 미터라는 뜻이므로 분수의 표현과 소수의 표현이 같은 양을 가리키는지 확인할 수 있다.

결과를 검산하는 길은 여러 가지다. 팔린 76.5m와 남은 127.5m를 더하면 원래 길이 204m가 되어야 한다. 남은 비율 5/8을 전체에 곱해도 127.5m가 나와야 한다. 전체를 약 200m로 보면 팔린 길이는 약 75m이고 남은 길이는 약 125m일 것으로 예상할 수 있다. 단위가 달라지거나 소수점 위치가 잘못되었을 때 이 세 관점이 서로 맞지 않게 된다.

항목	계산	길이
전체	17×12	204m
판매	204×3/8	76.5m
남음	204×5/8	127.5m

탐구

묶음 수가 18개로 바뀌고 판매 비율이 같다면 남은 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

전체는 18×12=216m다. 남은 비율은 5/8이므로 216×5/8=135m다. 팔린 길이 81m와 더하면 216m가 되어 검산된다. 묶음 한 개가 추가되면서 남는 길이는 12×5/8=7.5m만큼 늘었다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

이슬람 아랍관 / 46

말로 쓴 관계에서 방정식으로

알자브르가 가리키는 움직임

등식의 양쪽을 같은 방식으로 바꾸어 관계를 보존한다.

알콰리즈미의 대수서를 읽을 때 오늘날의 x와 등호가 원문에도 그대로 있었다고 생각하면 안 된다. 문제와 절차는 말로 설명되었으며 이 책의 기호식은 현대 독자를 위한 번역이다. 알자브르와 알무카발라라는 말은 식을 정리하는 활동과 연결된다. 여기서는 역사적 어휘를 한 가지 현대 연산과 완전히 동일시하기보다 부족한 항을 복원하고 같은 종류의 항을 정리하는 생각에 주목한다.

현대식 x−4=9에서 양쪽에 4를 더하면 x=13이 된다. 왼쪽에서 없어진 네 단위를 다시 채우는 동시에 오른쪽도 네 단위 늘린 것이다. 등식은 저울처럼 두 양이 같다는 관계를 나타내므로 한쪽만 바꾸면 관계가 깨진다. 식을 옮겨 적을 때 부호가 저절로 바뀐다고 외우기보다 어떤 연산을 양쪽에 적용했는지 말로 설명하면 풀이의 이유를 이해할 수 있다.

$$x - 4 = 9$$
$$x - 4 + 4 = 9 + 4$$
$$x = 13$$

양쪽에 같은 4를 더해 등식의 관계를 유지한다

탐구

x−7=18에서 x를 구하고 양변에 적용한 연산을 설명하라.

풀이와 확인

양쪽에 7을 더하면 x−7+7=18+7이므로 x=25다. 왼쪽의 뺄셈이 사라진 까닭은 같은 양을 다시 더했기 때문이다. 처음 식에 25를 넣으면 25−7=18이 되어 관계가 맞는다.

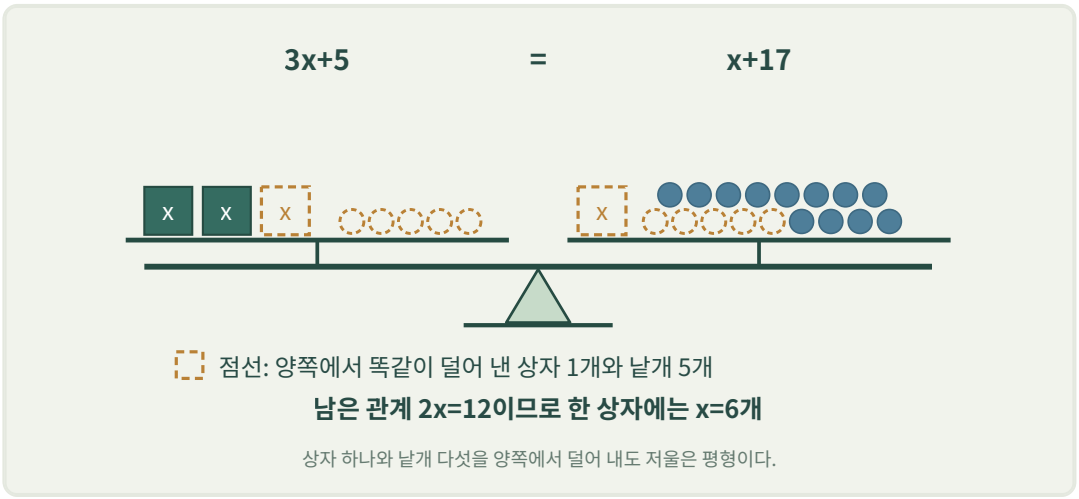
[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

같은 종류의 항을 모으기

개수와 한 개의 크기를 구별하면 항 정리가 보인다.

상자 하나에 같은 수의 구슬이 들어 있다고 하자. 상자 세 개와 낱개 다섯 개가 상자 한 개와 낱개 열일곱 개의 구슬 수와 같다면 3x+5=x+17로 나타낼 수 있다. 양쪽에서 상자 하나를 덜어 내면 2x+5=17이다. 다시 양쪽에서 낱개 다섯 개를 덜어 내면 2x=12이므로 한 상자에는 여섯 개가 들어 있다.

3x와 5는 같은 종류의 양처럼 보이지만 역할이 다르다. 3x는 아직 모르는 한 상자의 구슬 수를 세 배 한 양이고 5는 이미 알려진 낱개 수다. 따라서 3x+5를 8x로 합칠 수 없다. x가 6일 때 3x+5는 23이지만 8x는 48이다. 특정한 값을 넣어 비교하는 간단한 검사는 잘못된 항 정리를 발견하는 데 유용하다.



탐구

4x+3=2x+19를 풀고 원래 식으로 검산하라.

풀이와 확인

양쪽에서 2x와 3을 차례로 빼면 2x=16이므로 x=8이다. 원래 식의 왼쪽은 4×8+3=35이고 오른쪽은 2×8+19=35다. 양쪽 값이 같으므로 구한 수가 조건을 만족한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

한 문장을 식으로 번역하기

무엇을 미지수로 정했는지가 식의 출발점이다.

어떤 수의 세 배에 다섯을 더하면 스물여덟이라는 문장을 읽어 보자. 어떤 수를 x로 정하면 세 배는 3x이고 다섯을 더한 양은 3x+5다. 따라서 식은 3x+5=28이다. 반면 어떤 수에 다섯을 더한 뒤 세 배 하면 스물여덟이라는 문장은 3(x+5)=28이다. 낱말이 비슷해도 연산의 순서가 다르므로 두 식은 같지 않다.

괄호는 계산 순서를 분명히 기록하는 도구다. 첫 번째 식의 답은 x=23/3이고 두 번째 식의 답은 x=13/3이다. 문제를 풀기 전에 식이 상황을 제대로 담았는지 확인하지 않으면 계산을 정확히 해도 다른 문제의 답을 얻는다. 문장을 그림으로 먼저 나타내거나 연산의 순서를 화살표로 적어 보면 괄호가 필요한 위치를 찾기 쉽다.

문장	현대 기호식
세 배 한 뒤 다섯 더하기	3x+5
다섯 더한 뒤 세 배	3(x+5)
네 뺀 뒤 두 배	2(x−4)

탐구

어떤 수에서 4를 뺀 값을 두 배 하면 18이라는 문장을 식으로 쓰고 풀어라.

풀이와 확인

어떤 수를 x로 두면 2(x−4)=18이다. 양쪽을 2로 나누어 x−4=9를 얻고 4를 더하면 x=13이다. 13에서 4를 뺀 9를 두 배 하면 18이므로 문장과 계산이 모두 맞는다.

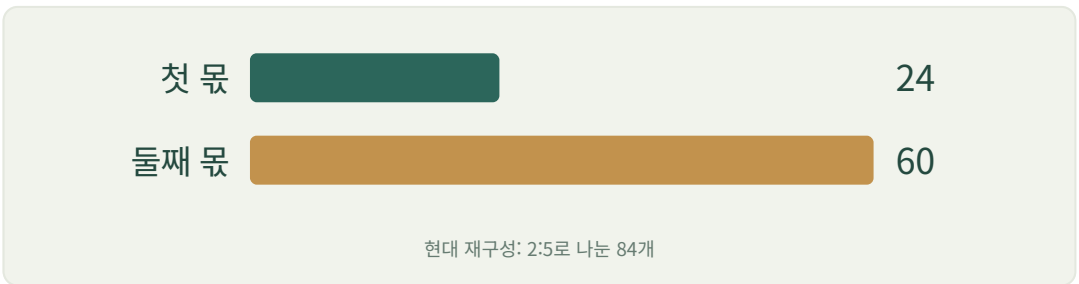
[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

비례배분을 방정식으로 읽기

비는 실제 양이 아니라 양 사이의 관계를 나타낸다.

현대 재구성 배분 문제에서 84개의 물건을 2:5의 비로 나눈다고 하자. 한 몫을 x개라고 정하면 두 사람은 각각 2x개와 5x개를 받는다. 전체가 84개이므로 7x=84이고 x=12다. 따라서 각자의 몫은 24개와 60개다. 비의 두 수를 바로 물건 수로 읽지 않고 공통 단위의 배수로 해석하는 것이 핵심이다.

비를 4:10으로 바꾸어 써도 같은 배분을 뜻한다. 이때 한 몫의 크기는 여섯 개로 달라지지만 4×6과 10×6은 여전히 24와 60이다. 비를 구성하는 숫자와 실제 양은 서로 구별해야 한다. 합이 정해지면 비를 이용해 실제 양을 찾을 수 있고 차가 정해져도 같은 원리를 적용할 수 있다. 무엇이 알려져 있는지에 따라 세우는 식만 달라진다.



현대 재구성: 2:5로 나눈 84개

탐구

두 몫의 비가 2:5이고 차가 36개라면 두 몫은 각각 몇 개인가?

풀이와 확인

두 몫을 2x와 5x로 두면 차는 3x다. 3x=36이므로 x=12다. 따라서 24개와 60개다. 합이 아니라 차를 조건으로 주어도 공통 단위를 먼저 구하면 각자의 양을 찾을 수 있다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

역산의 순서를 설계하기

마지막에 한 연산부터 거꾸로 되돌린다.

어떤 수에 3을 더한 뒤 네 배 하고 다시 6을 빼서 38을 얻었다고 하자. 처음 수를 찾으려면 마지막에 뺀 6을 먼저 더해 44를 얻는다. 이어 네 배를 되돌리기 위해 4로 나누면 11이다. 마지막으로 처음에 더한 3을 빼면 8이 남는다. 식으로 쓰면 4(x+3)−6=38이며 역산의 각 단계가 양변에 같은 연산을 적용하는 풀이와 일치한다.

역산을 할 때 연산의 종류뿐 아니라 순서도 뒤집어야 한다. 처음에 3을 더했으므로 답 38에서 곧바로 3을 빼는 방식은 맞지 않는다. 여러 층으로 포장된 물건을 풀 때 가장 바깥 포장부터 벗기는 것과 같다. 다만 모든 연산이 언제나 하나의 역을 갖는 것은 아니다. 제곱은 양수와 음수에서 같은 값을 만들 수 있으므로 나중에 다룰 방정식에서는 해의 범위를 더 신중히 살펴야 한다.



현대 재구성: 합성된 연산을 역순으로 풀기

탐구

어떤 수를 다섯 배 한 뒤 7을 더해 42를 얻었다. 처음 수는 무엇인가?

풀이와 확인

42에서 7을 빼면 35다. 그다음 5로 나누면 7이다. 순방향으로 확인하면 $7\times5+7=42$다. 덧셈의 역은 뺄셈이고 0이 아닌 수를 곱하는 연산의 역은 그 수로 나누는 연산이다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

해가 없거나 하나로 정해지지 않을 때

식의 모양만으로 답이 하나라고 가정하지 않는다.

$3x+5=3x+8$에서 양쪽의 $3x$를 빼면 $5=8$이 남는다. 이 관계는 어떤 x를 선택해도 참이 될 수 없으므로 해가 없다. 반대로 $3x+5=3x+5$는 양쪽에서 같은 항을 빼면 $5=5$가 남는다. 이 관계는 x가 어떤 값이든 성립하므로 별도의 제한이 없다면 모든 실수가 해다. 미지수가 등장한다고 언제나 한 개의 답이 생기는 것은 아니다.

두 경우를 구별하려면 계산 마지막에 무엇이 남는지 읽어야 한다. $0x=0$은 x가 0이라는 뜻이 아니다. 어떤 x에 0을 곱해도 0이므로 모든 값이 가능하다는 뜻이다. $0x=3$은 왼쪽이 언제나 0이어서 불가능하다. 여기의 표현은 현대 대수의 관점이며 옛 문헌의 해 개념과 그대로 같다고 가정하지 않는다. 오늘의 확장된 수 체계로 옛 절차의 조건을 다시 살펴보는 활동이다.

정리한 관계	현대 실수 범위의 해
$x=4$	4 하나
$0x=0$	모든 실수
$0x=3$	없음

탐구

2(x+4)=2x+8과 2(x+4)=2x+9의 해를 비교하라.

풀이와 확인

첫 식은 전개하면 2x+8=2x+8이므로 모든 실수가 해다. 둘째 식은 8=9가 남으므로 해가 없다. 괄호를 정확히 풀고 같은 항을 정리하면 두 관계가 근본적으로 다르다는 사실을 확인할 수 있다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

식을 바꾸어도 보존되어야 하는 것

등가 변형은 해의 집합을 그대로 유지하는 변화다.

x=3의 양쪽에 2를 더하면 x+2=5가 된다. 두 식을 만족하는 x는 같으므로 등가인 식이다. 양쪽을 0이 아닌 같은 수로 곱하거나 나누는 변형도 해를 보존한다. 그러나 양쪽에 x를 곱할 때에는 주의해야 한다. x=3에서 $x^2=3x$를 얻으면 원래 없던 x=0도 새 식을 만족한다. 적용한 연산을 되돌릴 수 없는 경우가 생겼기 때문이다.

이런 예는 계산 규칙을 기계적으로 확장하면 안 된다는 점을 보여 준다. $x^2=3x$를 x로 나누어 x=3만 적으면 이번에는 x=0이라는 해를 놓친다. 나누는 수가 0이 될 가능성이 있는지 먼저 확인해야 한다. 식을 정리한 뒤 원래 조건에 대입하는 검산은 이와 같은 해의 추가나 누락을 찾는 데 도움이 된다. 풀이의 각 줄은 답을 향한 이동이면서 조건을 관리하는 기록이기도 하다.

식	실수 해
x=3	3
x+2=5	3
$x^2=3x$	

x를 곱하면 0이라는 해가 추가될 수 있으므로 역연산 조건을 살핀다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

$x^2=5x$를 현대 실수 범위에서 풀 때 x로 바로 나누면 무엇을 놓치는가?

풀이와 확인

$x=0$을 놓친다. $x^2-5x=x(x-5)=0$으로 나타내면 $x=0$ 또는 $x=5$다. 두 값을 원래 식에 넣으면 모두 성립한다. x로 나눌 수 있는 경우는 x가 0이 아니라고 따로 가정했을 때뿐이다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

배분 문제의 완전한 해설

변수의 뜻과 계산과 상황 검증을 연결한다.

현대 재구성 작업장에서 두 팀이 같은 종류의 조각을 만든다. 첫 팀은 둘째 팀의 두 배보다 여섯 개를 더 만들었고 두 팀의 합은 아흔 개이다. 둘째 팀의 양을 x개로 정하고 두 팀의 관계를 식으로 나타내자. 첫 팀은 $2x+6$개이므로 $x+(2x+6)=90$이다. 따라서 $3x=84$이고 $x=28$이다.

첫 팀은 $2\times28+6=62$개다. 두 팀의 합은 $62+28=90$이며 첫 팀의 양에서 둘째 팀의 두 배를 빼면 $62-56=6$이다. 합과 차의 조건을 각각 확인해야 한다. 변수에 팀 이름을 붙이지 않으면 28이 어느 팀의 답인지 혼동할 수 있다. 풀이의 마지막 문장은 숫자 두 개만 나열하지 말고 첫 팀과 둘째 팀의 양을 단위와 함께 서술하는 편이 좋다.



두 팀의 합은 90개이며 첫 팀은 둘째 팀의 두 배보다 6개 많다

탐구

합이 102개로 바뀌고 나머지 조건이 같으면 두 팀의 양은 어떻게 되는가?

풀이와 확인

둘째 팀을 x개로 두면 3x+6=102이므로 x=32다. 첫 팀은 70개다. 합은 102이고 70−2×32=6이다. 전체가 12개 늘었을 때 둘째 팀은 4개 늘고 첫 팀은 8개 늘어 두 배 관계의 증가분도 보존된다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

이슬람 아랍관 / 47

여섯 형식과 완전제곱

여섯 형식이 필요한 까닭

양의 크기를 다루는 체계에서는 항의 위치가 중요하다.

알콰리즈미의 대수에서는 제곱과 근과 수의 관계를 여러 기본 형식으로 나누었다. 현대적으로 쓰면 $x^2=bx$와 $x^2=c$와 $bx=c$와 $x^2+bx=c$와 $x^2+c=bx$와 $x^2=bx+c$의 여섯 형식이다. 여기서 b와 c는 양수로 생각한다. 음수 계수를 허용하여 모든 항을 한쪽에 모으는 오늘의 표현을 사용하면 여러 형식을 하나로 묶을 수 있지만 당시의 분류는 다른 개념적 조건에서 이해해야 한다.

역사적 분류를 낡은 표기라며 지나치면 양과 도형을 어떻게 다루었는지 보이지 않는다. 길이와 넓이는 양의 크기로 제시되며 어느 항을 어느 쪽에 놓았는지가 문제의 성격을 구별한다. 이 장의 기호식은 그 관계를 설명하는 현대적 재구성이다. 현대 실수 범위의 모든 근을 찾는 활동과 역사적 문맥에서 허용하는 양의 해를 찾는 활동을 분리하여 읽자.

형식	현대적 예
제곱=근	$x^2=5x$
제곱=수	$x^2=25$
근=수	$5x=25$
제곱+근=수	$x^2+6x=16$
제곱+수=근	$x^2+8=6x$
제곱=근+수	$x^2=6x+16$

탐구

현대식 $x^2-6x+8=0$은 여섯 형식 중 어느 관계로 바꾸어 쓸 수 있는가?

풀이와 확인

$x^2+8=6x$로 옮기면 제곱과 수의 합이 근의 배수와 같다는 형식이다. 현대적으로는 $x=2$와 $x=4$가 해이며 두 값 모두 양수다. 항을 옮겨 쓰는 목적은 양의 항만 사용하는 분류와의 관계를 보기 위해서다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

제곱과 근과 수를 비교하기

같은 수치라도 항의 종류에 따라 풀이가 달라진다.

$x^2=25$는 한 변의 제곱이 25인 정사각형을 생각하게 한다. 양의 길이를 찾는다면 $x=5$다. 현대 실수 범위에서는 $x=-5$도 제곱하면 25가 되므로 두 근이 있다. $5x=25$는 같은 크기의 길이를 다섯 번 합친 양이 25라는 관계로 볼 수 있어 $x=5$다. 두 식의 양의 답은 같지만 첫 식은 제곱 관계이고 둘째 식은 일차 관계다.

$x^2=5x$를 양의 x에 대해 생각하면 x로 나누어 $x=5$를 얻는다. 하지만 현대 실수 범위에서는 $x=0$도 원래 식을 만족한다. 해를 적을 때 어떤 범위를 다루었는지 밝혀야 같은 답과 다른 답을 공정하게 비교할 수 있다. 옛 문헌의 양의 해를 오늘의 전체 실수 해와 비교하면서 빠진 답이라고만 평가하면 당시의 문제 설정을 놓친다.

방정식	양의 길이 해	실수 해
$x^2=25$	5	-5와 5
$5x=25$	5	5
$x^2=5x$	5	

같은 양의 답이 나와도 연산과 해의 범위는 다를 수 있다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

$x^2=36$과 $6x=36$을 양의 길이 문제와 현대 실수 문제로 나누어 비교하라.

풀이와 확인

양의 길이를 찾는 경우 두 식의 답은 모두 6이다. 현대 실수 범위에서는 첫 식의 근이 6과 -6이며 둘째 식의 근은 6 하나다. 범위와 연산의 종류를 함께 기록해야 같은 숫자가 나오는 이유와 해의 차이를 설명할 수 있다.

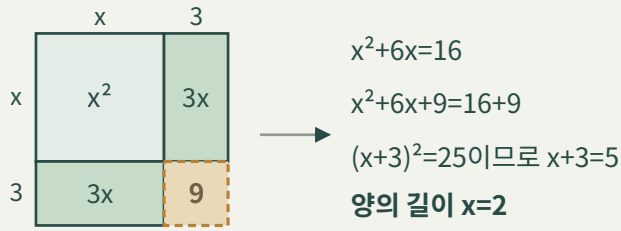
[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

빠진 모서리를 채우는 생각

완전제곱은 식과 넓이 그림을 동시에 정리한다.

$x^2+6x=16$을 양의 길이 문제로 살펴보자. 한 변이 x인 정사각형 옆에 넓이가 $3x$인 직사각형을 두 개 붙이면 x^2+6x를 나타낼 수 있다. 두 직사각형을 서로 이웃한 변에 붙이면 한쪽 모서리에 가로와 세로가 각각 3인 정사각형이 빠진다. 그 넓이 9를 채우면 큰 정사각형의 한 변은 $x+3$이 된다.

원래 넓이 16에 9를 더한 25가 큰 정사각형의 넓이이므로 $x+3=5$다. 따라서 양의 길이는 $x=2$다. 식으로는 $x^2+6x+9=25$와 $(x+3)^2=25$를 거친다. 넓이 그림에서는 $x+3$을 양의 길이로 읽지만 현대 실수 계산에서는 $x+3=-5$도 가능하여 $x=-8$이 추가된다. 그림이 나타내는 범위와 기호식의 해 범위를 구분하면 두 설명이 충돌하지 않는다.



빠진 3×3 모서리를 채우면 한 변이 x+3인 정사각형이 된다.

탐구

$x^2+8x=20$에서 채워 넣을 모서리의 넓이와 양의 해를 구하라.

풀이와 확인

$8x$를 $4x$씩 둘로 나누므로 모서리의 한 변은 4이고 넓이는 16이다. $(x+4)^2=36$이 되어 양의 길이에서는 $x+4=6$이고 $x=2$다. 현대 실수 범위의 다른 근은 $x=-10$이다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

두 양의 해가 생기는 경우

넓이가 같은 두 직사각형이 서로 다른 길이를 준다.

$x^2+8=6x$를 정리하면 $x(6-x)=8$이다. 가로가 x이고 세로가 $6-x$인 직사각형의 넓이가 8이라는 뜻으로 읽을 수 있다. 두 변의 합이 6이며 곱이 8이므로 한쪽 길이가 2이면 다른 쪽은 4다. x가 가로를 가리킨다면 $x=2$와 $x=4$가 모두 가능하다. 어느 변을 x로 선택했는지가 두 해로 나타난 것이다.

완전제곱으로도 같은 결과를 얻는다. $x^2-6x+9=1$이므로 $(x-3)^2=1$이다. 따라서 $x-3$은 1 또는 -1이고 x는 4 또는 2다. 가운데 값 3에서 같은 거리만큼 떨어진 두 수가 해가 되는 구조를 볼 수 있다. 현대 수직선 그림은 이 대칭을 보여 주지만 그 그림을 역사적 원문의 표현이라고 소개해서는 안 된다.



현대 재구성: 해 2와 4는 3을 중심으로 대칭이다.

탐구

$x^2+12=8x$에서 두 양의 해를 구하고 직사각형의 두 변으로 해석하라.

풀이와 확인

$(x-4)^2=4$이므로 $x=2$ 또는 $x=6$이다. 직사각형의 두 변은 2와 6이며 합은 8이고 넓이는 12다. x를 어느 변으로 정하느냐에 따라 두 해가 생기지만 직사각형의 모양은 서로 회전한 관계다.

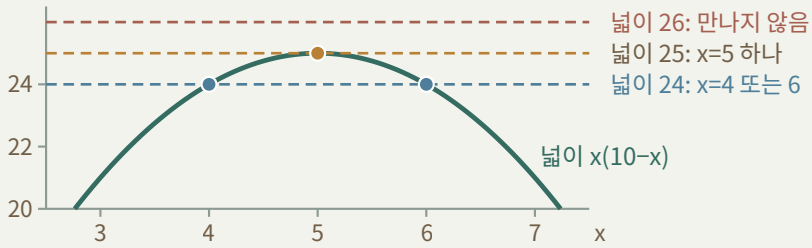
[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

해가 만나는 경계

가운데 값에서 넓이가 가장 커지는 이유를 설명한다.

두 변의 합이 10인 직사각형을 생각하자. 변을 x와 $10-x$로 쓰면 넓이는 $x(10-x)$다. $x=5+d$로 놓으면 다른 변은 $5-d$가 되고 넓이는 $(5+d)(5-d)=25-d^2$이다. d^2은 음수가 아니므로 넓이는 25보다 커질 수 없다. 같은 합을 가진 직사각형 가운데 정사각형의 넓이가 가장 크다는 사실이 식에서 드러난다.

따라서 $x^2+25=10x$는 양의 해 $x=5$ 하나를 갖는다. 넓이 조건을 24로 바꾸면 $25-d^2=24$여서 $d=1$ 또는 -1이며 $x=4$와 $x=6$이 된다. 넓이를 26으로 요구하면 $d^2=-1$이 되어 실수 길이로는 만들 수 없다. 문제의 수치가 조금 바뀌어도 해의 개수가 둘에서 하나를 거쳐 없음으로 바뀔 수 있다.



두 변의 합이 10이면 넓이는 25를 넘지 못해 26은 만들 수 없다.

탐구

두 변의 합이 12인 직사각형에서 넓이 35와 36과 37이 가능한지 판단하라.

풀이와 확인

변을 $6+d$와 $6-d$로 쓰면 넓이는 $36-d^2$이다. 넓이 35는 $d^2=1$이므로 변 5와 7로 가능하다. 넓이 36은 변 6과 6일 때 가능하다. 넓이 37은 실수 길이로 불가능하다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

제곱이 근과 수의 합일 때

형식이 달라지면 완전제곱의 배치도 달라진다.

$x^2=6x+16$을 현대 기호로 정리하면 $x^2-6x=16$이다. 양쪽에 9를 더하면 $(x-3)^2=25$가 된다. 따라서 현대 실수 범위에서는 $x-3=5$ 또는 $x-3=-5$이고 $x=8$ 또는 $x=-2$다. 양의 길이를 구하는 상황에서는 8만 남는다. 앞에서 살핀 $x^2+6x=16$과 숫자는 같지만 항이 놓인 위치가 다르므로 양의 해도 2에서 8로 달라진다.

두 식을 비교할 때 $6x$의 위치를 눈여겨보자. 한쪽에서는 정사각형에 직사각형을 더한 넓이를 알고 있고 다른 쪽에서는 정사각형에서 해당 넓이를 뺀 나머지를 알고 있다. 현대 기호는 이를 덧셈과 뺄셈의 차이로 표현한다. 역사적 분류에서는 양의 항을 어느 쪽에 놓는지가 이 차이를 드러냈다. 같은 계산법의 원리를 공유하면서도 별도 형식이 필요했던 이유를 읽을 수 있다.

$$x^2=6x+16$$
$$x^2-6x+9=25$$
$$(x-3)^2=25$$
$$\text{양의 해 } x=8$$

현대 재구성: 같은 양을 더해 제곱을 완성한다.

탐구

$x^2=4x+12$의 양의 해와 현대 실수 범위의 다른 근을 구하라.

풀이와 확인

양쪽을 정리하고 4를 더하면 $(x-2)^2=16$이다. $x-2=4$ 또는 -4이므로 $x=6$ 또는 -2다. 양의 길이는 6이다. 검산하면 $6^2=36$이며 $4\times6+12=36$이 된다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

그림의 넓이와 식의 단위

변과 넓이를 더할 때에는 계수의 의미를 확인한다.

x가 길이라면 x^2는 넓이다. 따라서 x^2+6x를 실제 넓이로 해석하려면 6도 길이 단위를 가진 값으로 생각해야 한다. 예를 들어 x를 미터로 재고 $6\text{m}\times x$를 직사각형 넓이로 읽으면 두 항을 합칠 수 있다. 단순한 숫자 계산에서는 단위를 생략하기 쉽지만 도형으로 옮길 때에는 서로 다른 차원의 양을 무심코 더하지 않도록 주의해야 한다.

한 변이 x인 정사각형에 폭이 3m인 직사각형 두 개를 붙인 그림에서는 각 직사각형 넓이가 $3\text{m}\times x$다. 빠진 모서리는 $3\text{m}\times3\text{m}$이므로 9m^2다. 이 조건을 적으면 완전제곱에서 왜 6을 반으로 나누고 다시 제곱하는지 더 분명해진다. 역사적 기하 대수와 오늘의 추상 기호 대수는 관계를 보여 주는 방식이 다르므로 번역 과정에서 단위가 어떻게 해석되었는지도 살펴야 한다.

부분	가로	세로	넓이
정사각형	x	x	x^2
첫 띠	x	3m	$3\text{m}\times x$
둘째 띠	3m	x	$3\text{m}\times x$
모서리	3m	3m	9m^2

각 길이와 넓이의 단위를 맞추어 완전제곱의 네 부분을 읽는다

탐구

x를 미터로 나타낸 길이라 할 때 $x^2+4x=12$를 넓이 관계로 설명하려면 무엇을 밝혀야 하는가?

풀이와 확인

4가 4m에 해당하며 오른쪽 12는 12m^2에 해당한다고 밝혀야 한다. 그러면 x^2와 $4\text{m}\times x$는 모두 넓이가 된다. 숫자만 적은 식을 도형으로 그릴 때에는 각 항의 단위가 서로 맞도록 해석해야 한다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

완전제곱 탐구의 종합 해설

계산 결과와 허용 범위와 그림을 함께 확인한다.

현대 재구성 문제 $x^2+10x=39$를 풀어 보자. 10의 반은 5이고 그 제곱은 25다. 양쪽에 25를 더하면 $x^2+10x+25=64$이며 $(x+5)^2=64$가 된다. 양의 길이로 읽으면 $x+5=8$이므로 $x=3$이다. 현대 실수 전체에서는 $x+5=-8$도 가능하므로 $x=-13$이 추가된다. 어떤 범위에서 답을 제시하는지 마지막에 다시 밝혀야 한다.

넓이 그림에서는 x^2 정사각형과 $5x$ 직사각형 두 개와 넓이 25인 모서리를 붙여 한 변이 $x+5$인 정사각형을 만든다. $x=3$을 넣으면 원래 넓이는 $9+30=39$이고 모서리를 더한 넓이는 64다. 풀이를 검토할 때에는 반으로 나눈 값과 채워 넣은 넓이를 혼동하지 않았는지 확인한다. 5는 모서리의 변이며 25는 모서리의 넓이다.

$$x^2 + 10x + 25 = 39 + 25$$

$$(x + 5)^2 = 64$$

$$\text{양의 길이 } x = 3$$

모서리의 변은 5이고 덧붙이는 넓이는 25이다

탐구

$x^2+12x=28$을 같은 방식으로 풀어 양의 해를 제시하라.

풀이와 확인

12의 반은 6이고 채울 넓이는 36이다. $(x+6)^2=64$가 되어 양의 길이에서는 $x+6=8$이고 $x=2$다. 원래 식에 넣으면 $4+24=28$이다. 현대 실수 범위의 다른 근은 $x=-14$다. 반으로 나누는 단계와 제곱하는 단계를 차례로 기록하면 오류가 줄어든다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

이슬람 아랍관 / 48

타비트와 수의 관계

번역자이자 문제를 만든 사람

전승과 창조는 한 사람의 활동 안에서 만난다.

타비트 이븐 쿠라는 하란 출신의 학자로 바그다드에서 활동했다. 그리스어와 시리아어와 아랍어를 아우른 그의 언어 능력은 수학 저술의 번역과 개정에 중요했다. 그러나 그의 역할을 옛 책을 보존한 사람으로만 한정하면 수론과 기하학과 역학에 관한 독자적인 연구를 놓친다. 서로 다른 전통의 책을 읽고 그 안에서 새로운 질문을 찾아내는 일도 수학의 창작이다.

이 장에서는 그가 연구한 주제에서 출발하여 약수와 비와 평형을 오늘의 기호로 탐구한다. 특정 원문의 문장을 그대로 재현하는 활동은 아니다. 예를 들어 약수를 모두 더하는 작은 계산은 큰 수의 성질을 연구하기 전에 정의가 무엇을 포함하고 제외하는지 익히게 한다. 인물의 업적 목록과 실제로 따라 해 볼 수 있는 수학적 관계를 연결하면 역사 속 이름이 구체적인 문제로 다가온다.

12의 약수	1	2	3	4	6	12
진약수 합	16					

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

12의 양의 약수를 모두 적고 자기 자신을 제외한 합을 구하라.

풀이와 확인

양의 약수는 1과 2와 3과 4와 6과 12다. 자기 자신인 12를 빼면 합은 16이다. 뒤에서 사용할 진약수의 합은 수 자체를 제외한 양의 약수의 합이라는 약속을 따른다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

완전수의 균형

자신의 진약수를 더해 원래 수로 돌아온다.

6의 진약수는 1과 2와 3이다. 합이 6이므로 6을 완전수라고 한다. 28의 진약수는 1과 2와 4와 7과 14이며 합도 28이다. 여기서 완전하다는 말은 수의 성질에 붙인 이름이다. 다른 수보다 더 좋은 수라는 가치 판단을 뜻하지 않는다. 약수 목록을 빠뜨리지 않으려면 곱이 원래 수가 되는 짝을 순서대로 찾는 것이 편리하다.

28은 1×28과 2×14와 4×7로 나타난다. 작은 쪽 인수를 키우다가 두 인수가 교차하면 이미 찾은 짝을 다시 만나므로 멈출 수 있다. 제곱수에서는 가운데 약수가 중복되는 점에 주의해야 한다. 36의 약수 짝 6×6에서 6은 한 번만 적는다. 정의가 단순해 보여도 목록을 만드는 절차를 정확히 설계해야 합을 믿을 수 있다.

$$6 \rightarrow 1+2+3=6$$

$$28 \rightarrow 1+2+4+7+14=28$$

$$10 \rightarrow 1+2+5=8$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

10은 완전수인가? 약수의 합으로 설명하라.

풀이와 확인

10의 진약수는 1과 2와 5이며 합은 8이다. 원래 수보다 작으므로 완전수가 아니다. 완전수 여부는 약수의 개수가 아니라 진약수의 합과 원래 수의 비교로 판단한다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

서로를 만드는 두 수

친화수는 두 번의 약수 합 계산을 요구한다.

220의 진약수는 1과 2와 4와 5와 10과 11과 20과 22와 44와 55와 110이다. 모두 더하면 284다. 반대로 284의 진약수는 1과 2와 4와 71과 142이며 합은 220이다. 이렇게 서로 다른 두 수가 상대방의 진약수 합이 되는 쌍을 친화수라고 한다. 한쪽 방향만 확인해서는 정의를 만족했다고 말할 수 없다.

이 관계를 화살표로 그리면 220에서 284로 가고 다시 220으로 돌아온다. 완전수는 자기 자신으로 돌아오는 고리다. 진약수 합이라는 하나의 규칙이 서로 다른 길이의 순환을 만들 수 있다는 점이 흥미롭다. 여기서 화살표는 시간의 흐름이나 인과관계를 뜻하지 않고 정해진 계산을 한 번 적용했다는 뜻이다. 그림의 선이 어떤 연산을 나타내는지 명확히 읽자.



현대 재구성: 두 수의 진약수 합은 서로를 가리킨다.

탐구

284의 진약수 합을 묶어 계산하여 확인하라.

풀이와 확인

1+2+4=7이고 71+142=213이다. 두 합을 더하면 220이다. 284=4×71이므로 약수를 1과 2와 4에 각각 1 또는 71을 곱해 빠짐없이 만들 수 있다.

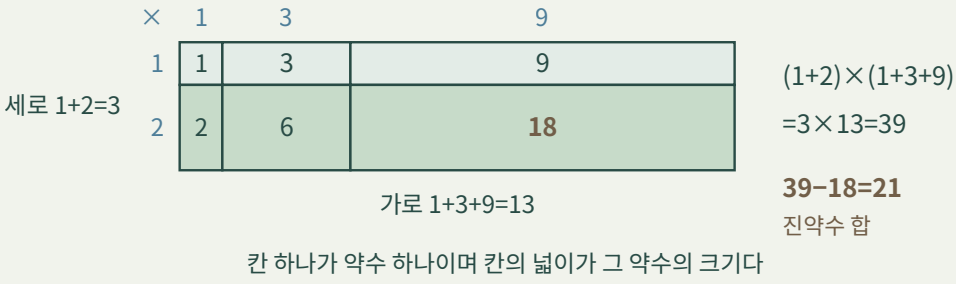
[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

약수의 합을 곱으로 묶기

소인수 분해는 긴 목록을 짧은 식으로 바꾼다.

20=2^2×5이므로 양의 약수는 2의 지수를 0부터 2까지 고르고 5의 지수를 0 또는 1로 골라 만든다. 약수의 전체 합은 (1+2+4)(1+5)=7×6=42다. 여기에는 20 자체도 들어 있으므로 진약수 합은 42−20=22다. 괄호를 전개하면 1과 5와 2와 10과 4와 20이 정확히 한 번씩 나타난다.

이 방법에서 서로 다른 소인수의 지수를 독립적으로 고를 수 있다는 점이 중요하다. 20을 2×10으로 나누어 (1+2)(1+10)이라고 계산하면 10 안에 이미 2가 들어 있어 약수 선택의 구조가 맞지 않는다. 편리한 공식도 조건을 확인하지 않고 적용하면 오류를 만든다. 작은 수에서는 약수 목록을 직접 적어 공식과 비교하면 원리를 분명하게 이해할 수 있다.



18의 약수 여섯 개가 넓이 3×13인 직사각형을 빈틈없이 채운다.

탐구

$18=2\times3^2$의 양의 약수 합과 진약수 합을 구하라.

풀이와 확인

전체 합은 $(1+2)(1+3+9)=3\times13=39$다. 여기에 포함된 18을 빼면 진약수 합은 21이다. 실제 진약수 1과 2와 3과 6과 9를 더해도 21이다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

규칙의 가정이 빠지면

친화수를 만드는 공식에는 소수 조건이 붙는다.

타비트의 친화수 정리를 오늘의 기호로 나타내면 다음과 같다. n이 1보다 큰 정수일 때 $p=3\times2^{n-1}-1$과 $q=3\times2^n-1$과 $r=9\times2^{2n-1}-1$이 모두 소수라면 2^npq와 2^nr은 친화수다. 이 식은 모든 친화수를 만들어 낸다는 뜻이 아니다. 주어진 조건이 성립할 때 특정 쌍을 얻는 충분조건이다.

n=2를 넣으면 p=5와 q=11과 r=71이 나온다. 세 수가 모두 소수이므로 $4\times5\times11=220$과 $4\times71=284$를 얻는다. n=3에서는 p=11과 q=23은 소수지만 $r=287=7\times41$이므로 조건을 만족하지 않는다. 공식의 모양만 보고 아무 n이나 넣는 것과 정리의 가정을 확인하는 것은 다르다.

$$n=2 \rightarrow 5와\ 11과\ 71$$
$$4\times5\times11=220$$
$$4\times71=284$$
$$n=3 \rightarrow 287=7\times41$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

n=3에서 공식이 친화수라고 보장하지 않는 까닭을 설명하라.

풀이와 확인

필요한 세 소수 조건 가운데 r의 조건이 실패한다. 287은 7×41로 분해된다. 정리를 적용할 수 없다는 말은 계산식 자체가 금지된다는 뜻이 아니라 그 결과에 대한 결론을 이 정리로 보장할 수 없다는 뜻이다.

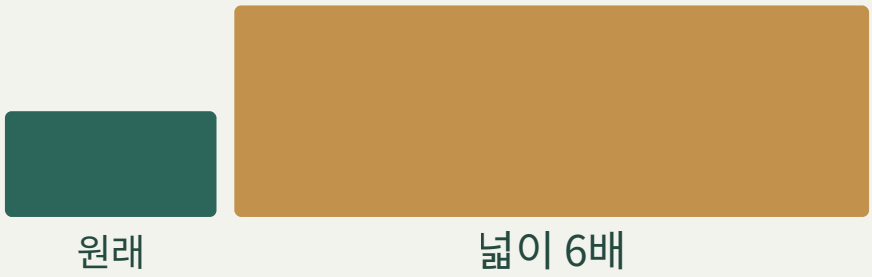
[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

비를 이어 붙이는 계산

두 변화가 겹치면 비의 곱이 나타난다.

도형의 가로를 원래의 3/2배로 늘린 뒤 다시 4/3배로 늘리면 최종 길이는 원래의 두 배다. $3/2\times4/3=2$이기 때문이다. 비를 합성하는 계산은 변화의 단계를 하나로 묶는다. 첫 단계가 50퍼센트 증가이고 두 번째가 약 33.3퍼센트 증가라고 해서 두 증가율을 더해 전체 증가율을 구할 수는 없다. 두 번째 변화가 적용되는 기준 길이가 이미 달라졌기 때문이다.

길이와 넓이의 변화도 구별해야 한다. 정사각형의 모든 변을 두 배로 늘리면 넓이는 네 배다. 가로와 세로가 각각 두 배가 되어 두 변화가 곱해진다. 비의 계산을 정확히 사용하려면 무엇의 비인지 먼저 정하고 같은 종류의 양끼리 비교해야 한다. 타비트가 다룬 비의 연구와 연결되는 질문을 현대적인 확대 도형으로 살펴보는 활동이다.



현대 재구성: 가로와 세로의 확대율을 곱한다.

탐구

그림을 가로 3배와 세로 2배로 확대하면 넓이와 모양은 어떻게 달라지는가?

풀이와 확인

넓이는 3×2=6배가 된다. 가로와 세로의 확대율이 서로 다르므로 일반적으로 원래 그림과 닮은 모양은 아니다. 넓이의 배수와 닮음 여부는 서로 다른 판단이다.

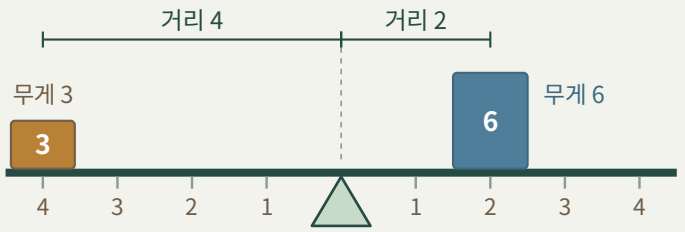
[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

지렛대에서 만나는 곱

평형은 무게만 비교하는 문제가 아니다.

이상적인 가벼운 막대가 한 점을 중심으로 놓여 있다고 하자. 왼쪽에는 무게 3인 물체를 받침점에서 거리 4에 놓고 오른쪽에는 무게 6인 물체를 거리 2에 놓는다. 두 쪽의 무게와 거리의 곱이 모두 12이므로 평형을 이룬다. 이는 막대 자체의 무게와 마찰을 무시한 현대적 모형이다. 타비트의 역학 연구를 읽는 출발점으로 이러한 조건을 분명히 적을 수 있다.

무거운 물체를 받침점 가까이 옮기면 가벼운 물체와 균형을 맞출 수 있다. 그러나 거리가 같다면 무게도 같아야 한다. 한쪽 물체를 두 배 멀리 옮기면 그쪽 무게를 절반으로 줄여야 같은 곱을 유지한다. 관찰 결과를 설명하는 식이 어떤 이상화 아래에서 성립하는지 살피면 실제 기구와 수학적 모형을 혼동하지 않게 된다.



왼쪽 3×4=12와 오른쪽 6×2=12가 같아 평형을 이룬다

받침점에서 거리 4의 무게 3과 거리 2의 무게 6이 평형을 이룬다.

탐구

왼쪽 무게 8이 거리 3에 있다. 오른쪽 거리 4에 놓을 무게를 구하라.

풀이와 확인

왼쪽의 곱은 8×3=24다. 오른쪽 무게를 w라 하면 4w=24이므로 w=6이다. 막대 자체가 무겁거나 받침점이 비대칭이면 그 영향도 추가로 계산해야 한다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

친화수 정리의 조건이 계산을 만드는 과정

공식을 검산하는 데서 한 걸음 더 나아가 약수 합이 왜 맞물리는지 살핀다.

타비트의 정리에서 $k=2^n$으로 놓으면 $p=3k/2-1$과 $q=3k-1$과 $r=9k^2/2-1$이다. $n>1$이고 세 수가 모두 소수라는 조건을 유지한다. 그러면 p와 q와 r은 홀수이며 k와 공통 소인수를 갖지 않는다. 이 성질 때문에 약수 합을 독립적인 곱으로 나눌 수 있다.

k의 약수 합은 $1+2+4+\cdots+k=2k-1$이다. $A=kpq$의 전체 약수 합은 $(2k-1)(p+1)(q+1)$이다. 두 괄호의 곱은 $(3k/2)(3k)=9k^2/2$이므로 전체 합은 $(2k-1)9k^2/2$로 정리된다.

$B=kr$의 전체 약수 합도 $(2k-1)(r+1)$이다. $r+1=9k^2/2$이므로 두 수의 전체 약수 합이 같다. 한편 $pq+r$을 전개하면 $9k^2-9k/2$이다. 따라서 $A+B=k(pq+r)=(2k-1)9k^2/2$가 되어 공통 약수 합과 일치한다.

전체 약수 합에서 자기 자신 A를 빼면 B가 남고 B를 빼면 A가 남는다. 이것이 친화수 조건이다. 세 소수 조건은 장식이 아니라 약수 합을 곱으로 쓰는 논증의 핵심이다. 여기의 문자 전개는 역사적 정리를 확인하는 현대 증명이며 원문의 표현을 그대로 옮긴 것은 아니다.

n=2의 검산	값
k와 p와 q와 r	4와 5와 11과 71
두 수 A와 B	220과 284
공통 전체 약수 합	504
진약수 합	504−220=284

탐구

n=1을 허용하면 왜 논증을 그대로 사용할 수 없는가?

풀이와 확인

n=1이면 k=2이며 p=2가 된다. k와 p가 서로소가 아니므로 약수 합을 (1+2)(1+2)로 곱하면 약수 2를 중복해 센다. 정리의 n>1 조건은 이 중복을 막는 역할도 한다.

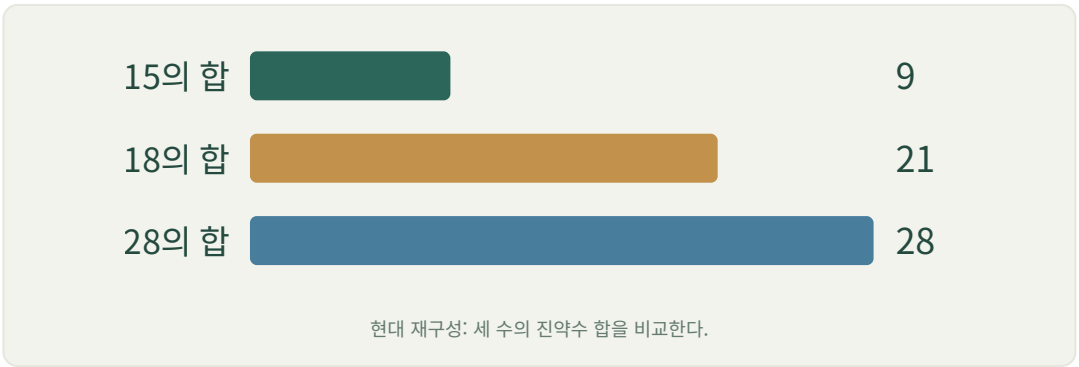
[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

한 수를 세 가지로 분류하기

같은 정의를 적용하여 표를 완성한다.

진약수 합이 원래 수보다 작으면 부족수라고 하고 같으면 완전수라고 하며 크면 과잉수라고 한다. 8의 진약수 합은 1+2+4=7이어서 부족수다. 6은 완전수이고 12는 진약수 합이 16이어서 과잉수다. 이름의 느낌보다 비교 조건을 먼저 기억하면 새로운 수에도 같은 분류를 일관되게 적용할 수 있다.

분류표를 만들 때에는 수 자체를 약수 합에 넣지 않았는지 확인한다. 자기 자신까지 더하면 모든 1보다 큰 수에서 합이 원래 수보다 커져 구분이 무의미해진다. 또한 홀수와 짝수라는 분류와 이 분류는 기준이 다르다. 두 분류가 관계를 가질 수는 있지만 한쪽 이름만 보고 다른 쪽 결과를 결정하지 않는다. 작은 사례를 모은 뒤 일반적인 명제를 세우고 반례를 찾아보자.



현대 재구성: 세 수의 진약수 합을 비교한다.

탐구

15와 18과 28을 세 종류로 분류하라.

풀이와 확인

15는 진약수 합 1+3+5=9이므로 부족수다. 18은 합 21이므로 과잉수다. 28은 합 28이므로 완전수다. 각 결과에 약수 목록이나 합 계산을 붙여 다른 사람이 확인할 수 있게 한다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

이슬람 아랍관 / 49

빛과 기하학의 만남

이븐 알하이삼의 질문

본다는 현상을 기하와 관찰로 함께 살핀다.

이븐 알하이삼은 광학과 기하학과 수론을 연구했다. 그의 광학 연구는 빛이 물체에서 눈으로 들어오는 과정과 반사 등의 현상을 다루었다. 이 장에서는 그의 저술 전체를 요약하기보다 빛의 길을 선으로 나타낼 때 어떤 수학이 필요한지 탐구한다. 현대의 광선 그림은 이해를 돕는 모형이며 실제 빛의 모든 성질을 한꺼번에 나타내지는 않는다.

평면거울 앞의 광선을 그릴 때 먼저 거울과 수직인 기준선을 세운다. 들어오는 선과 이 기준선이 이루는 각이 입사각이다. 거울 표면과 이루는 각과 혼동하면 수치가 달라진다. 같은 그림에서도 기준을 어떻게 정했는지에 따라 각의 이름이 달라지므로 설명과 표시를 함께 확인해야 한다. 물리적 주장과 그것을 표현하는 기하학적 약속을 구별하는 것이 첫 단계다.

거울과 법선: 90°
표면과 광선: 30°
법선과 광선: 60°

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

광선이 거울 표면과 30°를 이루면 법선과 이루는 각은 얼마인가?

풀이와 확인

거울 표면과 법선은 직각을 이루므로 90°−30°=60°다. 입사각을 법선 기준으로 정의했다면 입사각은 60°다. 기준선을 적지 않은 30°라는 값만으로는 어떤 각인지 알 수 없다.

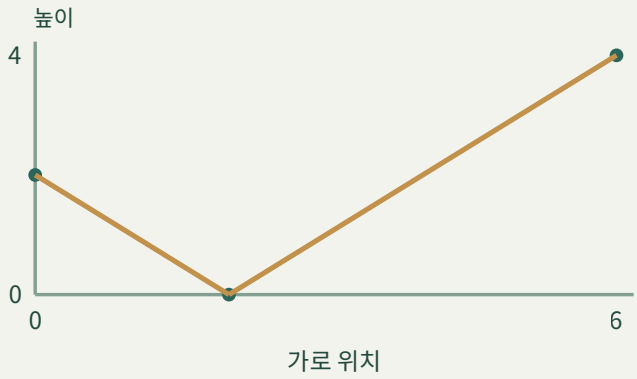
[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

평면거울의 대칭

반사점을 찾는 문제를 직선 문제로 바꾼다.

수평인 거울을 높이 0의 선으로 두자. 점 A는 가로 위치 0과 높이 2에 있고 점 B는 가로 위치 6과 높이 4에 있다. B를 거울 아래로 대칭 이동한 B′는 가로 위치 6과 높이 −4에 있다. A와 B′를 직선으로 이으면 거울과 만나는 점이 반사 경로를 결정한다. 두 높이 2와 4의 비가 1:2이므로 가로 길이 6도 2와 4로 나뉜다.

반사점은 가로 위치 2다. A에서 거울까지의 기울기 크기는 2/2=1이며 거울에서 B까지도 4/4=1이다. 따라서 법선을 기준으로 한 두 각이 같다. 거울 아래의 점은 실제 광원이 아니라 계산을 단순하게 만드는 보조점이다. 가상의 점을 도입해도 원래 문제의 조건과 어떻게 대응하는지 설명할 수 있다면 유용한 풀이가 된다.



현대 재구성: 평면거울 위의 두 광선 경로

탐구

A의 높이가 3이고 B의 높이도 3이면 반사점의 가로 위치는 어디인가?

풀이와 확인

두 높이가 같으므로 가로 거리 6을 반씩 나눈 위치 3이다. 양쪽 기울기 크기가 3/3=1로 같다. 이 결론은 거울이 수평인 직선이라는 설정에 따른다.

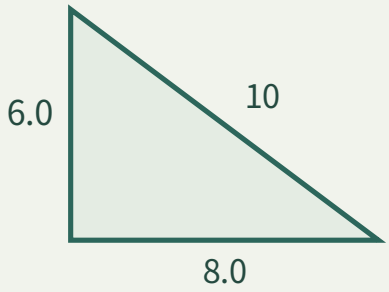
[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

가장 짧은 꺾인 길

대칭 이동은 길이의 비교도 보존한다.

앞의 반사 문제에서 거울 위의 임의의 점 P를 고르면 A에서 P를 거쳐 B까지의 길이는 AP+PB다. B를 대칭 이동한 B′에 대해서 PB=PB′이므로 이 합은 AP+PB′과 같다. 두 점 A와 B′ 사이의 직선이 가장 짧으므로 P가 그 직선 위에 있을 때 전체 길이가 최소가 된다. 거울 반사와 최단 경로가 같은 그림에서 만난다.

하지만 이 설명을 모든 빛의 현상에 그대로 적용하면 안 된다. 서로 다른 매질을 지나는 빛에서는 속도가 달라져 거리만 비교해서는 충분하지 않다. 이 페이지의 결론은 같은 매질 안의 평면거울 모형에 관한 것이다. 증명의 범위를 적으면 간결한 도형 풀이가 어디까지 유효한지 분명해진다. 반사점의 위치를 여러 곳으로 움직여 합이 어떻게 변하는지 수치로도 살펴볼 수 있다.



현대 재구성: 대칭점까지의 직선 길이가 반사 경로의 합이다.

탐구

높이가 모두 3인 두 점의 가로 거리가 8일 때 최소 반사 경로의 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

대칭점까지의 가로 차이는 8이고 세로 차이는 6이다. 직선 길이는 $\sqrt{(8^2+6^2)}=10$이다. 반사점은 가운데이므로 길이 5인 두 구간으로 나뉜다.

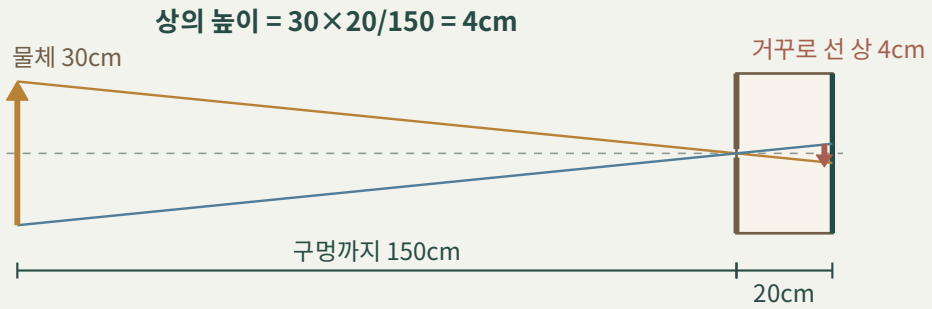
[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

작은 구멍의 뒤집힌 상

닮은 삼각형은 상의 크기를 예측한다.

어두운 상자의 작은 구멍 앞에 높이 30cm인 물체가 구멍에서 150cm 떨어져 있다고 하자. 구멍 뒤쪽 20cm에 스크린을 놓으면 물체 꼭대기에서 온 빛이 아래쪽에 도달한다. 상은 거꾸로 맺힌다. 광선이 곧게 간다는 이상화 아래에서 두 삼각형은 닮았으므로 상의 높이와 물체 높이의 비는 20/150이다. 상의 높이는 4cm다.

구멍을 크게 만들면 더 많은 빛이 들어와 밝아질 수 있지만 같은 물체의 점에서 나온 빛이 넓은 영역에 퍼져 상이 흐려질 수 있다. 구멍을 무조건 작게 만들면 언제나 더 좋다는 결론도 실제 광학에서는 적절하지 않다. 여기서는 기하학적으로 설명할 수 있는 크기와 뒤집힘에 집중한다. 밝기와 선명도에는 이 모형에서 생략한 조건도 작용한다.



구멍에서 교차한 광선이 만드는 두 닮은 삼각형과 4cm의 뒤집힌 상

탐구

스크린 거리를 40cm로 바꾸면 상의 높이는 어떻게 되는가?

풀이와 확인

물체 거리와 높이가 같다면 상의 높이는 30×40/150=8cm다. 스크린 거리가 두 배가 되면 상의 높이도 두 배가 된다. 물체와 구멍과 스크린의 배치가 유지된다는 조건이 필요하다.

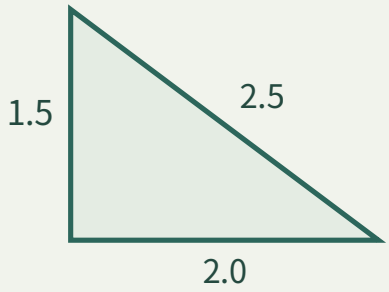
[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

그림자에서 높이 구하기

같은 시각의 햇빛은 닮음의 조건을 제공한다.

수직으로 세운 막대의 높이가 1.5m이고 그림자가 2m라고 하자. 같은 평평한 땅 위의 기둥 그림자가 12m이면 기둥 높이를 h라 할 때 h/12=1.5/2다. 따라서 h=9m다. 태양빛을 서로 평행한 선으로 보고 두 물체가 수직이며 지면이 수평이라고 가정했기 때문에 삼각형의 각이 대응한다. 이 문제는 역사적 실측 기록이 아닌 현대 수업용 재구성이다.

막대 그림자는 오전에 재고 기둥 그림자는 오후에 재면 같은 비를 사용할 수 없을 수 있다. 지면이 기울거나 기둥이 비스듬해도 그림이 달라진다. 계산 자체가 쉬울수록 측정 조건을 소홀히 하기 쉽다. 숫자를 식에 넣기 전에 닮음을 보장하는 각이 같은지 확인해야 한다. 비례식은 모형의 조건이 갖추어진 뒤에 쓰는 도구다.



현대 재구성: 기준 막대와 그림자가 만드는 직각삼각형

탐구

막대 그림자를 2.1m로 잘못 읽으면 같은 기둥의 높이는 얼마로 계산되는가?

풀이와 확인

12×1.5/2.1은 약 8.57m다. 참값 9m보다 약 0.43m 작다. 분모로 들어가는 기준 그림자 길이를 크게 읽으면 계산된 높이는 작아진다.

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

곡면거울은 왜 어려운가

표면의 기울기가 반사점에 따라 달라진다.

평면거울에서는 어디에서나 법선의 방향이 같다. 원형 단면을 가진 거울에서는 각 점의 법선이 원의 중심을 향하므로 반사점을 옮기면 법선도 돌아간다. 이븐 알하이삼이 연구한 거울 문제에는 주어진 광원과 관찰자의 위치에 맞는 곡면의 반사점을 찾는 어려움이 있다. 평면거울의 대칭점을 한 번 그리는 방식만으로 모두 해결되지는 않는다.

이를 탐구하려면 원 위에 후보 점을 몇 개 고르고 각 점에서 중심으로 선을 그린다. 광원에서 오는 선과 관찰자로 가는 선이 그 법선을 기준으로 같은 각을 이루는지 비교한다. 그림으로 비슷해 보인다는 것과 정확히 조건을 만족한다는 것은 다르다. 이 페이지는 수치 풀이의 출발점을 보여 주며 역사적 해결법 전체를 재현하지는 않는다.



현대 재구성: 원 위의 위치마다 법선의 방향이 달라진다.

탐구

원의 중심에서 반지름 방향으로 들어온 광선이 표면에 수직으로 닿으면 반사 방향은 어떠한가?

풀이와 확인

입사각이 0°이므로 반사각도 0°다. 이상적인 거울 모형에서 광선은 같은 선을 따라 되돌아간다. 중심을 향하는 선이 그 점의 법선이라는 원의 성질을 사용했다.

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

관찰값을 표로 남기는 이유

한 번의 결과보다 반복된 비교가 더 많은 것을 말한다.

반사 실험을 현대적으로 구성하여 입사각을 20°와 40°와 60°로 바꾼다고 하자. 측정한 반사각이 각각 21°와 39°와 61°라면 이론값과의 차이는 1°와 −1°와 1°다. 차이가 작다는 사실만으로 측정이 완벽하다고 말할 수 없다. 각도 눈금의 간격과 광선의 두께와 법선의 위치를 함께 기록해야 결과의 의미를 판단할 수 있다.

반복 측정의 평균은 우연한 흔들림을 줄이는 데 도움이 될 수 있지만 눈금판이 항상 2° 기울어진 문제를 저절로 고쳐 주지는 않는다. 일정한 방향으로 생기는 오차와 들쑥날쑥한 오차를 구별하자. 좋은 표에는 관찰값뿐 아니라 예측값과 차이와 측정 조건이 들어간다. 수학은 관찰을 대체하는 것이 아니라 관찰을 비교 가능한 형태로 정리하는 데 쓰인다.

입사	관찰	차이
20°	21°	+1°
40°	39°	−1°
60°	61°	+1°

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

40° 입사에서 39°와 40°와 41°를 측정했다면 평균은 얼마인가?

풀이와 확인

합이 120°이므로 평균은 40°다. 평균이 이론값과 일치하더라도 개별 측정에는 1°의 차이가 있었다. 평균과 측정의 퍼짐을 함께 제시해야 결과를 과장하지 않는다.

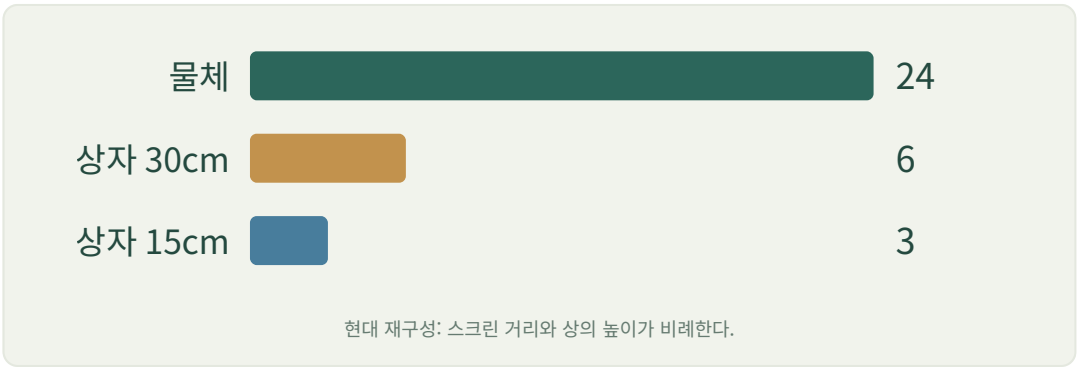
[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

광학 탐구의 해설

각의 기준과 길이의 비를 따로 확인한다.

물체 높이 24cm와 구멍까지 거리 120cm와 스크린 거리 30cm가 주어진 상자 문제를 정리해 보자. 상의 높이는 24×30/120=6cm다. 물체의 꼭대기와 구멍과 상의 아래쪽을 잇는 선을 그리면 상이 뒤집히는 이유도 보인다. 답을 6cm라고만 적기보다 어느 두 길이의 비를 사용했는지 설명해야 풀이가 완성된다.

같은 활동지의 거울 문제에서는 표면 기준 각과 법선 기준 각을 구별한다. 표면과 25°라면 법선과는 65°다. 두 문제는 모두 선과 각을 사용하지만 하나는 닮음의 비를 묻고 다른 하나는 반사의 각을 묻는다. 문제의 그림이 비슷해 보인다는 이유로 같은 공식을 넣지 않는다. 먼저 보존되는 관계가 길이의 비인지 각의 크기인지 말로 적어 보자.



현대 재구성: 스크린 거리와 상의 높이가 비례한다.

탐구

상자 길이를 절반으로 줄였을 때 상의 높이와 뒤집힘은 어떻게 달라지는가?

풀이와 확인

스크린 거리가 15cm가 되므로 상의 높이는 3cm다. 빛이 구멍에서 교차하는 배치는 유지되므로 상은 여전히 뒤집힌다. 크기의 변화와 방향의 변화는 서로 다른 성질이다.

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham

이슬람 아랍관 / 50

하이얌과 곡선의 해

시인이라는 이름 너머

삼차방정식은 곡선의 만남으로 읽을 수 있다.

오마르 하이얌은 시와 함께 수학과 천문학의 역사에서도 중요한 인물이다. 그는 삼차방정식의 여러 형식을 분류하고 원뿔곡선의 교점을 이용하는 기하학적 풀이를 연구했다. 여기서 오늘의 좌표축과 문자식을 사용해 그 생각의 한 측면을 살펴본다. 현대 기호가 편리하더라도 역사적 원문이 같은 형식으로 쓰였다고 생각해서는 안 된다.

$x^3=8$은 한 변을 세 번 곱한 값이 8인 길이를 묻는다. $x=2$가 답이라는 사실은 정육면체의 부피로 확인할 수 있다. 그러나 $x^3+x=10$처럼 다른 항이 함께 있으면 세제곱근만 구해서 끝낼 수 없다. 방정식의 항을 어떤 도형의 조건으로 나눌지 고민하는 순간 대수와 기하학이 서로 만난다.

$$x^3=8 \rightarrow x=2$$

$$x^3+x=10 \rightarrow x=2$$

같은 해가 같은 문제를 뜻하지는 않는다.

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

$x^3+x=10$에 $x=2$를 넣어 확인하고 $x^3=10$과의 차이를 설명하라.

풀이와 확인

$2^3+2=8+2=10$이므로 $x=2$는 앞 식의 해다. $x^3=10$에는 추가된 x가 없어서 2를 넣으면 8만 나온다. 항 하나의 차이가 요구하는 길이를 바꾼다.

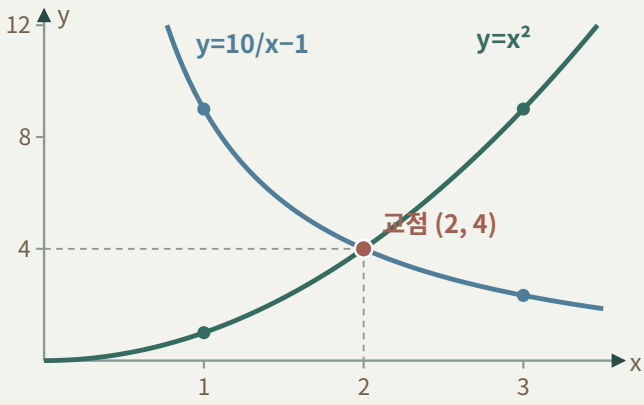
[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

두 곡선으로 나누어 보기

하나의 식을 동시에 만족해야 할 조건으로 바꾼다.

$x^3+x=10$을 x가 0보다 큰 범위에서 생각하자. 양쪽을 x로 나누면 $x^2+1=10/x$다. 이제 $y=x^2$와 $y=10/x-1$이라는 두 곡선을 그리면 같은 x에서 같은 y를 갖는 교점이 원래 식의 해를 준다. $x=2$일 때 두 y값은 모두 4다. 한쪽은 포물선이고 다른 쪽은 쌍곡선에서 옮겨진 곡선이다.

이는 하이얌의 특정 도해를 복제한 것이 아니라 교점 풀이의 원리를 보여 주는 현대 재구성이다. 두 식에 보조 문자 y를 넣어 조건을 분리한 뒤 공통으로 만족하는 점을 찾는다. x로 나누었기 때문에 $x=0$을 따로 확인해야 한다. 원래 식에 0을 넣으면 $0=10$이 되어 해가 아니므로 이번에는 해를 잃지 않는다.



x=1에서 $1 < 9$

x=2에서 $4 = 4$

x=3에서 $9 > 7/3$

$x^2+1=10/x$
곧 $x^3+x=10$

포물선 $y=x^2$와 곡선 $y=10/x-1$은 $x=2$에서 높이 4로 만난다.

탐구

x=1과 x=3에서 두 곡선의 높이를 비교하라.

풀이와 확인

x=1에서는 1과 9가 나와 첫 곡선이 낮다. x=3에서는 9와 7/3이 나와 첫 곡선이 높다. 두 곡선의 연속성을 이용하면 그 사이에서 교차함을 예상할 수 있다.

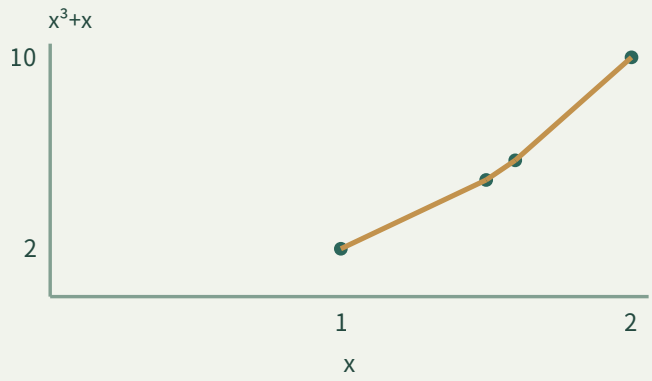
[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

표를 좁히며 근 찾기

정확한 정수가 나오지 않아도 범위를 줄일 수 있다.

$x^3+x=5$의 양의 해를 찾아보자. x=1이면 왼쪽은 2이고 x=2이면 10이다. 따라서 해는 1과 2 사이에 있다. x=1.5를 넣으면 3.375+1.5=4.875로 아직 5보다 작다. x=1.6에서는 4.096+1.6=5.696이므로 해는 1.5와 1.6 사이로 좁혀진다. 표의 각 행은 추측을 검산 가능한 범위로 바꾸는 역할을 한다.

양의 x가 커지면 x^3도 x도 커지므로 왼쪽 전체가 증가한다. 따라서 이 구간에 있는 해는 하나뿐이다. 값이 양쪽에서 목표를 끼운다는 사실과 해가 하나라는 사실은 서로 다른 근거를 필요로 한다. 복잡한 방정식에서는 부호가 바뀌는 구간 안에 해가 여러 개 있을 수도 있으므로 증가 여부를 따로 살펴야 한다.



현대 재구성: 점 사이의 선은 표를 읽는 보조선이다.

탐구

x=1.51에서 왼쪽 값을 구하고 하한을 더 좁혀라.

풀이와 확인

$1.51^3=3.442951$이므로 합은 4.952951이다. 아직 5보다 작아 해는 1.51보다 크다. 1.6보다 작다는 상한과 함께 적으면 $1.51<x<1.6$이다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

식에 남은 차이 읽기

작은 잔차와 정확한 해는 같은 말이 아니다.

$x^3+x=5$의 후보로 1.516을 택하면 왼쪽은 약 5.000156이다. 목표값과의 차이는 약 0.000156이다. 이 차이를 잔차라고 부를 수 있다. 잔차가 작으면 좋은 근사일 가능성이 있지만 그 숫자가 정확한 해라는 뜻은 아니다. 반올림한 자릿수와 실제 해의 범위를 구별하여 써야 한다.

또한 잔차의 크기만으로 x의 오차가 언제나 같은 크기라고 말할 수는 없다. 식이 x에 따라 빠르게 변하는 곳에서는 작은 x 변화가 큰 잔차를 만들며 완만한 곳에서는 반대 현상이 생긴다. 이번 함수는 양의 범위에서 증가하므로 후보 값의 위아래에서 다시 계산하면 해를 둘러싸는 구간을 얻을 수 있다. 근사값을 제시할 때 검산값까지 남기면 신뢰 범위를 판단하기 쉽다.

$$\text{후보 } x=1.516$$

$$x^3+x\approx 5.000156$$

$$\text{잔차}\approx 0.000156$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

후보 값의 계산 결과가 4.999라면 후보가 참된 양의 해보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

양의 범위에서 x^3+x가 증가하므로 목표 5보다 작은 값을 만든 후보는 참된 해보다 작다. 함수가 증가한다는 조건 없이 잔차의 부호만으로 같은 결론을 내릴 수는 없다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

해가 여러 개 생기는 식

세제곱이라는 이름만으로 해의 개수를 정하지 않는다.

$(x-1)(x-2)(x-3)=0$을 전개하면 $x^3-6x^2+11x-6=0$이다. 곱이 0이 되려면 적어도 하나의 인수가 0이므로 $x=1$과 $x=2$와 $x=3$이 모두 해다. 이 현대적인 예는 삼차식이 서로 다른 실근 세 개를 가질 수 있음을 보여 준다. 앞의 $x^3+x=5$처럼 양의 범위에서 줄곧 증가하는 식과는 형태가 다르다.

역사적 저술을 읽을 때에는 당시 어떤 계수와 어떤 해의 범위를 분류했는지 확인해야 한다. 오늘날의 실수와 복소수 체계를 한꺼번에 소급하면 옛 분류의 목적이 가려질 수 있다. 동시에 현대 예제를 통해 해가 여럿일 수 있다는 구조를 탐구하는 것은 가능하다. 역사적 주장과 수업을 위해 새로 만든 예제의 역할을 분리해서 읽자.

$$(x-1)(x-2)(x-3)=0$$
$$x^3-6x^2+11x-6=0$$
$$\text{해는 } 1\text{과 } 2\text{와 } 3$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

x=2를 전개된 식에 넣어 검산하라.

풀이와 확인

8−24+22−6=0이다. 인수 형태에서는 2−2라는 0인 인수가 있어 바로 확인할 수 있다. 같은 다항식도 어떤 표현을 택하는가에 따라 계산의 편의가 달라진다.

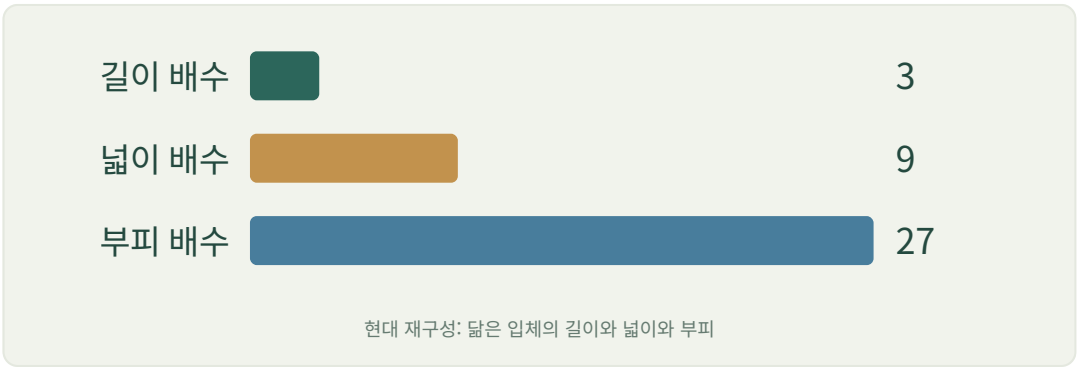
[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

길이에서 부피로 옮길 때

세제곱은 확대율을 세 번 곱한다.

정육면체의 한 변을 두 배로 늘리면 부피는 여덟 배가 된다. 한 변이 3인 상자의 부피는 27이고 한 변이 6인 상자의 부피는 216이다. 부피를 두 배로 만들고 싶다면 변을 두 배로 만드는 것이 아니라 세제곱이 2가 되는 배수를 찾아야 한다. 그 배수는 약 1.26이다. 길이의 변화와 부피의 변화는 다른 비율로 연결된다.

$1.26^3=2.000376$이므로 1.26은 정확한 세제곱근이 아니라 가까운 값이다. 작은 오차가 부피 계산에서 어떻게 나타나는지 확인할 수 있다. 포장 상자나 모형을 확대할 때도 이 관계가 중요하다. 이번 예는 삼차방정식이 추상적인 문자 놀이에 머무르지 않고 길이와 공간의 조건에서 생긴다는 점을 보여 준다.



현대 재구성: 닮은 입체의 길이와 넓이와 부피

탐구

부피를 27배로 늘리려면 닮은 정육면체의 변을 몇 배로 해야 하는가?

풀이와 확인

$3^3=27$이므로 변을 3배로 하면 된다. 겉넓이는 변의 배수를 두 번 곱하므로 9배다. 부피와 겉넓이가 같은 배수로 변하지 않는다는 점도 함께 확인한다.

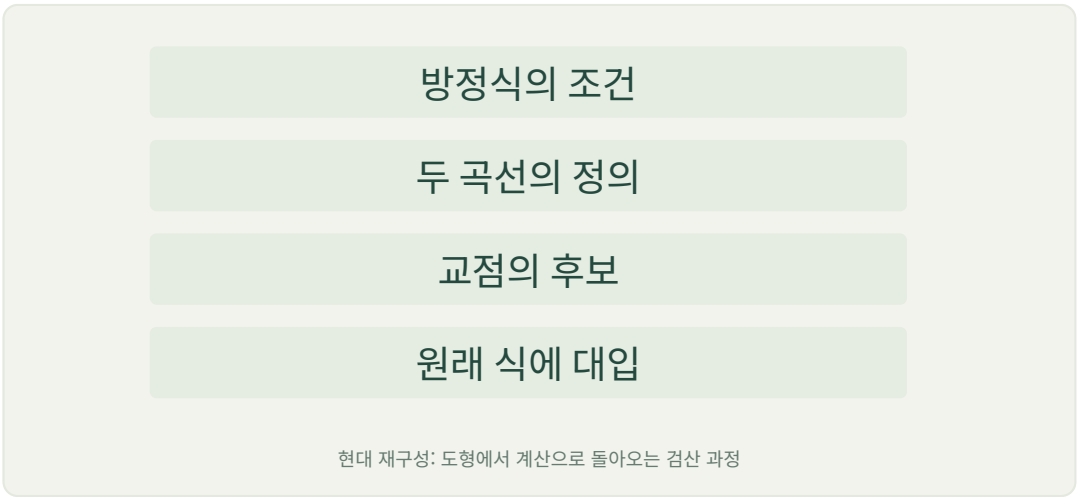
[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

도형 풀이의 정확성과 그림

그림의 교차점은 계산 조건으로 다시 읽어야 한다.

종이에 그린 두 곡선이 x=2 근처에서 만난다고 보이더라도 연필선의 두께 때문에 정확한 좌표를 읽기 어렵다. 도형 풀이가 수학적 해법이 되려면 그 점이 왜 요구한 관계를 만족하는지 증명해야 한다. 그림은 조건의 구조를 드러내고 식은 그 조건을 확인하는 또 다른 언어가 된다. 눈대중으로 읽은 값과 증명으로 정해진 값을 같은 수준으로 다루지 않는다.

좌표 눈금을 두 배 촘촘하게 그리면 시각적으로 더 자세히 읽을 수 있지만 곡선 자체를 부정확하게 그렸다면 그 오차는 남는다. 계산으로 구한 표의 점도 반올림되어 있을 수 있다. 따라서 그림 아래에는 현대 재구성인지와 사용한 방정식과 근사 여부를 표시하는 것이 좋다. 독자는 도해의 아름다움과 별개로 계산의 근거를 따라갈 수 있어야 한다.



탐구

교점의 x좌표를 2.0으로 읽었을 때 원래 식에 대입하는 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

눈금에서 읽은 근삿값이 실제 조건에 얼마나 가까운지 확인하기 위해서다. 대입 결과가 맞지 않으면 그림의 해상도나 읽기 방법을 개선해야 한다. 교차하는 듯한 모양만으로 등식이 증명되지는 않는다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

교점에서 생긴 가짜 후보를 걸러 내기

보조 곡선의 교점이 모두 원래 방정식의 해가 되는 것은 아니다.

양의 해를 구하는 식 $x^3+x=10$을 두 곡선으로 나타내는 또 다른 방법을 만든다. 먼저 $y=x^2$라는 포물선을 택한다. 여기에 $y^2+x^2=10x$라는 원을 함께 사용한다. 두 번째 식은 $(x-5)^2+y^2=25$이므로 중심의 가로 위치가 5이고 반지름이 5인 원이다.

포물선의 관계를 원에 넣으면 $x^4+x^2=10x$가 된다. 왼쪽과 오른쪽을 한쪽으로 모으면 $x(x^3+x-10)=0$이다. 따라서 교점에는 원래 식의 해뿐 아니라 $x=0$이라는 새 후보가 들어간다. 실제로 원과 포물선은 원점에서도 만나지만 0^3+0은 10이 아니다.

$x>0$이라는 조건을 유지하면 x로 나눌 수 있어 원래 식으로 돌아간다. 양의 범위에서는 x^3+x가 엄격하게 증가하므로 원래 식의 해는 하나다. $x=2$를 넣으면 $8+2=10$이고 $y=4$다. 원에서도 $4^2+2^2=20=10\times2$가 되어 같은 교점을 확인한다.

이 구성은 하이얌의 특정 원도를 재현한 것이 아니라 원과 포물선으로 대수 조건을 나누는 현대 탐구다. 그림에 교점이 보일 때에는 허용 범위를 확인하고 원래 식에 대입해야 한다. 보조 대상을 도입해 문제를 쉽게 만들수록 그 과정에서 추가된 조건과 후보를 기록한다.

후보	포물선과 원	원래 식
x=0과 y=0	두 식 만족	0≠10
x=2와 y=4	두 식 만족	8+2=10

탐구

$x^3+4x=20$을 $y=x^2$와 $y^2+4x^2=20x$로 나누면 어떤 후보를 따로 걸러야 하는가?

풀이와 확인

대입하면 $x(x^3+4x-20)=0$이다. $x=0$이 보조 관계에는 들어가지만 원래 식의 해가 아니다. 나머지 양의 후보만 원래 식에 대입해 검산한다. 두 번째 곡선은 원이 아니라 타원이다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

삼차방정식 활동의 해설

후보와 범위와 해의 개수를 구분하여 쓴다.

$x^3+2x=12$를 양의 범위에서 풀면 $x=2$가 정확한 해다. $2^3+2\times2=12$이기 때문이다. x가 커질 때 x^3과 $2x$가 모두 커지므로 양의 해는 하나다. $y=x^2$와 $y=12/x-2$를 비교해도 $x=2$에서 $y=4$라는 같은 교점을 얻는다. 세 가지 관점이 서로 일치하는지 확인하는 것이 이번 장의 종합 활동이다.

답을 2라고 쓰는 데 그치지 않고 후보를 찾은 방법과 정확한 검산과 다른 양의 해가 없는 이유를 차례로 설명한다. 음수 범위까지 넓히면 왼쪽이 음수가 되어 양수 12와 같아질 수 없다. 따라서 이 식에는 다른 실근도 없다. 모든 삼차식이 같은 성질을 갖는 것은 아니므로 이 결론의 근거가 해당 식의 증가와 부호에 있음을 밝혀야 한다.

식	후보	검산
$x^3+2x=12$	2	8+4=12
$x^3+3x=4$	1	1+3=4

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

$x^3+3x=4$는 어떤 양의 해를 가지며 유일한가?

풀이와 확인

x=1을 넣으면 1+3=4다. 양의 범위에서 두 항이 모두 증가하므로 다른 양의 해는 없다. 음수에서는 왼쪽이 음수여서 4가 될 수 없으므로 실근도 1 하나다.

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam

이슬람 아랍관 / 51

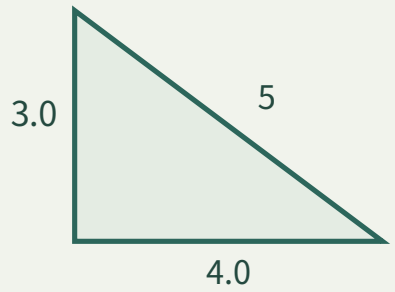
투시와 삼각형의 언어

천문학에서 독립된 관계로

삼각법은 하늘 밖의 삼각형에도 적용된다.

나시르 앗딘 투시는 평면과 구면의 삼각법을 체계적으로 다룬 학자다. 삼각법은 천문 계산에서 중요한 역할을 했지만 삼각형 자체의 관계를 연구하는 주제로도 발전했다. 이 장에서는 오늘의 사인과 코사인 기호로 간단한 삼각형을 계산한다. 역사적 표의 기호와 오늘의 함수 기호가 같았다고 생각하지 않도록 현대 표현이라는 점을 먼저 밝힌다.

직각삼각형에서 한 예각을 정하면 그 맞은편 변과 빗변의 비가 사인이다. 같은 각을 가진 닮은 삼각형은 크기가 달라도 이 비가 같다. 따라서 삼각비는 특정 길이 하나에 붙는 값이 아니라 각과 연결되는 관계다. 빗변을 1로 맞추어 생각하면 서로 다른 크기의 삼각형을 같은 기준으로 비교할 수 있다.



현대 재구성: 한 예각에 대한 맞은편 변과 빗변의 비

탐구

맞은편 변이 3이고 빗변이 5일 때 그 각의 사인은 얼마인가?

풀이와 확인

사인은 3/5=0.6이다. 모든 변을 두 배로 늘리면 맞은편 변은 6이고 빗변은 10이 되어 비는 여전히 0.6이다. 닮은 확대는 각과 삼각비를 보존한다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

같은 삼각형의 두 비

사인과 코사인은 서로 이웃한 정보를 담는다.

변이 3과 4와 5인 직각삼각형에서 길이 3인 변의 맞은편 예각을 A라고 하자. sin A=3/5이고 cos A=4/5다. 두 비의 제곱을 더하면 9/25+16/25=1이다. 이는 피타고라스 관계 $3^2+4^2=5^2$를 빗변의 제곱으로 나눈 결과다. 새로운 기호의 공식처럼 보이지만 이미 아는 길이 관계를 비로 바꾸어 쓴 것이다.

각 A를 다른 예각 B로 바꾸면 맞은편 변과 이웃한 변이 바뀐다. 따라서 sin B=4/5이고 cos B=3/5다. 직각삼각형의 두 예각 합이 90°라는 점과 연결된다. 그림에서 어느 각을 기준으로 삼았는지 표시하지 않으면 같은 세 변으로 서로 다른 답을 쓰게 된다. 삼각비를 읽을 때에는 각의 위치를 먼저 짚어 보자.

$$(3/5)^2+(4/5)^2=1$$

$$\sin^2 A+\cos^2 A=1$$

예각에서는 두 비가 양수다.

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

sin A=5/13인 예각 A의 cos A를 구하라.

풀이와 확인

$\cos^2 A=1-25/169=144/169$다. A가 예각이므로 코사인은 양수여서 cos A=12/13이다. 부호를 정할 때 각의 범위가 필요하다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

사인법칙의 대응

변의 길이는 맞은편 각과 한 쌍을 이룬다.

일반 삼각형에서 변 a와 b의 맞은편 각을 각각 A와 B라고 하면 a/sin A=b/sin B라는 관계가 성립한다. 높이를 두 가지 방식으로 나타내면 같은 길이가 두 식을 연결한다. 이 관계를 사용할 때에는 인접한 각이 아니라 맞은편 각을 짝지어야 한다. 그림의 문자가 많을수록 대응을 먼저 확인하는 습관이 중요하다.

A=30°이고 B=45°이며 a=10이라면 $b=10\times\sin 45°/\sin 30°=10\sqrt{2}$다. 큰 각의 맞은편 변이 더 길다는 직관과도 맞는다. 다만 삼각형이 만들어지는 조건을 확인하지 않은 채 식만 사용하면 잘못된 입력을 계산할 수 있다. 세 각의 합과 변의 양수 조건을 함께 확인하자.

$$a/\sin A=b/\sin B$$

$$A=30°와\ B=60°$$

$$a=4 \rightarrow b=4\sqrt{3}$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

A=30°와 B=60°에서 a=4이면 b는 얼마인가?

풀이와 확인

b=4×(√3/2)/(1/2)=4√3이다. 나머지 각은 90°이므로 빗변은 8이다. 4와 4√3과 8은 제곱 관계 16+48=64도 만족한다.

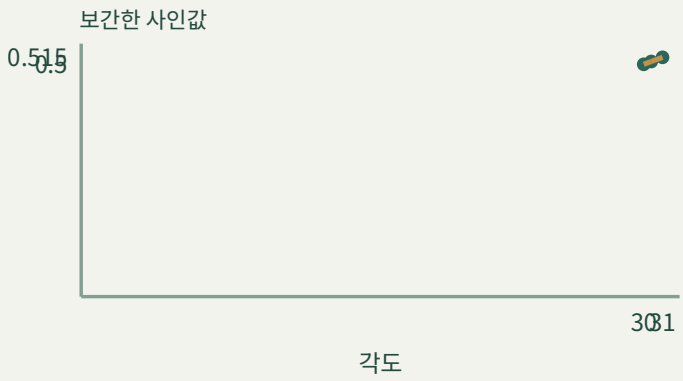
[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

사인표 사이의 값을 읽기

보간은 두 점 사이의 변화를 단순하게 근사한다.

수업용 표에 sin30°=0.5000과 sin31°≈0.5150이 적혀 있다고 하자. 30.4°는 두 각 사이에서 40퍼센트 지점이므로 차이 0.0150의 0.4배를 더해 약 0.5060으로 추정할 수 있다. 이 방법은 구간 안에서 값이 직선처럼 변한다고 보는 선형 보간이다. 실제 사인 곡선은 직선이 아니므로 결과는 근사다.

표를 촘촘하게 만들면 일반적으로 보간 오차를 줄이는 데 도움이 된다. 그러나 표 자체의 값이 거칠게 반올림되었다면 그 오차도 함께 남는다. 보간값의 자릿수를 많이 적는다고 정보가 새로 생기지는 않는다. 원래 표의 정밀도와 구간의 크기에 맞는 자리수로 결과를 제시해야 계산의 겉모양이 실제 정확성을 과장하지 않는다.



현대 재구성: 짧은 구간의 변화를 직선으로 근사한다.

탐구

같은 표로 sin30.8°를 선형 보간하면 얼마인가?

풀이와 확인

0.5000+0.8×0.0150=0.5120이다. 31° 쪽에 더 가까우므로 0.5150에 가까운 값이 되는지 확인할 수 있다. 정확한 함수값을 구한 것은 아니다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

도와 분과 초

각도 계산에도 자리의 묶음이 있다.

각도 1°를 60′로 나누고 1′를 60″로 나누는 표기에서는 12°30′가 12.5°와 같다. 30′는 30/60°이기 때문이다. 이를 십진수 12.30°와 혼동하면 0.2°의 차이가 생긴다. 각도의 분과 시간의 분은 같은 이름을 쓰지만 비교하는 양이 다르므로 표의 단위를 꼭 확인해야 한다.

18°45′와 7°30′를 더하면 분의 합이 75′여서 1°15′로 바뀐다. 따라서 합은 26°15′다. 받아올림의 묶음 크기가 10이 아니라 60이라는 점만 다르다. 계산 과정을 십진 각도로 바꾸어 18.75+7.5=26.25로 검산할 수도 있다. 서로 다른 표기 사이를 오가면 자리와 단위의 실수를 찾기 쉽다.

표기	십진 각도
12°30′	12.5°
7°45′	7.75°
12°15′	12.25°

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

20°에서 7°45′를 빼면 얼마인가?

풀이와 확인

20°를 19°60′로 바꾸면 19°60′−7°45′=12°15′다. 십진 각도로는 20−7.75=12.25°이므로 같은 결과다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

구면의 삼각형

둥근 표면에서는 평면의 규칙이 바뀐다.

지구를 이상적인 구로 보고 북극과 적도 위의 경도 차이 90°인 두 점을 연결하자. 각 변을 대원의 짧은 호로 잡으면 세 꼭짓점의 각이 모두 90°다. 각의 합은 270°로 평면삼각형의 180°보다 크다. 이는 그림이 틀렸기 때문이 아니라 변을 구면의 대원 호로 정의했기 때문이다. 어떤 공간에서 어떤 선을 사용하는지가 정리의 조건이다.

구면에서는 곧게 간다는 생각을 평면의 직선과 같은 모양으로 그릴 수 없다. 대원은 구의 중심을 지나는 평면이 구와 만나는 원이다. 지도 위에서 휘어 보이는 경로도 구면에서는 대원을 따를 수 있다. 하늘의 위치와 지구 위의 방향을 다루는 계산에 구면삼각법이 필요한 이유를 이 간단한 예가 보여 준다.



현대 재구성: 분할 비율을 보여 주는 보조 도식이며 평면 삼각형이 아니다.

탐구

세 직각으로 둘러싸인 이 구면삼각형은 구 전체의 몇 분의 일인가?

풀이와 확인

서로 수직인 세 중심 평면은 구를 같은 크기의 여덟 부분으로 나눈다. 그중 하나이므로 구면 넓이의 1/8이다. 평면에서 세 직각 삼각형이 불가능하다는 사실과 모순되지 않는다.

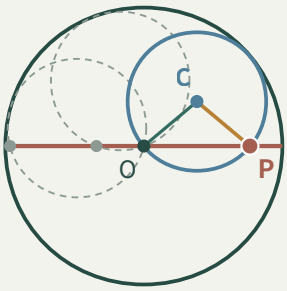
[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

회전 두 개와 직선 운동

투시의 짝을 오늘의 좌표로 살펴본다.

반지름이 r인 작은 원이 반지름 2r인 큰 원 안에서 미끄러짐 없이 굴러가는 모형을 생각하자. 작은 원의 둘레 위 한 점은 큰 원의 지름을 따라 왕복할 수 있다. 투시의 짝으로 알려진 기하학적 장치의 핵심 관계다. 이 페이지에서는 실제 천체 구조에 대한 주장과 분리하여 이상적인 원 운동의 합성만을 살펴본다.

작은 원의 중심 좌표를 가로 r cos t와 세로 r sin t로 쓰고 점의 상대 위치를 가로 r cos t와 세로 −r sin t로 쓰면 세로 성분이 상쇄된다. 전체 좌표는 가로 2r cos t와 세로 0이 된다. 원 운동의 합이 직선 위의 왕복 운동을 만들 수 있다는 사실을 현대 삼각함수로 확인한 것이다.



큰 원의 반지름 2r, 작은 원의 반지름 r

O에서 C: (r cos t, r sin t)

C에서 P: (r cos t, −r sin t)

P의 위치: (2r cos t, 0)

흐린 원은 다른 시각의 작은 원이다

큰 원 안을 구르는 작은 원의 점 P는 지름 위에서만 움직인다.

탐구

r=1일 때 t가 0°와 90°와 180°이면 점의 가로 좌표는 무엇인가?

풀이와 확인

2cos t를 사용하면 각각 2와 0과 −2다. 세로 좌표는 항상 0이다. 점이 일정한 속도로 직선을 움직이는 것은 아니며 위치만 지름 위에 머문다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

사인법칙이 두 삼각형을 허용할 때

같은 사인값을 가진 서로 다른 각을 함께 살펴야 한다.

평면삼각형에서 A=30°이고 맞은편 변 a=5이며 다른 변 b=8이라고 하자. 사인법칙을 쓰면 sin B=b sin A/a=8×(1/2)/5=0.8이다. 이 값만 보고 B를 예각 하나로 정하면 가능한 삼각형을 놓친다.

0°와 180° 사이에서는 서로 보각인 두 각의 사인값이 같다. 따라서 B는 약 53.13° 또는 126.87°다. 두 경우 모두 A와 B의 합이 180°보다 작으므로 나머지 각 C도 양수가 된다. 첫 경우 C는 약 96.87°이며 둘째 경우는 약 23.13°다.

이 차이는 계산기의 오류가 아니다. 알려진 두 변과 그중 한 변의 맞은편 각은 언제나 삼각형을 하나로 결정하지 않는다. 삼각형을 그릴 때 한 변의 끝점이 원과 직선의 서로 다른 두 교점에 놓일 수 있다는 기하 조건이 식에 반영된 것이다.

따라서 역삼각함수로 각 하나를 얻은 다음에는 보각 후보와 세 각의 합을 검사한다. 문제에서 B가 예각이라고 추가하면 첫 후보만 남는다. 이 페이지는 투시의 저술에 이 수치가 있다는 주장이 아니라 삼각법을 사용할 때 해의 범위를 관리하는 현대 예제다.

경우	B	C
예각 후보	약 53.13°	약 96.87°
둔각 후보	약 126.87°	약 23.13°

탐구

A=30°와 a=5에서 b=12라면 삼각형이 만들어지는가?

풀이와 확인

사인법칙은 sin B=12×(1/2)/5=1.2를 요구한다. 실수 각의 사인은 1을 넘을 수 없으므로 이런 삼각형은 없다. 주어진 숫자가 항상 도형을 결정한다는 가정을 버려야 한다.

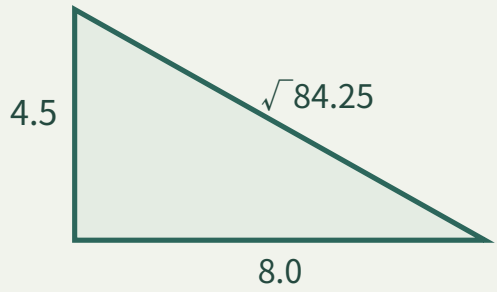
[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

삼각법 탐구의 종합 해설

공간과 각의 범위를 먼저 기록한다.

높이 6m인 수직 막대의 꼭대기를 수평 거리 8m에서 바라보는 이상적인 삼각형을 생각하자. 눈높이를 0으로 둔 모형에서 시선의 길이는 10m다. 고도각 A에 대해 sin A=6/10이고 cos A=8/10이다. 눈높이가 실제로 1.5m라면 세로 차이는 4.5m가 되어 계산을 다시 해야 한다. 문제에서 생략한 기준 높이를 무심코 실제 높이로 읽지 않는다.

구면 문제에서는 같은 6과 8을 변으로 적더라도 평면의 피타고라스 관계를 그대로 사용할 수 없다. 삼각비의 공식은 기호만 보고 선택하지 않고 공간과 변의 정의와 각의 범위를 살펴 선택한다. 역사 속 천문학자가 표와 도형을 함께 사용했던 이유도 서로 다른 조건을 정리하는 데 있다. 현대 독자는 계산의 편리함과 모형의 한계를 함께 배운다.



현대 재구성: 눈높이를 뺀 높이 차이로 계산한다.

탐구

눈높이 1.5m를 반영하면 꼭대기까지 시선의 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

세로 차이 4.5m와 가로 8m를 사용하여 $\sqrt{(4.5^2+8^2)}=\sqrt{84.25}$m로 구한다. 약 9.18m다. 건물 전체 높이를 삼각형의 세로 변으로 넣으면 눈높이를 중복해서 계산하게 된다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

이슬람 아랍관 / 52

알카시와 정밀한 계산

정확한 숫자를 만드는 기술

소수의 자릿수는 계산과 기록의 약속이다.

잠시드 알카시는 사마르칸트에서 활동하며 계산과 천문학을 연구했다. 그의 산술 저술은 소수와 측량 및 건축 등 여러 문제를 다루었다. 그를 소수의 유일한 발명자로 부르는 것은 앞선 여러 연구의 존재를 지운다. 이 장에서는 그의 정밀 계산을 출발점으로 소수 표기와 오차와 검산의 원리를 현대적인 작은 예제로 익힌다.

3.047에서 소수점 아래 첫 자리는 십분의 일이고 둘째는 백분의 일이며 셋째는 천분의 일이다. 따라서 이 수는 3+0/10+4/100+7/1000이다. 0은 빈자리를 유지하여 4와 7이 맡는 값을 분명하게 한다. 길이 단위를 미터로 정하면 0.047m는 47mm다. 같은 양도 기준 단위에 따라 정수 또는 소수로 나타날 수 있다.

자리	일	1/10	1/100	1/1000
3.047	3	0	4	7

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

2.305m를 밀리미터로 바꾸어 자리값을 확인하라.

풀이와 확인

1m=1000mm이므로 2.305×1000=2305mm다. 소수점이 사라지는 것은 양이 달라져서가 아니라 더 작은 단위로 같은 양을 센 결과다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

십진 소수의 곱셈

정수 계산 뒤에 단위의 크기를 되돌린다.

1.25×0.8을 정수 곱셈으로 옮기면 125×8=1000이다. 그러나 1.25는 125/100이고 0.8은 8/10이므로 곱은 1000/1000=1이다. 소수점 아래 자리수를 세는 규칙은 분모가 10의 거듭제곱이라는 사실을 짧게 표현한 것이다. 규칙을 외웠더라도 결과가 원래 수보다 커야 하는지 작아야 하는지 함께 판단해야 한다.

0.8배는 전체의 80퍼센트를 취하는 것이므로 양수 1.25를 곱한 결과는 1.25보다 작아야 한다. 10이나 100이라는 결과가 나왔다면 자리 배치를 다시 확인한다. 길이 1.25m와 폭 0.8m를 곱한 경우 결과의 단위는 m^2다. 수치의 소수점과 단위의 제곱은 서로 다른 부분이지만 모두 계산 의미를 결정한다.

$$1.25=125/100$$

$$0.8=8/10$$

$$125\times8/1000=1$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

2.4×0.35를 계산하고 크기를 검산하라.

풀이와 확인

24×35=840이고 분모는 10×100=1000이므로 0.84다. 0.35는 1/3보다 조금 크므로 2.4의 약 1/3인 0.8보다 조금 큰 결과가 자연스럽다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

나눗셈의 소수점 이동

두 수를 같은 비율로 바꾸어 몫을 보존한다.

7.2÷0.3은 나누는 수와 나누어지는 수를 모두 열 배 하여 72÷3=24로 계산할 수 있다. 분수 7.2/0.3의 분자와 분모에 같은 수를 곱했기 때문에 비가 유지된다. 한쪽만 열 배 하면 다른 문제로 바뀐다. 절차를 손으로 따라 쓸 때 두 수에 같은 변화가 적용되었는지 표시하면 실수를 줄일 수 있다.

나눗셈 결과가 7.2보다 커지는 것이 이상하지 않다. 0.3이라는 작은 조각이 7.2 안에 몇 개 들어가는지 묻기 때문이다. 0.3×24=7.2로 돌아오면 결과를 확인할 수 있다. 나누면 작아진다는 직관은 1보다 큰 양수로 나누는 경우에만 맞는다. 연산 이름만으로 결과의 방향을 정하지 말고 나누는 수의 범위를 살펴야 한다.

$$
\begin{aligned}
&4.5/0.15 \\
&=(4.5\times100)/(0.15\times100) \\
&=450/15=30
\end{aligned}
$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

4.5÷0.15를 계산하라.

풀이와 확인

두 수를 100배 하면 450÷15=30이다. 0.15×30=4.5로 검산할 수 있다. 4.5만 100배 하거나 0.15만 바꾸면 몫은 보존되지 않는다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

반올림한 수의 범위

마지막 숫자는 정확성에 대한 정보를 담는다.

길이를 소수 둘째 자리까지 반올림하여 2.37m라고 적었다면 참값은 보통 2.365m 이상 2.375m 미만의 범위에 있을 수 있다. 여기서는 정확히 중간인 경우 위쪽으로 올리는 규칙을 사용한다. 2.37이라는 기록은 참값이 그 숫자와 완전히 같다는 뜻이 아니다. 단위를 cm로 바꾸면 약 237cm라는 같은 정보를 표현한다.

기록에 소수 자릿수를 더 붙여 2.370000m라고 쓰면 측정하지 않은 정밀도를 암시할 수 있다. 계산기의 표시 자릿수와 측정의 정확성은 구별해야 한다. 여러 번 계산한 결과도 처음 입력값의 불확실성을 벗어나 정확해지지는 않는다. 수치가 무엇을 알고 무엇을 남겨 두는지 범위로 적어 보는 습관은 정밀 계산을 읽는 데 도움이 된다.



현대 재구성: 반올림값 2.37이 대표하는 길이의 범위

탐구

한 자리 소수로 반올림한 값이 8.4라면 가능한 참값의 범위를 쓰라.

풀이와 확인

같은 반올림 규칙에서는 8.35 이상 8.45 미만이다. 정확히 경계에 있는 값을 처리하는 규칙이 달라지면 끝점의 포함 여부도 달라질 수 있다.

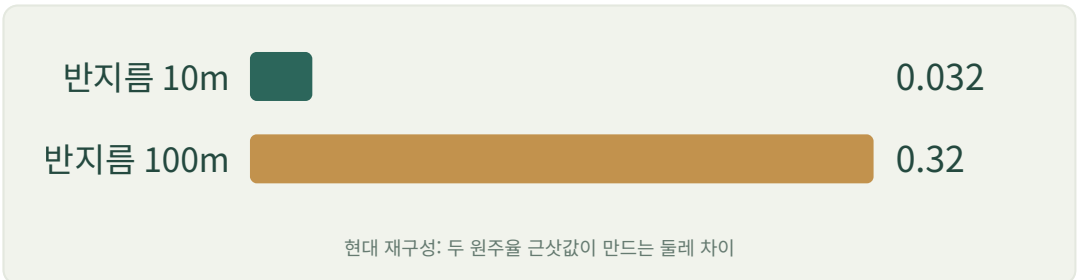
[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

원주율을 어느 자리까지 쓸까

필요한 정확성은 문제의 크기와 연결된다.

반지름 10m인 원의 둘레를 2πr로 구할 때 π를 3.14로 쓰면 62.8m다. 3.1416으로 쓰면 62.832m다. 두 계산의 차이는 0.032m로 3.2cm다. 원주율의 자릿수를 늘리는 효과는 곱하는 반지름에 따라 커진다. 정밀한 상수를 계산하는 작업과 그 정밀도를 실제 문제에 사용하는 작업은 서로 연결된다.

그러나 반지름 자체를 10m쯤이라고만 측정했다면 둘레를 매우 많은 자릿수로 쓰는 것은 적절하지 않을 수 있다. 상수의 오차를 줄여도 입력 길이의 오차가 더 크면 전체 정확성은 그 측정에 제한된다. 알카시의 원주 계산을 읽을 때에는 높은 정밀도의 성취를 인정하면서 어떤 계산 절차와 검산이 그 수치를 지탱했는지도 질문할 수 있다.



현대 재구성: 두 원주율 근삿값이 만드는 둘레 차이

탐구

반지름을 100m로 바꾸면 두 원주율 값으로 구한 둘레의 차이는 얼마인가?

풀이와 확인

$2\times100\times(3.1416-3.14)=0.32$m다. 반지름이 열 배가 되었으므로 둘레 계산의 차이도 열 배다. 이는 두 근삿값 사이의 차이이며 정확한 원주에 대한 전체 오차와는 구별한다.

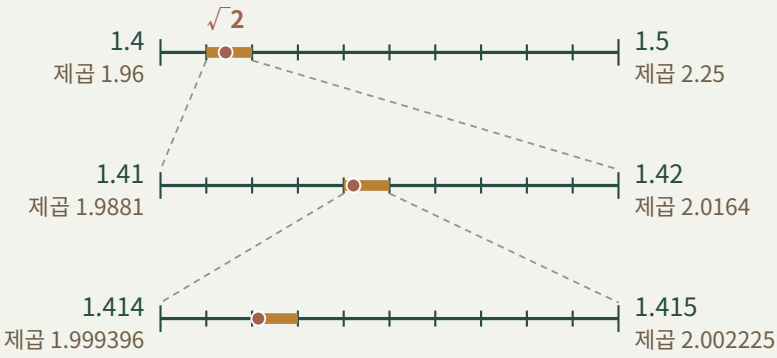
[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

제곱근을 위아래에서 조이기

곱셈으로 근삿값을 검증할 수 있다.

$\sqrt{2}$를 구할 때 $1.4^2=1.96$이고 $1.5^2=2.25$이므로 값은 1.4와 1.5 사이다. 다시 $1.41^2=1.9881$과 $1.42^2=2.0164$를 비교하면 구간이 더 좁아진다. $1.414^2=1.999396$이며 $1.415^2=2.002225$이므로 $1.414<\sqrt{2}<1.415$다. 정답의 모든 자리를 한 번에 아는 대신 확실한 경계를 차례로 만들 수 있다.

소수의 자릿수를 늘리는 과정에는 더 큰 정수의 곱셈과 자리 관리가 필요하다. 계산 결과가 2보다 큰지 작은지 판단하는 작은 비교가 전체 근삿값을 지탱한다. 이 페이지의 절차는 특정 역사적 알고리즘의 복원이 아니라 정밀도를 높이는 기본 생각을 보여 주는 현대 재구성이다. 각 단계의 제곱값을 남기면 다른 독자도 범위를 검산할 수 있다.



제곱이 2를 넘는 경계를 찾아 $\sqrt{2}$의 구간을 열 배씩 좁힌다.

탐구

$1.4142^2=1.99996164$와 $1.4143^2=2.00024449$로 무엇을 알 수 있는가?

풀이와 확인

양의 수에서 제곱은 증가하므로 $1.4142<\sqrt{2}<1.4143$이다. 이 구간만으로 소수 넷째 자리 반올림값을 확정할 수는 없다. 중간 경계 1.41425의 제곱은 2.0001030625로 2보다 크다. 따라서 $\sqrt{2}<1.41425$이며 반올림값은 1.4142다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

건축 표면을 나누어 계산하기

복잡한 장식도 부분의 합으로 접근할 수 있다.

알카시의 산술 저술에는 건축과 관련된 면적 계산도 포함된다. 여기서는 특정 건축물을 복원하지 않고 여러 평면 조각으로 이루어진 장식 모형을 계산한다. 직사각형 조각 네 개의 넓이가 각각 0.36m^2이고 삼각형 조각 여덟 개의 넓이가 각각 0.15m^2라면 전체 드러난 면적은 $4\times0.36+8\times0.15=2.64\text{m}^2$다.

서로 붙여 가려지는 면까지 더하면 실제 칠할 면적보다 커질 수 있다. 겉면과 접합면을 구별해 목록을 만드는 일이 곱셈보다 먼저다. 곡면을 작은 평면 조각으로 근사하는 경우에는 조각 수와 오차도 함께 고려해야 한다. 분할은 복잡한 형태를 다루기 쉽게 만들지만 무엇을 더하고 무엇을 제외했는지 설명해야 올바른 합이 된다.

조각	개수	한 면적	합
직사각형	4	0.36	1.44
삼각형	8	0.15	1.20

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

면적 2.64m²에 10퍼센트의 재료 여유를 더하면 준비 면적은 얼마인가?

풀이와 확인

$2.64 \times 1.1 = 2.904\text{m}^2$다. 이는 재료 준비를 위한 가정이며 실제 손실률을 측정한 값은 아니다. 조각 배치와 재료 규격에 따라 필요한 양이 달라질 수 있다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

정밀 계산의 해설

숫자를 늘리기 전에 오차의 근원을 찾는다.

가로 2.4m와 세로 1.8m인 직사각형의 넓이는 4.32m^2다. 두 길이가 각각 0.01m까지 달라질 수 있다고 정하면 작은 쪽 넓이는 $2.39 \times 1.79 = 4.2781\text{m}^2$이고 큰 쪽 넓이는 $2.41 \times 1.81 = 4.3621\text{m}^2$다. 4.32라는 계산값과 가능한 넓이의 범위를 함께 적으면 입력 길이의 불확실성을 읽을 수 있다.

여기서 곱셈을 더 많은 소수 자리까지 해도 범위 자체가 사라지지는 않는다. 더 정확한 넓이를 알고 싶다면 길이를 더 정확히 측정해야 한다. 정밀한 산술과 정밀한 측정은 서로 다른 노력을 요구한다. 이 장의 핵심은 소수점을 길게 쓰는 기술만이 아니라 수치를 만들고 옮기고 비교하는 각 단계에서 어떤 정보가 보존되는지 확인하는 데 있다.



현대 재구성: 입력 길이의 범위가 넓이의 범위로 이어진다.

탐구

가로와 세로를 모두 최대값으로 잡는 것이 최대 넓이를 주는 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

두 길이가 양수일 때 한쪽 길이를 고정하고 다른 길이를 늘리면 곱도 증가한다. 따라서 둘 다 최대인 경우가 최대 넓이다. 부호가 다른 일반 수의 곱에서는 같은 판단을 그대로 적용할 수 없다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

이슬람 아랍관 / 53

하늘을 읽는 원판

아스트롤라베를 보는 순서

정교한 장식 속에서 눈금과 기준을 찾는다.

아스트롤라베는 천체의 고도를 재고 하늘의 위치와 시간에 관한 문제를 다루는 데 쓰인 기구다. 메트로폴리탄 박물관에는 1291년의 날짜가 적힌 예도 소장되어 있다. 기구를 감상할 때에는 재료와 장식뿐 아니라 회전하는 부분과 별을 표시하는 부분 및 지역의 하늘을 나타내는 판의 역할을 구별해 보자. 아름다운 표면과 수학적 기능은 함께 존재한다.

이 장의 원판 도해는 실제 유물의 정밀 복제품이 아니다. 360°로 나눈 원과 회전하는 지시선으로 기본적인 읽기 원리를 살핀다. 눈금의 시작점과 회전 방향을 정하지 않으면 같은 위치에도 다른 숫자를 붙일 수 있다. 관찰한 각도와 기구가 계산한 시간 또한 서로 다른 양이므로 결과 옆에 단위를 남겨야 한다.



현대 재구성: 원주를 같은 각도로 나눈 교육용 원판

탐구

원판을 24개의 같은 부분으로 나누면 한 부분의 중심각은 얼마인가?

풀이와 확인

360°÷24=15°다. 이 분할만으로 실제 태양 고도가 매시간 15°씩 변한다고 결론 내릴 수는 없다. 원판 분할과 관측 고도의 변화는 다른 관계다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

고도와 방위는 다른 좌표다

하늘의 점 하나에는 두 방향의 정보가 필요하다.

고도는 지평선에서 천체까지 올라간 각이다. 지평선 위는 0°이고 머리 바로 위인 천정은 90°다. 방위는 지평선을 따라 어느 방향을 향하는지 나타낸다. 이 책의 모형에서는 북쪽을 0°로 정하고 동쪽을 90°로 정한다. 고도 30°라는 정보만으로는 동쪽 하늘인지 서쪽 하늘인지 알 수 없다.

관측표에는 시각과 장소도 함께 적어야 한다. 같은 별이라도 지구의 자전 때문에 시각에 따라 지평선에 대한 위치가 달라진다. 여기서 고도라는 말은 해발 높이를 뜻하는 길이가 아니라 각도다. 용어가 겹칠 때 단위를 확인하면 혼동을 피할 수 있다. 좌표는 대상의 이름만 적는 것이 아니라 기준면과 기준 방향을 정하는 약속이다.

좌표	기준	단위
고도	지평선에서 위로	도
방위	북쪽에서 동쪽 방향	도

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

방위 180°와 고도 45°는 이 모형에서 어디를 가리키는가?

풀이와 확인

남쪽을 향해 지평선과 천정의 중간 높이를 가리킨다. 방위의 증가 방향과 북쪽 기준을 바꾸면 숫자의 해석도 달라지므로 사용한 약속을 먼저 확인한다.

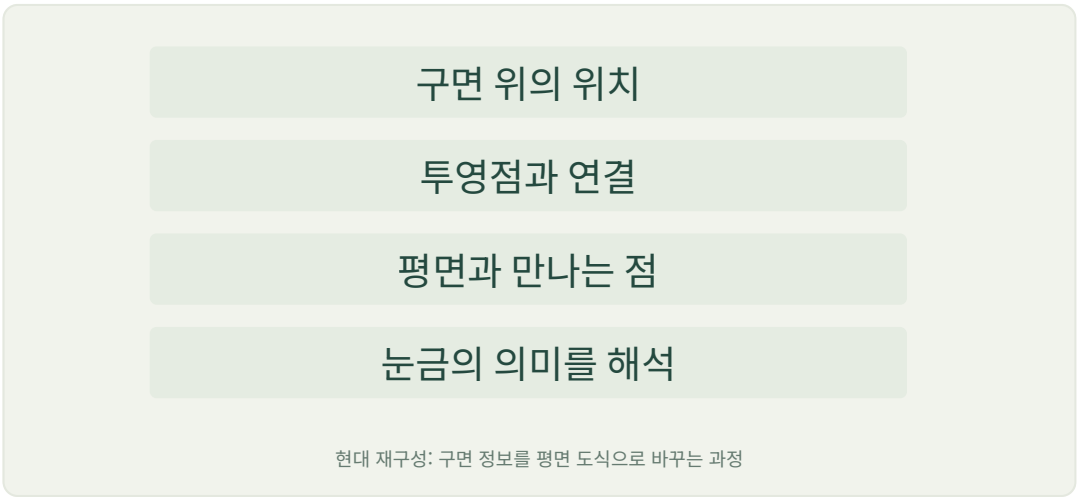
[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

원을 평면에 옮기는 생각

투영은 모양을 바꾸면서 관계를 보존한다.

구면 위의 점을 한 극점에서 반대쪽 기준 평면으로 연결해 옮기는 방식을 생각하자. 이를 정사영과 구별되는 입체사영의 모형으로 살펴볼 수 있다. 평면 아스트롤라베의 이해에는 구면 하늘을 평면에 나타내는 기하학이 중요하다. 여기서는 그림의 모든 길이를 실제 하늘의 길이와 같다고 읽지 않는다. 투영은 정보를 보존하는 동시에 다른 성질을 바꾼다.

입체사영에서는 투영점 자체를 지나는 원이 평면의 직선으로 옮겨질 수 있고 그 점을 지나지 않는 원은 원으로 옮겨진다. 따라서 평면에서 보이는 직선이 원래 구면에서도 직선이었다고 추정하면 안 된다. 지도와 기구의 선은 어떤 변환을 거쳐 그려졌는지 알아야 해석할 수 있다. 길이와 넓이와 각을 모두 동시에 보존하는 지도라고 기대하지 않는 것이 출발점이다.



현대 재구성: 구면 정보를 평면 도식으로 바꾸는 과정

탐구

평면 원판에서 두 별 사이 거리가 두 배라면 실제 하늘의 각거리도 반드시 두 배인가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 투영의 위치에 따라 길이의 확대율이 달라질 수 있다. 평면 거리만 비교하지 말고 기구의 눈금과 투영 관계를 이용해야 각거리를 해석할 수 있다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

각도 눈금의 해상도

작은 구분이 곧 정확한 측정을 뜻하지는 않는다.

원판의 눈금 간격이 1°라면 두 눈금 사이의 위치를 눈대중으로 읽을 수는 있어도 그 값이 자동으로 0.01°까지 정확해지는 것은 아니다. 지시선의 두께와 기구의 흔들림과 기준선의 수평 상태가 결과에 영향을 준다. 기구의 세밀함과 관찰자의 읽기 능력과 측정 조건은 함께 작용한다.

반지름 10cm인 원판에서 1°에 해당하는 호의 길이는 $2\pi \times 10/360$cm로 약 1.75mm다. 반지름을 20cm로 늘리면 같은 각도 간격의 호 길이는 약 3.49mm가 된다. 큰 기구가 눈금을 더 넓게 배치할 수 있는 이유다. 하지만 크기를 키우는 것만으로 모든 오차가 사라지지는 않으며 무게와 제작 정밀도 같은 조건도 달라진다.

$$\text{호 길이} = 2\pi r \times \text{각도}/360^\circ$$

$$r=10\text{cm와 } 1^\circ \rightarrow \text{약 } 1.75\text{mm}$$

$$r=20\text{cm와 } 1^\circ \rightarrow \text{약 } 3.49\text{mm}$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

반지름 15cm 원판에서 2° 간격의 호 길이는 약 얼마인가?

풀이와 확인

$2\pi \times 15 \times 2/360 = \pi/6$cm로 약 0.524cm다. 이는 원주를 따른 길이이며 두 눈금 끝을 직선으로 잰 현의 길이와는 조금 다르다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

시간과 회전의 관계

한 바퀴를 나누는 약속은 여러 단위로 표현된다.

교육용 모형에서 한 바퀴 360°를 24시간에 대응시키면 한 시간은 15°다. 따라서 45°의 회전은 세 시간에 해당한다. 실제 천문 계산에서는 항성일과 태양일의 차이나 태양 운동의 불균일 등을 더 살펴야 하지만 이 페이지에서는 일정한 속도의 회전만 다룬다. 단순한 모형을 쓰는 대신 그 가정을 명시한다.

시간 2시간 20분은 2와 1/3시간이다. 이를 각도로 바꾸면 35°다. 2.20시간으로 잘못 읽으면 33°가 된다. 시간의 분은 한 시간의 1/60이므로 소수 표기와 구별해야 한다. 도와 분을 다루던 계산과 비슷하지만 이번에는 시간이라는 다른 양을 회전에 대응시키는 과정이다.



한 칸 = 360° ÷ 24 = 15° = 1시간

35° = 2시간 20분

52.5° = 3.5시간 = 3시간 30분

2.20시간으로 잘못 읽으면 33°

일정한 속도의 회전을 가정한 모형

24칸 원판의 한 칸은 15°이고 35°의 회전은 2시간 20분이다.

탐구

회전각 52.5°는 이 모형에서 몇 시간 몇 분인가?

풀이와 확인

52.5÷15=3.5시간이므로 3시간 30분이다. 시간 0.5를 50분으로 바꾸지 않도록 주의한다. 시간의 소수 부분에 60을 곱해 분을 구한다.

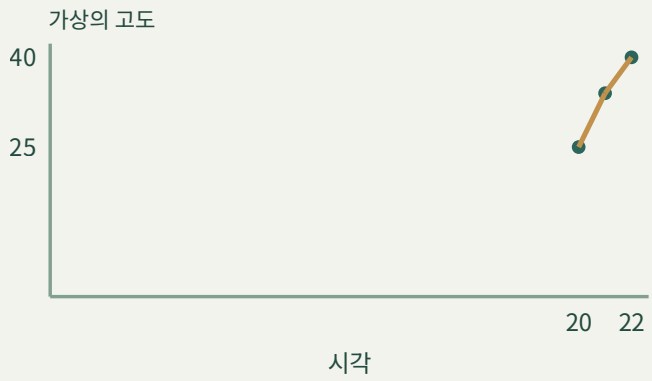
[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

별의 이동을 기록한 표

변화량을 보려면 순서와 간격을 맞춘다.

가상의 관측에서 별의 고도가 저녁 8시에 25°이고 9시에 34°이며 10시에 40°였다고 하자. 한 시간 동안의 변화는 처음 9°이고 다음 6°다. 일정한 속도로 원운동을 한다는 모형이 있더라도 지평선에 대한 고도는 일정한 비율로 증가하지 않을 수 있다. 회전각과 관측 고도를 같은 값으로 생각하지 않는 것이 중요하다.

관측 시각 간격이 다르면 변화량을 그대로 비교할 수 없다. 30분 동안 4° 변한 경우와 한 시간 동안 6° 변한 경우를 비교하려면 같은 시간 단위로 환산해야 한다. 다만 짧은 구간의 평균 변화율을 오랜 시간의 예측에 그대로 쓰면 곡선 운동의 특성을 놓칠 수 있다. 표는 자료를 정리하는 출발점이며 모형을 대신하지 않는다.



현대 재구성: 같은 시간 간격에도 고도의 증가량은 다르다.

탐구

8시 30분의 고도를 두 첫 관측 사이에서 선형 보간하면 얼마인가?

풀이와 확인

25°와 34°의 중간값인 29.5°다. 이는 관측한 값이 아니라 두 점 사이의 변화를 직선으로 가정한 추정이다. 표에서 실제 관측과 추정을 별도로 표시한다.

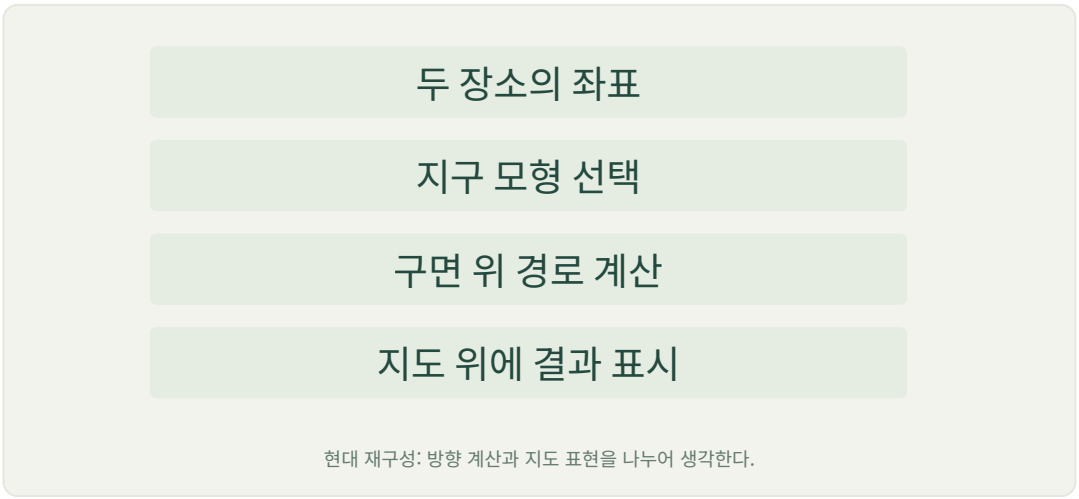
[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

방향 찾기의 수학적 조건

지도에서 곧은 선이 곧바로 답이 되지는 않는다.

먼 장소를 향하는 방향을 구할 때 평면 지도에서 두 점을 자로 잇는 방법은 지도 투영에 따라 다른 결과를 낼 수 있다. 구면 위의 두 위치를 잇는 대원의 방향과 평면 그림의 직선 방향이 일반적으로 같지는 않기 때문이다. 중세 이슬람권에서 방향 문제와 천문 계산이 만난 배경도 구면 위 위치의 관계를 살피는 데 있다.

수업에서는 북극과 적도 위 두 점의 모형부터 시작할 수 있다. 북극에서 적도의 어느 경도로 내려가든 자오선을 따라가지만 평면 지도에서는 선의 배치가 투영 방식에 따라 달라진다. 실제 방향을 제시하려면 출발지와 목적지의 좌표와 사용한 지구 모형을 밝혀야 한다. 장식적인 화살표 하나로 정밀한 방향 계산을 대체하지 않는다.



현대 재구성: 방향 계산과 지도 표현을 나누어 생각한다.

탐구

같은 두 도시를 서로 다른 지도 투영에 그렸을 때 직선의 각도가 달라질 수 있는가?

풀이와 확인

달라질 수 있다. 투영이 공간의 관계를 바꾸어 나타내기 때문이다. 실제 지표에서의 방향은 좌표와 구면 또는 타원체 모형을 이용해 구하고 지도에서는 그 결과를 적절히 표현해야 한다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

위도를 바꾸면 원판도 달라진다

하늘의 별과 지역의 지평선을 같은 기준으로 읽어야 한다.

평면 아스트롤라베를 이해하려면 하늘의 별을 표시한 회전 부분과 관측지의 지평선 관계를 담은 판을 나누어 본다. 현대 연구자 도미닉 포드의 제작 안내도 위도에 맞는 모형을 별도로 제공한다. 어느 위도에 맞추어 그린 판인지가 사용 조건의 일부인 것이다.

이를 이상적인 구면 지구의 기하로 확인한다. 북반구에서 북천극의 지평선 위 고도는 관측지의 위도와 같다. 위도 35°에서 북천극의 고도는 35°이며 위도 52°에서는 52°다. 별의 천구상 상대 위치가 같아도 지역의 수평면이 달라져 지평선에 대한 높이가 달라진다.

따라서 위도 52°용 판의 고도선을 위도 35°에서 그대로 읽으면 서로 다른 기준을 섞게 된다. 별 표지를 돌리는 일은 시간에 따른 방향 변화를 나타내지만 관측지 위도를 자동으로 바꾸지는 않는다. 회전 조절과 지역에 맞는 판의 선택은 서로 다른 작업이다.

여기서는 대기 굴절과 실제 북극성의 북천극 이격을 생략한다. 북극성의 고도를 정확히 위도라고 단정하는 대신 이상적인 북천극을 사용한다. 기구를 종이 모형으로 바꾸더라도 관측 대상과 기준면을 분명히 적으면 장식적 원판이 계산 도구로 읽히기 시작한다.

가상의 관측 위도	북천극 고도
북위 35°	35°
북위 52°	52°
북위 70°	70°

탐구

북위 35°에서 북천극이 천정과 이루는 각은 얼마인가?

풀이와 확인

천정 고도는 90°이므로 90°−35°=55°다. 지평선 기준 고도와 천정에서 잰 거리를 혼동하면 서로 보완되는 두 값을 바꾸어 쓰게 된다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World / [astro-model] Dominic Ford. Building a Model Astrolabe. 2012

기구 읽기 활동의 해설

유물의 정보와 교육용 모형을 연결한다.

전시된 기구를 읽는 활동지를 만들면 먼저 제작 시기와 재료 및 확인 가능한 명문 정보를 적는다. 이어서 회전하는 부품과 각도 눈금과 별 표지를 찾아 기능을 구분한다. 마지막으로 교육용 원판에서 24등분이나 각도 변환을 계산한다. 실제 유물의 모든 눈금이 교실 모형과 같다고 가정하지 않는 것이 중요하다.

이번 장의 수치는 대부분 이해를 돕기 위해 새로 정한 값이다. 1° 간격의 호 길이나 시간과 회전의 대응은 원의 기하학을 설명하지만 특정 유물의 제작 오차나 관측 성능을 평가한 결과는 아니다. 수학 활동과 유물 해설의 경계를 표시하면 관람자는 실제 자료를 존중하면서도 손으로 계산하는 즐거움을 누릴 수 있다.



현대 재구성: 반지름 12cm인 교육용 원판의 한 칸

탐구

반지름 12cm인 교육용 원판을 24등분하면 한 칸의 호 길이는 얼마인가?

풀이와 확인

전체 둘레 24πcm를 24로 나누면 πcm다. 중심각은 15°다. 같은 한 칸을 각도와 길이로 표현했지만 각도는 반지름과 무관하고 호 길이는 반지름에 비례한다.

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

이슬람 아랍관 / 54

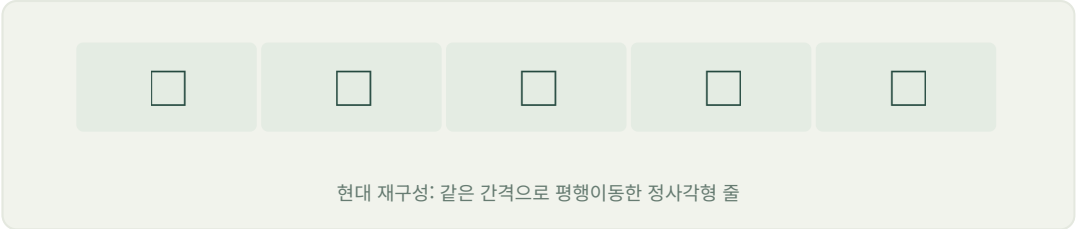
문양을 움직이는 규칙

장식 속의 수학을 읽기

반복과 대칭은 관찰의 언어가 된다.

이슬람 미술의 기하 문양에는 원과 다각형의 결합 및 반복이 다양하게 나타난다. 메트로폴리탄 박물관의 해설은 기하 문양이 식물 문양과 서예 등과 함께 사용되는 점을 보여 준다. 모든 작품을 하나의 공식으로 설명하거나 수학적 분석이 제작자의 의도를 완전히 복원한다고 말해서는 안 된다. 여기서는 새로 만든 교육용 문양을 대상으로 규칙을 관찰한다.

같은 정사각형을 옆으로 일정한 거리만큼 옮겨 줄을 만들면 평행이동이 된다. 정사각형의 크기와 방향은 유지되며 위치만 달라진다. 모양이 반복된다는 말에 그치지 않고 얼마만큼 어느 방향으로 옮겼는지 적으면 다른 사람도 같은 문양을 만들 수 있다. 시각적 감상을 재현 가능한 규칙으로 바꾸는 첫 단계다.



현대 재구성: 같은 간격으로 평행이동한 정사각형 줄

탐구

한 변 2인 정사각형을 틈 없이 다섯 개 가로로 놓으면 전체 가로 길이와 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

가로 길이는 2×5=10이고 세로는 2다. 전체 넓이는 20이다. 각 정사각형의 넓이 4를 다섯 번 더해도 같은 결과다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

회전하여 겹치는 모양

몇 번 돌아가야 처음과 구별되지 않는가?

정사각형을 중심 주위로 90° 돌리면 원래 자리와 겹친다. 한 바퀴 안에서 0°와 90°와 180°와 270°의 네 위치가 겹치므로 회전 대칭의 차수는 4다. 정삼각형에서는 120°씩 돌아가 세 위치가 겹친다. 모양의 꼭짓점 수를 세는 것과 실제 회전 후 겹치는지 확인하는 것은 연결되지만 언제나 같은 작업은 아니다.

정사각형의 한 꼭짓점에만 붉은 점을 표시하면 도형의 외곽은 90° 회전에 겹쳐도 색 표지는 다른 자리로 간다. 문양 전체의 대칭을 판단할 때에는 색과 선의 굵기와 내부 무늬도 포함할지 정해야 한다. 분석 대상의 범위를 분명히 하면 서로 다른 대칭 판단이 왜 나왔는지 설명할 수 있다.



현대 재구성: 같은 여덟 부분의 회전 간격

탐구

정팔각형의 최소 양의 회전 대칭각은 얼마인가?

풀이와 확인

360°÷8=45°다. 다만 각 꼭짓점에 서로 다른 색이나 문자를 넣으면 그 표시까지 포함한 문양의 대칭은 줄어들 수 있다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

거울에 비친 무늬

반사는 거리와 각을 지키면서 방향을 뒤집는다.

수직선을 대칭축으로 정하고 그 왼쪽 3칸에 있는 점을 오른쪽 3칸으로 옮기면 반사된 점이 된다. 두 점의 높이는 같고 대칭축까지의 거리가 같다. 여러 점을 같은 규칙으로 옮기면 도형 전체가 반사된다. 단순히 비슷한 모양을 반대편에 그리는 것이 아니라 모든 점이 같은 조건을 만족해야 한다.

평행이동과 회전은 도형의 좌우 순서를 보존하지만 반사는 그 순서를 뒤집는다. 회전한 글자는 기울기와 향하는 방향이 바뀌어도 거울 글자가 되지는 않는다. 따라서 화살표나 비대칭 문자를 넣으면 변환의 차이가 잘 드러난다. 정사각형처럼 대칭이 많은 외곽만 보면 여러 변환을 구별하기 어려울 수 있다. 분석을 위해 작은 표지를 넣어 변화의 방향을 추적하는 방법을 써 보자.



현대 재구성: 위치 5와 −1은 위치 2의 축에서 같은 거리다.

탐구

대칭축이 가로 위치 2인 수직선일 때 가로 위치 5의 점은 어디로 옮겨지는가?

풀이와 확인

축의 오른쪽 3에 있으므로 반사 후에는 축의 왼쪽 3인 위치 −1이 된다. 원래 위치와 옮긴 위치의 평균이 (5−1)/2=2인지 확인하면 축과의 관계를 검산할 수 있다.

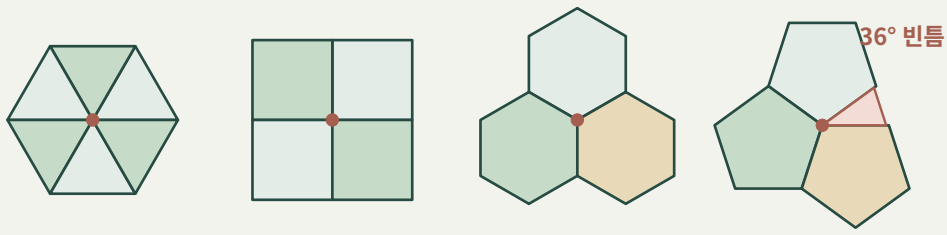
[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

정다각형으로 바닥 채우기

한 꼭짓점에 모인 각이 360°가 되어야 한다.

정삼각형의 한 내각은 60°이므로 한 점에 여섯 개를 모으면 360°를 채운다. 정사각형의 내각은 90°여서 네 개가 모인다. 정육각형의 내각은 120°이므로 세 개가 모인다. 이러한 각도 조건은 같은 정다각형만으로 빈틈 없이 평면을 채울 수 있는지 살피는 기본 기준이다.

정오각형의 내각은 108°다. 세 개를 모으면 324°로 36°가 남고 네 개를 모으면 432°로 겹친다. 따라서 정오각형만을 꼭짓점끼리 맞대는 방식은 평면을 채우지 못한다. 이것은 모든 오각형이 타일이 될 수 없다는 말이 아니다. 정다각형이라는 조건과 같은 방식으로 모은다는 조건을 유지해야 정확한 결론이 된다.



정삼각형	정사각형	정육각형	정오각형
60°×6=360°	90°×4=360°	120°×3=360°	108°×3=324°

한 점에 모인 내각의 합이 360°일 때만 빈틈없이 채워진다.

탐구

정팔각형 두 개의 내각을 모으면 남는 각은 얼마이며 어떤 정다각형을 넣을 수 있는가?

풀이와 확인

정팔각형의 내각은 135°이므로 둘의 합은 270°다. 남는 90°에는 정사각형 한 개를 넣을 수 있다. 이러한 각 배치는 정팔각형과 정사각형을 섞은 평면 채우기의 출발점이다.

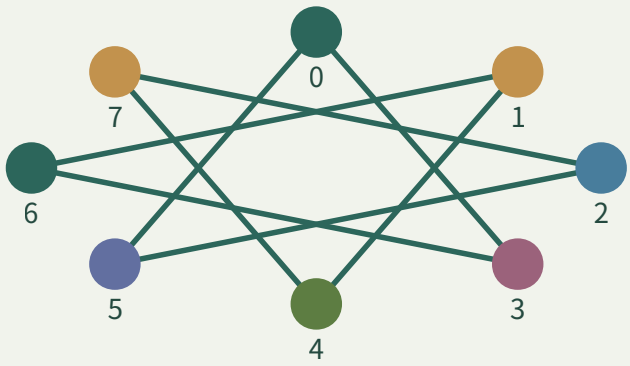
[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

여덟 꼭짓점의 별

연결 순서가 별의 구조를 바꾼다.

원 위에 같은 간격으로 여덟 점을 놓고 순서대로 번호를 붙이자. 한 점씩 건너뛰어 연결하면 짝수 번호 네 점과 홀수 번호 네 점이 각각 정사각형을 만든다. 두 정사각형을 45° 어긋나게 겹친 모양은 여덟 방향의 구조를 보여 준다. 같은 점을 사용해도 어떤 순서로 잇는지에 따라 외곽과 내부 교차가 달라진다.

한 번에 세 칸씩 이동하여 연결하면 여덟 점을 모두 지난 뒤 처음으로 돌아온다. 8과 3이 서로소이기 때문이다. 두 칸씩 이동하면 8과 2의 공약수 때문에 네 점만 지난 뒤 처음으로 돌아오며 나머지 점은 별도의 순환을 만든다. 별 문양의 연결은 정수의 나머지와 공약수 문제로도 읽을 수 있다.



현대 재구성: 세 칸씩 건너뛰어 여덟 점을 잇는다.

탐구

여덟 점에서 세 칸씩 이동하면 0에서 시작한 번호 순서는 어떻게 되는가?

풀이와 확인

0에서 3과 6과 1과 4와 7과 2와 5를 거쳐 0으로 돌아온다. 매번 3을 더한 뒤 8로 나눈 나머지를 취한 결과다. 여덟 점이 모두 한 번씩 등장한다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

대칭이 있는 색칠

색을 넣으면 새로운 조건이 생긴다.

원 둘레의 여덟 칸을 두 색 A와 B로 번갈아 칠하면 45° 회전에서 두 색의 위치가 바뀐다. 90° 회전에서는 각 칸이 같은 색의 자리로 가므로 문양 전체가 겹친다. 색을 무시한 분할은 회전 대칭 차수 8이지만 색을 포함한 문양은 차수 4다. 무엇을 같다고 볼지에 따라 대칭의 결과가 바뀌는 사례다.

색을 서로 바꾸는 변환까지 같은 것으로 인정하면 다른 분류를 만들 수 있다. 그러나 그것은 원래 색을 그대로 보존하는 대칭과 구별해서 정의해야 한다. 수학적 분류는 관찰 대상을 정하는 약속에 의존한다. 작품을 분석할 때에도 색이 바래거나 복원된 부분이 있으면 현재 보이는 대칭과 제작 당시의 대칭을 동일시하지 않도록 자료를 확인한다.



AABB를 두 번 반복한 여덟 칸은 180° 회전에서 처음과 겹친다.

탐구

A와 A와 B와 B의 순서를 두 번 반복한 여덟 칸은 몇 도 회전에서 처음과 겹치는가?

풀이와 확인

네 칸을 옮기는 180°에서 겹친다. 90°에서는 A와 B의 묶음이 바뀌므로 같은 색을 보존하지 않는다. 최소 회전각은 180°이며 회전 대칭 차수는 2다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

띠 문양의 반복 단위

가장 작은 반복과 눈에 띄는 묶음은 다를 수 있다.

삼각형과 원과 원이 차례로 반복되는 긴 띠를 생각하자. 눈에 보이는 여섯 도형을 한 묶음으로 잡아도 띠를 재현할 수 있지만 최소 반복 단위는 세 도형이다. 반복 단위를 크게 잡으면 설명은 가능해도 구조를 가장 간단하게 표현하지 못한다. 반대로 너무 작게 잡으면 다른 모양이 섞인 위치를 설명할 수 없다.

띠의 길이가 최소 단위의 정수배가 아니면 마지막 부분은 중간에서 끝날 수 있다. 유물의 파편을 보고 전체 반복을 추정할 때 이 점이 중요하다. 짧은 조각에서 보인 규칙이 전체에 계속되었는지 확인하려면 더 많은 부분이나 비교 자료가 필요하다. 수학적 반복 가능성과 실제 작품의 원형 복원은 서로 다른 수준의 판단이다.



현대 재구성: 세 도형이 최소 반복 단위다.

탐구

삼각형과 원과 원이 반복되는 20개 도형에서 삼각형은 몇 개인가?

풀이와 확인

위치 1과 4와 7과 10과 13과 16과 19에 있어 모두 7개다. 마지막 두 도형까지 포함하므로 20을 3으로 나눈 몫 6만 답으로 쓰면 첫 부분 하나를 빠뜨린다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

회전과 반사의 순서를 바꾸어 보기

같은 두 변환을 사용해도 실행 순서에 따라 문양의 위치가 달라진다.

좌표평면에서 가로 위치가 2이고 세로 위치가 1인 점을 고른다. 첫 변환은 원점을 중심으로 반시계 방향 90° 회전하는 것이다. 가로 x와 세로 y는 회전 뒤 가로 −y와 세로 x가 된다. 둘째 변환은 가로축에 대한 반사이며 가로 x와 세로 y를 가로 x와 세로 −y로 바꾼다.

회전을 먼저 하면 점은 가로 −1과 세로 2로 간다. 이어 반사하면 가로 −1과 세로 −2가 된다. 반대로 반사를 먼저 하면 가로 2와 세로 −1로 가고 이를 회전하면 가로 1과 세로 2가 된다. 마지막 두 위치는 원점을 사이에 두고 서로 마주한다.

두 과정은 모두 길이와 각을 보존하지만 결과는 같다 말할 수 없다. 변환을 합성할 때에는 어떤 규칙을 썼는지뿐 아니라 순서도 정보다. 타일 문양을 복제하는 작업 지시에서도 먼저 돌리고 뒤집으라는 말과 먼저 뒤집고 돌리라는 말은 구별해야 한다.

외곽이 원처럼 대칭적인 도형만 쓰면 순서 차이가 눈에 잘 드러나지 않는다. 비대칭 점이나 색 표지를 넣어 추적하는 까닭이 여기에 있다. 이번 좌표 실험은 전통 장인의 설계도를 복원한 것이 아니라 문양을 분석하는 현대 변환 언어를 익히는 활동이다.

실행 순서	첫 결과의 가로와 세로	마지막 가로와 세로
회전 후 반사	−1과 2	−1과 −2
반사 후 회전	2와 −1	1과 2

탐구

원점 자체로 같은 두 과정을 실행하면 결과가 같다는 사실이 두 변환의 순서가 언제나 무관함을 증명하는가?

풀이와 확인

아니다. 원점은 두 변환에서 모두 움직이지 않는 특별한 점이다. 모든 점에서 두 결과가 같아야 같은 변환이라고 할 수 있다. 가로 2와 세로 1인 점의 반례가 이미 두 합성이 다름을 보여 준다.

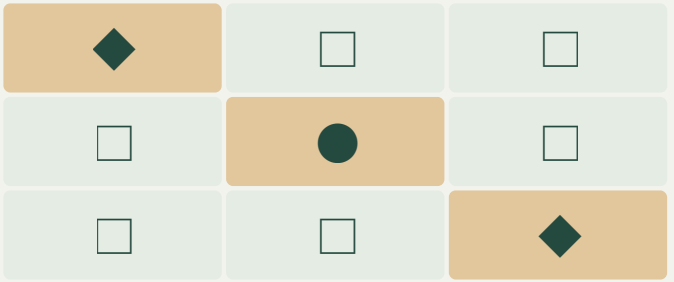
[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

문양 설계 활동의 해설

규칙과 결과를 함께 제시한다.

정사각형 타일 아홉 개를 3행 3열로 놓고 중앙만 진한 색으로 칠해 보자. 외곽과 색 배치는 90° 회전과 가로 및 세로 반사에 모두 겹친다. 대각선 반사도 가능하다. 이제 왼쪽 위 타일 하나를 다른 색으로 바꾸면 여러 대칭이 사라진다. 작은 수정이 전체 구조에 미치는 영향을 직접 확인할 수 있다.

설계 설명에는 타일의 크기와 배열과 색칠 규칙과 인정한 대칭을 적는다. 특정 지역의 전통 문양을 그대로 복원했다고 주장하려면 별도의 작품 자료가 필요하다. 이 활동은 기하 규칙을 새롭게 조합한 교육용 디자인이다. 역사적 미술을 존중하는 감상과 수학적 변환을 실험하는 창작을 연결하되 둘의 근거를 혼동하지 않는 것이 중요하다.



현대 재구성: 색 배치가 180° 회전을 보존한다.

탐구

중앙만 다른 색인 3행 3열 문양에 대각선으로 서로 마주한 두 모서리를 같은 새 색으로 칠하면 180° 회전은 남는가?

풀이와 확인

남는다. 두 모서리가 서로 바뀌고 나머지 같은 색 타일들도 같은 색 자리로 옮겨진다. 그러나 90° 회전에서는 칠하지 않은 다른 두 모서리로 이동하므로 그 대칭은 사라진다.

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art

이슬람 아랍관 / 55

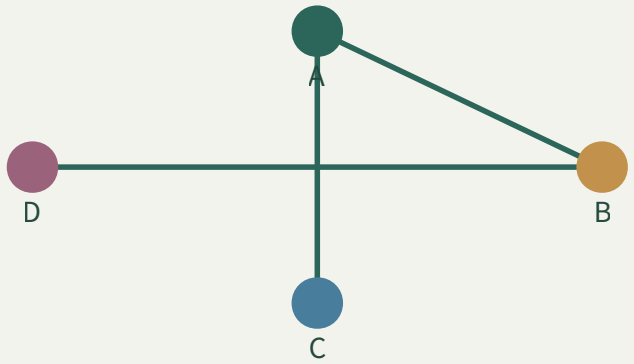
책과 증명이 건너간 길

전달은 한 방향의 선이 아니다

책은 번역과 해설과 새 문제를 만나 달라진다.

아랍어로 이루어진 수학 연구는 앞선 여러 언어의 자료를 받아들이면서 새로운 문제와 풀이를 만들어 냈다. 뒤에는 일부 저술이 라틴어 등으로 번역되어 다른 독자들과 만났다. 이 과정을 단순히 옛 지식을 보관했다가 넘겨준 일로만 설명하면 연구와 비판과 재구성의 역할이 사라진다. 각 책의 이동 경로는 구체적인 필사본과 번역 자료를 바탕으로 확인해야 한다.

가상의 원본 A가 번역 B와 해설 C로 이어지고 B가 다시 개정 D로 이어지는 모형을 그려 보자. D와 C는 공통된 출발점을 갖지만 직접 같은 책을 베낀 관계라고 단정할 수 없다. 연결망의 화살표에 번역과 개정과 인용을 구별해 적으면 책이 변한 방식을 더 정확히 설명할 수 있다. 하나의 선이 모든 종류의 관계를 대신하지 않도록 한다.



현대 재구성: 번역과 해설의 관계를 나타낸 가상 모형

탐구

A에서 B로 번역되고 B에서 D로 개정되었다면 A와 D의 문장이 완전히 같다고 할 수 있는가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 언어와 설명 및 문제 배열이 달라졌을 수 있다. 공통된 계통이라는 사실과 내용이 모두 동일하다는 주장은 다르므로 실제 대응 구절을 비교해야 한다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

문장식과 기호식의 사이

짧아진 표현에는 새로 익힐 약속이 들어 있다.

어떤 수를 세 배 하여 다섯을 더하면 스무넷이 된다는 문장을 3x+5=24로 옮길 수 있다. 기호식은 짧지만 x가 무엇을 가리키는지와 곱셈을 어떻게 생략하는지와 등호의 뜻을 알아야 읽을 수 있다. 짧다는 이유만으로 설명이 언제나 더 쉽지는 않다. 문장과 기호는 서로의 부족한 부분을 보완한다.

식을 풀면 3x=19이므로 x=19/3이다. 정수만 답으로 생각했다면 문제가 잘못되었다고 느낄 수 있지만 처음 문장은 정수라는 조건을 주지 않았다. 문장을 식으로 옮길 때 해의 범위까지 적으면 숨은 가정을 드러낼 수 있다. 역사적 저술을 현대 기호로 번역할 때도 원문이 다루는 크기와 수의 범위를 확인해야 한다.

$$\text{문장} \rightarrow 3x+5=24$$

$$3x=19$$

$$x=19/3$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

어떤 양에 그 절반을 더하면 9라는 문장을 식으로 쓰고 풀어라.

풀이와 확인

x+x/2=9로 쓰면 3x/2=9이므로 x=6이다. 검산하면 6+3=9다. 절반이 원래 양의 절반이라는 관계를 식의 x/2가 표현한다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

풀이의 줄을 줄여도 되는가

생략한 단계는 독자가 복원할 수 있어야 한다.

양의 길이 문제 $x^2+6x=16$에서 곧바로 x=2라고 적으면 정답은 보이지만 방법은 드러나지 않는다. 중간에 9를 더하여 $(x+3)^2=25$를 만들었다는 단계를 남기면 왜 2가 나왔는지 설명할 수 있다. 독자에 따라 필요한 중간 단계의 수는 다르지만 핵심 논리까지 생략하면 풀이가 검산 불가능한 선언처럼 보일 수 있다.

반대로 모든 작은 덧셈을 길게 풀어 쓰면 중요한 아이디어가 문장 사이에 묻힌다. 좋은 편집은 결정적인 변형을 드러내고 반복적인 계산은 표나 짧은 식으로 정리한다. 이 책의 문장과 도해도 같은 원칙으로 읽을 수 있다. 설명의 길이보다 독자가 어떤 근거로 다음 단계로 갈 수 있는지를 점검하자.

$$x^2+6x=16$$
$$x^2+6x+9=25$$
$$(x+3)^2=25$$
$$\text{양의 길이 } x=2$$

현대 재구성: 본문의 계산 관계

탐구

완전제곱 풀이에서 6을 반으로 나눈 3과 더한 9는 각각 무엇을 뜻하는가?

풀이와 확인

3은 모서리에 채울 정사각형의 한 변이고 9는 그 넓이다. 둘을 혼동하면 x^2+6x+3을 제곱식으로 잘못 읽게 된다. 핵심 단계는 반을 구한 다음 그 값을 제곱하는 것이다.

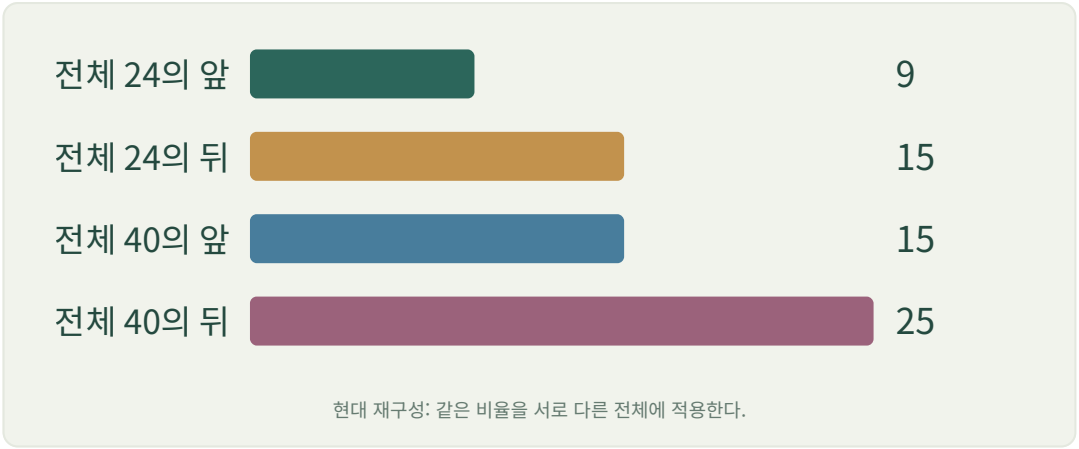
[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

서로 다른 풀이를 비교하기

같은 답에도 보존되는 정보가 다르다.

24를 3:5로 나누는 문제에서 전체 비의 합 8을 구하고 한 몫 3을 얻으면 두 부분은 9와 15다. 다른 방식으로 작은 부분을 x라 두고 큰 부분을 5x/3으로 두면 x+5x/3=24가 된다. 두 풀이가 같은 답에 도달하지만 첫 방식은 단위 비율이 잘 보이고 둘째 방식은 방정식으로 일반화하기 쉽다.

풀이의 우열을 속도만으로 정하면 설명의 목적을 놓칠 수 있다. 계산을 처음 배우는 사람에게는 몫 그림이 도움이 되고 복잡한 조건을 덧붙일 때에는 문자식이 유용할 수 있다. 옛 풀이와 오늘의 풀이를 비교할 때에도 당시 사용 가능한 표기와 독자의 목적을 고려해야 한다. 동일한 답이라는 사실은 비교의 끝이 아니라 구조를 살피는 출발점이다.



현대 재구성: 같은 비율을 서로 다른 전체에 적용한다.

탐구

40을 3:5로 나누고 24의 경우와 공통된 구조를 설명하라.

풀이와 확인

한 몫은 40÷8=5이므로 두 부분은 15와 25다. 두 경우 모두 전체를 여덟 몫으로 나눈 뒤 세 몫과 다섯 몫을 배정한다. 전체 양만 달라지고 비의 구조는 유지된다.

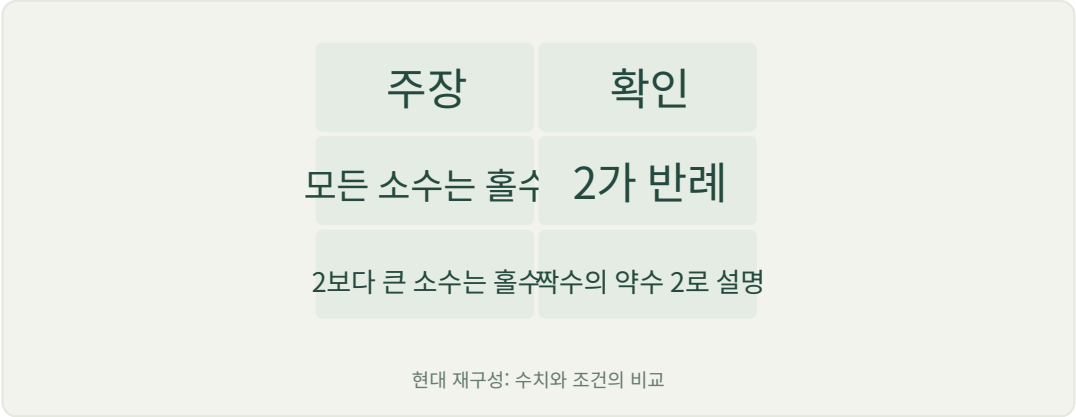
[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

반례를 남기는 편집

틀린 주장을 고치는 데에도 증거가 필요하다.

모든 소수는 홀수라는 문장은 2라는 반례 하나로 거짓임을 알 수 있다. 올바른 문장은 2보다 큰 모든 소수는 홀수다. 2보다 큰 짝수는 2를 약수로 가지므로 소수가 아니기 때문이다. 반례는 비난을 위한 예외 찾기가 아니라 주장의 범위를 정확하게 다듬는 도구다. 조건 하나가 빠지면 참인 내용도 거짓 문장이 될 수 있다.

책을 교정할 때에는 틀린 문장을 지우는 것에 그치지 않고 어떤 조건을 추가했는지 남기는 편이 좋다. 그래야 수정이 단순한 표현 변화인지 수학적 범위의 변경인지 판단할 수 있다. 역사적 문장을 현대적으로 재서술할 때도 같은 원칙이 필요하다. 원문에 없는 일반성을 덧붙이거나 중요한 제한을 생략하지 않는다.



현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

서로 다른 두 소수의 합은 언제나 짝수라는 주장에 반례를 제시하라.

풀이와 확인

2와 3을 더하면 5로 홀수다. 두 소수가 모두 2보다 크다는 조건을 추가하면 둘 다 홀수이므로 합은 짝수가 된다. 반례를 통해 빠진 조건을 찾을 수 있다.

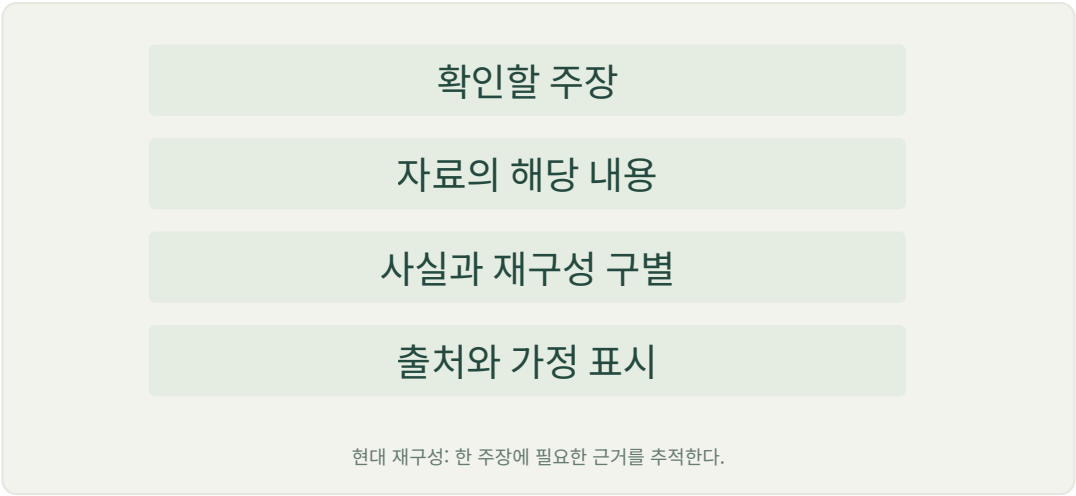
[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

출처 카드 만들기

주장과 근거를 한 줄씩 연결한다.

자료 카드에는 제목과 기관 및 주소와 확인 날짜를 적고 어떤 주장에 사용했는지 기록한다. 한 자료가 학자의 생애를 설명한다고 해서 그 자료가 책 속의 모든 계산 예제까지 제공한 것은 아니다. 원래 자료에서 확인한 역사적 사실과 이 책에서 새로 만든 수학 문제를 분리하면 독자가 어느 부분을 어디에서 확인할지 알 수 있다.

예를 들어 유물 설명은 제작 날짜와 재료를 뒷받침하고 현대 원의 공식은 교육용 원판의 호 길이를 계산한다. 두 종류의 근거가 한 페이지에 함께 있을 수 있다. 주소를 많이 모으는 것보다 각 문장이 실제로 그 자료에 의해 뒷받침되는지 확인하는 일이 중요하다. 인용한 자료의 범위를 넘어선 추측은 추측이라고 밝혀야 한다.



현대 재구성: 한 주장에 필요한 근거를 추적한다.

탐구

박물관 자료에 원판의 지름이 없는데 교육용 예제에서 지름 20cm를 사용했다면 어떻게 표시해야 하는가?

풀이와 확인

지름 20cm는 교육을 위해 정한 가정이라고 밝혀야 한다. 실제 유물의 치수처럼 적으면 출처가 뒷받침하지 않는 정보를 만들어 내게 된다. 자료의 빈칸과 계산을 위한 설정을 구별한다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

종합 문제를 한 장에 설계하기

대수와 비와 오차를 하나의 상황에 연결한다.

현대 재구성 작업실에서 직사각형 판의 짧은 변을 x와 긴 변을 x+4로 정하고 넓이를 45로 만들려 한다. 식은 $x(x+4)=45$다. 완전제곱으로 바꾸면 $(x+2)^2=49$이므로 양의 길이는 $x=5$다. 두 변은 5와 9이고 둘레는 28이다. 계산이 끝나면 처음 요구한 넓이와 길이의 차이를 다시 확인한다.

이 판을 모든 방향으로 1.2배 확대하면 변은 6과 10.8이 되고 넓이는 64.8이다. 넓이의 배수는 1.44이며 길이의 배수와 다르다. 제작 과정에서 길이를 반올림한다면 실제 넓이는 조금 달라질 수 있다. 하나의 문제에 여러 개념을 억지로 나열하기보다 앞의 결과가 다음 조건의 입력이 되도록 연결하면 종합 탐구가 된다.



현대 재구성: 닮은 확대에서 넓이는 확대율의 제곱만큼 변한다.

탐구

확대 후 긴 변 10.8을 11로 바꾸면 넓이는 얼마이며 목표와 얼마나 차이 나는가?

풀이와 확인

짧은 변 6을 유지하면 넓이는 66이다. 목표 64.8보다 1.2 크다. 길이를 0.2 늘린 변화가 폭 6 전체에 적용되어 $6\times0.2=1.2$의 넓이 차이를 만든다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

다음 관으로 가져갈 질문

서로 다른 전통을 같은 잣대 하나로 줄이지 않는다.

이 관에서 만난 계산은 자리값과 방정식과 약수 및 삼각형과 원의 관계를 사용했다. 다른 관에서도 비슷한 질문이 나타날 수 있지만 표기와 도구와 문제의 목적은 다를 수 있다. 비슷한 결과를 발견했다고 곧바로 직접 전승을 단정하지 않는다. 전달을 주장하려면 시간과 장소와 문헌의 연결을 보여 주는 별도의 근거가 필요하다.

비교 활동에서는 같은 문제를 두 가지 방식으로 풀고 각 풀이가 무엇을 쉽게 보이게 하는지 기록해 보자. 예를 들어 23×14를 넓이로 분할한 그림과 자리값을 맞춘 세로셈은 같은 분배 법칙을 다른 모양으로 드러낸다. 수학의 공통 구조를 찾는 즐거움과 역사적 차이를 남기는 태도를 함께 유지하면 다음 관의 자료도 더 세심하게 읽을 수 있다.

분할 방향	부분 합	전체
23을 분할	280+42	322
14를 분할	230+92	322

현대 재구성: 수치와 조건의 비교

탐구

23×14를 20×14+3×14와 23×10+23×4로 각각 계산하라.

풀이와 확인

첫 방식은 280+42=322이고 둘째 방식은 230+92=322다. 두 방식은 서로 다른 변을 먼저 나누었지만 같은 직사각형의 넓이를 빠짐없이 합한다. 계산의 일치는 역사적 직접 교류의 증거와는 구별해야 한다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics

이슬람 아랍관 / 56

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[network] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Arabic mathematics
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/HistTopics/Arabic_mathematics/

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Khwarizmi/

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Thabit/

[haytham] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Ibn al-Haytham
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Haytham/

[khayyam] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Omar Khayyam
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Khayyam/

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Tusi_Nasir/

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Al-Kashi/

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World
https://www.metmuseum.org/essays/astronomy-and-astrology-in-the-medieval-islamic-world

[pattern] 메트로폴리탄 박물관. Geometric Patterns in Islamic Art
https://www.metmuseum.org/essays/geometric-patterns-in-islamic-art

[astro-model] Dominic Ford. Building a Model Astrolabe. 2012
https://arxiv.org/abs/1202.2005

한국관 / 57

막대와 눈금과 책 사이에서



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

산가지와 관측 기구와 산서는 서로 다른 일을 맡는다. 막대는 계산하는 동안 값을 바꿀 수 있는 공간을 만들고 눈금은 관측한 현상을 일정한 기준으로 읽게 하며 책은 풀이를 다른 사람에게 전한다. 도구의 외형을 알아보는 데서 한 걸음 더 나아가 무엇을 바꿀 수 있고 무엇을 고정해야 하는지 물으면 각 장의 수학이 연결된다.

이 관에서는 계산의 단위를 정하는 문제에서 시작해 시간과 양을 측정하는 조건을 살핀다. 이어 수의 배열과 미지수를 다루는 방법을 읽고 회전과 그래프를 통해 현대 수학의 언어에 다가간다. 조선의 산서에 현대의 기호가 그대로 실려 있었다고 가정하지 않는다. 옛 기록을 설명하는 언어와 지금 새로 탐구하는 언어를 구별하면서 공통된 질문을 찾는다.

한국관 / 58

삼국과 고려의 산학

나라가 셈을 가르치다

1장 | 삼국과 고려의 산학

사람이 모여 사는 사회에는 계산해야 할 일이 생깁니다. 창고의 곡식을 기록하고 공사에 필요한 재료를 마련하며 토지의 크기를 비교해야 합니다. 계산이 틀리면 부담과 배분에도 차이가 생깁니다. 셈을 익힌 사람을 길러 내는 일은 나라의 운영을 뒷받침하는 업무였습니다.

신라 국학의 산학 교육은 이 관계를 보여 줍니다. 682년에 설치된 국학과 관련된 기록에는 산학을 가르치는 담당자와 교재 이름이 전합니다. 다만 학교의 설치 연도와 기록에 담긴 모든 세부 제도가 동시에 확정되었다고 단정할 필요는 없습니다.

고려의 국자감에서도 산학은 전문 교육의 한 분야였습니다. 오늘날 학교의 수학과 이름이 닮았지만 가르친 대상과 목적 및 내용은 같지 않습니다. 국가의 업무에 필요한 계산 전문가를 양성했다는 맥락에서 당시의 교육을 살펴보아야 합니다.

살림의 문제	필요한 수학적 생각
논밭을 비교한다	넓이와 단위
곡식을 나눈다	비율과 분수
일할 사람을 정한다	수량과 배분
계절과 날짜를 정한다	주기와 계산

읽기의 초점

산학을 현대 수학의 미완성 단계로만 보지 마세요. 어떤 업무를 해결하기에 적합한 지식이었는지 먼저 살펴봅시다.

계산 담당자의 확인 순서

곡식 장부에는 처음 양과 들어온 양과 내보낸 양을 구분해 적을 수 있습니다. 처음 300단위에서 120단위가 들어오고 75단위가 나갔다면 남은 양은 345단위입니다. 마지막 수만 남기지 않고 변화의 과정을 함께 기록해야 다른 사람도 계산을 확인할 수 있습니다.

역사 자료 [2] [6]

산학을 배운다는 것

업무를 해결하는 지식의 자리

오늘날의 수학 교실을 그대로 떠올리면 옛 산학 교육의 성격을 놓치기 쉽습니다. 산학은 나라를 운영하는 데 필요한 전문 지식과 연결되어 있었습니다. 계산을 맡은 사람에게는 수를 다루는 능력뿐 아니라 정해진 문서와 단위를 읽는 능력도 필요했습니다.

예를 들어 창고의 장부를 확인하려면 처음 보관한 양과 새로 들어온 양을 구별해야 합니다. 기록된 수가 크다고 해서 재산이 늘었다고 곧바로 판단할 수는 없습니다. 이미 내보낸 양이 빠졌는지와 여러 기록이 같은 기간을 가리키는지 먼저 살펴야 합니다.

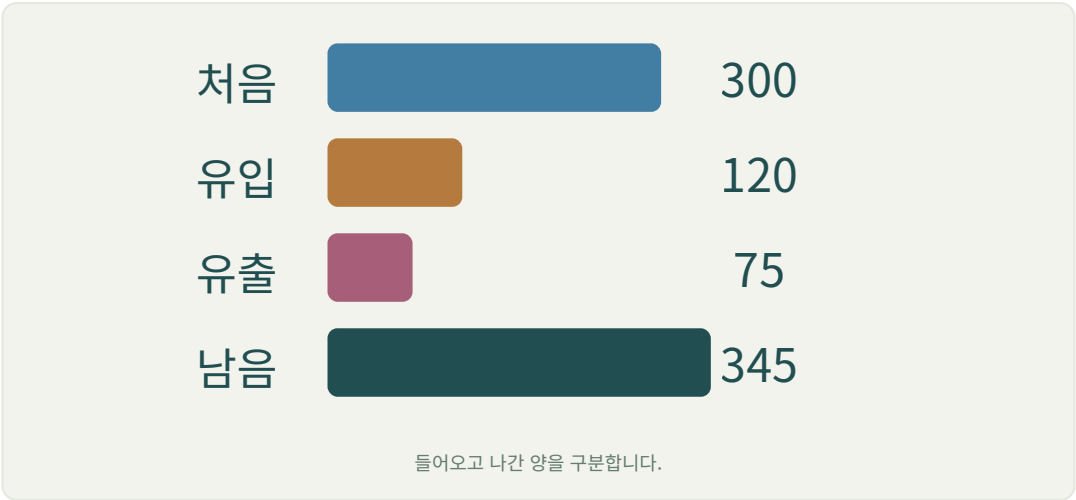
산학의 내용을 읽을 때는 어떤 일을 해결하려 했는지 묻는 편이 좋습니다. 오늘의 기호로 쉽게 나타낼 수 있는 계산에도 실제 업무에서는 여러 판단이 필요합니다. 문제를 수식으로 바꾸기 전에 대상과 기준을 정하는 일은 지금도 수학을 사용하는 과정의 일부입니다.

확인할 것	창고 장부에서의 예
대상	어떤 곡식을 세었는가?
단위	모든 기록의 한 단위가 같은가?
기간	언제부터 언제까지의 출납인가?
관계	처음 양 + 들어온 양 − 나간 양 = 남은 양

> **자료 읽기**
>
> 산학 교육의 존재를 확인하는 기록과 실제 수업 장면을 자세히 복원하는 자료는 다릅니다. 확인된 범위를 넘어 구체적인 일과를 상상해 쓰지 않도록 주의합니다.

장부에서 지켜지는 관계

남은 양에서 처음 양을 빼면 순증가량이 됩니다. 345 − 300 = 45이며 들어온 양에서 나간 양을 뺀 120 − 75와 같습니다. 서로 다른 두 계산이 같은 변화를 설명하는지 확인하면 누락된 기록을 찾는 데 도움이 됩니다.



역사적 배경 [6] | 장부 예시는 창작

숫자보다 먼저 정할 단위

한 되와 한 자를 읽기 위한 준비

측정값은 수와 단위가 함께 있을 때 뜻이 분명해집니다. 길이가 12라고만 적혀 있다면 크기를 판단하기 어렵습니다. 무엇을 기준으로 열두 번 잰 것인지 알아야 다른 길이와 비교할 수 있습니다. 옛 기록을 읽을 때도 단위 이름을 건너뛰어서는 안 됩니다.

같은 단위 이름이 모든 시대와 지역에서 정확히 같은 크기를 뜻한다고 가정하는 일도 조심해야 합니다. 역사적 환산에는 해당 시기의 제도와 실제 사용례를 확인하는 과정이 필요합니다. 이 책은 계산 원리를 설명하는 활동에서 현대 단위를 사용하고 당시의 수치와 구별합니다.

단위를 바꿀 때 보존되어야 하는 것은 대상의 실제 크기입니다. 길이 1 m를 100 cm로 써도 막대가 길어지지 않습니다. 단위가 작아지면 같은 크기를 나타내는 수가 커집니다. 이 관계를 이해하면 단위 변환을 암기한 규칙이 아니라 같은 양을 다시 표현하는 일로 볼 수 있습니다.

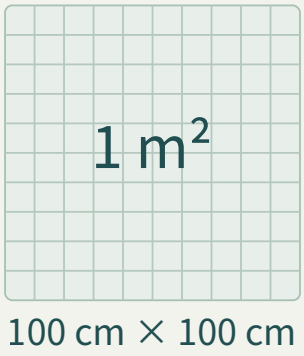
같은 대상	큰 단위로 표현	작은 단위로 표현
길이	2 m	200 cm
넓이	2 m^2	20 000 cm^2
부피	2 m^3	2 000 000 cm^3

단위가 달라질 때

길이의 환산 배수가 넓이와 부피에 그대로 적용되지 않는 까닭을 생각해 보세요. 넓이는 두 방향의 길이로 이루어집니다.

넓이의 환산을 직접 세기

한 변이 1 m인 정사각형의 각 변을 100 cm로 나타내면 안에는 1 cm^2짜리 정사각형이 100 × 100개 들어갑니다. 따라서 1 m^2는 100 cm^2가 아니라 10 000 cm^2입니다. 단위 이름만 바꾸기보다 작은 단위가 몇 번 들어가는지 세어 보면 환산 배수가 드러납니다.



작은 칸의 한 변은 10 cm입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

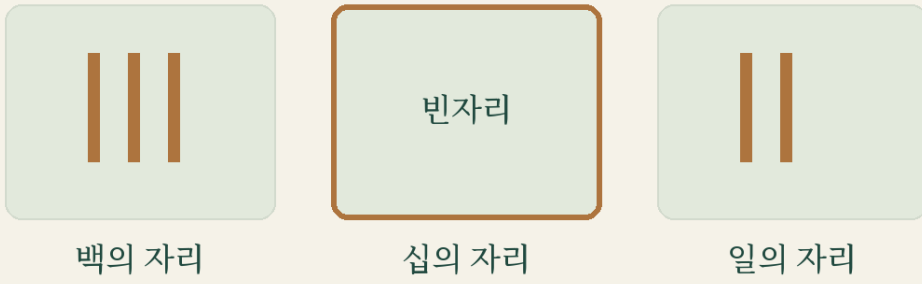
산가지의 빈자리

아무것도 놓지 않은 자리도 정보를 담습니다.

산가지는 작은 막대를 놓고 옮기며 수를 나타내고 계산하는 도구입니다. 수의 크기를 알려면 막대의 개수와 놓인 자리를 함께 보아야 합니다. 오늘날 숫자 2가 2와 20과 200에서 서로 다른 값을 나타내듯이 산가지의 자리도 수의 뜻을 결정합니다.

전통적인 산가지 표기에서는 이웃한 자릿수의 막대 방향을 번갈아 바꾸어 구별했습니다. 수가 0인 자리는 비워 두었습니다. 302를 나타낼 때 십의 자리가 비어 있어야 백의 자리와 일의 자리가 서로 섞이지 않습니다. 빈자리는 계산에 필요한 정보를 보존합니다.

덧셈에서 한 자리에 열 개가 모이면 바로 왼쪽 자리의 하나로 바꿀 수 있습니다. 받아올림은 외워야 할 신호이기 전에 같은 양을 다른 단위로 표현하는 교환입니다. 막대를 직접 옮겨 보면 계산 절차와 수의 구조를 함께 볼 수 있습니다.



302의 자리값을 차례로 살펴봅니다. 전통 산가지 전체 표기의 복원도는 아닙니다.

작은 탐구 A

302와 32를 구별하는 정보는 무엇인가요? 28 + 17을 계산할 때 일의 자리에서 일어난 교환을 말로 설명해 보세요.

빈자리 두 개가 있는 수

3002에는 십의 자리와 백의 자리가 모두 비어 있습니다. 이를 32와 구별하려면 두 빈자리의 위치를 보존해야 합니다. 302에 10을 더하면 312가 되고 3002에 10을 더하면 3012가 됩니다. 같은 덧셈도 어느 자리에 작용하는지 살피면 수의 차이를 분명히 볼 수 있습니다.

전시와 도구 설명 [2] | 탐구 A 해설 521쪽

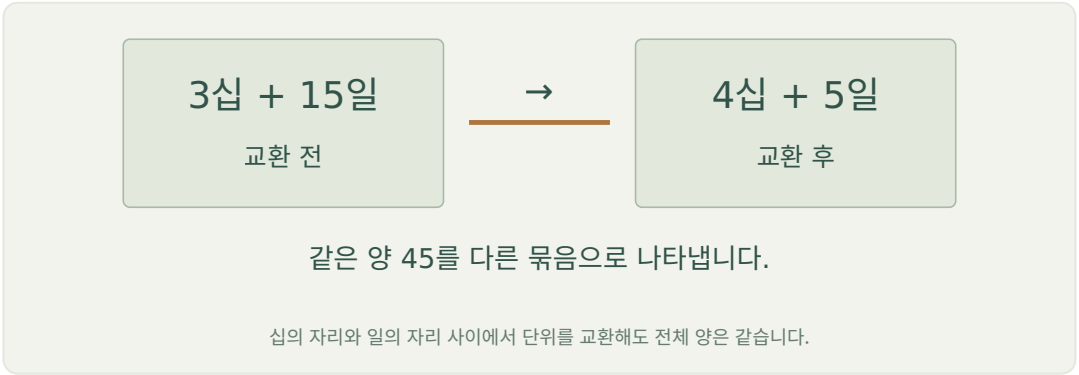
받아올림을 교환으로 보기

열 개를 하나로 바꾸어도 양은 같습니다.

28과 17을 더할 때 먼저 일의 자리에서 8과 7을 합하면 15가 됩니다. 이 중 열 개를 십의 자리 하나로 옮기면 일의 자리에는 다섯 개가 남습니다. 십의 자리에는 원래 있던 두 개와 한 개에 새로 옮긴 한 개가 더해집니다. 결과는 45입니다.

받아올림은 숫자를 위에 작게 적는 동작만을 뜻하지 않습니다. 같은 양을 더 큰 단위로 묶어 바꾸는 과정입니다. 자리마다 열 배의 관계가 유지되기 때문에 옮기는 규칙도 일정합니다. 어떤 단계에서도 전체 양은 달라지지 않습니다.

뺄셈의 받아내림은 이 교환을 반대로 이용합니다. 43에서 18을 빼려면 십의 자리 하나를 일의 자리 열 개로 바꿉니다. 그러면 43은 십 세 개와 일 열세 개가 됩니다. 표기가 달라졌어도 같은 양이므로 남은 양을 안전하게 계산할 수 있습니다.



십의 자리와 일의 자리 사이에서 단위를 교환해도 전체 양은 같습니다.

계산을 설명하기

답만 말하지 말고 어느 단위를 어느 단위로 바꾸었는지 설명해 보세요. 43 − 18 = 25를 덧셈으로도 확인할 수 있습니다.

계산을 반대로 확인하기

43 − 18 = 25를 얻었다면 25 + 18 = 43인지 확인할 수 있습니다. 뺄셈에서는 십 하나를 일 열 개로 바꾸었고 검산의 덧셈에서는 일 열 개를 십 하나로 바꿉니다. 서로 반대인 교환을 따라가면 두 계산이 같은 양의 관계를 나타낸다는 사실이 보입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

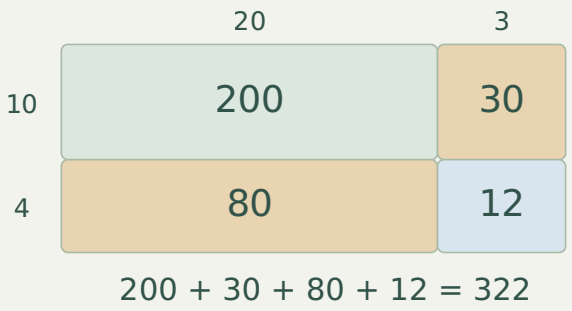
곱셈을 넓이로 펼치다

계산의 단계를 보이게 만드는 그림

23 × 14를 한 번에 계산하기 어렵다면 두 수를 나누어 생각할 수 있습니다. 23은 20 + 3이고 14는 10 + 4입니다. 가로 23과 세로 14인 직사각형을 이 길이에 맞추어 나누면 네 개의 작은 직사각형이 생깁니다.

각 부분의 넓이는 200과 30과 80과 12입니다. 네 넓이를 더하면 전체 넓이 322를 얻습니다. 어느 부분도 겹치지 않고 빠지지 않았으므로 나누어 계산한 결과와 한 번에 구한 결과가 같습니다. 세로셈에서 부분곱을 적는 절차도 이 관계로 이해할 수 있습니다.

그림은 분배법칙을 설명하는 교육용 표현입니다. 이를 특정 시대의 산학 수업에서 그대로 사용한 그림이라고 생각해서는 안 됩니다. 역사 속 계산을 오늘의 언어로 이해하는 일과 당시의 계산판을 복원하는 일은 구별해서 진행합니다.



두 길이를 나누어 만든 네 부분의 넓이를 합합니다. 길이는 도식적으로 표시했습니다.

전개해서 계산하기

19 × 21은 (20 − 1) × (20 + 1)로 바꾸어 계산할 수도 있습니다. 두 방법으로 계산하면 모두 399가 되는지 확인해 보세요.

가까운 수로 다시 계산하기

23 × 14를 23 × (15 − 1)로 보아도 됩니다. 23 × 15 = 345에서 23을 빼면 322입니다. 네 부분의 넓이를 더한 결과와 일치합니다. 여러 풀이를 비교할 때는 빠르기만 보지 말고 어느 계산이 머릿속에서 수의 관계를 더 쉽게 유지하게 하는지 살펴보세요.

수학 개념 해설과 창작 탐구

나눗셈에 남는 두 가지 질문

몇 묶음인가와 한 묶음에 얼마인가

곡식 48단위를 한 자루에 6단위씩 담는다면 자루가 몇 개 필요한지 묻게 됩니다. 반대로 48단위를 여섯 자루에 똑같이 나누어 담는다면 한 자루의 양을 묻게 됩니다. 두 문제 모두 48 ÷ 6으로 계산하지만 답이 가리키는 대상은 다릅니다.

나눗셈을 이해하려면 계산식에 단위를 붙여 보는 것이 좋습니다. 앞의 문제에서 6은 한 자루에 담는 곡식의 양입니다. 뒤의 문제에서 6은 자루의 수입니다. 숫자가 같더라도 어떤 양으로 나누었는지에 따라 몫의 단위가 달라집니다.

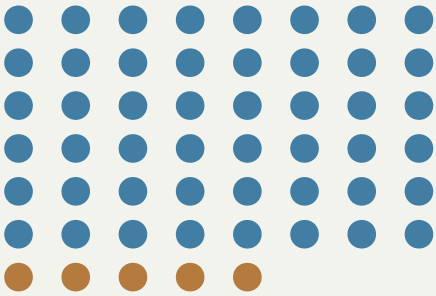
남는 양이 있을 때는 현실의 조건을 확인해야 합니다. 곡식 50단위를 한 자루에 최대 6단위씩 담으면 여덟 자루를 채우고 2단위가 남습니다. 남은 곡식도 운반해야 한다면 아홉 번째 자루가 필요합니다. 계산의 나머지가 실제 업무에서 어떤 뜻인지 해석해야 답이 완성됩니다.

질문	계산	답의 뜻
48을 6씩 담으면?	48 ÷ 6 = 8	자루 8개
48을 여섯 자루로 나누면?	48 ÷ 6 = 8	자루마다 8단위
50을 최대 6씩 모두 담으면?	50 = 6 × 8 + 2	자루 9개 필요

> **새 탐구 1**
>
> 사람 53명이 한 대에 8명까지 탈 수 있는 배를 이용합니다. 한 번에 모두 이동하려면 배가 최소 몇 대 필요한가요?해설 524쪽

나머지를 묶음에 넣기

53명을 여덟 명씩 나누면 여섯 묶음과 다섯 명이 남습니다. 여섯 대의 정원 48명이 이미 찼으므로 남은 다섯 명에게는 일곱 번째 배가 필요합니다. 반면 배 한 대의 평균 탑승 인원을 묻는다면 사람 수를 실제 배의 수로 나누는 다른 계산이 필요합니다.



마지막 다섯 명도 배가 필요합니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

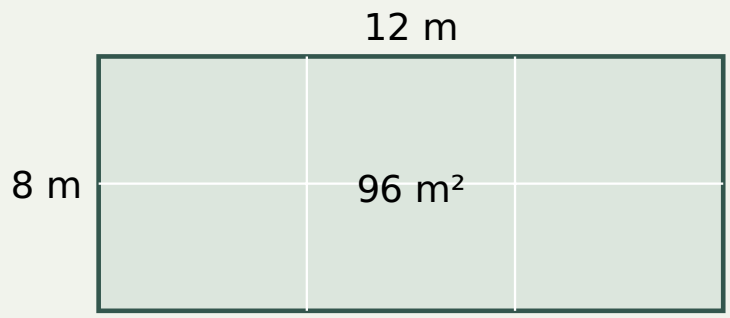
땅을 재는 일의 두 단계

도형을 계산하기 전에 측정 기준을 정합니다.

토지의 넓이를 구하려면 경계를 정하고 길이를 측정하는 일이 먼저입니다. 굽은 경계를 어떤 도형으로 나타낼지와 경사진 땅의 어떤 면을 잴지도 결정해야 합니다. 수치가 정밀해 보여도 측정 대상과 기준이 불분명하면 결과를 바르게 해석하기 어렵습니다.

직사각형 모양의 밭을 생각해 봅시다. 가로가 12 m이고 세로가 8 m라면 넓이는 96 m^2입니다. 같은 길이를 다른 단위로 쓰더라도 실제 넓이는 바뀌지 않습니다. 하지만 길이의 단위를 두 배 크게 정하면 길이의 수치는 절반이 되고 넓이의 수치는 네 분의 일이 됩니다.

역사 속 조세는 넓이 하나만으로 결정되지 않았습니다. 토지의 질과 수확 조건과 시대별 제도가 함께 작용했습니다. 그러므로 넓이와 세금을 곧바로 같은 것으로 놓는 설명은 교육용 단순화임을 밝혀야 합니다. 수학적 모형이 현실의 어떤 조건을 남기고 어떤 조건을 생략했는지 확인하는 태도가 필요합니다.



현대 단위를 사용한 교육용 예시입니다.

작은 탐구 B

위 밭에서 넓이 1 m²마다 씨앗 3 g을 뿌리려 합니다. 필요한 씨앗은 얼마인가요? 비탈진 실제 땅에도 이 계산을 그대로 적용할 수 있을까요?

측정 오차가 넓이에 미치는 영향

가로 12 m를 실제보다 0.1 m 길게 읽고 세로 8 m는 정확히 읽었다면 계산한 넓이는 96.8 m²입니다. 가로의 작은 차이가 세로 8 m 전체에 걸쳐 더해집니다. 결과에 소수 자릿수가 많다는 사실만으로 측정이 정밀하다고 판단할 수는 없습니다.

역사적 맥락 [2] | 탐구 B 해설 521쪽

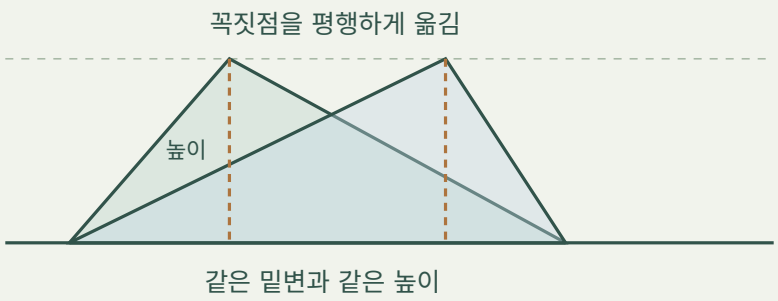
같은 넓이를 다른 모양으로

잘라 옮겨도 보존되는 양을 찾습니다.

직사각형의 넓이는 가로와 세로의 곱으로 구합니다. 삼각형의 넓이도 이 관계에서 출발할 수 있습니다. 한 삼각형과 합동인 삼각형을 하나 더 만들어 맞추면 평행사변형이 되고 그 넓이는 밑변과 높이의 곱입니다. 삼각형 하나의 넓이는 그 절반이 됩니다.

여기서 높이는 기울어진 변의 길이가 아닙니다. 밑변이 놓인 직선에서 맞은편 꼭짓점까지 수직으로 잰 거리입니다. 밑변을 그대로 두고 꼭짓점을 밑변과 평행한 방향으로 옮기면 모양은 변하지만 높이는 변하지 않습니다. 따라서 넓이도 같습니다.

넓이를 구하는 공식은 모양마다 외워야 하는 별개의 약속만은 아닙니다. 이미 아는 도형으로 나누거나 옮겨 붙이면서 보존되는 양을 찾을 수 있습니다. 토지를 평면 도형으로 나타낼 때도 먼저 어느 길이가 밑변과 높이에 해당하는지 분명히 해야 합니다.



색이 다른 두 삼각형은 꼭짓점의 위치가 달라도 넓이가 같습니다.

새 탐구 2

밑변이 10 m이고 높이가 6 m인 삼각형에서 꼭짓점을 밑변과 평행하게 4 m 옮겼습니다. 넓이는 어떻게 될까요?해설 524쪽

높이를 어디에서 잴까

삼각형의 꼭짓점이 밑변의 바깥쪽 위로 옮겨 가도 높이는 밑변이 놓인 직선까지 수직으로 잽니다. 수선의 발이 도형 밖에 놓일 수 있지만 넓이 공식은 같습니다. 높이를 항상 삼각형 안에 그려야 한다고 생각하면 둔각삼각형을 읽을 때 막히기 쉽습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

울타리와 씨앗은 다른 양을 묻는다

둘레와 넓이를 구별하는 이유

밭에 울타리를 두르는 문제와 씨앗을 뿌리는 문제는 같은 땅을 바라보지만 필요한 양이 다릅니다. 울타리의 길이는 경계를 따라 잰 둘레로 결정됩니다. 씨앗의 양은 일정한 밀도로 뿌린다는 조건 아래 땅의 넓이에 비례합니다.

가로 12 m와 세로 8 m인 직사각형의 둘레는 40 m이고 넓이는 96 m^2입니다. 가로 15 m와 세로 5 m인 직사각형도 둘레는 40 m입니다. 그러나 넓이는 75 m^2이므로 두 밭에 필요한 씨앗의 양은 다릅니다. 같은 둘레가 같은 넓이를 보장하지 않습니다.

문제의 숫자를 보자마자 공식을 고르기보다 무엇을 구하는지 먼저 말로 풀어 보세요. 경계를 따라가는 길이인지 표면을 덮는 크기인지 구별하면 단위도 자연스럽게 정해집니다. 계산을 마친 뒤에는 답의 단위가 질문과 맞는지 확인하는 습관이 도움이 됩니다.

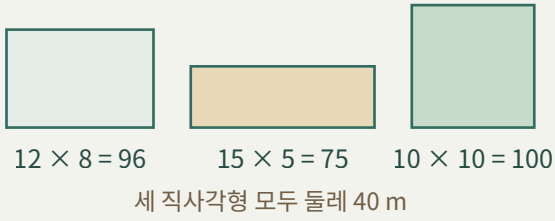
가로와 세로	둘레	넓이
12 m와 8 m	40 m	96 m²
15 m와 5 m	40 m	75 m²
10 m와 10 m	40 m	100 m²

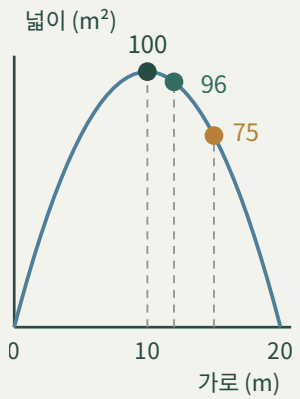
더 생각할 거리

둘레가 40 m인 직사각형을 여러 개 그려 보세요. 가로와 세로가 서로 가까워질수록 넓이에 어떤 변화가 있는지 비교할 수 있습니다.

같은 둘레에서 넓이 비교하기

둘레가 40 m이면 가로와 세로의 합은 20 m입니다. 두 길이를 10 + d와 10 − d로 놓으면 넓이는 100 − d²입니다. 두 길이의 차이가 커질수록 d²가 커져 넓이는 줄어듭니다. 직사각형들 가운데 정사각형에서 넓이가 가장 큰 이유를 이 식으로 설명할 수 있습니다.





둘레 40 m인 직사각형은 정사각형일 때 넓이가 가장 큽니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

분수는 전체를 정한 뒤에 읽는다

절반이라는 말에 빠진 정보를 찾습니다.

절반을 나누었다는 말만으로 실제 양을 알 수는 없습니다. 곡식 20단위의 절반과 50단위의 절반은 서로 다릅니다. 분수는 전체와 부분의 관계를 나타내므로 무엇을 전체로 놓았는지 먼저 밝혀야 합니다.

같은 크기의 밭에서 삼분의 일과 사분의 일을 합친다고 생각해 봅시다. 두 부분을 비교하려면 같은 크기의 조각으로 나누어야 합니다. 전체를 열두 조각으로 나누면 삼분의 일은 네 조각이고 사분의 일은 세 조각입니다. 합은 열두 조각 중 일곱 조각이 됩니다.

통분은 분모를 맞추는 형식적인 조작이기 전에 비교 단위를 같게 만드는 과정입니다. 분모와 분자에 같은 수를 곱하면 조각의 크기는 작아지고 조각의 수는 그만큼 늘어납니다. 부분이 차지하는 실제 크기는 그대로 유지됩니다.

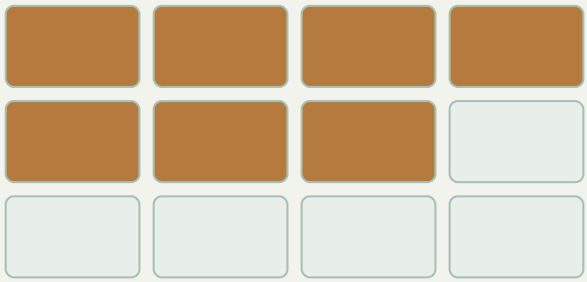
표현	열두 조각으로 다시 표현
전체의 1/3	전체의 4/12
전체의 1/4	전체의 3/12
두 부분의 합	전체의 7/12

새 탐구 3

곡식 60단위 가운데 1/3을 먼저 쓰고 처음 양의 1/4을 더 썼습니다. 남은 양은 얼마인가요? 두 번째 분수의 기준이 처음 양이라는 점을 확인하세요.해설 524쪽

같은 분수를 두 방식으로 읽기

처음 양의 1/3과 1/4을 사용하면 쓴 비율은 7/12이고 남은 비율은 5/12입니다. 처음 양이 60단위라면 60 × 5/12 = 25단위가 남습니다. 각각의 사용량을 빼는 풀이와 남은 비율을 먼저 구하는 풀이가 같은 결과를 주는지 비교해 보세요.



사용 7/12 / 남음 5/12

같은 크기의 열두 조각으로 나눕니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

첨성대 앞에서 멈추다

관찰한 사실과 붙인 해석을 구별합니다.

경주의 첨성대는 한국의 오래된 천문 전통을 떠올리게 합니다. 돌을 쌓은 구조와 창의 위치와 높이는 실제로 살필 수 있는 대상입니다. 이 구조가 어떻게 사용되었는지를 설명하는 일에는 문헌과 비교 자료와 해석이 더 필요합니다.

돌의 수나 층수를 달력의 수와 연결하는 이야기는 기억에 남기 쉽습니다. 그러나 숫자가 비슷하다는 사실만으로 건축자의 의도를 확정할 수는 없습니다. 어떤 수를 셌는지부터 확인해야 합니다. 보이지 않는 부분이나 보수된 부분을 포함하는 기준에 따라 셈이 달라질 수 있기 때문입니다.

수학을 이용한 해석은 근거를 분명하게 만들기도 하지만 우연한 일치를 과장하기도 합니다. 첨성대를 읽을 때도 관측 시설이라는 전통적 이해와 구체적인 사용 방식에 관한 논의를 구별해야 합니다. 숫자의 상징을 설명하려면 그 해석을 뒷받침할 자료가 있는지 함께 확인합니다.

유적을 방문할 때는 숫자를 찾아내는 활동으로 끝내지 말고 주장과 근거를 짝지어 기록해 보세요. 어떤 설명은 눈으로 확인할 수 있고 어떤 설명은 별도의 자료를 찾아야 한다는 사실이 보일 것입니다.

진술의 종류	물어볼 질문
관찰	직접 보고 재거나 셀 수 있는가?
문헌 기록	어느 자료의 어떤 기록인가?
해석	다른 설명도 가능한가?
교육용 상상	실제 역사와 구별해 표시했는가?

관찰을 기록하는 문장

돌이 몇 개 보인다는 진술에는 관찰한 면과 가려진 부분을 처리한 기준을 함께 적어야 합니다. 그 수가 특정한 주기를 상징한다는 진술에는 별도의 근거가 필요합니다. 한 문장에 관찰과 해석을 섞기보다 나누어 적으면 무엇을 직접 확인했는지 분명해집니다.

전시의 신중한 해석을 따름 [2]

그림의 축척을 읽다

작은 도면이 실제 크기를 담는 방법

지도와 설계도는 큰 대상을 종이 위에 옮깁니다. 모든 길이를 같은 비율로 줄이면 모양의 관계를 유지할 수 있습니다. 축척 1:100인 도면에서 1 cm는 실제 100 cm에 해당합니다. 도면의 길이와 실제 길이를 연결하는 약속이 축척입니다.

길이를 백 분의 일로 줄였다고 해서 넓이도 백 분의 일이 되는 것은 아닙니다. 가로와 세로가 각각 줄어들기 때문에 넓이는 만 분의 일이 됩니다. 도면에서 잰 넓이를 실제 넓이로 바꿀 때는 길이의 비를 두 번 적용해야 합니다.

도면은 필요한 정보를 선택해 표현한 것입니다. 울퉁불퉁한 지표면의 모양이나 건물의 높이를 평면도 하나로 모두 알 수는 없습니다. 축척이 정확하더라도 무엇을 투영하고 무엇을 생략한 도면인지 확인해야 실제 대상과 바르게 연결할 수 있습니다.

축척 1:100	도면	실제
가로	12 cm	12 m
세로	8 cm	8 m
넓이	96 cm^2	96 m^2

모형을 읽는 질문

축척이 표시되지 않은 그림에서 길이를 재어 실제 크기를 알아낼 수 있을까요? 그림의 모양과 치수 정보는 구별해야 합니다.

축척이 절반이 되면

같은 대상을 1:100 대신 1:200으로 그리면 도면의 가로와 세로는 각각 절반이 됩니다. 종이에서 차지하는 넓이는 사분의 일이 됩니다. 작은 도면을 다시 두 배 확대하면 길이는 원래 도면과 같아지지만 확대 과정에서 새로운 측정 정보가 생기는 것은 아닙니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

산원의 계산을 다시 해 보다

활동 1 | 배분의 기준은 누가 정할까요?

세 마을이 둑을 고치기 위해 공동으로 곡식 240단위를 모았습니다. 일한 날수를 기준으로 나누기로 했고 각 마을의 노동량은 2일과 3일과 5일입니다. 이 수치는 역사 기록을 재현한 것이 아니라 비례배분을 생각하기 위한 가상 조건입니다.

먼저 전체 노동량을 몇 몫으로 나눌 수 있는지 구합니다. 이어 한 몫의 양을 정해 각 마을에 배분합니다. 계산이 끝나면 세 몫의 합이 전체 양과 같은지 확인하세요. 각 결과를 해당 노동일수로 나눈 값도 비교하면 비례 관계가 유지되는지 검산할 수 있습니다.

이번에는 두 번째 마을에서 하루에 일한 사람이 다른 마을보다 두 배 많았다는 조건을 추가해 보세요. 일수만으로 나누는 것이 적절할까요? 사람 수까지 반영하려면 어떤 자료가 더 필요할까요? 계산의 정확성과 배분 기준의 타당성은 서로 다른 문제입니다.

마을	기록된 일수	배분한 곡식
가	2	_____
나	3	_____
다	5	_____
합계	10	240

토론하고 기록하기

같은 계산 결과라도 공정하다고 느끼는 정도가 다를 수 있습니다. 자신이 선택한 배분 기준과 그 이유를 두 문장으로 적어 보세요. HTML의 쪽 메모에 답을 남겨도 좋습니다.

사람 수까지 반영한 배분

각 마을의 하루 인원이 10명과 20명과 10명이며 작업 시간이 같다고 가정하면 노동량은 20과 60과 50인일입니다. 비는 2:6:5로 바뀝니다. 일수의 비 2:3:5를 그대로 쓰는 계산과는 다른 기준입니다. 어느 기준을 택했는지 먼저 밝힌 뒤 배분해야 합니다.

창작 탐구 | 해설 521쪽

비례배분의 검산

합과 비율을 함께 확인합니다.

전체 240을 2:3:5의 비로 나누면 한 몫은 24입니다. 각 몫은 48과 72와 120이 됩니다. 합이 240이라는 사실은 필요한 검산이지만 그것만으로 배분이 옳다고 확정할 수는 없습니다. 40과 80과 120도 합은 같기 때문입니다.

비례배분에서는 각 결과를 해당 비의 수로 나눈 값이 같아야 합니다. 48 ÷ 2와 72 ÷ 3과 120 ÷ 5가 모두 24인지 확인하면 각 몫이 같은 기준으로 만들어졌음을 알 수 있습니다. 합의 조건과 비율의 조건은 서로 다른 부분을 검사합니다.

이런 검산은 계산을 그대로 한 번 더 하는 일과 다릅니다. 처음 풀이와 다른 관계를 이용하면 같은 실수를 반복할 가능성을 줄일 수 있습니다. 답을 원래 조건에 넣어 보는 습관은 비례 문제뿐 아니라 방정식과 도형 문제에서도 유용합니다.

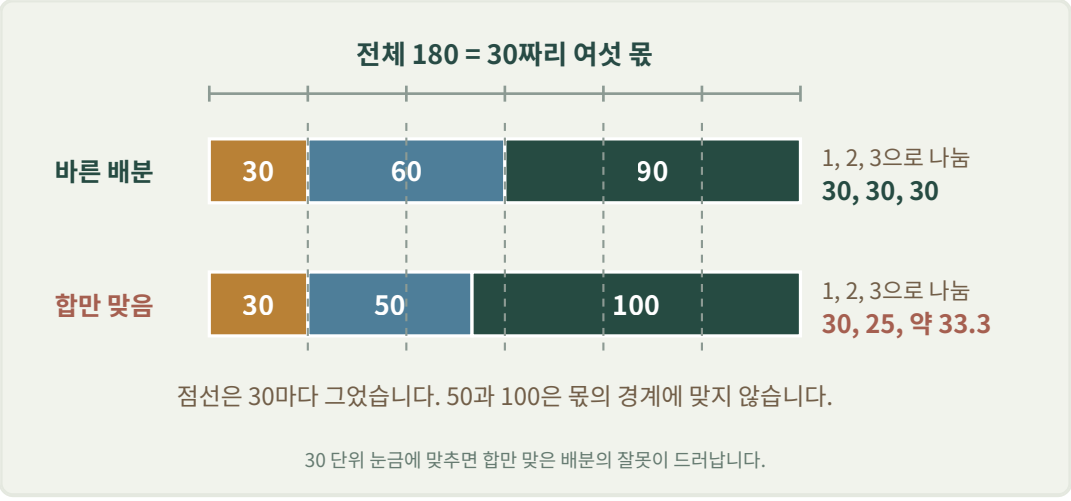
후보	합이 240인가?	2:3:5인가?
48 / 72 / 120	맞음	맞음
40 / 80 / 120	맞음	아님
24 / 36 / 60	아님	맞음

새 탐구 4

곡식 180단위를 1:2:3의 비로 나누어 보세요. 세 결과의 합과 각 결과를 비의 수로 나눈 값을 모두 확인합니다.해설 524쪽

검산에서 드러나는 잘못

전체 180을 1:2:3으로 나눌 때 30과 50과 100을 얻었다면 합은 맞습니다. 그러나 각 결과를 1과 2와 3으로 나눈 값은 서로 다릅니다. 합을 확인하는 검산만 했다면 놓칠 수 있는 오류입니다. 답의 조건마다 대응하는 확인 방법을 마련해야 합니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

첫 전시실에서 가져갈 생각

계산은 기준을 세우는 일에서 시작합니다.

산가지의 자리는 수의 크기를 정하고 측정 단위는 길이와 넓이의 뜻을 정합니다. 배분 문제에서는 어떤 노동량을 기준으로 삼는지가 각자의 몫을 결정합니다. 계산을 시작하기 전에 기준을 정해야 한다는 사실이 여러 문제를 관통합니다.

정확한 계산도 잘못된 조건을 바로잡지는 못합니다. 서로 다른 크기의 단위를 같은 것으로 취급하거나 필요한 사람 수를 빠뜨리면 연산이 모두 맞아도 결과는 현실과 어긋납니다. 풀이를 검토할 때 숫자뿐 아니라 문제를 수식으로 바꾸는 과정도 돌아봐야 합니다.

다음 전시실에서는 눈앞의 땅과 곡식에서 하늘과 시간으로 시선을 옮깁니다. 직접 잡아 둘 수 없는 움직임을 어떻게 측정하고 기록했는지 살펴봅니다. 여기서 익힌 단위와 비례의 생각이 물시계와 강수량의 원리를 이해하는 데 다시 쓰입니다.

배운 개념	스스로 설명해 볼 내용
자리값	같은 막대가 자리마다 다른 값을 갖는 이유
단위	길이의 환산과 넓이의 환산이 다른 이유
비례	한 몫을 정한 뒤 전체를 배분하는 과정
검산	합이 맞아도 답이 틀릴 수 있는 이유

> **짧은 글쓰기**
>
> 첫 전시실의 예 하나를 골라 문제의 기준과 계산 방법과 확인 방법을 한 문단으로 이어 써 보세요. 용어를 나열하기보다 풀이의 흐름을 설명합니다.

단위에서 측정으로 건너가기

이 장의 계산은 대상을 같은 기준으로 나타내는 데서 시작했습니다. 다음 장에서는 시간과 하늘의 움직임에도 기준을 붙입니다. 관측 도구의 눈금을 읽는다는 것은 변화하는 현상을 정해진 수의 체계로 옮기는 일입니다. 그 과정에서도 단위와 검산의 생각이 다시 필요합니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

한국관 / 59

조선의 시간과 측정

하늘을 읽어 생활을 맞추다

2장 | 세종의 하늘

달력은 날짜를 적은 표이면서 앞으로 일어날 변화를 예상하는 도구입니다. 농사와 의례와 행정의 일정은 계절과 해와 달의 움직임을 알아야 정할 수 있었습니다. 하늘을 관측하는 일과 관측값을 계산하는 일이 함께 필요했습니다.

세종 시대의 역법 연구와 관측 기구 제작은 이런 필요에 응답한 작업입니다. 이순지와 김담을 비롯한 학자들의 역산 연구에는 다른 지역에서 발전한 지식을 읽고 조선의 기준에 맞게 계산하는 일이 포함되었습니다. 지식을 받아들이는 일은 그대로 복사하는 일과 달랐습니다.

『칠정산』의 칠정은 해와 달과 당시 관측하던 다섯 행성을 가리킵니다. 내편은 수시력 계통의 전통과 연결되고 외편에는 회회력 계통의 지식이 담겼습니다. 동아시아와 이슬람 세계의 천문 계산이 조선의 학문 안에서 만나는 장면입니다.

『칠정산』의 완성 시기를 읽을 때는 편찬 과정과 간행을 구별해야 합니다. 전시에서 소개하는 1442년 무렵의 작업과 자료에 정리된 1444년 간행은 같은 사건을 가리키는 표현이 아닐 수 있습니다. 이 책은 본문에서 1440년대의 연구로 설명하고 연표에는 1444년 간행을 표시했습니다.

> **이번 장의 질문**
>
> 같은 하늘을 보는데 왜 관측 장소와 계산 기준을 밝혀야 할까요? 정확한 도구만 있으면 서로 다른 곳의 측정값을 바로 비교할 수 있을까요?

달력을 읽는 두 가지 질문

날짜의 이름을 정하는 일과 천체의 위치를 계산하는 일은 연결되어 있지만 같은 작업은 아닙니다. 달의 모양과 계절의 변화를 함께 고려하려면 서로 다른 주기의 관계를 읽어야 합니다. 여러 역법을 비교할 때는 무엇을 맞추려는 체계인지 먼저 살펴보면 차이가 더 잘 보입니다.

전시 [3] | 역법과 연대 보완 [7] [8]

관측과 계산이 만나는 곳

하늘의 기록을 다음 관측의 예상으로 바꿉니다.

하늘을 관측해 얻은 수치는 그 자체로 달력이 되지 않습니다. 같은 현상을 여러 날 기록하고 변화의 규칙을 찾은 뒤 다음 위치를 계산하는 과정이 필요합니다. 관측은 계산을 위한 자료를 제공하고 계산은 다시 무엇을 언제 관측할지 알려 줍니다.

예상한 값과 실제 관측값이 어긋났다면 원인을 나누어 살펴야 합니다. 기구가 정확히 놓였는지와 기록을 잘못 옮기지 않았는지 확인할 수 있습니다. 이런 점검으로 차이가 설명되지 않는다면 계산에 사용한 수치나 모형도 검토해야 합니다. 한 번의 어긋남만으로 모든 원인을 판단하기는 어렵습니다.

세종 시대의 역산과 기구 제작을 함께 읽는 까닭도 여기에 있습니다. 좋은 계산에는 비교할 관측이 필요하고 좋은 관측에는 기준을 갖춘 기구와 기록이 필요합니다. 어느 한 사람의 착상만으로 완성되는 일보다 여러 역할이 맞물리는 작업으로 바라보면 과학의 실제 모습을 더 잘 이해할 수 있습니다.

과정	하는 일
관측	정한 시각과 장소에서 값을 얻음
기록	단위와 조건을 함께 남김
계산	규칙을 이용해 다음 값을 예상함
비교	예상과 관측의 차이를 검토함

> **관계를 읽기**
>
> 예상과 실제가 다를 때 계산부터 고치는 것이 항상 옳을까요? 자료와 도구와 모형을 차례로 살펴볼 이유를 생각해 보세요.

다음 관측이 필요한 순간

예상한 그림자 길이가 20 cm인데 22 cm가 측정되었다면 차이는 2 cm입니다. 한 번의 관측으로 원인을 확정하지 말고 같은 조건에서 다시 측정합니다. 값이 비슷하게 어긋나는지와 측정할 때마다 흔들리는지를 구별하면 도구와 계산 중 어느 부분을 점검할지 판단하기 쉬워집니다.

역사적 배경 [7] [8] | 연구 과정은 개념 해설

다른 곳의 지식을 읽는 일

받아들인 방법을 자신의 기준에서 검토합니다.

천문 계산은 다른 지역에서 축적한 지식을 읽고 비교하는 과정과 연결되어 있었습니다. 『칠정산』의 내편과 외편은 서로 다른 역법 계통의 지식이 조선의 학문 안에서 다루어졌다는 사실을 보여 줍니다. 지식의 이동을 어느 한 나라가 모든 것을 홀로 만들었다는 이야기로 줄일 수는 없습니다.

책에 적힌 수치를 사용할 때는 그 수가 무엇을 기준으로 정해졌는지 알아야 합니다. 관측 장소와 계산의 출발점이 다르면 같은 현상을 다루더라도 수치의 쓰임이 달라질 수 있습니다. 낯선 방법을 읽는 일에는 용어를 이해하고 기존 방법과 비교하는 작업이 포함됩니다.

이 책은 내편과 외편의 실제 계산표를 재현하지 않습니다. 대신 단위와 기준을 바르게 읽는 일이 왜 필요한지를 설명합니다. 전통의 차이를 지워 하나의 방식으로 묶기보다 서로 다른 방법이 같은 문제를 어떻게 다루었는지 묻는 편이 생산적입니다.

책을 읽을 때	확인할 내용
무엇을 구하는가?	해와 달 또는 행성의 어떤 위치인가?
어디에서 보는가?	관측 장소와 좌표 기준은 무엇인가?
언제를 시작으로 삼는가?	계산의 기준 시점은 무엇인가?
어떤 수를 사용하는가?	단위와 근삿값의 정밀도는 어떠한가?

> **역사의 시선**
>
> 지식이 전해진 경로와 그 지식을 새로 계산하고 해석한 일을 함께 살펴봅니다.

출발점이 다른 표를 비교하기

두 기록이 모두 5일째라고 적혀 있어도 시작 날짜가 다르면 같은 날을 뜻하지 않습니다. 단위가 같다는 조건에 더해 기준 시점도 맞아야 합니다. 시간표와 천문 계산을 읽을 때는 수치에 앞서 기준 시점과 경과 시간의 구분을 확인해야 합니다.

역법의 역사 [7] [8]

달력은 반복을 다루는 모형이다

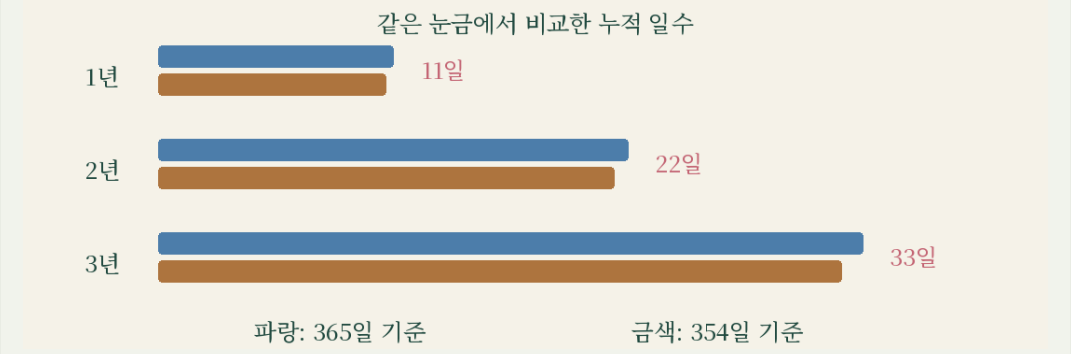
주기가 비슷하다고 꼭 맞아떨어지지는 않습니다.

하루와 한 달과 한 해는 서로 다른 운동을 기준으로 정합니다. 문제는 이 주기들이 간단한 정수 관계를 이루지 않는다는 데 있습니다. 낮과 밤을 세는 일만으로 달의 모양과 계절을 언제나 동시에 맞출 수는 없습니다.

원리를 보기 위해 한 달을 29.5일로 가정해 봅시다. 열두 달은 354일이 됩니다. 한 해를 365일로 놓은 단순 모형과 비교하면 11일 차이가 납니다. 이 차이를 그대로 두면 달의 이름과 계절의 관계가 해마다 달라집니다. 윤달을 이해하는 출발점은 이런 주기의 어긋남입니다.

실제 역법은 이보다 훨씬 정밀합니다. 윤달을 언제 두는지 역시 단순히 몇 년마다 하루를 더하는 방식으로 설명할 수 없습니다. 여기서 쓴 수는 계산 원리를 살피기 위한 근삿값이며 『칠정산』에 실린 수치나 계산 절차를 재현한 것이 아닙니다.

모형은 복잡한 현상에서 필요한 관계를 골라 드러냅니다. 모형을 사용할 때는 무엇을 설명하려고 단순화했는지와 어느 정도의 오차를 허용했는지 함께 살펴야 합니다. 계산이 간단해졌다는 이유만으로 그 결과를 모든 상황에 적용할 수는 없습니다.



365일과 354일의 차이를 같은 비율로 그린 교육용 모형입니다.

작은 탐구 C

같은 오차가 3년 동안 누적된다고 가정하면 차이는 며칠인가요? 이 계산만으로 실제 윤달의 위치를 결정할 수 없는 이유도 생각해 보세요.

역법의 역사적 배경 [7] [8] | 수치는 교육용 근사 모형 | 해설 521쪽

반복되는 주기의 어긋남

작은 차이가 긴 시간에 쌓입니다.

한 주기의 길이가 조금 다르면 처음에는 차이가 눈에 잘 띄지 않습니다. 그러나 반복 횟수가 늘어날수록 차이가 쌓입니다. 한 번에 11일씩 어긋나는 단순 모형에서는 세 번 반복한 뒤 33일의 차이가 생깁니다. 누적된 차이는 한 번의 차이보다 판단하기 쉬울 때가 있습니다.

두 시계 중 하나가 하루에 2분씩 늦어진다고 가정해 봅시다. 열흘 뒤에는 20분이 늦어집니다. 매일 생긴 오차가 같은 방향으로 이어지기 때문입니다. 실제 시계의 오차가 언제나 일정하지는 않지만 이런 모형은 반복되는 편향의 영향을 보여 줍니다.

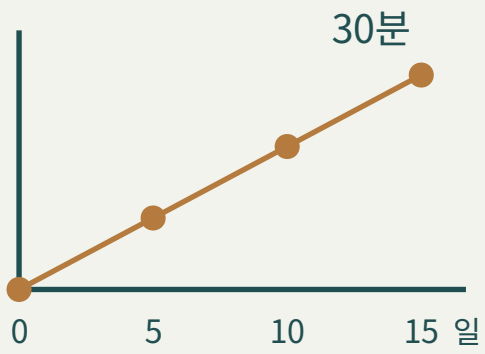
달력의 문제도 주기를 어떤 방식으로 맞출 것인지와 관련됩니다. 다만 이 책의 365일과 354일은 설명을 위한 근삿값입니다. 실제 역법은 더 정밀한 주기와 별도의 배치 규칙을 사용하므로 차이를 나누는 계산만으로 윤달의 위치를 정할 수는 없습니다.

반복 횟수	365일 기준	354일 기준	차이
1	365일	354일	11일
2	730일	708일	22일
3	1095일	1062일	33일

> **새 탐구 5**
>
> 하루마다 2분씩 늦어지는 시계가 처음에는 정확했습니다. 15일 뒤의 차이는 얼마인가요? 오차가 일정하다는 가정을 답에 함께 적어 보세요.해설 525쪽

오차의 방향을 함께 기록하기

하루에 2분 늦어지는 경우와 2분 빨라지는 경우는 차이의 크기는 같지만 보정 방향이 반대입니다. 늦음을 −2분으로 나타내면 15일 뒤에는 −30분입니다. 부호를 붙이면 같은 방향으로 쌓이는 변화와 서로 상쇄되는 변화를 하나의 계산 안에서 구별할 수 있습니다.



매일 같은 방향의 오차가 쌓입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

근삿값에는 쓰임이 있다

정확한 자릿수보다 목적에 맞는 정밀도

원주율을 3으로 놓으면 암산은 쉽지만 원의 둘레를 꽤 거칠게 예상하게 됩니다. 3.14를 쓰면 결과가 더 가까워집니다. 어느 값을 사용할지는 목적에 따라 달라질 수 있습니다. 필요한 물건의 대략적인 수를 가늠하는 일과 정밀한 부품을 만드는 일은 요구하는 오차가 다릅니다.

한 달의 길이를 29.5일로 놓는 모형도 같은 관점에서 읽습니다. 이 값은 열두 달과 한 해가 간단히 맞지 않는다는 사실을 설명하는 데 유용합니다. 그러나 정확한 천문 현상의 시각을 예측할 자료로 쓰기에는 부족합니다. 모형이 설명하는 범위를 넘어 수치를 사용하지 않아야 합니다.

반올림한 수를 여러 번 더하거나 곱하면 작은 차이가 커질 수 있습니다. 계산을 시작할 때 어느 자리까지 남길지 정하고 중간 과정에서는 가능한 한 충분한 자릿수를 유지하는 편이 좋습니다. 마지막에 목적에 맞추어 결과를 정리하면 불필요한 오차를 줄일 수 있습니다.

계산용 가정	열두 번 더한 값
한 주기 29.5일	354일
한 주기 29.53일	354.36일
두 가정의 결과 차이	0.36일

> **수치 읽기**
>
> 위의 두 값은 반올림의 영향을 비교하기 위한 예입니다. 실제 달의 운동과 달력의 규칙을 완전히 기술하는 수치표가 아닙니다.

중간 반올림을 미루기

29.53을 먼저 29.5로 반올림한 뒤 열두 번 더하면 354입니다. 원래 값을 열두 번 더한 354.36을 마지막에 소수 첫째 자리로 반올림하면 354.4입니다. 어느 단계에서 자릿수를 줄였는지에 따라 결과가 달라질 수 있으므로 계산 과정도 함께 기록합니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

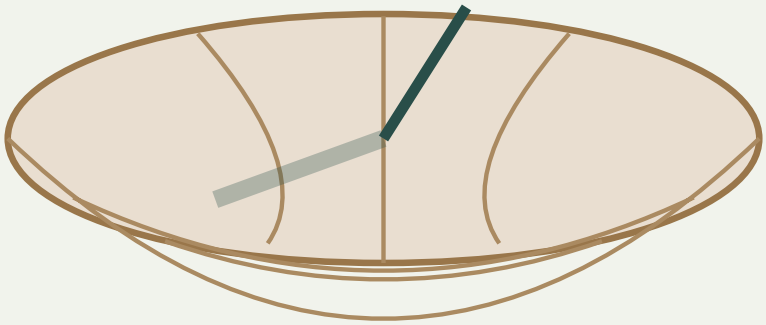
앙부일구의 두 가지 눈금

그림자의 위치에서 시간과 계절을 읽습니다.

앙부일구는 솥을 하늘로 향하게 놓은 듯한 오목한 시계판을 가진 해시계입니다. 영침이 만드는 그림자를 눈금과 비교해 시각을 읽습니다. 하루 동안 그림자가 옮겨 가는 변화와 계절에 따라 그 경로가 달라지는 변화가 하나의 기구에 담겨 있습니다.

1434년에 혜정교와 종묘 앞에 설치되었다는 기록은 시간을 알려 주는 일이 공공의 서비스였음을 보여 줍니다. 다만 오늘날 박물관에서 보는 앙부일구를 모두 그때 제작된 물건으로 생각해서는 안 됩니다. 현존 유물 가운데에는 조선 후기에 만든 것도 있습니다.

해시계가 가리키는 태양시와 손목시계의 표준시는 언제나 같지 않습니다. 관측 장소의 경도와 계절에 따른 차이를 고려해야 합니다. 전자책의 그림은 눈금의 역할을 이해하기 위한 도식이며 실제 시각을 읽는 장치로 사용할 수 없습니다.



오목한 시계판과 영침의 관계를 나타낸 원리 도해입니다.

곡면 위의 눈금을 읽는 태도

평면 해시계를 떠올리면 그림자가 한 방향으로만 움직이는 것처럼 생각하기 쉽습니다. 앙부일구의 오목한 면에서는 시각을 나타내는 눈금과 계절의 경로를 함께 읽어야 합니다. 모양만 보고 시간을 추정하지 말고 영침과 시계판이 어떤 기준으로 놓였는지부터 살펴봅니다.

전시 [3] | 공공시계와 현존 유물 [9]

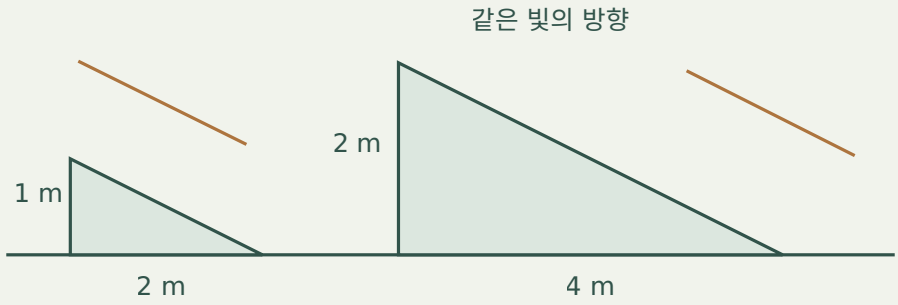
그림자가 움직이는 까닭

빛의 방향과 물체와 바닥의 관계

그림자의 길이는 물체의 높이만으로 정해지지 않습니다. 빛이 들어오는 방향이 달라지면 같은 막대도 서로 다른 길이의 그림자를 만듭니다. 햇빛이 낮은 각도로 들어올 때 그림자는 길어지고 높이 들어올 때는 짧아집니다. 해시계는 이런 변화에 일정한 기준을 붙인 장치입니다.

수평한 바닥에 막대를 수직으로 세운 간단한 모형을 생각해 봅시다. 같은 순간 가까운 두 막대에 들어오는 햇빛을 평행하다고 보면 두 그림은 닮은 삼각형을 이룹니다. 막대의 높이와 그림자의 길이 사이에 같은 비율이 생깁니다.

실험에서는 바닥의 기울기와 막대의 수직 상태를 확인해야 합니다. 관측 시간이 달라지면 빛의 방향도 달라질 수 있습니다. 비례식이 성립하는 조건을 갖추지 않은 채 길이만 비교하면 태양의 변화와 설치 오차를 혼동할 수 있습니다.



수평한 바닥과 평행한 빛을 가정한 닮음 모형입니다.

새 탐구 6

높이 0.8 m인 수직 막대의 그림자가 1.2 m입니다. 같은 조건에서 그림자 길이가 6 m인 나무의 높이를 구해 보세요.해설 525쪽

비례식에 단위를 남기기

나무 높이를 h m로 놓으면 h ÷ 0.8 = 6 ÷ 1.2입니다. 오른쪽의 비가 5이므로 h는 4입니다. 이 계산에서는 네 길이를 모두 m로 맞추었습니다. 한쪽 그림자만 cm로 기록했다면 먼저 단위를 맞추어야 같은 비를 비교할 수 있습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

태양시와 표준시를 나누어 읽기

시계의 기준을 알면 차이가 설명됩니다.

해시계는 태양의 위치를 이용해 시간을 읽습니다. 우리가 일상에서 사용하는 시계는 정해진 표준을 공유합니다. 두 시계가 같은 순간에 다른 값을 보인다고 해서 어느 하나가 반드시 고장 났다고 판단할 수는 없습니다. 서로 무엇을 기준으로 삼는지 먼저 확인해야 합니다.

지구가 한 바퀴 도는 각도 360°를 24시간으로 나누면 한 시간에 15°라는 평균적인 관계를 얻습니다. 이를 다시 나누면 경도 1°에 약 4분이 대응합니다. 동서로 떨어진 두 장소에서 태양이 같은 위치에 오는 시각이 다른 이유를 이 관계로 짐작할 수 있습니다.

이 계산은 평균적인 회전을 이용한 설명입니다. 실제 해시계와 표준시의 차이를 구하려면 장소의 경도뿐 아니라 계절에 따라 달라지는 요소도 고려해야 합니다. 평균 모형으로 전체 원리를 이해한 뒤 정밀한 보정의 필요성을 살펴보는 순서가 좋습니다.

각도의 차이	평균적으로 대응하는 시간
15°	60분
1°	4분
3°	12분

> **두 질문을 구별하기**
>
> 원리를 설명하는 계산과 특정 장소의 현재 시각을 정확히 구하는 계산은 요구하는 정보가 다릅니다.

각도와 시간을 연결하기

경도 차이 3°에 대응하는 평균 시간은 12분입니다. 동쪽의 장소에서 태양이 같은 위치를 먼저 지난다는 방향의 정보도 필요합니다. 수치만 계산해 더하거나 빼기 전에 어느 장소를 기준으로 비교하는지 정해 두어야 보정 방향을 거꾸로 적용하지 않습니다.



평균 회전 모형에서 한 구간은 한 시간입니다.

앙부일구의 역사 [9] | 평균 회전 모형 해설

물의 흐름을 시간으로 바꾸다

자격루를 이해하는 첫 모형은 비례입니다.

물시계는 흐르는 물을 이용해 시간의 경과를 알아봅니다. 세종 시대 자격루에는 물의 변화가 시각을 알리는 기계 장치로 이어지는 구조가 있었습니다. 사람이 계속 눈금을 지켜보고 소리를 내는 부담을 줄이려는 장치였습니다.

단면적이 일정한 통에 물이 일정한 속도로 들어오는 간단한 모형을 생각해 봅시다. 통의 단면적을 A로 쓰고 1분 동안 들어오는 물의 부피를 q로 쓰면 t분 뒤 물높이의 증가량은 qt/A입니다. 같은 시간마다 같은 높이만큼 올라가므로 일정한 간격의 눈금을 붙일 수 있습니다.

실제 물의 흐름은 저절로 일정하게 유지되지 않습니다. 물을 내보내는 통의 수면이 낮아지면 흐르는 속도도 달라질 수 있습니다. 따라서 물 공급을 조절하는 구조와 오차를 줄이는 방법까지 살펴야 장치의 작동을 이해할 수 있습니다. 단순한 비례식은 이런 문제를 발견하게 해 주는 첫 모형입니다.

물높이의 증가량 = 들어온 부피 ÷ 단면적

$\Delta h = qt / A$

흐른 시간	A = 100 cm²일 때 높이 증가
1분	q = 20 cm³/분이면 0.2 cm
5분	1 cm
10분	2 cm

생각을 넓히기

위로 갈수록 넓어지는 통에서는 같은 양의 물이 들어와도 물높이가 같은 간격으로 올라갈까요?

장치의 역사 [3] | 비례식과 수치는 교육용 모형

일정한 유량을 가정하면

물높이의 눈금에 비례가 나타납니다.

통에 분당 20 cm^3의 물이 들어오고 통의 단면적이 100 cm^2로 일정하다고 합시다. 5분 동안 들어온 물의 부피는 100 cm^3입니다. 이 부피를 단면적 100 cm^2로 나누면 물높이는 1 cm 올라갑니다. 부피를 넓이로 나누었으므로 결과의 단위는 길이입니다.

유량이 일정하면 두 배 긴 시간 동안 두 배의 물이 들어옵니다. 통의 단면적도 일정하다면 높이 증가량 역시 두 배가 됩니다. 따라서 시간과 물높이 사이에 비례 관계가 생깁니다. 일정한 간격의 시간 눈금을 붙일 수 있는 조건이 여기서 드러납니다.

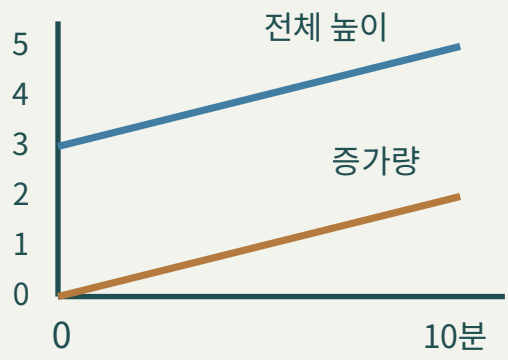
처음부터 통에 물이 들어 있었다면 전체 높이와 높이의 증가량을 구별해야 합니다. 시작 높이가 3 cm일 때 5분 뒤 높이는 4 cm입니다. 높이의 증가량은 시간에 비례하지만 전체 높이를 시간으로 나눈 값은 일정하지 않습니다.

시간	증가한 높이	시작 높이 3 cm일 때
0분	0 cm	3 cm
5분	1 cm	4 cm
10분	2 cm	5 cm

> **식으로 정리하기**
>
> 전체 높이 = 시작 높이 + 시간에 따라 증가한 높이입니다. 시작값이 있는 관계를 곧바로 정비례라고 부르지 않도록 주의합니다.

전체 높이와 증가량의 그래프

처음 높이가 3 cm인 통의 물높이는 $h = 3 + 0.2t$로 나타낼 수 있습니다. $t = 0$일 때도 h가 3이므로 그래프는 원점을 지나지 않습니다. 반면 증가량만 그리면 $\Delta h = 0.2t$가 되어 원점에서 시작합니다. 어떤 양을 세로축에 놓았는지에 따라 그래프의 뜻이 달라집니다.



두 그래프의 세로 차이는 시작 높이입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

통의 모양을 바꾸면

일정한 부피가 일정한 높이를 만들지 않습니다.

위로 갈수록 넓어지는 통에 물을 넣어 봅시다. 낮은 부분에서는 조금만 물을 부어도 수면이 많이 올라갑니다. 높은 부분에서는 같은 양을 부어도 넓은 공간에 퍼지므로 높이가 덜 올라갑니다. 물의 양이 일정하게 늘어나는 것과 높이가 일정하게 늘어나는 것은 다릅니다.

단면적 100 cm^2인 곧은 통에서는 100 cm^3를 넣으면 높이가 1 cm 올라갑니다. 단면적 200 cm^2인 곧은 통에서는 같은 부피를 넣어도 0.5 cm만 올라갑니다. 두 통을 비교하면 단면적이 높이 증가량에 어떤 영향을 주는지 알 수 있습니다.

물시계의 눈금을 설계하려면 물이 들어오는 속도와 통의 모양을 함께 고려해야 합니다. 같은 간격으로 그은 눈금이 언제나 같은 시간을 뜻하지는 않습니다. 이 설명은 물시계의 원리를 살피는 단순 모형이며 자격루의 실제 부품을 복원한 설계도가 아닙니다.

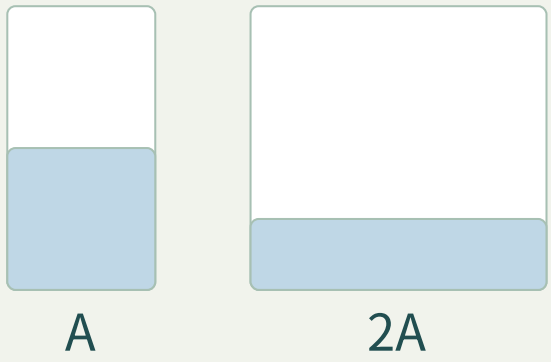
들어온 물	단면적	높이 증가량
100 cm^3	100 cm^2	1 cm
100 cm^3	200 cm^2	0.5 cm
100 cm^3	400 cm^2	0.25 cm

새 탐구 7

단면적 80 cm²인 통에 분당 16 cm³의 물이 들어옵니다. 15분 뒤 물높이는 얼마나 올라갈까요? 물이 새거나 넘치지 않는다고 가정합니다.해설 525쪽

넓이가 두 배인 통

같은 시간 동안 같은 부피가 들어온다면 단면적이 두 배인 통의 높이 증가량은 절반입니다. 높이를 같게 올리려면 두 배의 부피가 필요합니다. 통의 폭을 두 배로 늘린 것과 단면적을 두 배로 늘린 것도 구별해야 합니다. 원통의 반지름을 두 배로 하면 단면적은 네 배가 됩니다.



같은 부피를 받으면 넓은 통은 덜 올라갑니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

비의 양을 비교하는 방법

측정의 표준은 공정한 비교를 가능하게 합니다.

비가 많이 왔다는 말만으로는 서로 다른 지역의 강수를 정확히 비교하기 어렵습니다. 땅에 스며든 깊이를 재어도 흙의 상태가 다르면 값이 달라집니다. 측우기의 의미는 빗물을 받는 그릇뿐 아니라 정해진 방법으로 측정하고 기록하며 보고하는 체계를 마련했다는 데 있습니다.

『세종실록』에는 1441년 서운관과 지방 관청에 빗물을 받는 기구를 설치하도록 한 기록이 있습니다. 1442년에는 기구의 규격과 측정 단위 및 보고 항목을 더 구체적으로 정했습니다. 발명과 설치 명령과 관측 제도의 정비를 한 사건으로 묶지 않고 살펴야 합니다. 그릇에 모인 물의 깊이를 읽으면 서로 다른 강수 사건을 수치로 비교할 수 있습니다. 같은 절차와 단위를 사용해야 비교의 의미도 유지됩니다.

입구와 내부의 단면적이 같은 곧은 원통형 그릇을 생각해 봅시다. 비가 고르게 내렸고 물이 새거나 튀거나 증발하지 않았다면 모인 물의 부피를 입구 넓이로 나눈 값이 강수 깊이입니다. 그릇이 넓으면 물의 부피는 커지지만 깊이는 같을 수 있습니다.

강수 깊이 = 모인 물의 부피 ÷ 입구 넓이

원통형 그릇	입구 넓이	모인 부피	깊이
가	100 cm²	200 cm³	2 cm
나	200 cm²	400 cm³	2 cm

작은 탐구 D

두 그릇의 물 부피가 다르더라도 같은 비를 기록했다고 말할 수 있는 까닭을 설명해 보세요. 깔때기가 달린 그릇은 무엇을 더 확인해야 할까요?

집수 면적이 다른 장치

넓은 깔때기로 받은 물을 좁은 통에 모으면 통의 수면은 실제 강수 깊이보다 더 높아집니다. 집수 면적이 통의 단면적의 두 배라면 이상적인 조건에서 수면 상승은 강수 깊이의 두 배입니다. 눈금을 읽기 전에 물을 받은 면적과 물이 고인 면적을 구별해야 합니다.

역사 자료 [10] | 탐구 D 해설 521쪽

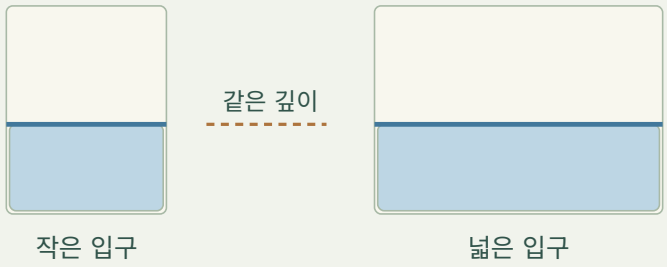
깊이로 비를 비교하는 이유

부피에서 그릇의 크기를 분리합니다.

비를 받은 물의 부피만 비교하면 큰 그릇이 언제나 더 많은 비를 기록한 것처럼 보일 수 있습니다. 입구가 넓으면 같은 비가 내려도 더 많은 물을 받기 때문입니다. 입구 넓이로 나누어 깊이로 표현하면 그릇 크기의 영향을 분리할 수 있습니다.

입구 넓이가 100 cm^2인 그릇에 물 200 cm^3가 모였다면 깊이는 2 cm입니다. 입구 넓이가 200 cm^2인 그릇에 400 cm^3가 모인 경우도 같은 깊이입니다. 이 비교는 비가 고르게 내렸고 물이 손실되지 않았다는 조건 아래 성립합니다.

강수량을 mm로 표현하는 까닭도 깊이로 비교하기 위해서입니다. 2 cm는 20 mm입니다. 단위를 바꾸었을 뿐 비의 양이 달라진 것은 아닙니다. 지역과 시기를 비교할 때는 측정 도구뿐 아니라 관측 기간과 기록 단위가 같은지도 살펴야 합니다.



같은 비를 받으면 입구가 넓은 그릇에 더 많은 부피가 모입니다. 수면 깊이는 같을 수 있습니다.

비교의 조건

하루 동안 모은 값과 세 시간 동안 모은 값을 같은 기간의 강수량처럼 나란히 놓지 않도록 주의합니다.

강수 깊이에서 부피로 돌아가기

10 mm의 비는 깊이 1 cm에 해당합니다. 넓이 1 m^2에 고르게 내렸다면 부피는 10 000 cm^2 × 1 cm = 10 000 cm^3입니다. 이는 10 L입니다. 강수 깊이를 알면 넓이가 다른 지역에 내린 전체 물의 부피도 같은 원리로 환산할 수 있습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

눈금만 읽어서는 부족하다

설치 조건과 기록 절차를 확인합니다.

측정 기구에 정교한 눈금이 있어도 설치 조건이 잘못되면 결과가 달라질 수 있습니다. 빗물을 받는 입구가 기울어져 있거나 주변 물체가 비를 가리면 같은 장소에서도 다른 값이 나옵니다. 측정값은 기구의 성능과 사용 방법이 함께 만든 결과입니다.

값을 읽는 사람 사이에 차이가 생길 수도 있습니다. 눈의 높이가 수면과 다르면 눈금이 다르게 보일 수 있고 기록을 옮기는 과정에서 자릿수가 바뀔 수도 있습니다. 같은 절차를 정해 반복하면 이런 차이를 줄이고 서로의 기록을 검토하기 쉬워집니다.

측우기를 빗물을 담는 통으로만 설명하면 측정 체계의 의미를 놓칩니다. 여러 곳의 기록을 비교하려면 단위와 관측 시각과 보고 방식이 함께 정해져야 합니다. 공통의 규칙은 많은 사람의 관측을 하나의 자료로 연결하는 역할을 합니다.

점검할 부분	기록에 남길 질문
설치	입구가 수평인가? 가리는 물체가 있는가?
관측	언제부터 언제까지 모았는가?
판독	어떤 눈금과 단위를 사용했는가?
보고	옮겨 적은 수를 다시 확인했는가?

> **측정 노트**
>
> 직접 실험한다면 성공한 값만 남기지 마세요. 기구를 건드렸거나 물을 흘린 상황도 적어 두어야 나중에 차이를 설명할 수 있습니다.

눈높이에 따른 읽기 차이

눈금보다 높은 곳에서 비스듬히 내려다보면 수면과 눈금의 대응이 달라 보일 수 있습니다. 수면과 비슷한 높이에서 정한 기준으로 읽는 절차를 공유하면 관측자 사이의 차이를 줄일 수 있습니다. 정밀한 기구를 갖추는 일과 일관된 읽기 방법을 정하는 일은 함께 필요합니다.

측우기의 제도적 배경 [10] | 측정 절차는 현대적 해설

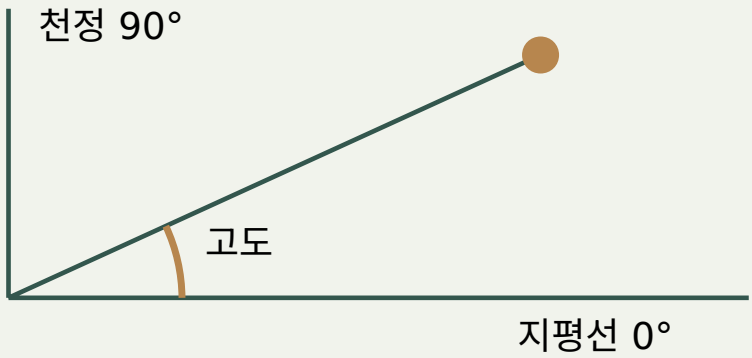
하늘에 좌표를 붙이다

별의 자리를 숫자로 옮기려면 기준이 필요합니다.

별이 높이 떠 있다는 말만으로는 다른 사람이 같은 자리를 찾기 어렵습니다. 방향과 높이를 수로 나타내면 관측 결과를 기록하고 비교할 수 있습니다. 혼천의와 간의 같은 기구는 하늘의 위치를 일정한 기준에 따라 측정하려는 노력과 연결됩니다.

간단한 관측에서는 지평선에서 얼마나 올라가 있는지를 고도로 나타낼 수 있습니다. 지평선은 0°이고 머리 바로 위는 90°입니다. 같은 별이라도 시간과 관측 장소가 달라지면 이런 값이 달라집니다. 따라서 숫자만 기록하지 말고 언제 어디서 어떤 기준으로 측정했는지 함께 적어야 합니다.

하늘을 나타내는 좌표에는 여러 방식이 있습니다. 이 책의 그림은 고도의 뜻을 보여 주는 현대적 도해입니다. 옛 기구의 모든 눈금이 이 그림과 같은 좌표계를 썼다고 이해해서는 안 됩니다. 시대마다 사용한 기준과 계산 체계를 따로 읽어야 합니다.



관측자를 기준으로 한 별의 고도. 도해의 각도는 특정 관측값이 아닙니다.

고도는 위치의 한 성분입니다

고도가 30°인 별은 하나로 정해지지 않습니다. 동쪽에도 서쪽에도 같은 높이의 방향이 있기 때문입니다. 방향을 나타내는 값과 높이를 나타내는 값을 함께 주어야 하늘의 한 위치를 더 구체적으로 가리킬 수 있습니다. 좌표를 빠짐없이 기록해야 하는 이유입니다.

관측 기구의 역사 [3] | 좌표 설명은 현대적 재구성

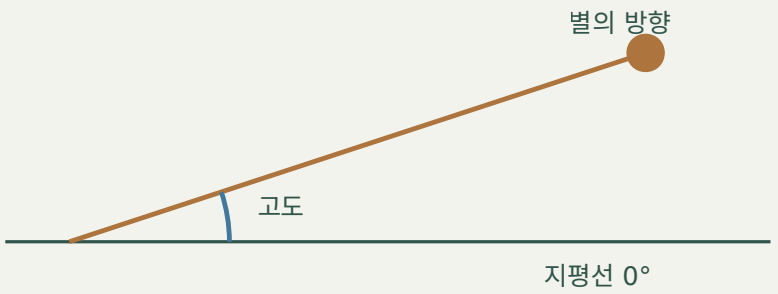
좌표는 약속에서 시작한다

두 수만으로는 위치를 완전히 알 수 없습니다.

같은 장소도 기준점을 어디에 두느냐에 따라 다른 좌표로 나타납니다. 교실의 왼쪽 앞을 출발점으로 삼을 때와 오른쪽 뒤를 출발점으로 삼을 때 같은 책상의 수가 달라집니다. 좌표는 대상의 고유한 이름이 아니라 정해진 기준 안에서 위치를 표현하는 방법입니다.

하늘에서 별의 위치를 나타낼 때도 방향을 재는 출발점과 각도가 늘어나는 방향을 정해야 합니다. 고도는 지평선에서 위로 잰 각도로 나타낼 수 있습니다. 방위각을 함께 기록하면 어느 방향에서 얼마나 높이 보이는지 설명할 수 있지만 사용한 약속도 밝혀야 합니다.

관측 시각과 장소도 빠뜨릴 수 없습니다. 같은 별이 시간에 따라 다른 방향과 높이에 보이기 때문입니다. 숫자 두 개를 정확히 적었더라도 기준과 조건이 없으면 다른 관측자에게 충분한 정보가 되지 않습니다.



지평선을 기준으로 위쪽으로 벌어진 각도를 고도로 읽습니다. 실제 관측값을 그린 도면은 아닙니다.

정보를 해석하기

북쪽을 0°로 삼아 시계 방향으로 재면 방위각 90°는 동쪽입니다. 위 그림은 고도의 뜻만 보여 줍니다. 별의 위치를 나타내려면 방위각과 관측 시각 및 장소도 함께 기록해야 합니다.

같은 각도를 다른 약속으로 쓰기

북쪽에서 시계 방향으로 재는 약속에서는 동쪽이 90°이고 남쪽이 180°입니다. 출발점이나 증가 방향이 달라지면 같은 방향을 다른 수로 적게 됩니다. 값이 다르다는 이유만으로 관측이 틀렸다고 판단하기 전에 좌표의 약속부터 비교해야 합니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

각도와 길이를 구별하기

멀리 있는 대상도 같은 각도로 보일 수 있습니다.

팔을 뻗어 작은 물체를 바라보면 멀리 있는 큰 물체를 가릴 수 있습니다. 눈에서 보이는 범위는 실제 길이뿐 아니라 거리에도 영향을 받습니다. 하늘의 위치를 각도로 나타낼 때는 지면 위의 거리를 재는 것과 다른 양을 다루고 있음을 기억해야 합니다.

두 별 사이의 각거리가 작다고 해서 두 별이 공간에서도 가까이 있다고 단정할 수는 없습니다. 시선 방향은 비슷해도 우리에게서 떨어진 거리는 크게 다를 수 있습니다. 평면에 찍힌 두 점의 간격과 실제 공간의 거리는 같은 정보가 아닙니다.

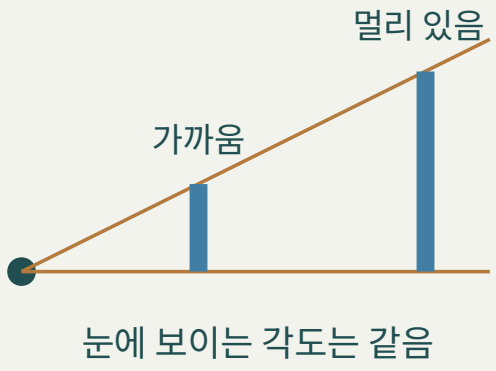
그림으로 천문 기구를 읽을 때도 원의 크기와 눈금의 뜻을 나누어 봅니다. 도해에서 크게 그린 각도가 실제 각도와 비례하지 않을 수 있으므로 수치와 축척 표시를 확인해야 합니다. 이 책의 하늘 그림은 위치를 정하는 원리를 보여 주기 위한 도식입니다.

양	무엇을 나타내는가?	대표 단위
길이	두 지점 사이의 거리	m
각도	두 방향이 벌어진 정도	°
시간	두 사건 사이의 간격	초 또는 분

> **그림 읽기**
>
> 눈에 보이는 간격이 같다는 사실과 실제 거리가 같다는 주장은 다릅니다. 둘을 연결하려면 어떤 정보가 더 필요한지 생각해 보세요.

시선 위에 있는 두 대상

눈에서 뻗은 같은 두 시선 사이에 놓인 물체는 거리가 달라도 비슷한 각도 크기로 보일 수 있습니다. 멀리 있는 물체가 가까운 물체보다 실제로 더 클 수 있는 까닭입니다. 각도 자료를 실제 길이로 바꾸려면 거리와 기하학적 관계에 대한 추가 정보가 필요합니다.



멀리 있는 대상의 실제 길이는 더 큽니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

좋은 측정에는 기록이 따라온다

활동 2 | 그림자의 변화를 표로 만듭니다.

맑은 날 같은 장소에 짧은 막대를 수직으로 세우고 그림자 길이를 여러 시각에 측정해 봅시다. 태양을 직접 바라보지 않고 바닥의 그림자만 살펴봅니다. 막대가 기울어지지 않았는지와 바닥이 평평한지를 먼저 확인하세요.

시각과 장소를 먼저 적고 막대의 높이와 그림자의 길이를 함께 기록합니다. 다른 사람이 측정해도 비교할 수 있도록 길이의 시작점과 끝점을 정해 두세요. 구름 때문에 그림자 끝이 흐리다면 정확한 값처럼 적기보다 관측 상태를 덧붙이는 편이 좋습니다.

아래 표는 실제 측정 자료가 아닌 연습용 자료입니다. 가장 짧은 그림자가 기록된 시각을 찾을 수는 있지만 이 표만으로 실제 태양의 남중 시각을 확정할 수는 없습니다. 측정 간격 사이에 더 짧은 순간이 있었을 수도 있습니다.

시각	막대 높이	그림자 길이
10:00	20 cm	25 cm
11:00	20 cm	18 cm
12:00	20 cm	15 cm
13:00	20 cm	16 cm
14:00	20 cm	21 cm

> **보고서의 마지막 문장**
>
> 관측으로 확인한 사실 한 가지와 자료가 더 있어야 판단할 수 있는 사실 한 가지를 각각 적으세요. 측정값의 개수가 많다고 모든 질문에 답할 수 있는 것은 아닙니다.

측정 간격을 좁혀 보기

12시 전후에 그림자가 가장 짧아 보였다면 11시 50분부터 12시 10분까지 더 자주 측정해 볼 수 있습니다. 처음 자료로 관심 구간을 고른 뒤 관측을 촘촘히 하는 방식입니다. 기록 횟수를 무조건 늘리기보다 확인하려는 질문에 맞추어 간격을 정합니다.

창작 탐구 | 해설 521쪽

반복 측정의 평균과 범위

한 번의 값보다 기록 전체를 읽습니다.

같은 길이를 다섯 번 재었더니 9.8 cm와 10.1 cm와 10.0 cm와 10.2 cm와 9.9 cm가 나왔다고 합시다. 눈금을 읽는 방식이나 기구의 위치가 조금씩 달라지면 측정값도 흩어질 수 있습니다. 하나만 고르기보다 기록 전체를 살펴보는 편이 좋습니다.

다섯 값을 더해 다섯으로 나누면 평균은 10.0 cm입니다. 가장 큰 값과 가장 작은 값의 차이는 0.4 cm입니다. 평균은 기록의 중심을 보여 주고 범위는 값들이 얼마나 퍼졌는지 간단히 나타냅니다. 두 정보가 함께 있어야 관측의 상태를 더 잘 이해할 수 있습니다.

평균을 구했다고 해서 참값을 알아낸 것은 아닙니다. 눈금의 시작이 잘못된 자를 사용했다면 여러 번 재어도 같은 방향으로 어긋날 수 있습니다. 반복 측정은 우연한 흔들림을 살피는 데 도움이 되지만 기구의 편향을 스스로 없애 주지는 않습니다.

기록	값
다섯 측정값	9.8 / 10.1 / 10.0 / 10.2 / 9.9 cm
합	50.0 cm
평균	10.0 cm
최댓값 − 최솟값	0.4 cm

새 탐구 8

물높이를 네 번 읽은 값이 12 mm와 13 mm와 11 mm와 12 mm입니다. 평균과 범위를 구하고 이 둘이 서로 무엇을 알려 주는지 설명해 보세요.해설 525쪽

평균에서 떨어진 만큼 더하기

평균 10.0 cm에서 다섯 측정값이 벗어난 양은 −0.2와 0.1과 0과 0.2와 −0.1 cm입니다. 이를 더하면 0이 됩니다. 평균보다 작은 값과 큰 값의 차이가 서로 균형을 이루는 것입니다. 다만 이런 균형이 측정 기구의 공통된 오차까지 없애 주지는 않습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

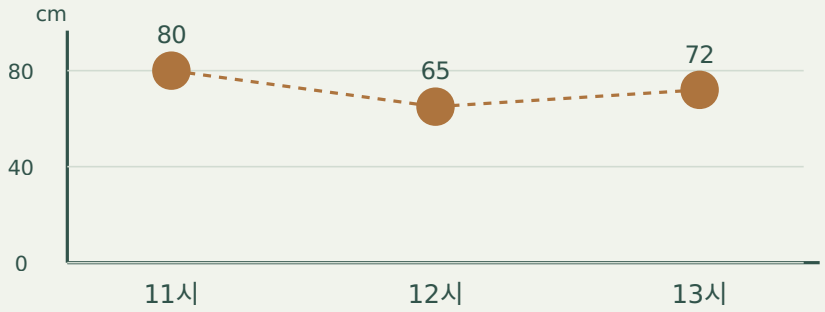
측정값을 표와 그래프로 옮기기

보이지 않은 구간은 추정으로 남겨 둡니다.

일정한 간격으로 그림자 길이를 재면 시간에 따른 변화를 표로 정리할 수 있습니다. 표는 정확한 측정값을 찾기 좋고 그래프는 증가와 감소의 흐름을 보기 좋습니다. 같은 자료라도 표현 방식에 따라 눈에 들어오는 특징이 달라집니다.

오전 11시와 낮 12시와 오후 1시에만 측정했다면 그 사이의 값은 직접 관측한 값이 아닙니다. 그래프의 점을 선으로 이으면 변화의 흐름을 예상할 수 있지만 선 위의 모든 점을 측정했다고 말할 수는 없습니다. 가장 짧은 그림자가 정확히 12시에 생겼다는 결론도 추가 관측 없이 확정하기 어렵습니다.

표와 그래프에는 축의 이름과 단위를 적어야 합니다. 세로축의 범위를 좁히면 작은 차이가 크게 보일 수 있습니다. 자료를 읽을 때는 모양만 보지 말고 눈금의 간격과 생략 여부를 함께 확인하는 습관이 필요합니다.



점은 연습용 관측값입니다. 점 사이의 점선은 변화를 연결해 보여 줄 뿐 실제 측정값은 아닙니다.

측정과 추정

이 세 값 가운데 최솟값은 65 cm입니다. 그러나 하루 전체의 최솟값이 반드시 65 cm라는 뜻은 아닙니다. 관측한 범위와 주장하는 범위를 맞추어야 합니다.

표와 그래프의 역할을 바꾸어 보기

표에서 12시의 값을 읽으면 65 cm라는 수를 곧바로 얻습니다. 그래프에서는 감소한 뒤 증가하는 흐름이 먼저 눈에 들어옵니다. 정확한 값을 전달하려는지 변화의 모습을 설명하려는지에 따라 표현을 선택하고 필요하면 두 방식을 함께 제시합니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

한국관 / 60

수의 배열과 방정식

수의 배열에서 생각의 구조로

3장 | 조선 산학의 꽃

수를 계산할 때와 배열할 때는 주목하는 관계가 다릅니다. 계산에서는 주어진 양으로부터 필요한 값을 구합니다. 배열에서는 여러 조건을 동시에 만족하도록 수의 자리를 정합니다. 한 줄에서 맞는 선택이 다른 줄의 조건과 충돌할 수 있으므로 전체의 관계를 살펴야 합니다.

최석정의 『구수략』은 배열의 규칙을 탐구한 중요한 자료입니다. 오늘날 직교 라틴 방진으로 해석하는 9차 배열과 지수귀문도는 수의 배치가 풍부한 연구 대상이 될 수 있음을 보여 줍니다. 이 책에서는 작은 배열부터 시작해 조건의 차이를 이해합니다.

홍정하의 『구일집』에서는 문제를 방정식으로 옮기는 사고를 만납니다. 서로 다른 생활 상황을 같은 수학적 관계로 표현하면 하나의 방법을 여러 문제에 적용할 수 있습니다. 계산 기술이 문제의 구조를 드러내는 언어가 되는 순간입니다.

조선의 산학을 이해할 때는 누가 지식을 생산했는지도 살펴야 합니다. 관료와 전문 기술직의 학자는 서로 다른 사회적 위치에 있었습니다. 저술과 문답과 협력은 지식이 개인의 머릿속에만 머무르지 않고 이어지는 통로였습니다.

탐구 대상	살펴볼 조건
마방진	합이 같은가?
라틴 방진	각 행과 열에 기호가 한 번씩 나오는가?
직교성	겹친 순서쌍이 전체에서 중복되지 않는가?
방정식	같아야 하는 두 양은 무엇인가?

계산 결과보다 관계를 묻기

마방진에서 같은 수를 서로 바꾸면 전체 합은 유지됩니다. 그러나 각 줄의 합은 달라질 수 있습니다. 전체의 양이 그대로라는 사실과 모든 조건이 유지된다는 사실은 다릅니다. 배열을 다루는 문제에서는 어떤 관계가 변화에 견디는지 따로 살펴야 합니다.

전시 [4] | 저술 자료 [11] [12] [13]

『구수략』을 펼치는 시선

배열의 아름다움과 당대의 사유를 함께 봅니다.

최석정의 『구수략』을 오늘날의 조합론 문제집처럼만 읽으면 책의 성격을 좁히게 됩니다. 이 책에는 계산과 방정식에 관한 내용뿐 아니라 수를 분류하고 질서를 설명하려는 당대의 생각도 담겨 있습니다. 오늘 우리가 관심을 갖는 배열의 구조와 저자가 수를 바라본 관점은 완전히 같지 않습니다.

한국민족문화대백과사전은 『구수략』의 내용을 네 편으로 나누어 설명합니다. 사칙계산과 응용 문제와 근을 구하는 방법 등이 다루어지며 수의 배열에 관한 연구도 포함됩니다. 이 구성을 보면 배열 하나가 책 전체를 대표하지는 않는다는 사실을 알 수 있습니다.

역사 속 수학을 읽을 때는 두 가지 일을 나란히 할 수 있습니다. 당시의 표현과 문제의식을 자료에 따라 이해하는 일이 하나입니다. 배열이 실제로 어떤 수학적 조건을 만족하는지 오늘의 언어로 확인하는 일이 다른 하나입니다. 둘을 구별하면 과거의 의미도 현대의 해설도 더 분명해집니다.

읽는 관점	살펴볼 대상
문헌의 맥락	책의 구성과 사용한 용어
당대의 사유	수를 분류하고 질서를 설명하는 방식
현대의 분석	배열의 조건과 중복 여부
교육용 활동	작은 배열로 원리를 확인하는 문제

> **자료 안내**
>
> 이 책의 3 × 3 배열은 개념을 설명하기 위한 예입니다. 최석정의 모든 배열을 그대로 축소하거나 복원한 것이 아닙니다.

원전과 해설을 나란히 놓기

현대의 정의에 맞추어 배열을 설명하면 수학적 조건을 분명하게 확인할 수 있습니다. 그렇더라도 원전의 이름과 분류를 모두 현대 용어로 바꾸어 버리면 당시의 관점이 사라질 수 있습니다. 옛 표현을 소개한 뒤 현대적 해석의 범위를 밝히는 방식이 두 관점을 함께 읽는 데 도움이 됩니다.

『구수략』 해설 [20]

문제를 읽는 세 개의 층

대상과 조건과 질문을 나눕니다.

수의 배열 문제를 풀기 전에는 무엇을 놓을 수 있는지부터 확인해야 합니다. 1부터 9까지를 한 번씩 쓰는 문제와 같은 수를 반복해서 써도 되는 문제는 전혀 다릅니다. 사용할 대상이 정해져야 가능한 배열의 범위도 정해집니다.

다음으로 어떤 조건을 만족해야 하는지 읽습니다. 행의 합만 같으면 되는지와 열의 합도 같아야 하는지는 다른 요구입니다. 대각선에 대한 조건이 있는지도 확인해야 합니다. 문제에 쓰이지 않은 조건을 임의로 더하면 풀 수 있는 답을 놓칠 수 있습니다.

마지막으로 무엇을 구하는지 분명히 합니다. 조건에 맞는 배열 하나를 찾는 일과 가능한 배열을 모두 찾는 일은 난도가 다릅니다. 하나의 예를 찾았다고 해서 다른 예가 없음을 증명한 것은 아닙니다. 답을 제시할 때도 어느 질문에 답했는지 드러내야 합니다.

층	3차 마방진에서 확인할 내용
대상	1부터 9까지의 수를 한 번씩 사용
조건	행과 열 및 두 대각선의 합이 같음
질문	조건에 맞는 배열 하나를 찾음

> **풀이를 시작하기 전에**
>
> 문제를 읽고 대상과 조건과 질문을 각각 한 문장으로 정리해 보세요. 계산을 시작하기 전에 빠진 정보가 보일 수 있습니다.

조건 하나가 빠진 문제

1부터 9까지 한 번씩 쓴다는 조건 없이 합만 15로 맞추라고 하면 모든 칸에 5를 놓을 수도 있습니다. 행과 열 및 대각선의 합은 맞지만 정상 마방진의 조건에는 맞지 않습니다. 사용 가능한 수와 반복 허용 여부는 답의 범위를 결정하는 중요한 조건입니다.



합 15 / 같은 수 반복

합은 맞지만 서로 다른 수를 쓴 조건은 어깁니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

마방진의 조건을 읽다

같은 합을 만들려면 전체를 보아야 합니다.

1부터 9까지의 수를 한 번씩 사용해 3 × 3 배열을 만들고 모든 행과 열과 두 대각선의 합을 같게 해 봅시다. 이것이 아래에서 다루는 정상 마방진의 조건입니다. 한 행의 합만 맞추었다고 문제가 끝나지 않습니다. 다른 방향도 동시에 확인해야 합니다.

아홉 수의 전체 합은 45입니다. 세 행의 합이 모두 같고 그 합을 M이라고 쓰면 3M = 45입니다. 따라서 M은 15여야 합니다. 이 계산은 후보를 줄여 주지만 실제로 그런 배열이 존재한다는 증명까지 대신하지는 않습니다. 아래 배열을 직접 점검하면 존재를 확인할 수 있습니다.

가운데의 5를 사이에 두고 마주 보는 두 수를 살펴보세요. 각 쌍의 합이 10이므로 가운데 수를 더하면 15가 됩니다. 개별 칸의 수만 보던 시선을 여러 칸의 관계로 넓히면 배열을 이해하는 실마리가 생깁니다.



모든 방향의 합은 15

행 3개 / 열 3개 / 대각선 2개

행과 열 및 두 대각선을 차례로 점검하는 3차 마방진입니다.

작은 탐구 E

배열 전체를 90° 돌리면 마방진의 성질이 유지될까요? 특정한 두 수만 맞바꾸는 경우에도 언제나 유지되는지 확인해 보세요.

가운데 수를 중심으로 보기

본문의 배열에서는 4와 6이 한 쌍이며 9와 1도 한 쌍입니다. 2와 8 및 3과 7도 각각 합이 10입니다. 각 쌍 사이에 5를 더하면 15가 됩니다. 마주 보는 수를 색으로 묶어 보면 중심을 지나는 네 줄의 구조가 한눈에 드러납니다.

수학 개념 해설 | 탐구 E 해설 522쪽

마방진의 합을 먼저 구하다

배열을 완성하지 않아도 아는 수가 있습니다.

1부터 9까지의 수를 한 번씩 쓰는 3차 마방진을 생각해 봅시다. 모든 수의 합은 45입니다. 세 행의 합이 서로 같고 각 수가 정확히 한 행에 들어가므로 한 행의 합은 45를 3으로 나눈 15가 되어야 합니다. 배열을 아직 찾지 못했어도 목표가 되는 합은 알 수 있습니다.

이 계산은 완성된 배열의 예를 하나씩 확인하는 일보다 먼저 할 수 있습니다. 전체를 부분으로 나누어 보았을 때 반드시 유지되는 양을 이용한 것입니다. 조건을 만족하는 배열이 있다면 그 행의 합은 반드시 15라는 뜻입니다.

하지만 합이 15라는 사실만으로 배열이 마방진이 되는 것은 아닙니다. 수가 빠지거나 반복되지 않았는지와 모든 열 및 두 대각선의 합도 맞는지 확인해야 합니다. 반드시 필요한 조건 하나를 찾은 것과 모든 조건을 충족한 답을 찾은 것은 구별해야 합니다.

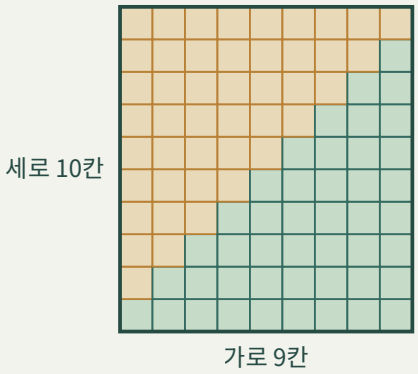
계산	결과
1 + 2 + ⋯ + 9	45
45 ÷ 3	15
4 + 9 + 2	15
4 + 5 + 6	15

일반화의 첫걸음

1부터 16까지 한 번씩 쓰는 4차 마방진이 있다면 한 행의 합은 얼마여야 할까요? 전체 합 136을 네 행으로 나누어 보세요.

전체 합을 짝으로 구하기

1과 9를 짝지으면 10이고 2와 8도 10입니다. 같은 방식으로 네 쌍을 만든 뒤 가운데 5를 더하면 전체 합은 45입니다. 일반적으로 1부터 9까지의 합은 9 × 10 ÷ 2로도 구할 수 있습니다. 합을 구하는 방법을 바꾸어도 한 행의 목표 합 15는 같습니다.



같은 계단 두 개를 맞붙이면 9 × 10 직사각형이 됩니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

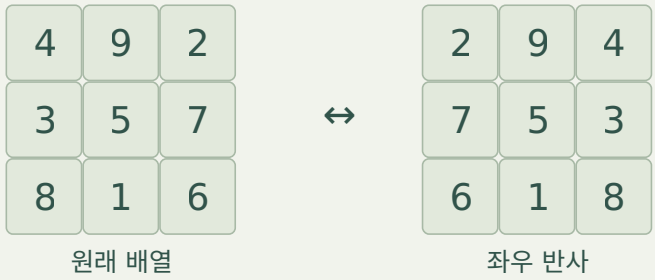
돌려도 남는 조건

배열의 모양과 성질을 구별합니다.

완성된 마방진을 종이 위에 그린 뒤 종이를 90° 돌려 봅시다. 원래의 행과 열은 각각 새 배열의 열과 행에 대응합니다. 두 대각선도 서로 자리를 바꿉니다. 수의 위치는 달라지지만 확인해야 할 줄들의 합은 그대로이므로 새 배열 역시 마방진입니다.

거울에 비춘 것처럼 좌우를 뒤집어도 같은 논리로 조건이 유지됩니다. 이런 조작을 이용하면 하나의 예에서 여러 배열을 얻을 수 있습니다. 그러나 수가 놓인 위치가 다르다는 것과 본질적으로 새로운 구조라는 것은 문제의 기준에 따라 구별해야 합니다.

가능한 마방진의 수를 셀 때 회전과 반사를 같은 것으로 볼지 먼저 정해야 합니다. 같은 대상을 세면서도 기준이 다르면 답이 달라질 수 있습니다. 셈의 시작에서 무엇을 서로 다른 경우로 인정하는지 분명히 하는 일이 중요합니다.



두 배열 모두 행과 열 및 두 대각선의 합이 15입니다.

배열 실험

본문의 마방진을 좌우로 뒤집어 보세요. 2 / 9 / 4로 시작하는 첫 행을 얻습니다. 모든 조건을 다시 확인하면 원래의 배열과 어떤 관계인지 알 수 있습니다.

모양이 달라도 같은 검사

좌우로 뒤집은 배열의 첫 열은 원래 배열의 마지막 열을 거꾸로 읽지 않고 그대로 옮긴 것입니다. 대각선 두 개는 서로 교환됩니다. 각 줄이 원래의 어떤 줄에 대응하는지 짝지으면 모든 합을 새로 계산하지 않고도 성질이 유지되는 이유를 설명할 수 있습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

라틴 방진은 합을 묻지 않는다

행과 열에서 중복되지 않는 것이 핵심입니다.

라틴 방진은 n종류의 기호를 n × n 칸에 넣어 각 행과 각 열에 모든 기호가 한 번씩 나타나게 한 배열입니다. 숫자를 써도 되지만 색이나 글자를 사용해도 됩니다. 기호의 크기보다 반복의 규칙이 중요하기 때문입니다.

아래 배열에서는 A와 B와 C가 각 행과 각 열에 한 번씩 나타납니다. 대각선에 같은 기호가 반복되어도 기본적인 라틴 방진의 조건을 어긴 것은 아닙니다. 격자의 모양이 비슷하다고 해서 마방진의 조건을 그대로 적용하지 않도록 주의합니다.

라틴 방진은 배치의 균형을 생각하게 해 줍니다. 세 활동을 세 시간대와 세 모둠에 배정할 때 각 모둠이 모든 활동을 한 번씩 하고 각 시간대에도 활동이 겹치지 않도록 배치하는 예를 만들 수 있습니다. 실제 실험 설계에서는 이 밖에도 조건을 더 검토해야 합니다.

ABCBCACAB

기호 A와 B와 C가 각 행과 각 열에 한 번씩 나타납니다.

개념 점검

각 행만 확인해서는 충분하지 않습니다. 행 조건을 만족하지만 열 조건은 어기는 배열을 하나 만들어 보세요.

기호 이름을 바꾸어도 될까

모든 A를 빨강으로 바꾸고 B와 C도 각각 다른 색으로 바꾸면 라틴 방진의 조건은 유지됩니다. 한 기호를 어디에서나 같은 새 기호로 바꾸었기 때문입니다. 반면 일부 칸의 A만 다른 기호로 바꾸면 중복이 생길 수 있습니다. 일관된 이름 바꾸기와 칸의 수정은 다른 조작입니다.

정의와 교육용 예시 | 최석정과의 연결 [13]

반복을 금지하면 보이는 구조

라틴 방진의 조건을 하나씩 점검합니다.

라틴 방진에서는 각 행과 각 열에 정해진 기호가 한 번씩 나와야 합니다. 기호가 숫자일 필요는 없습니다. 서로 구별할 수 있는 세 색이나 세 글자를 사용해도 같은 구조를 나타낼 수 있습니다. 크기나 합이 아니라 나타나는 횟수가 중요합니다.

첫 행을 A B C로 놓고 다음 행을 B C A로 놓으면 세 번째 행은 C A B로 채울 수 있습니다. 각 열에 빠진 기호가 무엇인지 확인하면 됩니다. 이 방법은 작은 예를 만들기 쉽지만 모든 라틴 방진이 같은 모양으로만 만들어지는 것은 아닙니다.

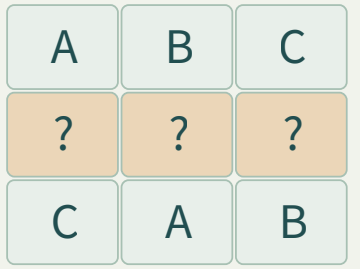
대각선에 기호가 반복된다고 해서 곧바로 틀린 배열은 아닙니다. 기본적인 라틴 방진의 조건은 행과 열에 관한 것이기 때문입니다. 마방진의 조건을 기억하고 있다고 해서 그 조건을 다른 문제에 그대로 가져오지 않도록 주의해야 합니다.

행	첫째 칸	둘째 칸	셋째 칸
1	A	B	C
2	B	C	A
3	C	A	B

> **새 탐구 9**
>
> 위 배열에서 두 번째 행 전체를 지웠다면 어떻게 복원할 수 있을까요? 각 열에 빠진 기호를 차례로 찾아 이유와 함께 적어 보세요.해설 526쪽

행끼리 순서를 바꾸기

완성된 라틴 방진의 두 행 전체를 맞바꾸어도 각 열에 들어 있는 기호의 종류는 그대로입니다. 각 행의 내부도 변하지 않으므로 라틴 조건은 유지됩니다. 같은 원리로 열 전체를 맞바꿀 수도 있습니다. 임의의 두 칸만 바꾸는 경우에는 이런 보장이 없습니다.



빠진 행: B C A

각 열에 없는 기호를 찾습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

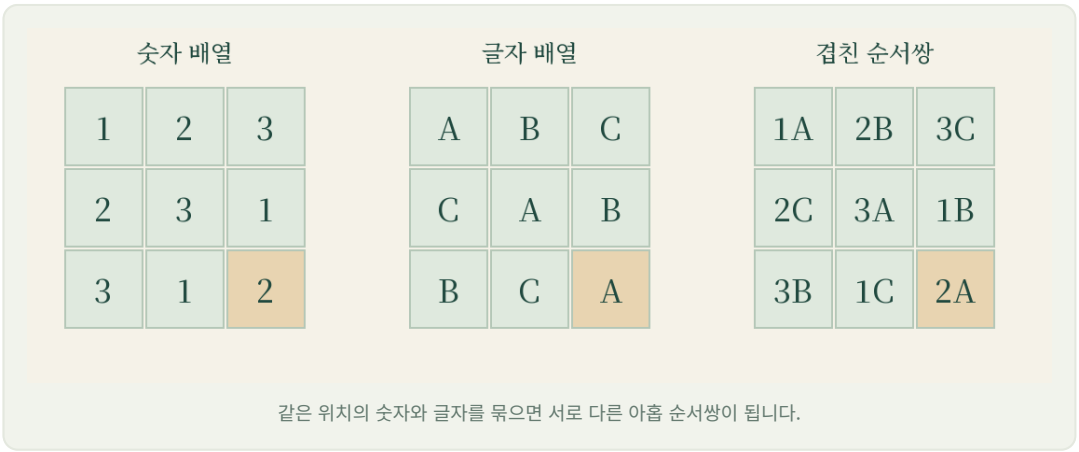
겹쳤을 때 새로 생기는 조건

직교 라틴 방진은 모든 짝을 한 번씩 만듭니다.

두 라틴 방진을 같은 위치끼리 겹쳐 봅시다. 첫 방진은 숫자 1과 2와 3을 쓰고 두 번째 방진은 A와 B와 C를 씁니다. 각 칸에서 숫자와 글자를 묶으면 1A와 같은 짝이 생깁니다. 아홉 칸에 가능한 아홉 짝이 한 번씩 나타나면 두 방진은 직교합니다.

직교성은 각 행과 열만 보는 조건이 아닙니다. 겹쳐진 배열 전체에서 같은 짝이 다시 등장하지 않아야 합니다. 두 방진이 각각 라틴 방진이라는 사실만으로 직교성이 보장되지는 않습니다. 같은 방진을 그대로 두 번 겹치면 짝이 반복되는 반례를 만들 수 있습니다.

최석정의 『구수략』에 나오는 9차 배열은 직교 라틴 방진의 역사와 연결해 다루어집니다. 아래의 3차 배열은 직교성의 조건을 이해하도록 새로 만든 예입니다. 원전의 배열을 축소해 복원한 그림은 아니며 옛 배열을 현대 개념으로 해석하는 과정에도 검토가 필요합니다.



같은 위치의 숫자와 글자를 묶으면 서로 다른 아홉 순서쌍이 됩니다.

작은 탐구 F

가능한 짝 아홉 개를 목록으로 만든 뒤 위 격자에서 하나씩 지워 보세요. 두 번째 행의 글자 순서를 A와 B와 C로 바꾸면 어떤 조건부터 깨질까요?

같은 방진을 두 번 겹치면

숫자 1과 2와 3을 각각 A와 B와 C로 바꾼 방진을 원래 방진에 겹치면 1A와 2B와 3C만 반복됩니다. 각 성분은 라틴 조건을 만족하지만 아홉 가지 쌍이 모두 나타나지는 않습니다. 성분의 조건과 두 성분 사이의 조건을 구별해야 하는 구체적인 반례입니다.

역사 연결 [13] | 탐구 F 해설 522쪽

순서쌍은 무엇을 더 기록할까

두 조건을 한꺼번에 확인하는 방법

숫자와 글자를 함께 기록하면 어느 숫자가 어느 글자와 만났는지 알 수 있습니다. 1A와 1B는 숫자는 같지만 글자가 다른 쌍입니다. 1A와 2A는 글자는 같지만 숫자가 다른 쌍입니다. 두 성분이 모두 같을 때만 같은 쌍으로 봅니다.

세 숫자와 세 글자로 만들 수 있는 쌍은 아홉 가지입니다. 첫 번째 숫자에 A와 B와 C를 붙이고 두 번째와 세 번째 숫자에도 같은 일을 하면 됩니다. 각 단계에서 세 가지 선택이 있으므로 전체 가짓수는 3×3입니다.

두 라틴 방진을 겹쳤을 때 아홉 칸에 이 아홉 쌍이 한 번씩 나타나면 서로 직교한다고 합니다. 각 배열이 라틴 방진이라는 조건만으로 직교성이 저절로 따라오지는 않습니다. 성분별로 검사한 뒤 쌍의 중복도 따로 확인해야 합니다.

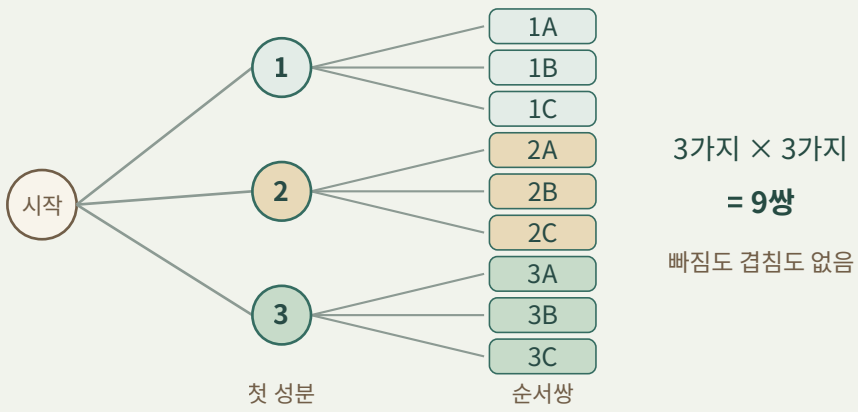
숫자	A와 만남	B와 만남	C와 만남
1	1A	1B	1C
2	2A	2B	2C
3	3A	3B	3C

검사 순서

숫자 배열의 행과 열을 검사합니다. 글자 배열의 행과 열도 검사합니다. 마지막으로 같은 쌍이 두 번 나타나는지 확인합니다.

목록을 빠짐없이 만드는 순서

첫 성분을 1로 고정한 채 A와 B와 C를 붙인 다음 첫 성분을 2로 바꾸어 같은 일을 반복합니다. 이 순서로 쓰면 중복과 누락을 확인하기 쉽습니다. 가능한 쌍의 수를 곱으로 구하는 계산과 실제 목록을 만드는 절차가 서로 대응합니다.



첫 성분마다 가지가 셋씩 뻗어 아홉 쌍이 빠짐없이 생깁니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

두 조건을 고르게 섞는 배열

직교성을 배치 문제에 연결해 봅니다.

세 가지 재료와 세 가지 처리 방법을 조합하는 작은 실험을 생각해 봅시다. 모든 조합을 한 번씩 살펴보려면 아홉 개의 실험이 필요합니다. 어떤 조합을 빠뜨리거나 두 번 넣으면 전체를 고르게 비교하기 어렵습니다. 순서쌍의 목록은 이 누락과 중복을 점검하는 데 도움이 됩니다.

직교 라틴 방진을 사용하면 각 행과 각 열에서도 재료와 처리 방법이 각각 한 번씩 나타나도록 배치할 수 있습니다. 위치에 따라 결과가 달라질 가능성이 있을 때 이런 균형을 갖춘 배치를 생각할 수 있습니다. 수의 배열이 현실의 실험 설계와 연결되는 한 장면입니다.

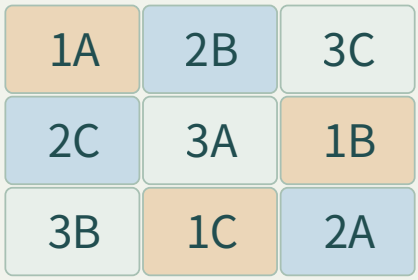
그렇다고 배열 하나만으로 좋은 실험이 완성되는 것은 아닙니다. 실제 실험에는 반복과 무작위 배치와 측정 방법의 검토도 필요합니다. 여기서는 조합을 빠짐없이 고르게 배치한다는 수학적 원리만 살펴봅니다. 이 예를 최석정이 실제로 수행한 실험으로 읽어서는 안 됩니다.

자리	첫째 칸	둘째 칸	셋째 칸
첫째 행	1A	2B	3C
둘째 행	2C	3A	1B
셋째 행	3B	1C	2A

> **빠진 조합 찾기**
>
> 아홉 칸을 숫자 순서로 다시 정리해 보세요. 1A부터 3C까지 모든 쌍이 한 번씩 있는지 확인할 수 있습니다.

배치의 균형과 결과의 공정성

각 행에 재료 1과 2와 3이 한 번씩 나타나면 재료 하나가 특정 행에만 몰리지 않습니다. 글자도 같은 방식으로 고르게 배치됩니다. 이런 균형은 비교를 돕지만 결과에 영향을 주는 모든 요인을 제거하지는 않습니다. 배열의 성질과 실험 전체의 타당성은 구별해야 합니다.



행과 열에서도 균형

각 조합은 전체에서 한 번씩 나타납니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

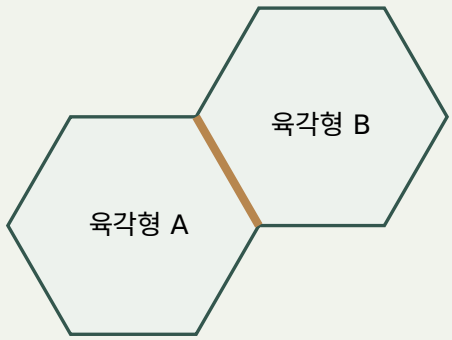
거북 등처럼 연결된 수

지수귀문도는 이웃 관계를 생각하게 합니다.

최석정의 지수귀문도에는 육각형들이 이어진 모양에 수를 배치하고 합의 관계를 맞추는 생각이 담겨 있습니다. 격자 칸만 바라보던 시선을 꼭짓점과 이웃 관계로 넓혀 주는 예입니다. 한 자리에 놓인 수가 둘 이상의 도형에 동시에 영향을 줄 수 있습니다.

아래는 원전의 배열이 아니라 그 생각을 이해하기 위한 두 육각형 모형입니다. 두 도형이 한 변을 공유하면 그 변의 양 끝점에 놓인 수는 양쪽 합에 모두 들어갑니다. 두 육각형의 합을 같게 만들 때 공통으로 들어가는 부분을 지우고 나면 나머지 꼭짓점 합만 비교하면 됩니다.

겹치는 부분을 구별하면 같은 계산을 되풀이하지 않고 관계를 비교할 수 있습니다. 하나의 수가 어느 조건들에 함께 들어가는지 표시해 보세요. 그 수를 바꾸었을 때 영향을 받는 곳을 예상할 수 있습니다. 배열의 구조를 읽는다는 것은 이런 연결을 찾아내는 일입니다.



한 변을 공유하는 두 육각형의 개념도. 금색 변의 양 끝점은 두 합에 모두 들어갑니다.

A의 공통 아닌 부분 합 = B의 공통 아닌 부분 합

공통 부분을 식에서 지우기

두 육각형에 공통으로 들어가는 수의 합을 S로 놓고 나머지 합을 A와 B로 놓으면 두 전체 합은 A + S와 B + S입니다. 이 둘이 같다는 조건은 A = B와 같습니다. 양쪽에 똑같이 더해진 부분을 분리하면 비교할 양이 줄어듭니다.

전시 [4] | 개념 모형은 편집 재구성

겹친 부분은 두 번 세어진다

합을 더할 때 공통 부분을 살핍니다.

두 도형이 꼭짓점을 공유하는 수 배열을 생각해 봅시다. 각 도형의 꼭짓점 수를 더하면 공통 꼭짓점이 두 번 포함됩니다. 서로 다른 꼭짓점의 수를 구하려면 중복해서 센 부분을 한 번 빼야 합니다. 겹친 배열에서 전체 합을 다룰 때도 같은 생각이 필요합니다.

두 육각형이 한 변을 공유한다면 꼭짓점 두 개를 함께 사용합니다. 각각 여섯 꼭짓점을 갖지만 서로 다른 꼭짓점은 열 개입니다. 6 + 6 − 2 = 10이라는 계산에서 마지막 2는 공유한 꼭짓점의 수입니다.

꼭짓점에 수를 적고 두 육각형의 합을 더한 경우에는 공유한 꼭짓점에 적힌 수가 두 번 더해집니다. 전체의 합을 구하려면 그 두 수를 한 번씩 빼야 합니다. 단순히 꼭짓점의 개수만 빼는 것이 아니라 무엇을 세었는지에 맞게 중복을 바로잡아야 합니다.

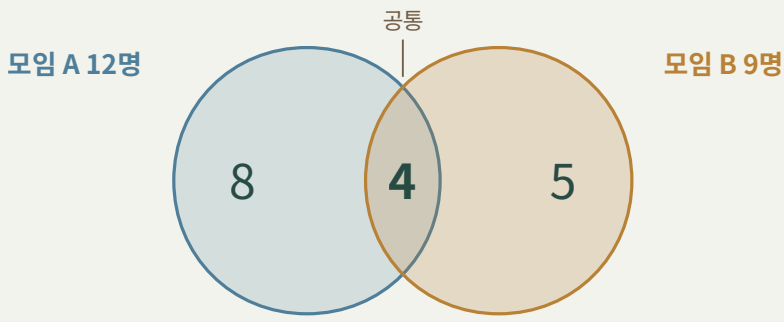
세는 대상	두 도형의 값을 더한 뒤
꼭짓점의 개수	공유한 꼭짓점의 개수를 한 번 뺌
꼭짓점에 적힌 수의 합	공유한 꼭짓점의 수들을 한 번씩 뺌
두 육각형이 한 변을 공유	서로 다른 꼭짓점은 10개

새 탐구 10

두 모임에 각각 12명과 9명이 있고 4명이 두 모임에 모두 속합니다. 두 모임에 속한 서로 다른 사람은 모두 몇 명인가요?해설 526쪽

공통 부분을 두 번 빼면

12 + 9에서 공통인 4명을 두 번 빼면 13명이 됩니다. 이 값은 두 모임 중 한쪽에만 속한 사람의 수입니다. 두 모임에 모두 속한 사람도 전체에 포함하려면 한 번만 빼야 합니다. 계산식이 가리키는 집합이 무엇인지 그림과 함께 확인해 보세요.



$$12 + 9 - 4 = 8 + 4 + 5 = 17$$

공통인 네 명을 한 번만 빼면 서로 다른 사람은 17명입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

홍정하의 문제를 묻는 태도

문답의 가치는 답을 넘어 방법을 드러냅니다.

홍정하는 조선 후기의 산학자로 『구일집』을 남겼습니다. 이 책에는 기존 산서의 문제와 방법을 검토하고 재구성한 흔적이 나타납니다. 알려진 풀이를 사용하는 능력뿐 아니라 여러 문제를 일정한 체계 안에 배치하는 능력을 살필 수 있습니다.

『구일집』에는 1713년 청나라 인물 하국주와 문제를 주고받은 기록도 있습니다. 이 문답은 당시 수학 지식이 사람과 책의 이동을 통해 교류되었음을 보여 줍니다. 다만 한 문헌이 전하는 특정 문답을 두 나라 수학 전체의 우열을 확정하는 근거로 확대할 필요는 없습니다.

좋은 수학적 질문은 상대가 답을 아는지 확인하는 데서 끝나지 않습니다. 풀이에 사용한 조건과 방법이 적용되는 범위를 드러내게 합니다. 같은 문제를 다른 방법으로 풀어 보는 일도 도움이 됩니다. 한 풀이에서 감추어진 관계가 다른 풀이에서는 분명하게 보일 수 있기 때문입니다.

『구일집』의 편찬 연대는 각 부분과 기록을 함께 살펴 판단합니다. 이 책은 전체의 완성 연도를 1724년으로 정리한 자료를 따릅니다. 저술의 일부가 그보다 먼저 이루어졌다는 설명과 서로 모순되는 것은 아닙니다.

> **교실에서 이어 묻기**
>
> 답이 맞았다는 사실을 확인한 뒤 친구에게 질문해 보세요. 이 방법은 수가 달라져도 될까? 조건 하나가 빠지면 답이 하나로 정해질까?

다른 풀이를 비교하는 기준

같은 문제의 두 풀이를 읽을 때는 사용한 가정과 중간 단계 및 검산 방법을 나누어 살펴봅니다. 한 풀이가 짧더라도 숨긴 조건이 많을 수 있습니다. 설명이 조금 길어도 각 단계의 이유가 분명하면 다른 문제에 적용하기 쉽습니다. 문답의 가치는 방법이 적용되는 범위를 드러내는 데에도 있습니다.

예를 들어 밭의 넓이를 구하는 두 방법을 비교한다면 단위를 맞추는 단계부터 표시합니다. 한 방법은 도형을 나누고 다른 방법은 전체에서 일부를 뺄 수 있습니다. 답이 같다는 확인에 더해 같은 넓이를 서로 다른 부분으로 표현했다는 설명까지 남겨 보세요.

저자와 저술 [11] [12]

천원술을 오늘의 눈으로 읽기

기호가 달라도 미지의 양을 다룹니다.

방정식을 배우면 모르는 수를 x로 놓는 일이 자연스럽게 느껴집니다. 그러나 수학의 역사를 돌아보면 미지의 양과 그 관계를 표현하는 방법은 여러 가지였습니다. 조선 산학의 천원술을 읽을 때도 오늘의 문자식과 당시의 표현을 바로 같은 것으로 취급해서는 안 됩니다.

현대의 해설에서는 계수를 차례로 적어 식의 구조를 설명할 수 있습니다. $x^2 + 3x - 40$이라는 식에는 이차항의 계수 1과 일차항의 계수 3과 상수항 −40이 들어 있습니다. 각 수가 어느 차수에 해당하는지 알아야 식을 다시 읽을 수 있습니다. 자리와 약속이 의미를 결정한다는 점에서 자리값의 생각을 떠올릴 수 있습니다.

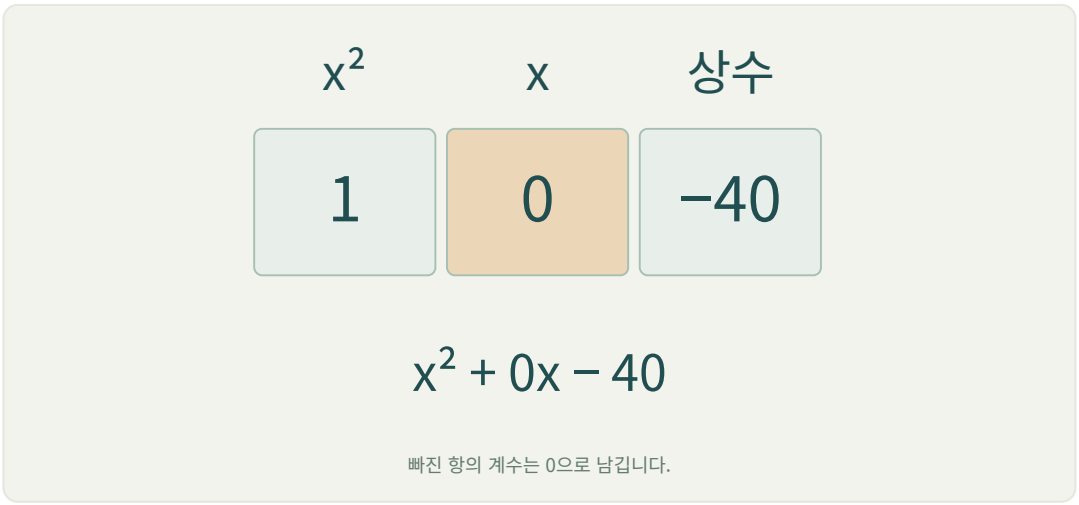
다만 이 계수표는 원리를 이해하기 위한 현대적 다리입니다. 당시 계산판의 정확한 배치와 조작을 복원한 것이 아닙니다. 낯선 표기를 익숙한 식으로 옮기면 이해가 쉬워지지만 그 번역에서 사라지는 특징도 있음을 기억해야 합니다.

현대식에서의 자리	이차항	일차항	상수항
계수	1	3	−40
각 항	x^2	3x	−40

> **빈 항도 정보입니다**
>
> $x^2 - 40$을 계수표로 나타내면 일차항의 계수는 0입니다. 중간 자리를 빼버리면 각 수가 어떤 항인지 잘못 읽을 수 있습니다.

항의 순서가 알려 주는 것

$x^2 - 40$의 계수표를 1 / 0 / −40으로 적으면 일차항이 없다는 사실이 보존됩니다. 1 / −40만 적고 차수의 약속을 생략하면 다른 식으로 읽힐 수 있습니다. 기호가 없는 자리도 구조를 알려 준다는 점에서 산가지의 빈자리와 연결해 생각할 수 있습니다.



조선 산학의 배경 [6] [11] | 계수표는 현대적 설명

모르는 수를 먼저 정하다

천원술에서 오늘의 방정식으로 건너갑니다.

천원술은 모르는 양 하나를 정하고 문제의 조건을 다항식 관계로 나타내는 동아시아의 방법입니다. 오늘의 문자 x를 두는 발상과 연결해 이해할 수 있습니다. 다만 기호와 계산판의 배열과 구체적인 알고리즘까지 현대의 식과 같았던 것은 아닙니다.

긴 변이 짧은 변보다 3만큼 길고 넓이가 40인 직사각형을 생각해 봅시다. 짧은 변을 x로 정하면 긴 변은 x + 3입니다. 두 길이의 곱이 넓이이므로 x(x + 3) = 40이라는 식을 얻습니다. 미지수의 뜻을 정한 뒤 주어진 양의 관계를 그 기호로 옮긴 것입니다.

식을 정리하면 (x + 8)(x − 5) = 0이 됩니다. 대수적으로는 −8과 5가 후보이지만 길이를 묻는 상황에서는 양수인 5를 선택합니다. 방정식을 푸는 일과 구한 해를 문제의 맥락에 맞게 해석하는 일은 모두 필요합니다.

$$x(x + 3) = 40$$
$$x^2 + 3x - 40 = 0$$
$$(x + 8)(x - 5) = 0$$

작은 탐구 G

세로가 5이면 가로는 얼마인가요? 두 길이를 원래 조건에 넣어 확인하세요. 이 페이지의 인수분해는 현대적 풀이이며 역사적 천원술 계산의 재현은 아닙니다.

식의 값으로 후보를 좁히기

x가 4이면 x(x + 3)은 28이고 x가 6이면 54입니다. 양수인 범위에서 값을 비교하면 40을 만드는 길이가 그 사이에 있음을 짐작할 수 있습니다. x = 5를 넣으면 정확히 40입니다. 대입은 해를 확인하는 방법이지만 모든 해를 구했다는 증명과는 구별해야 합니다.

역사적 개념 [11] [12] | 창작 예제 | 해설 522쪽

문장을 식으로 옮기는 순서

미지수의 뜻을 먼저 적습니다.

직사각형의 긴 변이 짧은 변보다 3 m 길고 넓이가 40 m^2라고 합시다. 짧은 변의 길이를 x m로 정하면 긴 변의 길이는 (x + 3) m입니다. 넓이는 두 변의 곱이므로 x(x + 3) = 40이라는 식을 얻습니다. 기호를 정할 때 길이의 단위도 함께 밝혀 둡니다.

식을 세웠다면 기호를 다시 문장으로 읽어 보세요. x와 x + 3을 곱한 것이 실제로 직사각형의 넓이를 나타내는지 확인합니다. 잘못 세운 식을 아무리 정확히 풀어도 원래 문제의 답을 얻을 수는 없습니다. 식과 상황을 양쪽으로 오가며 점검해야 합니다.

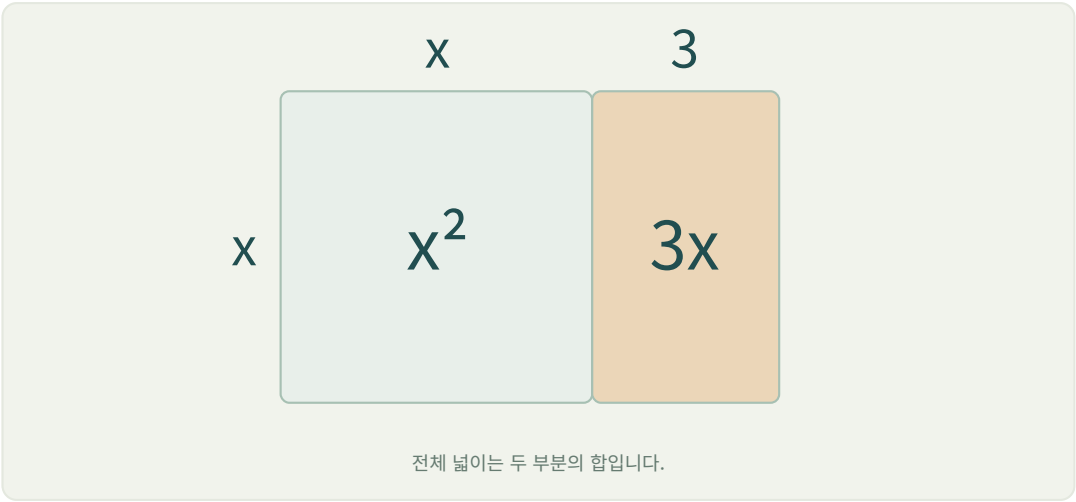
이 방정식은 정리하면 (x − 5)(x + 8) = 0이 됩니다. 대수적으로는 5와 −8이 해이지만 길이는 양수여야 하므로 짧은 변은 5 m입니다. 구한 수를 해석하는 단계까지 진행해야 현실의 문제를 해결했다고 말할 수 있습니다.

단계	표현
미지수를 정함	짧은 변의 길이 = x m
다른 양을 나타냄	긴 변의 길이 = (x + 3) m
관계를 식으로 씀	x(x + 3) = 40
상황에 맞는 해를 선택함	짧은 변 5 m / 긴 변 8 m

> **답의 확인**
>
> 5와 8의 차이는 3이고 곱은 40입니다. 처음의 두 조건을 모두 확인할 수 있습니다.

넓이 그림으로 식 읽기

짧은 변이 x인 직사각형의 긴 변을 x와 3으로 나누면 넓이가 x^2인 정사각형과 넓이가 3x인 직사각형이 생깁니다. 둘의 합이 40이라는 뜻이 $x^2 + 3x = 40$입니다. 전개한 식의 각 항이 그림에서 어느 부분인지 찾아보면 문장과 식의 연결이 분명해집니다.



전체 넓이는 두 부분의 합입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

남고 모자라는 양으로 풀기

차이를 이용하면 전체가 드러납니다.

어떤 사람들에게 물건을 나누어 주려 합니다. 한 사람에게 3개씩 주면 8개가 남고 4개씩 주면 2개가 모자랍니다. 같은 물건과 같은 사람들을 두 기준으로 바라본 문제입니다. 사람의 수를 n으로 놓으면 물건의 수는 $3n + 8$이면서 $4n - 2$입니다.

두 표현은 같은 양이므로 $3n + 8 = 4n - 2$입니다. 한 사람에게 한 개씩 더 주는 데 필요한 전체 추가량은 남았던 8개와 모자란 2개를 합한 10개입니다. 따라서 사람은 10명이고 물건은 38개입니다. 차이를 비교하는 설명과 방정식 풀이가 같은 관계를 드러냅니다.

이 예는 남거나 부족한 양을 이용해 관계를 찾는 교육용 문제입니다. 숫자를 바꾸어도 같은 구조가 유지되는지 살펴볼 수 있습니다. 다만 한 사람에게 더 주는 양이 두 개라면 추가량을 사람 수로 바로 읽을 수 없다는 점을 주의해야 합니다.

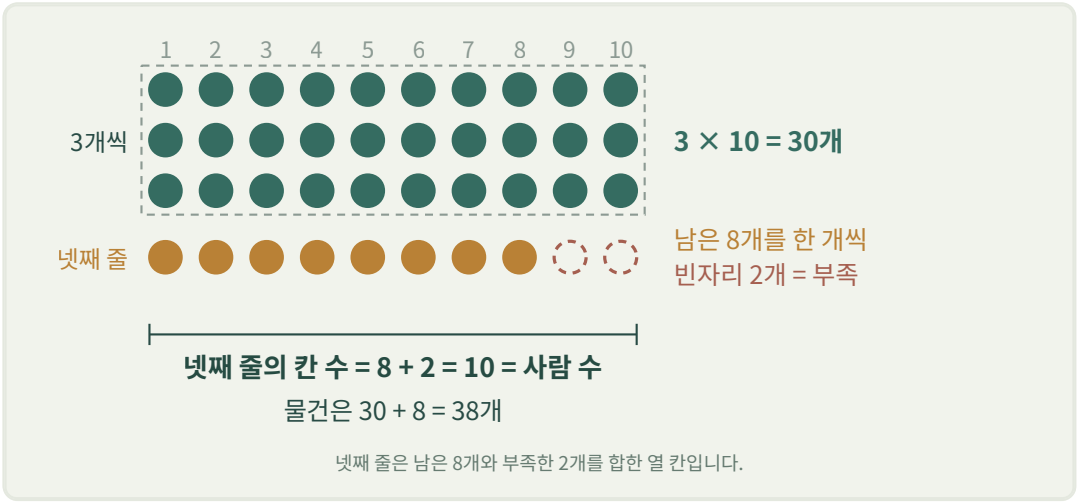
배분 기준	10명에게 필요한 양	38개와의 차이
한 사람에게 3개	30개	8개 남음
한 사람에게 4개	40개	2개 부족

새 탐구 11

한 사람에게 2개씩 주면 7개가 남고 3개씩 주면 5개가 모자랍니다. 사람 수와 물건 수를 구해 두 조건에 넣어 보세요.해설 526쪽

추가 배분량으로 바로 보기

3개씩 주는 기준에서 4개씩 주는 기준으로 바꾸면 사람마다 한 개를 더 주어야 합니다. 필요한 추가량 10개가 곧 사람 수가 되는 이유입니다. 만약 사람마다 두 개씩 더 주는 문제였다면 전체 추가량을 2로 나누어야 사람 수를 구할 수 있습니다.



수학 개념 해설과 창작 탐구

새로운 책을 읽는다는 것

남병길과 이상혁의 시대를 바라봅니다.

19세기 산학자들은 전통 산서와 새로 접한 수학 지식을 함께 검토했습니다. 남병길의 『산학정의』와 이상혁의 『익산』 및 『산술관견』은 이 시기를 읽는 데 등장하는 저술입니다. 서로 다른 지식 전통을 만나는 과정은 낡은 것을 한순간에 버리고 새것으로 바꾸는 단순한 교체가 아니었습니다.

새로운 기호를 배운다고 곧바로 새로운 개념까지 이해되는 것은 아닙니다. 비슷한 문제를 다른 방식으로 표현할 때 무엇이 같고 무엇이 다른지 확인해야 합니다. 기존 방법이 잘 작동하는 영역과 새로운 방법이 더 분명한 설명을 주는 영역도 비교할 수 있습니다.

오늘의 독자도 옛 책을 읽을 때 번역의 문제를 만납니다. 같은 단어가 시대에 따라 다른 뜻을 가질 수 있고 현대의 수식을 덧붙이는 과정에서 원전의 특징이 사라질 수도 있습니다. 설명을 쉽게 만드는 일과 원전의 모습을 보존하는 일 사이에 균형이 필요합니다.

책의 교류를 살피면 어떤 지식이 어디에서 전해졌는지와 함께 그것을 읽은 사람이 무엇을 선택했는지 알 수 있습니다. 기존 방법을 비교하고 내용을 다시 배열하며 새 문제에 적용하는 과정도 수학의 역사에 포함됩니다. 전달된 지식과 그것을 다룬 사람의 판단을 함께 보아야 합니다.

> **비교 읽기 활동**
>
> 같은 문제를 그림으로 설명한 풀이와 식으로 설명한 풀이를 준비하세요. 각 풀이가 쉽게 보여 주는 정보와 감추는 정보를 나누어 적어 봅시다.

같은 용어를 곧바로 같게 읽지 않기

옛 책의 계산 절차를 현대의 방정식과 연결할 수 있어도 목적과 표현까지 같다고 단정할 수는 없습니다. 먼저 원문이 제시한 문제와 풀이의 순서를 살피고 그 뒤 현대적 표현을 덧붙이는 편이 좋습니다. 번역은 익숙한 말을 붙이는 작업과 함께 차이를 기록하는 작업이기도 합니다.

저술과 인물의 맥락 [21] [22] [23] | 현대적 비교 읽기 해설

남병길과 이상혁을 함께 읽기

책은 집필과 검토의 협력으로 다듬어집니다.

조선 후기의 수학을 인물 한 사람의 이름으로만 정리하면 책을 읽고 고치며 전한 관계가 잘 보이지 않습니다. 남병길과 이상혁의 활동에서는 수학 지식을 정리하고 검토하는 협력을 살펴볼 수 있습니다. 서로 다른 역할이 책의 완성에 기여했다는 사실에 주목할 만합니다.

1867년에 간행된 『산학정의』는 남병길이 저술하고 이상혁이 교정을 본 책으로 설명됩니다. 기초 계산에서 비례와 방정식 및 측량에 이르는 내용을 다룹니다. 이미 알려진 방법을 모아 오류를 바로잡고 읽기 좋게 정리하는 일도 수학 지식을 이어 가는 중요한 작업입니다.

새로운 정리를 발표한 일만이 학문의 전부는 아닙니다. 계산의 잘못을 찾고 설명의 빠진 부분을 보충하며 다음 독자가 이해할 수 있도록 쓰는 일이 필요합니다. 오늘 우리가 옛 책을 읽을 수 있는 데에도 이런 집필과 검토와 보존의 과정이 놓여 있습니다.

작업	독자에게 주는 도움
수집	흩어진 지식을 함께 읽게 함
정리	기초와 응용의 관계를 드러냄
교정	계산과 표기의 잘못을 바로잡음
전승	다음 독자가 책을 접할 길을 남김

> **인물 읽기**
>
> 업적의 목록과 함께 누구의 책을 읽고 누구와 문제를 논의했는지 살펴보면 지식의 연결이 보입니다.

교정이 필요한 세 자리

계산 결과의 오류와 기호를 옮긴 오류 및 설명의 누락은 서로 다릅니다. 결과가 맞더라도 앞 단계에서 어떻게 이어졌는지 알 수 없다면 독자는 방법을 배우기 어렵습니다. 책을 검토할 때 이 세 가지를 나누어 살피면 수정해야 할 부분을 더 정확하게 설명할 수 있습니다.

남병길과 이상혁 [21] [22] | 『산학정의』 [23]

측량을 닮음으로 설명하기

직접 닿지 못하는 높이를 구하는 모형

높은 나무의 꼭대기에 자를 대기는 어렵습니다. 그러나 같은 순간의 그림자를 비교하면 닮음의 관계를 이용해 높이를 추정할 수 있습니다. 가까운 장소에 수직 막대를 세우고 막대의 높이와 두 그림자의 길이를 측정합니다. 햇빛이 평행하게 들어온다는 가정이 필요합니다.

높이 1.5 m인 막대의 그림자가 2 m이고 나무의 그림자가 8 m라면 그림자 길이는 네 배입니다. 같은 조건에서 높이도 네 배이므로 나무의 높이는 6 m로 추정됩니다. 비례식을 세우기 전에 두 삼각형이 왜 닮았는지 확인해야 합니다.

실제 지면이 경사지거나 나무가 기울어 있으면 이 단순한 관계를 그대로 사용할 수 없습니다. 측량은 공식의 적용만이 아니라 조건을 갖추고 오차를 검토하는 일입니다. 이 예는 전통 산학의 측량 문제와 연결해 읽는 현대적 모형이며 특정 문헌의 원문 문제는 아닙니다.

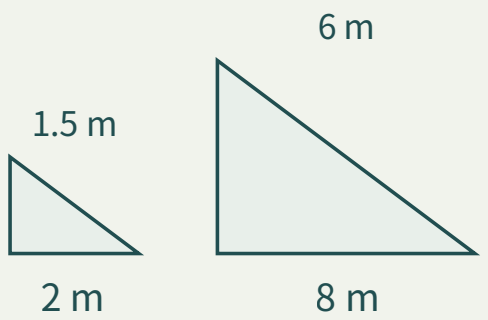
대상	높이	그림자 길이
막대	1.5 m	2 m
나무	6 m	8 m
나무 ÷ 막대	4배	4배

비례식

나무 높이 ÷ 1.5 = 8 ÷ 2입니다. 길이의 단위를 모두 m로 맞춘 뒤 계산했습니다.

비례식의 두 가지 표현

나무 높이를 h로 놓으면 h/8 = 1.5/2입니다. 높이와 그림자의 비를 비교한 식입니다. h/1.5 = 8/2로 쓰면 두 대상 사이의 확대 비를 비교합니다. 두 식은 같은 닮음 관계를 다르게 표현하며 모두 h = 6을 줍니다.



그림은 닮음의 원리를 나타낸 도식입니다.

측량을 다룬 산학서 [23] | 예제는 창작

조건을 바꾸면 문제가 달라진다

활동 3 | 방진 검수자가 되어 봅시다.

아래 두 배열을 보고 각각 어떤 조건을 만족하는지 판단해 보세요. 첫 번째는 숫자를 배열했고 두 번째는 숫자와 글자의 짝을 배열했습니다. 겉모양이 비슷하다는 이유로 같은 기준을 적용하지 않도록 주의합니다.

검수는 순서를 정하면 편리합니다. 먼저 각 행을 확인하고 다음으로 각 열을 확인합니다. 마방진이라면 대각선의 합까지 확인합니다. 직교 라틴 방진이라면 각 성분의 라틴 조건을 확인한 뒤 전체 순서쌍의 중복을 셉니다.

오류를 발견했다면 틀렸다는 판정과 함께 그 근거를 남기세요. 조건을 어긴 행이나 반복된 기호의 위치를 구체적으로 적으면 다른 사람도 판단을 확인할 수 있습니다. 한 칸을 고친 뒤에는 다른 조건이 새로 깨지지 않았는지 배열 전체를 다시 살펴봅니다.

123231312

배열 ①

1A2B3C2B3C1A3C1A2B

배열 ②

제출할 답

①은 라틴 방진인가요? 마방진인가요? ②의 숫자와 글자는 각각 라틴 방진인가요? 두 방진은 직교하나요? 각 판단의 근거를 하나 이상 적으세요.

반례가 되는 위치를 지목하기

배열 ①의 오른쪽 위에서 왼쪽 아래로 내려가는 대각선에는 3이 세 번 나옵니다. 합이 9이므로 다른 줄의 합 6과 다릅니다. 배열 전체가 막연히 이상하다고 말하기보다 조건을 어긴 위치와 계산을 남기면 다른 사람도 판단을 재현할 수 있습니다.

창작 탐구 | 해설 522쪽

예와 반례의 힘

한 번의 성공과 한 번의 실패는 역할이 다릅니다.

어떤 조건이 언제나 성립한다고 주장하려면 모든 경우를 다룰 이유가 필요합니다. 작은 예 몇 개가 맞는다는 사실은 유용한 단서이지만 그 자체로 일반적인 증명이 되지는 않습니다. 더 큰 경우에서 달라지는 조건이 있는지 살펴야 합니다.

반면 모든 경우에 성립한다는 주장에 맞지 않는 예를 하나 찾으면 그 주장은 그대로 유지될 수 없습니다. 행의 합이 같으면 언제나 마방진이라는 주장에는 열의 합이 다른 배열 하나가 반례가 됩니다. 실패한 예도 주장의 정확한 범위를 정하는 데 중요한 역할을 합니다.

좋은 탐구는 맞는 예만 모으지 않습니다. 조건을 하나씩 바꾸어 어디에서 결과가 달라지는지 살펴봅니다. 무엇이 충분하고 무엇이 부족한지 드러나면 처음의 질문도 더 정확해집니다. 다음 장의 대칭과 그래프를 읽을 때도 이 태도를 이어 갈 수 있습니다.

확인한 것	말할 수 있는 범위
조건을 만족하는 예 하나	그런 예가 적어도 하나 있음
여러 작은 예의 성공	일반적인 규칙을 추측할 단서
주장에 맞지 않는 예 하나	모든 경우에 성립한다는 주장을 반박
모든 경우를 다루는 논리	정해진 조건 아래 성립함을 증명

> **주장을 고쳐 쓰기**
>
> 틀린 주장을 버리는 데서 끝내지 마세요. 어떤 조건을 더하면 옳아질 수 있는지 생각해 보는 과정이 새로운 문제를 만듭니다.

주장을 좁혀서 다시 세우기

모든 직사각형에서 둘레가 같으면 넓이도 같다는 주장은 반례로 깨집니다. 그러나 두 변의 길이가 각각 같다면 넓이도 같다는 주장은 성립합니다. 반례를 발견한 뒤 어떤 조건이 부족했는지 살피면 더 정확한 주장으로 고쳐 쓸 수 있습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

한국관 / 61

현대의 수학과 열린 질문

배움의 공간이 넓어지다

4장 | 근현대의 수학자

근대 학교의 확산은 수학을 배우는 장소와 교재와 학습자의 범위를 바꾸었습니다. 산술은 학교의 정규 교과 속에서 가르쳐졌고 새로운 표기와 계산 방법이 교실에 들어왔습니다. 하지만 변화는 한날에 이루어지지 않았습니다. 기존 학문과 교육 관행은 새 제도와 함께 존재하기도 했습니다.

연구 수학의 성장에는 교육 외에도 발표와 토론의 공간이 필요합니다. 1946년에 출발한 학회 활동은 오늘의 대한수학회로 이어졌습니다. 학술지와 학술대회는 개인의 결과를 공동체가 읽고 검토하는 통로입니다. 수학자가 고립된 천재로만 그려질 때 잘 보이지 않는 기반입니다.

현대 수학은 국경을 넘는 연구와 교육의 연결 속에서 발전합니다. 이임학과 허준이의 이야기도 한국과의 관계를 살피는 동시에 국제적인 연구 환경과 공동 작업을 함께 보아야 합니다. 출생지와 성장한 곳과 국적과 활동 기관은 서로 다른 정보입니다.

이 장에서는 전문적인 업적의 증명을 모두 다루지 않습니다. 대신 작은 예를 통해 대칭을 연산으로 표현하는 방법과 색칠의 가짓수에서 규칙을 찾는 방법을 살펴봅니다. 연구자가 어떤 질문을 던지는지 이해하는 입구로 읽어 주세요.

> **수학을 이어 주는 것**
>
> 교과서와 학교뿐 아니라 학회와 도서관과 동료의 질문도 수학을 자라게 합니다. 자신의 공부에서 이런 역할을 하는 사람이나 공간을 떠올려 보세요.

공개된 결과가 지식이 되기까지

새 결과를 발표한 뒤에도 다른 연구자의 검토와 설명의 보완이 이어질 수 있습니다. 독자가 정의와 가정을 확인할 수 있어야 결과를 다른 문제에 사용할 수 있습니다. 발표와 읽기 및 질문이 반복되는 과정을 함께 보아야 수학이 공동체 안에서 이어지는 모습을 이해할 수 있습니다.

전시 [5] | 학술 공동체 [14]

수학이 이어지는 공간

교실과 학술지와 학회의 역할

수학의 역사는 정리를 발견한 사람의 이야기이면서 지식을 나누는 공간의 역사이기도 합니다. 교실에서는 다음 세대가 공통의 언어를 배우고 학술지에서는 새로운 주장의 근거를 읽습니다. 학회와 세미나에서는 서로의 질문을 듣고 설명의 빈틈을 검토합니다.

새로운 결과가 알려지려면 다른 사람이 이해하고 확인할 수 있는 형태로 쓰여야 합니다. 기호의 뜻을 정하고 필요한 가정을 밝히며 각 단계가 왜 성립하는지 보여 주어야 합니다. 연구 논문은 결과를 알리는 문서이면서 검토를 가능하게 하는 기록입니다.

학문이 성장하는 과정을 상이나 유명한 인물의 이름으로만 표현하면 이런 기반이 가려질 수 있습니다. 한 사람의 성취를 이해할 때도 어떤 교육과 토론과 출판의 환경이 있었는지 함께 살펴볼 필요가 있습니다. 연구를 지속하는 일에는 개인의 노력과 공동의 제도가 모두 관여합니다.

공간	지식이 이어지는 방식
교실	공통 개념과 표현을 배움
세미나	질문을 나누고 풀이를 검토함
학술지	결과와 증명을 기록해 공개함
학회	연구자와 주제를 서로 연결함

> **한국관의 시선**
>
> 근현대 수학을 읽을 때 연구 성과와 그 성과를 가능하게 한 배움의 환경을 함께 생각합니다.

독자에게 남겨야 할 정보

풀이를 공유할 때는 문제의 조건과 기호의 뜻 및 결론의 범위를 함께 적습니다. 필요한 가정을 생략하면 다른 사람이 더 넓은 상황에 결과를 잘못 적용할 수 있습니다. 읽는 사람이 검토할 수 있도록 설명한다는 원칙은 교실의 풀이와 연구의 글쓰기에 공통으로 중요합니다.

학회의 역사적 배경 [14] | 연구 문화 해설

증명은 설명의 책임이다

왜 항상 성립하는지 다른 사람에게 보입니다.

연속한 두 정수의 합을 몇 번 계산하면 항상 홀수가 나온다는 규칙을 짐작할 수 있습니다. 2와 3의 합은 5이고 8과 9의 합은 17입니다. 그러나 살펴본 예만 나열해서는 모든 정수에 대해 성립하는 까닭을 충분히 설명하지 못합니다.

앞의 정수를 n으로 놓으면 다음 정수는 n + 1입니다. 둘의 합은 2n + 1이 됩니다. n이 정수일 때 2n은 짝수이므로 여기에 1을 더한 수는 홀수입니다. 이 설명은 특정한 숫자에 의존하지 않으므로 모든 연속한 두 정수를 함께 다룹니다.

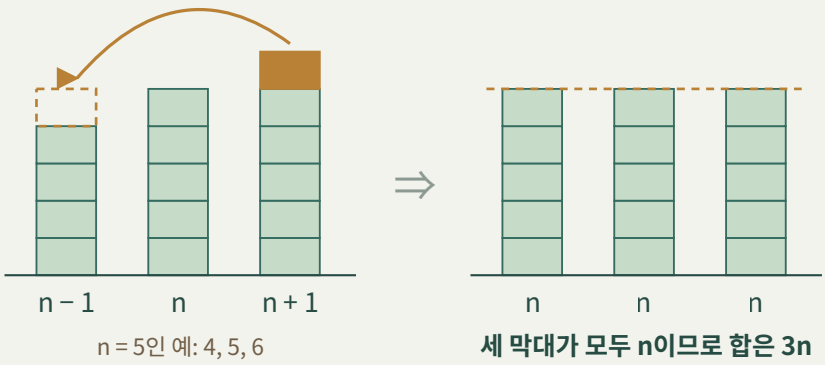
증명은 어려운 기호를 길게 쓰는 일과 같지 않습니다. 주장이 어떤 조건에서 성립하는지 밝히고 빠진 경우 없이 이유를 연결하는 일입니다. 그림이나 말로 설명하더라도 다른 사람이 각 단계를 확인할 수 있어야 합니다.

설명의 단계	표현
대상을 일반적으로 놓음	연속한 두 정수 n과 n + 1
관계를 정리함	n + (n + 1) = 2n + 1
정의를 이용함	2n + 1은 홀수
결론의 범위를 밝힘	모든 연속한 두 정수의 합은 홀수

> **작은 증명**
>
> 연속한 세 정수의 합이 3의 배수임을 같은 방식으로 설명해 보세요. 가운데 수를 n으로 놓으면 관계가 간단해집니다.

가운데 수를 기준으로 묶기

연속한 세 정수를 n − 1과 n과 n + 1로 나타내면 합은 3n입니다. 양쪽의 −1과 +1이 서로 없어지고 같은 n이 세 개 남습니다. 가운데 수의 세 배라는 사실을 알면 왜 합이 언제나 3의 배수인지도 함께 설명할 수 있습니다.



n + 1에서 블록 하나를 n − 1로 옮기면 세 막대가 모두 n입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

이임학과 Ree 군

대칭의 새로운 구조를 발견하다.

이임학은 1922년에 태어나 2005년에 세상을 떠난 수학자입니다. 캐나다 브리티시컬럼비아 대학교에서 활동하며 군론 연구에 기여했습니다. 그의 이름을 딴 Ree 군은 유한군 연구에서 중요한 대상입니다.

군은 원소와 그 원소 사이의 연산이 일정한 조건을 만족하는 수학적 구조입니다. 도형을 움직이는 조작을 이어 하는 예로 시작할 수 있지만 모든 군이 눈에 보이는 도형의 움직임으로 주어지는 것은 아닙니다. 기호와 연산으로 정의된 추상적인 대상도 군론에서 다룹니다.

유한 단순군은 유한군의 구조를 이해하는 데 기본적인 역할을 합니다. 단순하다는 말은 계산이 쉽다는 뜻이 아닙니다. 여기서의 단순성은 정규부분군이라는 개념과 관련된 전문적 조건입니다. 소수를 정수의 구조를 이해하는 기본 요소로 보는 것에 비유할 수 있지만 두 이론이 동일한 것은 아닙니다.

한국어 표기에서 특히 주의할 점이 있습니다. 이임학의 이름을 딴 Ree 군과 노르웨이 수학자 Sophus Lie의 이름에서 나온 Lie 군은 같은 용어가 아닙니다. 관련된 이론적 배경이 있어도 이름의 구별은 필요합니다.

> **이름으로 구별하기**
>
> Ree groups: 이임학의 이름을 딴 유한군의 계열.
> Lie groups: 연속적인 구조와 군 연산을 함께 다루는 대상.
> 이어지는 정사각형 회전은 군을 배우는 입문 예입니다. Ree 군의 구체적인 구조를 그린 것은 아닙니다.

작은 예가 맡는 역할

정사각형 회전의 군은 원소가 네 개라서 연산 결과를 모두 적어 볼 수 있습니다. 이런 예로 군의 정의를 익히는 것과 Ree 군의 구체적인 구조를 이해하는 것은 구별해야 합니다. 입문 예는 전문 연구를 축소해 대신하는 모형이 아니라 필요한 언어를 익히게 하는 출발점입니다.

인물 [15] | 연구 문헌 [16]

군이라는 구조의 문턱에서

대상의 모양보다 연산의 규칙을 살핍니다.

현대 대수학에서는 대상을 따로 보는 데서 나아가 그 대상에 어떤 연산을 할 수 있는지 살펴봅니다. 정수에는 덧셈을 할 수 있고 도형의 움직임에는 연속해서 실행하는 합성을 할 수 있습니다. 겉모습이 달라도 연산의 규칙이 비슷하면 같은 틀에서 이해할 수 있습니다.

군을 이루려면 연산한 결과가 다시 집합 안에 있어야 합니다. 세 대상을 계산할 때 묶는 위치를 바꾸어도 결과가 같아야 하며 아무 변화도 주지 않는 항등원이 있어야 합니다. 또한 각 원소에는 합성했을 때 항등원이 되는 역원이 필요합니다.

이임학의 Ree 군을 작은 도형의 회전과 같은 대상으로 생각해서는 안 됩니다. 정사각형의 회전은 군이라는 말의 입구를 보여 주는 예입니다. 이 예를 통해 구조를 보는 관점을 익힌 뒤 훨씬 복잡한 연구가 있다는 사실을 이해하는 순서로 읽으면 좋습니다.

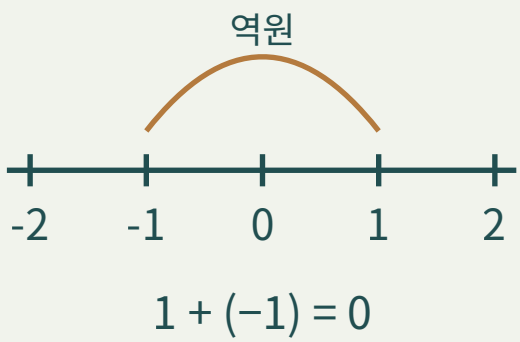
군의 조건	회전 예에서의 뜻
닫혀 있음	두 회전을 이어도 허용된 회전임
결합법칙	세 회전을 묶는 위치가 결과를 바꾸지 않음
항등원	돌리지 않기
역원	앞선 회전을 되돌리는 회전

이름을 읽을 때

수학자의 이름이 붙은 대상은 인물을 기리는 표시이면서 구체적인 정의를 가진 연구 대상입니다. 이름을 아는 것과 구조를 이해하는 것은 다른 단계입니다.

덧셈에서 찾는 군의 조건

정수의 덧셈에서는 두 정수의 합도 정수입니다. 0을 더하면 수가 바뀌지 않고 n의 역원은 −n입니다. 자연수만 두고 같은 연산을 생각하면 양의 수를 되돌릴 음수가 빠져 있습니다. 원소의 범위를 어떻게 정했는지에 따라 같은 연산도 다른 구조가 됩니다.



정수의 덧셈에서 역원은 부호가 반대입니다.

이임학과 Ree 군 [15] [16] [19] | 군의 입문 해설

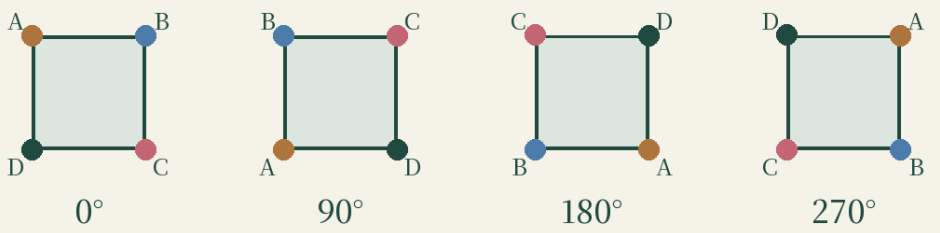
정사각형을 돌리며 군을 만나다

조작의 결과를 다시 하나의 조작으로 읽습니다.

정사각형을 중심 주위로 90°씩 돌려 봅시다. 돌리지 않기와 90°와 180°와 270° 회전은 정사각형이 차지하는 자리를 그대로 유지합니다. 꼭짓점에 서로 다른 이름을 붙이면 같은 외곽선 안에서도 자리가 어떻게 바뀌는지 볼 수 있습니다.

90° 회전을 두 번 하면 180° 회전과 같은 위치에 놓입니다. 90° 회전 뒤에 270°를 더 돌리면 처음 위치로 돌아옵니다. 이런 조작의 합성을 연산으로 삼으면 네 회전은 하나의 군을 이룹니다. 90° 회전의 횟수를 4로 나눈 나머지로 나타내면 계산을 간단히 기록할 수 있습니다.

군의 조건에는 연산을 해도 집합 안에 머문다는 성질과 결합법칙과 항등원과 역원의 존재가 있습니다. 이 예의 항등원은 돌리지 않기입니다. 90° 회전의 역원은 270° 회전입니다. 그림에서 각 꼭짓점이 어디로 옮겨 가는지 확인하면 조작의 결과를 구별할 수 있습니다.



꼭짓점 이름을 따라가며 회전의 합성을 확인합니다. PDF에는 네 위치를 함께 표시합니다.

작은 탐구 H

90° 회전을 7번 하면 어느 회전과 같을까요? 정사각형을 뒤집는 조작까지 넣으면 같은 네 가지 회전만으로 모두 표현할 수 있을까요?

점의 이름이 필요한 이유

꼭짓점 이름을 지우면 90° 회전 뒤의 정사각형은 처음과 같아 보입니다. 그러나 A가 어느 자리로 옮겨 갔는지 표시하면 조작을 구별할 수 있습니다. 같은 외곽선과 같은 꼭짓점 배치는 다른 조건입니다. 군의 원소로 세는 것은 이 경우 회전이라는 조작입니다.

수학 개념 해설 | 반시계 방향 회전 | 해설 522쪽

회전을 더하면 남는 것

한 바퀴를 지나도 같은 위치가 나타납니다.

정사각형을 반시계 방향으로 90° 돌리고 다시 180° 돌리면 처음에서 270° 돌아간 위치에 놓입니다. 반대로 270°를 돌린 뒤 90°를 돌리면 한 바퀴를 돌아 처음 위치로 돌아옵니다. 최종 위치만 구별하는 관점에서는 360° 회전과 0° 회전을 같은 것으로 봅니다.

90° 회전의 횟수를 0과 1과 2와 3으로 나타내면 합성은 두 횟수를 더한 뒤 4로 나눈 나머지를 구하는 계산과 같습니다. 예를 들어 3과 2를 더하면 5이지만 최종 위치는 한 번 돌린 위치와 같으므로 1로 기록합니다.

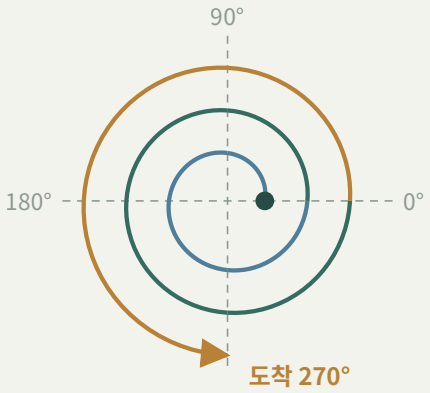
여기서 같은 것으로 보는 것은 최종 위치입니다. 실제로 움직인 경로나 걸린 시간을 기록한다면 0°와 360°는 다르게 다루어야 할 수 있습니다. 수학적 모형을 만들 때 어떤 차이를 남기고 어떤 차이를 무시하는지 정하는 일이 중요합니다.

앞의 회전	뒤의 회전	최종 위치
90°	180°	270°
270°	90°	0°
270°	180°	90°

> **새 탐구 12**
>
> 정사각형을 같은 방향으로 90°씩 열한 번 돌렸습니다. 처음과 비교한 최종 위치는 몇 도 회전과 같을까요?해설 526쪽

한 바퀴를 묶어 버리기

열한 번의 90° 회전은 4 + 4 + 3번으로 나눌 수 있습니다. 앞의 두 묶음은 각각 한 바퀴이므로 최종 위치에는 세 번의 회전만 남습니다. 나머지로 계산하는 방법은 시간을 12시간 또는 24시간 단위로 읽을 때도 비슷하게 나타납니다.



출발: 0°에서 반시계 방향

1번째 ~ 4번째: 한 바퀴

5번째 ~ 8번째: 한 바퀴

9번째 ~ 11번째: 270°

11 = 4 × 2 + 3

11을 4로 나눈 나머지 3

90° 회전 열한 번은 두 바퀴를 돌고 270°에 멈춥니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

연산표로 구조를 읽다

결과를 빠짐없이 나란히 놓습니다.

회전의 합성을 표로 정리하면 가능한 경우를 빠뜨리지 않고 확인할 수 있습니다. 행의 수와 열의 수를 더한 뒤 4로 나눈 나머지를 칸에 적습니다. 표에 나타나는 수가 언제나 0부터 3까지라는 사실은 연산 결과가 같은 집합 안에 머문다는 것을 보여 줍니다.

0이 있는 행과 열에서는 상대의 수가 그대로 나타납니다. 따라서 0은 항등원 역할을 합니다. 합이 0이 되는 짝을 찾으면 역원도 읽을 수 있습니다. 1과 3이 서로 짝이고 2는 자기 자신과 합성하면 0이 됩니다.

이 표는 작은 구조를 한눈에 살피기에 좋습니다. 다만 모든 군이 이 표처럼 대칭적인 모양을 갖는 것은 아닙니다. 정사각형의 회전끼리는 순서를 바꾸어도 결과가 같지만 다른 연산에서는 순서가 중요할 수 있습니다.

합성	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

표의 약속

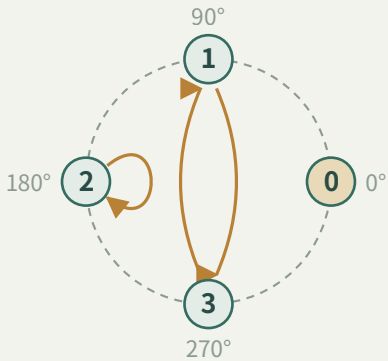
0은 회전 없음입니다. 1과 2와 3은 각각 90°와 180°와 270°의 반시계 회전을 뜻합니다.

역원을 표에서 찾는 방법

행 1에서 결과 0이 놓인 열은 3입니다. 따라서 1의 역원은 3입니다. 행 2에서는 열 2에 0이 있으므로 2는 자기 자신의 역원입니다. 이 표에서 모든 행과 열에 0이 한 번씩 나타나는 모습은 되돌리는 조작이 하나씩 정해진다는 사실과 연결됩니다.

합성	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	2	3	0
2	2	3	0	1
3	3	0	1	2

행 + 열을 4로 나눈 나머지



1과 3은 서로 역원, 2는 자기 자신

연산표의 0이 놓인 칸이 서로 역원인 회전의 짝을 알려 줍니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

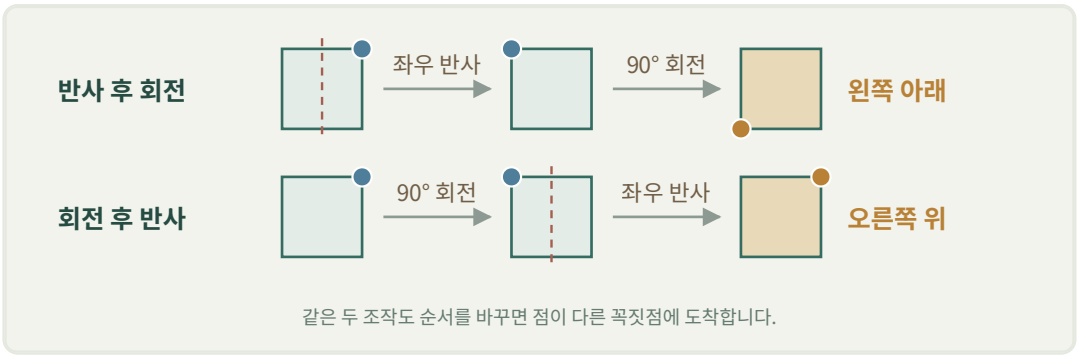
순서를 바꾸면 달라지는 조작

회전과 반사를 함께 해 봅니다.

정사각형의 오른쪽 위 꼭짓점에 점을 찍어 봅시다. 먼저 세로 중심선을 기준으로 좌우를 뒤집으면 점은 왼쪽 위로 갑니다. 그다음 반시계 방향으로 90° 돌리면 왼쪽 아래로 이동합니다. 두 조작을 순서대로 따라가면 최종 위치를 확인할 수 있습니다.

이번에는 같은 점을 먼저 반시계 방향으로 90° 돌려 봅시다. 점은 왼쪽 위로 갑니다. 이어서 처음과 같은 세로 중심선을 기준으로 좌우를 뒤집으면 오른쪽 위로 돌아옵니다. 조작의 종류는 같지만 순서를 바꾸었더니 결과가 달라졌습니다.

군의 조건인 결합법칙은 연산의 순서를 바꾸어도 된다는 뜻이 아닙니다. 세 조작의 순서를 그대로 둔 채 어느 두 조작을 먼저 묶어 계산할지 바꾸는 규칙입니다. 순서를 바꾸는 교환법칙과 묶는 위치를 바꾸는 결합법칙을 구별해야 합니다.



같은 두 조작도 순서를 바꾸면 점이 다른 꼭짓점에 도착합니다.

손으로 확인하기

종이에 정사각형과 점을 그려 두 순서를 직접 실행해 보세요. 반사에 사용하는 세로축은 종이와 함께 돌아가지 않는 고정된 축입니다.

묶음과 순서의 차이

세 조작 A와 B와 C를 차례로 한다고 합시다. 결합법칙은 앞의 둘을 하나로 묶거나 뒤의 둘을 하나로 묶어도 된다는 뜻입니다. A와 B의 순서를 바꾸는 규칙은 아닙니다. 반사와 회전의 예는 이 두 규칙을 혼동하면 안 되는 이유를 보여 줍니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

서울에서 만난 세계의 수학

2014년 세계수학자대회라는 장면.

2014년 8월 13일부터 21일까지 서울에서 세계수학자대회가 열렸습니다. 세계수학자대회는 여러 분야의 연구자가 모여 성과와 방향을 나누는 큰 학술 모임입니다. 유명한 상의 시상식도 열리지만 대회의 의미가 시상에만 있는 것은 아닙니다.

서로 다른 분야의 강연을 듣는 일은 자기 문제를 다른 언어로 볼 기회를 줍니다. 어떤 분야에서 익숙한 방법이 다른 분야에서는 새로운 도구가 될 수 있습니다. 허준이의 연구를 이해할 때도 분야 사이의 만남이라는 관점이 중요합니다.

국제 학술대회를 개최하는 일에는 행사의 준비와 함께 연구를 뒷받침하는 환경이 필요합니다. 교육 기관과 연구 기관 및 지속적인 교류가 그 기반을 이룹니다. 다만 한 번의 개최만으로 모든 분야의 연구 수준을 일괄적으로 판단할 수는 없습니다.

수학사를 읽을 때는 수상자 이름과 함께 질문이 오가던 장면도 상상해 보세요. 누군가의 강연을 듣고 새로운 질문을 떠올리는 일이 다음 연구의 출발점이 될 수 있습니다. 오늘의 교실에서 친구의 풀이를 듣는 일도 이와 닮은 경험입니다.

> **우리 교실의 작은 학술대회**
>
> 같은 문제에 대한 서로 다른 풀이 두 가지를 발표합니다. 청중은 더 빠른 풀이를 고르는 대신 각 풀이에서 새롭게 보인 관계를 한 가지씩 말합니다.

듣는 사람이 만드는 질문

강연을 들으며 새 결과의 내용과 그 결과가 필요한 이유를 따로 적어 보세요. 어떤 조건에서만 성립하는지와 알려진 문제 가운데 무엇을 바꾸는지도 물을 수 있습니다. 설명을 이해하는 과정에서 생긴 질문은 발표자의 논리를 더 분명하게 만들고 다음 탐구의 방향을 정하는 데 도움이 됩니다.

발표자가 작은 예를 보여 주면 그 예에서 꼭 필요한 조건을 하나 골라 바꾸어 보세요. 결론이 그대로인지 확인하고 달라진다면 어느 단계가 성립하지 않는지 찾습니다. 이런 질문은 발표 내용을 수동적으로 받아 적는 데서 벗어나 논증을 직접 따라가게 합니다.

행사 일정과 장소 [17] | 나머지는 교육적 해설

허준이가 연결한 두 언어

세는 문제에 기하학의 생각을 가져오다.

허준이는 2022년 필즈상을 받았습니다. 국제수학연맹의 수상 설명은 호지 이론의 아이디어를 조합론에 가져온 연구와 여러 추측의 해결을 중요한 성과로 제시합니다. 조합론은 대상의 배치와 선택과 연결을 다루며 가짓수를 세는 문제도 포함합니다.

색칠 방법의 수처럼 단순해 보이는 질문도 대상이 커지면 복잡한 구조를 가질 수 있습니다. 값을 하나씩 계산하는 것을 넘어 그 값을 담은 다항식의 계수가 어떤 질서를 따르는지 묻는 순간 새로운 문제가 시작됩니다.

기하학의 도구를 썼다는 말이 종이에 그림을 그려 눈으로 답을 찾았다는 뜻은 아닙니다. 대수기하와 호지 이론은 추상적인 공간과 대수적 관계를 다루는 전문 이론입니다. 서로 다른 분야에서 발전한 구조를 연결해 한쪽의 어려운 문제에 새로운 설명을 제공한 것입니다.

이어지는 쪽에서는 작은 그래프의 색칠 다항식을 계산하고 그 계수의 관계를 살펴봅니다. 직접 확인할 수 있는 예를 통해 연구 질문의 형태를 이해하려는 활동입니다. 이런 계산이 일반적인 정리나 그 증명을 대신하지는 않습니다.

> **읽기의 초점**
>
> 수상 사실을 기억하는 데서 한 걸음 더 나아가 봅시다. 무엇을 세었는가? 세어 얻은 식에서 어떤 질서를 찾았는가? 왜 다른 분야의 도구가 필요했는가?

가짓수에서 계수로 시선 옮기기

삼각형을 세 색으로 칠하는 경우가 6가지라는 답은 특정한 질문을 해결합니다. 색의 수를 q로 놓으면 하나의 식으로 여러 경우를 다룰 수 있습니다. 그 식을 전개한 뒤 계수 사이의 관계를 묻는 순간 관심의 대상이 개별 값에서 다항식의 구조로 옮겨 갑니다.

삼각형에서는 색이 두 가지뿐이면 세 점을 조건에 맞게 칠할 수 없습니다. $q = 2$를 식에 넣었을 때 값이 0이 되는지 확인해 보세요. 식의 구조를 탐구할 때에도 작은 정수를 대입해 원래의 색칠 문제와 연결하면 기호의 뜻을 놓치지 않을 수 있습니다.

필즈상 수상 사유 [18]

다른 언어로 같은 문제 보기

조합과 기하를 잇는다는 뜻

그래프의 색칠 문제는 경우의 수를 세는 문제처럼 보입니다. 기하학은 공간과 도형의 성질을 다루는 분야로 먼저 떠오릅니다. 서로 멀어 보이는 언어가 연결되면 한쪽에서 풀기 어려운 문제를 다른 쪽의 도구로 바라볼 수 있습니다. 허준이의 연구를 소개할 때 이런 연결이 중요한 배경이 됩니다.

그러나 쉬운 색칠 예제를 계산했다고 해서 그 연구의 증명을 따라간 것은 아닙니다. 작은 그래프는 어떤 수들이 나타나는지 경험하게 해 주고 계수의 규칙이 왜 질문이 되는지 보여 줍니다. 일반적인 정리를 증명하려면 훨씬 깊은 개념과 논리가 필요합니다.

입문 해설의 역할은 어려운 내용을 이미 이해했다고 느끼게 하는 데 있지 않습니다. 무엇을 묻는 연구인지와 작은 예에서 어디까지 볼 수 있는지 분명히 하는 데 있습니다. 이어지는 쪽에서는 직접 셀 수 있는 그래프를 통해 질문의 모양을 살펴봅니다.

단계	이 책에서 할 수 있는 일
경험	작은 그래프의 색칠을 직접 셈
표현	가짓수를 색의 수에 관한 식으로 씀
관찰	다항식의 계수 사이 관계를 비교
한계	일반 정리의 증명은 별도의 심화 학습이 필요

> **자료 안내**
>
> 필즈상 수상 사유의 공식 설명은 참고 자료에서 확인할 수 있습니다. 본문의 계산은 연구의 의미에 접근하기 위한 입문 예제입니다.

연결을 설명할 때 남길 경계

작은 그래프를 그릴 수 있다는 사실과 깊은 기하학적 이론을 사용했다는 사실은 같은 의미가 아닙니다. 본문의 그림은 질문을 직관적으로 보여 줍니다. 일반 정리의 증명에 어떤 추상적 구조가 필요한지는 별도의 학습이 필요하다는 경계도 함께 남겨 두어야 합니다.

국제수학연맹의 허준이 수상 사유 [18]

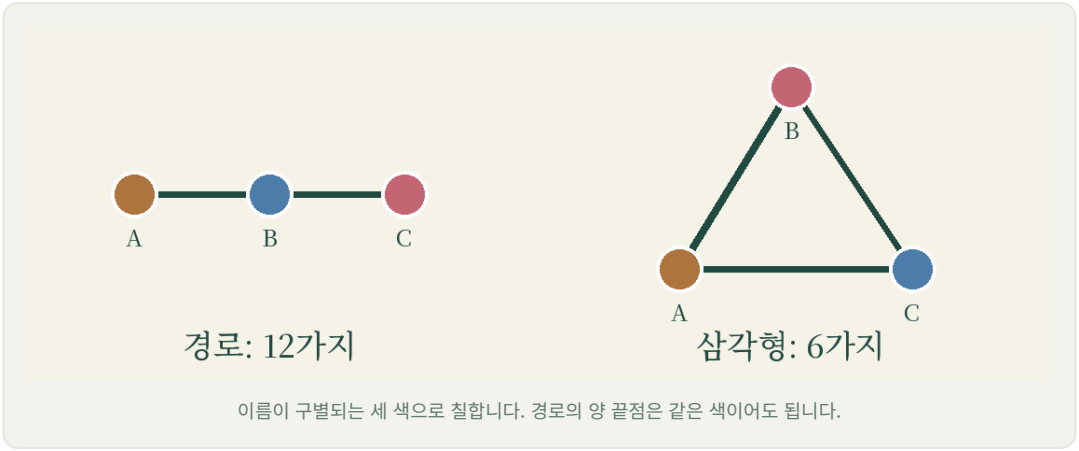
색칠의 가짓수를 식으로 쓰다

꼭짓점 세 개만 있어도 구조가 드러납니다.

점과 선으로 이루어진 그래프에서 선으로 연결된 두 점은 서로 다른 색으로 칠하기로 합시다. 사용할 수 있는 색은 q종류입니다. 일렬로 연결한 세 점의 첫 점에는 q가지 선택이 있습니다. 둘째 점은 첫째와 달라야 하므로 $q-1$가지입니다. 셋째 점도 둘째와만 다르면 되므로 $q-1$가지입니다.

이번에는 세 점을 삼각형으로 연결해 봅시다. 셋째 점은 첫째와 둘째 모두와 연결되어 있으므로 $q-2$가지 선택만 남습니다. 선 하나를 추가했을 뿐인데 식의 구조가 바뀝니다. 그래프는 점의 개수뿐 아니라 무엇이 무엇과 연결되었는지를 담습니다.

이 활동에서는 각 점과 각 색의 이름을 구별합니다. 그래프를 돌렸을 때 같아 보이는 색칠도 이름이 붙은 점의 색이 다르면 별개의 경우입니다. 무엇을 서로 다른 경우로 셀지 먼저 정해야 계산한 가짓수의 뜻이 분명해집니다.



이름이 구별되는 세 색으로 칠합니다. 경로의 양 끝점은 같은 색이어도 됩니다.

경로: $q(q-1)^2$

삼각형: $q(q-1)(q-2)$

창작 예제 | 연구 주제의 연결 [18]

경로를 한 점씩 색칠하기

곱의 법칙을 사용할 조건을 확인합니다.

점 A와 B와 C가 차례로 연결된 경로를 생각해 봅시다. 서로 이웃한 점은 다른 색으로 칠해야 하며 사용할 수 있는 색은 q개입니다. 먼저 A의 색은 q가지로 고를 수 있습니다. B는 A와 같은 색을 피해야 하므로 $q-1$가지 선택이 있습니다.

C는 B와 다른 색이면 됩니다. A와 C는 직접 연결되어 있지 않으므로 같은 색을 사용해도 괜찮습니다. 따라서 C에도 $q-1$가지 선택이 있습니다. 각 단계의 선택 수를 곱하면 전체 가짓수는 $q(q-1)^2$입니다.

곱의 법칙을 적용할 때는 앞 단계의 선택에 따라 뒤의 가짓수가 달라지지 않는지 확인해야 합니다. 이 경로에서는 A가 어떤 색이든 B가 피해야 할 색은 하나이고 C도 마찬가지입니다. 이런 일정함이 간단한 곱셈으로 셀 수 있게 해 줍니다.

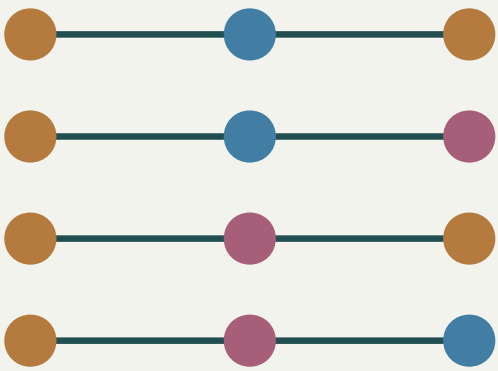
사용할 색	A의 선택	B의 선택	C의 선택	전체
2개	2	1	1	2
3개	3	2	2	12
4개	4	3	3	36

색의 이름

이 책에서는 색의 이름을 구별합니다. 빨강과 파랑을 서로 바꾸어 얻은 색칠은 다른 경우로 셉니다.

첫 색을 고정한 뒤 세기

A의 색을 한 가지로 고정하면 B는 두 가지이고 C도 두 가지이므로 네 경우가 생깁니다. A를 나머지 두 색으로 고정해도 각각 네 경우입니다. 세 부류는 A의 색이 달라 서로 겹치지 않으므로 4 + 4 + 4 = 12로도 셀 수 있습니다.



A의 색을 고정하면 네 경우가 남습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

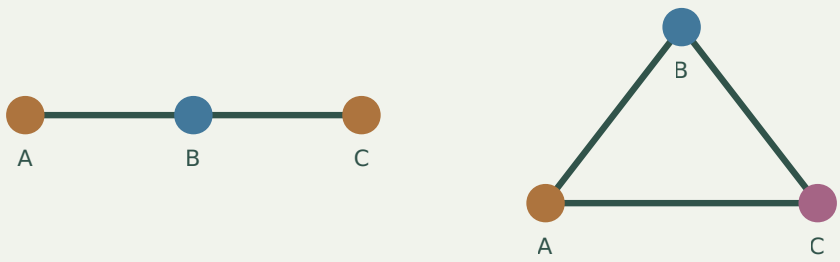
경로에 변 하나가 더해지면

새 조건이 선택의 수를 줄입니다.

세 점을 경로로 연결한 뒤 A와 C 사이에도 변을 추가하면 삼각형이 됩니다. 이제 A와 C도 서로 다른 색이어야 합니다. 앞에서 허용되던 색칠 가운데 양 끝점이 같은 색인 경우가 사라집니다. 조건이 하나 더해져 가능한 경우가 줄어든 것입니다.

A에는 q가지 선택이 있고 B에는 q − 1가지 선택이 있습니다. C는 A와 B의 색을 모두 피해야 하므로 q − 2가지 선택이 있습니다. 따라서 전체 가짓수는 q(q − 1)(q − 2)입니다. 세 색을 사용하면 6가지이고 두 색만 사용하면 0가지입니다.

두 색으로 삼각형을 칠할 수 없다는 사실은 직접 번갈아 칠해 보아도 확인할 수 있습니다. 마지막 점에서 두 이웃의 색을 모두 피할 수 없기 때문입니다. 식의 값이 0이 되는 현상과 그림에서 막히는 이유가 같은 조건을 표현합니다.



경로: 세 색으로 12가지 삼각형: 세 색으로 6가지

경로에서는 A와 C가 같은 색이어도 됩니다. 삼각형에서는 세 점의 색이 모두 달라야 합니다.

차이를 세어 보기

세 색으로 경로를 칠할 때 A와 C가 같은 경우는 6가지입니다. 전체 12가지에서 이를 빼면 삼각형의 6가지를 얻습니다.

사라지는 경우를 따로 세기

경로에서 A와 C가 같은 색인 경우만 세어 봅시다. 그 색은 q가지이고 가운데 B는 q − 1가지입니다. 따라서 q(q − 1)가지가 삼각형에서 제외됩니다. 경로의 식에서 이 수를 빼면 q(q − 1)(q − 2)가 되어 직접 센 결과와 일치합니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

계수에 숨어 있는 질서

로그 오목성을 작은 예로 확인합니다.

삼각형 그래프의 색칠 다항식을 전개하면 $q^3 - 3q^2 + 2q$입니다. 부호를 떼어 낸 계수의 크기를 차례로 보면 1과 3과 2를 얻습니다. 이 수열의 가운데 항 3의 제곱은 양옆 항의 곱보다 크거나 같습니다.

음이 아닌 수열에서 내부의 각 항이 $a_i^2 \geq a_{i-1}a_{i+1}$을 만족하면 로그 오목하다고 합니다. 용어는 낯설지만 여기서는 가운데 값의 제곱과 이웃한 값의 곱을 비교하는 조건으로 읽으면 됩니다. 1과 3과 2에서는 $9 \geq 2$를 확인할 수 있습니다.

몇 개의 작은 그래프에서 관계를 확인했다고 해서 모든 그래프에 대한 결론이 따라오지는 않습니다. 계산 가능한 예를 넘어 일반적인 이유를 밝히는 일이 연구의 과제입니다. 허준이의 성과는 이런 조합적 규칙을 깊은 기하학적 구조와 연결한 맥락에서 읽을 수 있습니다.

끝의 상수항 0을 포함한 계수열을 쓰더라도 이 예의 로그 오목성은 유지됩니다. 이 책에서는 비교의 핵심을 보기 쉽도록 0이 아닌 계수만 먼저 표시했습니다. 표현을 단순화할 때는 무엇을 생략했는지 밝혀 두는 편이 좋습니다.

$$q(q-1)(q-2) = q^3 - 3q^2 + 2q$$
$$3^2 \geq 1 \times 2$$

작은 탐구 I

경로 그래프의 식 $q(q-1)^2$을 전개하세요. 0이 아닌 계수의 절댓값도 같은 조건을 만족하는지 확인해 보세요.

계수열을 기록하는 순서

삼각형의 다항식에서 차수가 높은 항부터 계수를 쓰면 1 / −3 / 2 / 0입니다. 부호를 떼어 낸 수열은 1 / 3 / 2 / 0입니다. 순서와 생략한 항을 분명히 해야 다른 다항식의 계수와 같은 기준으로 비교할 수 있습니다.

수학 개념 해설 | 연구 성과의 근거 [18] | 해설 522쪽

로그 오목성을 작은 수로 읽다

이웃한 세 항의 관계를 비교합니다.

양수인 수열에서 가운데 항의 제곱이 양옆 항의 곱보다 크거나 같으면 그 자리에서 로그 오목성 조건을 만족한다고 말합니다. 세 항이 a와 b와 c라면 $b^2 \geq ac$를 확인합니다. 항이 네 개 이상이면 가능한 모든 가운데 자리에서 이 조건을 검사해야 합니다.

수열 1과 3과 2에서는 $3^2 = 9$이고 $1 \times 2 = 2$이므로 조건이 성립합니다. 수열 1과 2와 5에서는 $2^2 = 4$가 $1 \times 5 = 5$보다 작으므로 성립하지 않습니다. 가운데 항이 양옆 항보다 모두 커야 한다는 뜻은 아닙니다. 비교하는 것은 제곱과 곱입니다.

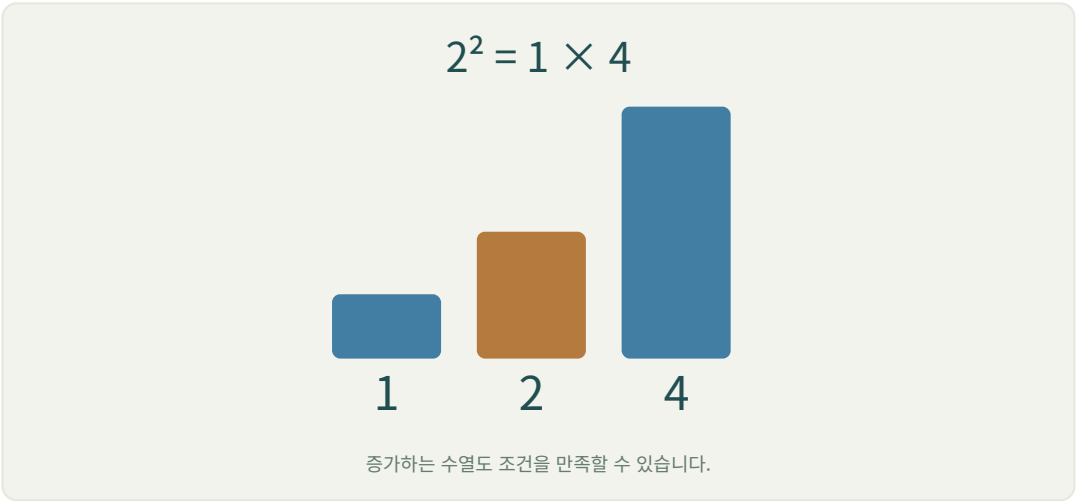
이런 수의 관계가 그래프의 다항식 계수에서 일반적으로 나타나는지 묻는 것은 작은 계산보다 훨씬 큰 문제입니다. 본문에서는 절댓값을 취한 계수열의 예를 통해 조건의 뜻을 익힙니다. 몇 개의 예를 확인한 일을 일반 정리의 증명으로 바꾸어 말하지 않습니다.

수열	가운데 항의 제곱	양옆의 곱	판정
1 / 3 / 2	9	2	성립
1 / 2 / 1	4	1	성립
1 / 2 / 5	4	5	성립하지 않음

> **0의 처리**
>
> 다항식의 모든 계수를 다룰 때는 끝에 붙은 0을 어떻게 포함하는지도 정의에 맞추어야 합니다. 이 쪽에서는 양수인 세 항만 비교합니다.

증가하는 수열도 가능할까

1 / 2 / 4는 계속 증가하지만 가운데 항의 제곱 4와 양옆의 곱 4가 같으므로 조건을 만족합니다. 가운데 수가 양옆보다 커야 하는 조건이 아니라는 점을 보여 줍니다. 이름의 인상보다 정의의 식을 직접 적용하는 편이 정확합니다.



증가하는 수열도 조건을 만족할 수 있습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

작은 예에서 좋은 질문으로

활동 4 | 점 하나와 선 하나의 차이.

508쪽의 경로 그래프와 삼각형 그래프를 색 세 가지로 칠해 보세요. 먼저 식에 $q = 3$을 넣어 가짓수를 예상합니다. 그다음 첫 점의 색을 하나로 고정하고 나머지 선택을 분류해 보세요. 모든 색칠을 무작정 그리는 방법보다 체계적으로 셀 수 있습니다.

이번에는 경로 그래프에 다른 점과 연결되지 않은 점 하나를 추가합니다. 새 점은 기존 색칠과 관계없이 세 색 가운데 하나를 선택할 수 있습니다. 그래서 기존 가짓수에 3을 곱할 수 있습니다. 반면 새 점을 기존 점과 연결하면 어떤 색을 쓸 수 있는지 조건이 생깁니다.

가짓수를 셀 때는 같은 경우를 두 번 세거나 가능한 경우를 빠뜨리기 쉽습니다. 분류 기준을 먼저 정한 뒤 각 부류가 겹치지 않는지와 모든 경우를 포함하는지 확인하세요. 이런 점검은 조합론뿐 아니라 자료를 정리하고 주장의 범위를 검토하는 일에도 도움이 됩니다.

그래프	색 3개일 때 예상	이유
세 점의 경로	_____	첫 점과 다음 점의 선택
세 점의 삼각형	_____	마지막 점의 추가 제약
경로와 고립점 하나	_____	독립적인 선택의 곱

한국관을 나서는 질문

산가지와 측우기와 방진과 그래프 사이에서 공통으로 발견한 사고방식은 무엇인가요? 서로 다른 두 장의 사례를 연결해 5문장 안팎으로 적어 보세요.

독립적인 선택을 확인하기

고립점은 기존 점과 연결되어 있지 않으므로 어떤 색을 골라도 기존 색칠의 조건을 바꾸지 않습니다. 이 독립성 때문에 가짓수에 색의 수를 곱할 수 있습니다. 새 점을 기존 점 하나에 연결하면 그 점의 색을 피해야 하므로 선택 수는 $q - 1$가지입니다. 선택할 색은 앞선 색칠에 따라 달라져도 선택 수는 일정하므로 이 경우에도 곱의 법칙을 사용할 수 있습니다.

창작 탐구 | 해설 522쪽

조건을 바꾸며 연구 노트 쓰기

작은 계산에서 질문을 키웁니다.

세 점 경로에 연결되지 않은 점 하나를 추가해 봅시다. 새 점은 다른 점의 색에 영향을 받지 않으므로 q개의 색 중 아무 것이나 고를 수 있습니다. 기존 색칠마다 q가지가 더 생기며 전체 가짓수는 $q^2(q-1)^2$이 됩니다. 점 하나를 더해도 연결 방식에 따라 식이 달라집니다.

반대로 새 점을 경로의 끝에 붙이면 기존 끝점과 같은 색만 피하면 됩니다. 이때 새 선택은 q − 1가지이므로 전체 가짓수는 $q(q-1)^3$입니다. 두 경우를 나란히 비교하면 점의 개수만으로 색칠의 가짓수를 결정할 수 없다는 사실이 드러납니다.

연구 노트에는 바꾼 조건과 예상과 실제 계산을 함께 적어 보세요. 예상이 틀렸다면 지우기보다 왜 틀렸는지 남기는 편이 좋습니다. 질문을 정확하게 고치는 과정도 배움의 일부이며 다음 탐구를 시작할 자료가 됩니다.

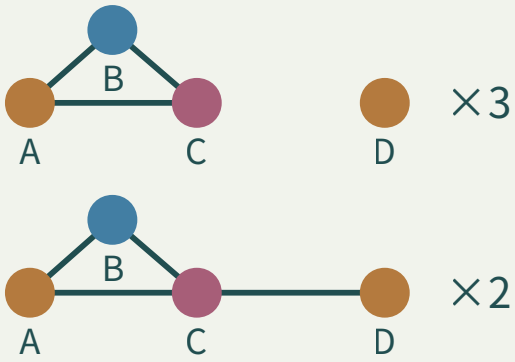
세 점 경로에 추가한 것	세 색으로 칠하는 가짓수
연결되지 않은 점 하나	12 × 3 = 36
끝에 연결한 점 하나	12 × 2 = 24

나의 마지막 질문

삼각형에 점 하나를 연결하면 어떻게 될까요? 연결하지 않을 때와 한 꼭짓점에 연결할 때를 나누어 생각하고 계산의 이유를 적어 보세요.

세 결과를 나란히 비교하기

세 색으로 삼각형을 칠하는 경우는 6가지입니다. 고립점을 추가하면 18가지가 되고 한 꼭짓점에 연결한 점을 추가하면 12가지가 됩니다. 점의 수는 같아도 연결 방식이 결과를 바꿉니다. 그래프를 기록할 때 점과 변을 함께 표시해야 하는 이유입니다.



고립점과 연결된 점의 선택 수는 다릅니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

한국관 / 62

연표와 탐구 해설 및 참고 자료

한국관을 잇는 시간의 지도

연대는 외우는 표보다 맥락을 찾는 기준입니다.

이 연표는 본문에 등장한 사건을 골라 정리한 것입니다. 한국 수학사의 모든 흐름을 담은 연표는 아닙니다. 제도와 도구 및 저술과 연구가 서로 다른 시간에 변화했다는 점을 살피며 각 장의 내용을 다시 연결해 보세요.

시기	이 책에서 만난 장면
682년	신라 국학 설치
992년	고려 국자감 설치
1434년	앙부일구와 자격루
1442년	측우기의 규격과 관측 및 보고 기준 정비
1444년	『칠정산』 간행으로 정리한 연대
1700년 무렵	최석정의 수 배열 연구
1713년	홍정하와 하국주의 문답
1724년	『구일집』의 완성 연대
19세기	남병길과 이상혁의 산학 연구
1946년	오늘의 대한수학회로 이어지는 학회 출발
1960–1961년	이임학의 Ree 군 관련 연구 발표
2014년	서울 세계수학자대회
2022년	허준이의 필즈상 수상

> **연대 읽기의 주의점**
>
> 발명과 제도화와 간행은 서로 다른 사건입니다. 한 유물의 제작 시기와 그 종류가 처음 등장한 시기도 구별해야 합니다.

근거 자료는 참고 자료의 주제별 목록 참조

용어를 다시 만나는 쪽

뜻을 안다는 것은 예와 반례를 들 수 있다는 뜻입니다.

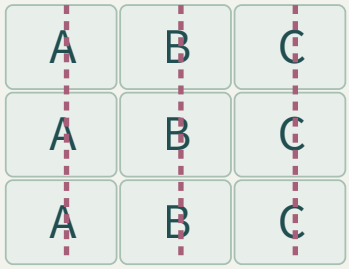
용어	이 책에서의 뜻
산학	전통 사회에서 계산과 관련 문제를 다루던 학문.
자리값	같은 숫자라도 놓인 위치에 따라 값이 달라지는 원리.
비례배분	정한 비에 따라 전체 양을 나누는 방법.
역법	천체의 주기와 위치를 계산해 달력을 구성하는 체계.
표준화	서로 비교할 수 있도록 측정 방법과 기준을 맞추는 일.
마방진	여기서는 모든 행과 열과 두 대각선의 합이 같은 수 배열.
라틴 방진	각 행과 각 열에 모든 기호가 한 번씩 나타나는 배열.
직교 라틴 방진	겹쳤을 때 모든 순서쌍이 전체에서 한 번씩 나오는 두 라틴 방진.
천원술	하나의 미지수를 정해 다항식 관계를 세우는 전통적 방법.
군	결합법칙과 항등원과 역원 등의 조건을 만족하는 연산 구조.
색칠 다항식	사용 가능한 색 수에 따른 올바른 그래프 색칠의 수를 나타내는 다항식.
로그 오목성	음이 아닌 수열에서 각 내부 항의 제곱이 양옆 항의 곱 이상인 성질.

복습 방법

용어 하나를 고른 뒤 책에 없는 예를 만들어 보세요. 조건 하나를 어기는 반례까지 만들면 개념의 경계가 더 분명해집니다.

정의에 맞는 예를 만들기

라틴 방진을 설명하려면 행과 열을 모두 확인하는 예를 고릅니다. 군을 설명하려면 원소의 집합뿐 아니라 연산도 정해야 합니다. 정의를 외운 뒤 그 정의의 각 부분이 예에서 어디에 해당하는지 짚어 보면 빠뜨린 조건을 발견할 수 있습니다.



행은 맞음 / 열은 반복

정의의 일부만 확인하면 오류를 놓칩니다.

개념을 다시 연결하는 사전

비슷한 말 사이의 차이를 정리합니다.

한 번 읽은 용어도 다른 문제에서 만나면 뜻이 흐려질 수 있습니다. 단어 하나만 외우기보다 무엇과 구별해야 하는지 함께 기억하면 도움이 됩니다. 넓이와 둘레는 같은 도형에서 구하지만 다른 양입니다. 결합법칙과 교환법칙은 모두 연산의 규칙이지만 바꾸는 대상이 다릅니다.

이 표는 앞에서 만난 개념 사이의 경계를 정리합니다. 정의를 읽고 본문의 예를 하나씩 떠올려 보세요. 자신만의 예를 만들 수 있다면 용어를 문장 속에서 사용할 준비가 된 것입니다. 헷갈리는 개념은 찾아보기를 이용해 설명이 나온 쪽으로 돌아가면 됩니다.

용어	이 책에서 기억할 뜻
축척	도면의 길이와 실제 길이의 비
근삿값	목적에 맞추어 정확도를 제한한 값
유량	단위 시간 동안 흐르는 부피
평균	여러 값의 합을 값의 개수로 나눈 수
반례	모든 경우에 성립한다는 주장을 반박하는 예
항등원	연산해도 상대를 바꾸지 않는 원소
역원	주어진 원소와 어느 순서로 연산해도 항등원을 만드는 원소
결합법칙	연산 순서를 유지하면서 묶는 위치를 바꾸는 규칙

말로 설명하기

용어를 쓰지 않고 그 개념을 설명해 보세요. 이어서 그 용어가 필요한 이유를 한 문장으로 덧붙여 봅니다.

혼동하기 쉬운 두 쌍

근삿값은 목적에 맞추어 수를 제한한 표현이고 측정 오차는 측정값과 기준값 사이의 차이입니다. 둘은 연결될 수 있지만 같은 개념은 아닙니다. 반례는 주장을 반박하는 예이며 계산 실수로 얻은 틀린 값과도 구별해야 합니다.

결합의 비교

$$(A\ B)\ C \quad \leftrightarrow \quad A\ (B\ C)$$

교환의 비교

$$A\ B \quad \leftrightarrow \quad B\ A$$

묶는 위치와 실행 순서는 다릅니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

탐구 해설 ①

답을 확인한 뒤 자신의 설명과 비교하세요.

A. 자리값

302에서는 십의 자리를 비워 백의 자리와 일의 자리를 구별합니다. 28 + 17의 일의 자리에서는 8 + 7 = 15이므로 10을 십의 자리 하나로 바꾸고 5를 남깁니다. 결과는 45입니다.

B. 넓이와 단위

$12 \times 8 = 96\ \mathrm{m}^2$이므로 씨앗은 $96 \times 3 = 288$ g입니다. 실제 비탈에서는 경사면 넓이와 수평 투영 넓이가 다를 수 있습니다. 어떤 넓이에 맞춘 파종 기준인지 확인해야 합니다.

활동 1. 비례배분

전체 10몫이므로 한 몫은 24입니다. 각 마을에 48과 72와 120을 배분하면 합이 240입니다. 사람 수가 다르면 일수만으로 노동량을 비교하기 어렵습니다. 인원과 작업 시간 등의 추가 정보가 필요합니다.

C. 주기의 어긋남

단순 모형의 3년 차이는 $11 \times 3 = 33$일입니다. 실제 천체 주기의 정밀값과 역법의 규칙을 반영하지 않은 계산이므로 실제 윤달의 위치를 결정할 수는 없습니다.

D. 강수 깊이

두 그릇 모두 부피를 입구 넓이로 나누면 2 cm입니다. 깔때기가 있다면 물을 받은 입구 넓이와 물이 고인 부분의 단면적이 다를 수 있어 수면 깊이를 강수량으로 곧바로 읽으면 안 됩니다.

활동 2. 관측의 한계

표에 기록된 값 중 가장 짧은 그림자는 12:00의 15 cm입니다. 다만 12:00 전후의 더 세밀한 관측이 없으므로 정확히 그 순간에 최소였다고 확정할 수는 없습니다.

검산을 한 줄 더 남기기

비례배분의 세 몫 48과 72와 120을 각각 2와 3과 5로 나누면 모두 24입니다. 씨앗의 양 288 g을 단위 넓이당 3 g으로 나누면 다시 96 m^2를 얻습니다. 결과를 얻은 계산과 반대 방향의 계산을 함께 남기면 어떤 양을 구했는지 더 분명해집니다.

$$48 \div 2 = 24$$

$$72 \div 3 = 24$$

$$120 \div 5 = 24$$

각 몫을 같은 기준으로 되돌려 확인합니다.

탐구 해설 ②

조건과 맥락까지 설명하면 풀이가 완성됩니다.

E와 F. 배열의 조건

마방진을 90° 돌리면 행과 열 및 대각선이 서로 대응하므로 합이 유지됩니다. 임의의 두 수 교환은 보장하지 않습니다. 477쪽의 아홉 짝은 모두 다릅니다. 둘째 행 글자를 A와 B와 C로 바꾸면 글자 배열의 열에서 중복이 생깁니다.

G. 방정식의 해석

세로는 5이고 가로는 8입니다. 차이가 3이며 넓이가 40이므로 조건에 맞습니다. −8은 방정식의 해이지만 길이라는 조건에는 맞지 않습니다.

활동 3. 방진 검수

①은 라틴 방진입니다. 행과 열의 합은 6이지만 한 대각선의 합은 1 + 3 + 2 = 6이고 다른 대각선은 3 + 3 + 3 = 9이므로 마방진은 아닙니다. ②의 숫자와 글자는 각각 라틴 방진입니다. 그러나 1A와 2B와 3C만 반복되므로 직교하지 않습니다.

H. 회전의 연산

7을 4로 나눈 나머지가 3이므로 270° 회전과 같습니다. 뒤집기는 이 네 회전만으로 표현되지 않습니다. 뒤집기를 포함하면 정사각형의 대칭은 여덟 가지가 됩니다.

I. 계수의 비교

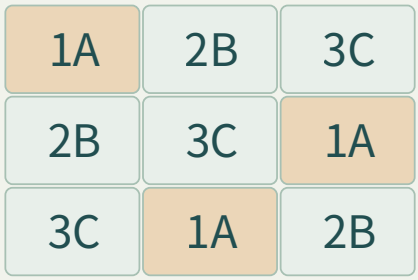
$q(q-1)^2 = q^3 - 2q^2 + q$입니다. 계수의 크기 1과 2와 1에 대해 $2^2 \geq 1 \times 1$이 성립합니다.

활동 4. 색칠하기

경로는 3 × 2 × 2 = 12가지입니다. 삼각형은 3 × 2 × 1 = 6가지입니다. 경로에 고립점 하나를 더하면 12 × 3 = 36가지입니다. 연결 제약이 있는 새 점에는 같은 곱을 무조건 적용할 수 없습니다.

반례를 구체적으로 제시하기

라틴 조건을 만족하는 두 방진이 직교하지 않는다는 사실은 반복되는 쌍 하나만 찾아도 반박할 수 있습니다. 본문 배열에서는 1A가 여러 칸에 나타납니다. 모든 조건이 맞는다는 주장을 부정할 때는 어느 조건이 어느 위치에서 깨지는지 밝히는 것으로 충분합니다.



1A가 세 번 나타납니다.

한 쌍의 중복만으로도 직교성을 반박합니다.

확장 탐구 해설 ①

새 탐구 1부터 4까지

새 탐구 1에서는 배가 7대 필요합니다. 53 = 8 × 6 + 5이므로 여섯 대에 48명이 타고 다섯 명이 남습니다. 남은 사람들도 동시에 이동해야 하므로 배 한 대를 더 마련해야 합니다. 나머지가 생겼을 때 답을 버리거나 반올림할지는 상황에 따라 결정합니다.

새 탐구 2의 넓이는 30 m²입니다. 밑변은 10 m이고 높이는 6 m이므로 10 × 6 ÷ 2로 구합니다. 꼭짓점을 밑변과 평행하게 옮기면 높이가 변하지 않습니다. 따라서 삼각형의 모양은 달라져도 넓이는 같습니다.

새 탐구 3에서 처음 쓴 양은 20단위이고 다음에 쓴 양은 15단위입니다. 두 분수 모두 처음 양 60을 기준으로 하므로 남은 양은 60 − 20 − 15 = 25단위입니다. 두 번째 분수를 남은 40의 사분의 일로 읽으면 다른 문제를 풀게 됩니다.

새 탐구 4에서는 비의 합이 6이고 한 몫은 30단위입니다. 배분 결과는 30과 60과 90입니다. 합은 180이고 각 결과를 1과 2와 3으로 나누면 모두 30이 됩니다. 합의 조건과 비율의 조건이 함께 맞는지 확인했습니다.

탐구	답	핵심 조건
1	배 7대	모두 한 번에 이동
2	30 m²	밑변과 높이가 유지됨
3	25단위	두 분수의 기준이 처음 양
4	30 / 60 / 90단위	합과 비율을 모두 확인

풀이를 비교하기

답이 같더라도 사용한 가정을 살펴보세요. 어떤 조건이 달라지면 답도 달라지는지 말할 수 있어야 풀이를 충분히 이해한 것입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

확장 탐구 해설 ②

새 탐구 5부터 8까지

새 탐구 5의 차이는 30분입니다. 하루에 2분씩 늦어지는 상태가 15일 동안 일정하게 유지된다고 가정했으므로 2 × 15로 구합니다. 실제 오차가 날마다 달라진다면 각 날의 오차를 더해야 하며 이 단순한 곱셈을 그대로 사용할 수 없습니다.

새 탐구 6에서 나무의 높이는 4 m입니다. 나무의 그림자는 막대 그림자의 다섯 배이므로 높이도 0.8 m의 다섯 배입니다. 수평한 바닥과 수직인 물체 및 같은 순간의 평행한 햇빛이라는 조건이 닮음의 관계를 뒷받침합니다.

새 탐구 7에서 15분 동안 들어온 물의 부피는 16 × 15 = 240 cm³입니다. 이를 단면적 80 cm²로 나누면 물높이는 3 cm 올라갑니다. 이 값은 증가량입니다. 처음의 물높이가 주어졌다면 전체 높이를 구할 때 그 값을 더해야 합니다.

새 탐구 8의 평균은 12 mm이고 범위는 2 mm입니다. 네 값의 합 48을 4로 나누어 평균을 구하고 최댓값 13에서 최솟값 11을 빼서 범위를 구합니다. 평균은 중심을 나타내고 범위는 퍼진 정도의 한 측면을 보여 줍니다. 어느 하나도 참값을 보증하지는 않습니다.

탐구	답	확인할 단위
5	30분 늦음	분/일 × 일
6	4 m	높이의 비와 그림자의 비
7	3 cm 증가	$cm^3 \div cm^2$
8	평균 12 mm / 범위 2 mm	모두 길이 단위

실험으로 이어가기

정답을 구한 뒤에는 어떤 가정이 실제 실험에서 잘 지켜지기 어려운지 생각해 보세요. 가정을 점검하는 일이 측정의 정확도를 높입니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

확장 탐구 해설 ③

새 탐구 9부터 12까지

새 탐구 9의 두 번째 행은 B C A입니다. 첫째 열에는 A와 C가 있으므로 B가 필요합니다. 둘째 열에는 B와 A가 있으므로 C가 필요하고 셋째 열에는 C와 B가 있으므로 A가 필요합니다. 복원한 행에서도 세 기호가 한 번씩 나타나는지 확인합니다.

새 탐구 10의 사람 수는 17명입니다. 12와 9를 더하면 두 모임에 모두 속한 4명을 두 번 세게 됩니다. 그 네 명을 한 번 빼면 12 + 9 − 4 = 17이 됩니다. 공통 부분을 모두 없애는 것이 아니라 중복해서 센 한 번만 바로잡습니다.

새 탐구 11에서 사람은 12명이고 물건은 31개입니다. 한 사람에게 한 개씩 더 주려면 남은 7개와 부족한 5개를 합한 12개가 필요합니다. $2 \times 12 + 7$과 $3 \times 12 - 5$가 모두 31이므로 두 조건을 만족합니다.

새 탐구 12의 최종 위치는 반시계 방향 270° 회전과 같습니다. 열한 번 중 여덟 번은 두 바퀴를 이루어 처음 위치로 돌아가고 세 번이 남습니다. 실제로 움직인 전체 각도는 990°이지만 최종 위치만 비교할 때는 270°와 같습니다.

탐구	답	핵심 생각
9	B C A	열마다 빠진 기호 찾기
10	17명	공통 부분의 중복 바로잡기
11	12명 / 31개	남음과 부족함의 차이
12	270° 회전과 같은 위치	4로 나눈 나머지

답 이후의 질문

같은 관계를 가진 새 문제를 숫자만 바꾸어 만들어 보세요. 다른 사람이 풀 수 있도록 필요한 조건을 빠짐없이 적습니다.

수학 개념 해설과 창작 탐구

참고 자료 ①

전시의 흐름과 역사적 사실을 확인하는 길.

기존 한국관의 자료 목록을 바탕으로 확장 원고의 근거를 보강했습니다. 『구수략』과 『산학정의』 및 관련 인물의 맥락을 확인할 자료는 추가 목록에 정리했습니다. 제목을 누르면 해당 자료로 이동합니다. 외부 자료와 전시 페이지를 열려면 인터넷 연결이 필요합니다.

[1] MATHESIS 한국관
전체 전시 구성과 인물 연결.

[2] MATHESIS 전시실 1
국학과 산가지와 첨성대 및 토지 측량.

[3] MATHESIS 전시실 2
세종 시대의 관측 및 시간 측정 기구.

[4] MATHESIS 전시실 3
최석정과 홍정하 및 19세기 산서.

[5] MATHESIS 전시실 4
근대 교육과 이임학 및 허준이.

[6] 한국민족문화대백과사전: 산학
고려 산학 교육 제도.

[7] 한국민족문화대백과사전: 산법교정소
세종 시대 역산 연구와 1444년 완성 설명.

[8] 한국민족문화대백과사전: 과학
『칠정산』의 1444년 간행과 지식 교류.

[9] 국사편찬위원회 우리역사넷: 앙부일구
공공시계 설치와 현존 유물의 제작 시기.

[10] 한국민족문화대백과사전: 측우기
개발 과정과 우량 관측 제도. 개정 참고 자료의 1441년과 1442년 실록 기사도 함께 참조.

> **자료를 읽을 때**
> 온라인 전시와 참고 자료의 연대 표현이 다르면 편찬 과정과 간행 시점을 구별해 읽습니다. 이 책은 전시의 모든 문장을 그대로 옮기거나 원전 전체를 번역한 책이 아닙니다.

확장 원고의 참고 자료

문헌과 인물의 맥락을 보강한 자료

확장 원고에서는 조선 산학서의 구성과 저술 및 교정의 관계를 확인할 수 있는 자료를 더했습니다. 백과사전의 설명은 관련 문헌을 찾아가는 출발점으로 활용했습니다. 본문은 자료의 내용을 길게 옮기지 않고 필요한 사실을 요약한 뒤 수학적 해설과 구별했습니다.

옛 수학의 세부 계산을 더 공부하려면 백과사전 항목만으로 끝내기보다 원문과 연구 논문을 함께 대조해야 합니다. 특히 오늘의 기호로 바꾸는 과정에서는 당시의 표기와 문제의식이 일부 가려질 수 있습니다. 이 책의 현대식 예제는 그 차이를 인정한 입문 해설입니다.

번호	자료와 연결 내용
[20]	한국민족문화대백과사전 『구수략』 / E0005877
[21]	한국민족문화대백과사전 남병길 / E0011915
[22]	한국민족문화대백과사전 이상혁 / E0044627
[23]	한국민족문화대백과사전 『산학정의』 / E0026398

자료의 역할

본문에 직접적인 역사 설명이 없는 수학 예제는 이 책을 위해 구성했습니다. 도해와 GIF는 개념을 보여 주는 교육용 그림이며 유물 사진이나 원문 영인 이미지가 아닙니다.

자료를 더 읽는 순서

먼저 백과사전 항목에서 책의 이름과 인물 및 구성의 개요를 확인합니다. 이어 소장처의 서지 정보로 판본과 자료의 성격을 살펴봅니다. 원문을 볼 때는 현대 해설에서 사용한 기호가 실제 문헌에도 있는지 구별합니다. 하나의 요약만으로 문헌 전체의 의도를 확정하지 않는 편이 좋습니다.

자료마다 맡기는 질문을 구분해 보세요. 인물의 활동 시기는 인물 항목에서 확인하고 책의 물리적 형태와 판본은 소장 자료에서 확인합니다. 수학적 주장과 증명의 범위는 연구 문헌에서 살핍니다. 서로 다른 자료를 함께 읽는 이유는 같은 정보를 반복해서 모으기 위해서만은 아닙니다.

추가 자료 [20]–[23] | 자료 확인 2026. 10. 11.

참고 자료 ②와 판권

역사적 사실과 연구 배경을 확인하는 자료

[11] 한국민족문화대백과사전: 구일집
1724년 완성 및 방정식과 문답 기록.

[12] 한국학중앙연구원 디지털장서각: 구일집
홍정하의 저술과 소장 자료.

[13] Courtois 등: On Latin Squares…
최석정의 9차 직교 라틴 방진 관련 논의. 원문 62쪽.

[14] Lee: KMS 학술지의 역사
대한수학회 학술지의 발달. Science Editing. 2018.

[15] UBC 수학과: In Memoriam
Rimhak Ree의 생몰년과 대학 활동.

[16] Ree: G_2형 단순군 관련 원논문
Bulletin of the AMS 66. 1960. 508–510쪽. 관련 문헌 안내는 [19] 참조.

[17] IMU: 서울 ICM 2014 첫 안내문
2014년 8월 13–21일 서울 개최.

[18] IMU: June Huh 수상 사유
2022년 필즈상과 조합론 및 호지 이론의 연결.

[19] Ree 군 연구의 문헌 해설
Les groupes simples de Suzuki et de Ree. 원논문 계열의 서지와 수학적 배경.

MATHESIS 세계 수학관 전자책 01

한국관 | 개정판 내용 보강판 | 2026. 10. 12. 본문과 교육용 예제 및 도해는 이 전자책을 위해 새로 구성했습니다. 역사 유물 사진과 인물의 상상 초상은 사용하지 않았습니다. 한국관의 내용과 편집 및 기능을 검토하기 위한 판본입니다.

표지와 도해에 관하여

표지는 천문 관측 기구와 산가지에서 영감을 얻어 AI로 생성한 삽화에 제목을 별도로 조판했습니다. 특정 유물의 정확한 복원도는 아닙니다. 본문의 수학 도해 58개는 설명하는 관계에 맞추어 제작했으며 그중 6개는 HTML에서 움직임으로 볼 수 있습니다.

글꼴은 Noto Serif KR과 Noto Sans KR을 사용했습니다. 두 글꼴은 SIL Open Font License에 따라 포함했습니다. 확대와 인쇄에서도 글자와 수식의 구분이 유지되도록 편집했습니다.

한국관 / 63

심화 탐구 기록과 계산의 구조

기구에서 관측망으로

같은 비를 재는 일은 같은 형식으로 기록하는 일까지 이어집니다.

측우기 한 대의 원리를 이해한 뒤에는 여러 관청의 기록이 어떻게 연결되는지 살펴볼 수 있습니다. 『세종실록』의 1441년 설치 관련 기사는 중앙과 지방의 관측 및 보고를 함께 다룹니다. 이듬해 기록은 물의 깊이를 읽는 기준과 비가 시작하고 그친 시각을 남기는 일을 더 상세히 정합니다. 기구의 제작과 기록의 규칙이 함께 다듬어진 것입니다.

현대 단위로 새 관측 노트를 만들어 봅시다. 어느 마을에서는 오전 네 시간 동안 20 mm가 내렸고 다른 마을에서는 두 시간 동안 14 mm가 내렸다고 가정합니다. 누적 강수 깊이는 첫 마을이 크지만 관측 시간으로 나눈 평균 강도는 각각 시간당 5 mm와 7 mm입니다. 많이 왔다는 말을 누적량에 쓸지 평균 강도에 쓸지에 따라 비교 결과가 달라집니다.

평균 강도가 시간당 5 mm였다고 해서 매시간 정확히 5 mm씩 내렸다는 뜻은 아닙니다. 네 시간 중 한 시간에 17 mm가 집중되었을 수도 있습니다. 합계와 기간이 같아도 시간별 분포는 다를 수 있으므로 자료가 제공하는 해상도를 넘는 주장을 해서는 안 됩니다. 과거 기록을 현재의 세밀한 관측과 비교할 때도 같은 주의가 필요합니다.

관측값이 없는 날은 0 mm로 채우지 않습니다. 0은 관측했으나 비가 없었다는 판단이고 빈칸은 관측 여부나 기록 상태를 더 알아야 한다는 뜻입니다. 월 합계를 구할 때 빠진 날이 있으면 확인된 날의 합과 자료가 없는 기간을 함께 적어야 합니다. 단위뿐 아니라 결측을 처리하는 약속도 비교의 일부입니다.

이 활동의 mm와 시간당 강도는 현대적 교육 모형입니다. 조선의 원문이 같은 단위와 표를 사용했다는 뜻은 아닙니다. 역사 자료에서는 실제 기록의 단위와 관측 간격을 먼저 읽고 환산 근거가 있는 부분만 현대 값으로 옮겨야 합니다.

비교 항목	가 마을	나 마을
관측 기간	4시간	2시간
누적 강수 깊이	20 mm	14 mm
평균 강수 강도	5 mm/시간	7 mm/시간

탐구

세 날의 기록이 0 mm와 빈칸과 12 mm입니다. 이 자료로 사흘 동안 내린 비가 12 mm라고 확정할 수 있을까요?

풀이와 확인

확정할 수 없습니다. 확인된 두 날의 합은 12 mm입니다. 빈칸인 날에 비가 없었는지 또는 기록이 빠졌는지는 알 수 없습니다. 전체 기간의 합계와 확인된 기록의 합계를 구분해야 합니다.

[KR24] 국사편찬위원회 세종실록 93권 세종 23년 8월 18일 제4기사 / [KR25] 국사편찬위원회 세종실록 96권 세종 24년 5월 8일 제1기사

옛 책의 빈 항에서 계산 절차로

계수의 위치를 보존하면 긴 식을 짧은 반복 계산으로 읽을 수 있습니다.

장서각의 『구일집』 소장본은 9권을 8책으로 묶은 필사본입니다. 서지에 적힌 소장본의 기록 시기와 저자가 내용을 구성한 시기는 같은 정보가 아닙니다. 종이를 덧대거나 고친 흔적도 책이 읽히고 옮겨지는 과정을 보여 줍니다. 문헌을 만날 때는 저술과 필사 및 현재 남은 물건의 연대를 각각 확인할 필요가 있습니다.

수학적으로는 계수의 배열이 계산 절차를 어떻게 조직하는지 살펴볼 수 있습니다. 현대적 예로 $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$을 놓겠습니다. 이차항은 없지만 그 자리를 버리면 안 됩니다. 차수가 높은 항부터 계수를 적으면 2 / 0 / −3 / 1입니다. 빠진 항의 0은 뒤의 수가 어느 차수에 속하는지 알려 줍니다.

$x = 2$를 대입할 때 매번 거듭제곱을 따로 구하지 않고 $f(x) = ((2x + 0)x - 3)x + 1$로 묶을 수 있습니다. 먼저 2에 2를 곱하고 0을 더해 4를 얻습니다. 여기에 다시 2를 곱하고 3을 빼면 5입니다. 마지막으로 2를 곱하고 1을 더하면 11이 됩니다. 원래 식에 대입한 $16 - 6 + 1$과 같은 값입니다.

이 계산은 곱한 뒤 다음 계수를 더하는 단계를 반복합니다. 어디까지 계산했는지를 순서로 유지하므로 계수가 하나 빠지면 뒤의 모든 단계가 다른 식을 계산하게 됩니다. 산가지의 빈 자리와 다항식의 빈 항은 다루는 대상이 다르지만 위치가 정보를 보존한다는 점에서 비교할 수 있습니다.

여기에 제시한 식의 묶기와 계산표는 현대적 재구성입니다. 이를 『구일집』의 특정 문제나 산대 조작의 직접 복원으로 제시하지 않습니다. 전통 계산의 실제 순서를 알아보려면 원문의 계수 배치와 풀이를 따로 대조해야 합니다.

읽은 계수	계산	중간 결과
2	첫 계수를 놓음	2
0	2 × 2 + 0	4
−3	4 × 2 − 3	5
1	5 × 2 + 1	11

탐구

$x^3 - 4x + 2$에서 계수의 빈자리를 남긴 뒤 $x = 3$일 때 값을 같은 방식으로 구해 보세요.

풀이와 확인

계수는 1 / 0 / −4 / 2입니다. 1에서 시작해 3을 곱하고 0을 더하면 3입니다. 다시 3을 곱하고 4를 빼면 5입니다. 마지막으로 3을 곱하고 2를 더하면 17입니다. 27 − 12 + 2와 같습니다.

[KR26] 한국학중앙연구원 디지털장서각 구일집 K3-412 서지와 해제

짝의 중복을 식으로 막기

아홉 칸의 검사는 각 순서쌍의 자리를 되찾는 계산으로 바꿀 수 있습니다.

직교 라틴 방진의 예를 직접 만드는 방법을 살펴봅시다. 세 행과 세 열에 각각 0과 1과 2라는 번호를 붙입니다. 행 번호를 r로 놓고 열 번호를 c로 놓습니다. 첫 배열에는 r + c를 3으로 나눈 나머지를 적고 둘째 배열에는 r + 2c를 3으로 나눈 나머지를 적습니다. 여기서 사용하는 기호는 0과 1과 2이며 크기를 더하는 것보다 같은 기호의 반복 여부를 검사합니다.

첫 배열의 각 행은 열을 옮길 때 1씩 더해집니다. 3으로 나눈 나머지로 돌아가므로 세 칸에서 0과 1과 2를 모두 만납니다. 둘째 배열의 각 행은 2씩 더해집니다. 예를 들어 첫 행은 0 / 2 / 1입니다. 두 배열 모두 행 번호가 1씩 늘 때 각 열의 나머지도 1씩 바뀌므로 열 조건 역시 만족합니다.

두 배열이 직교하는지는 겹친 짝에서 원래 칸을 되찾을 수 있는지 물어보면 됩니다. 첫 성분을 u라고 하고 둘째 성분을 v라고 합시다. v에서 u를 빼고 3으로 나눈 나머지를 구하면 c를 얻습니다. 이어 u에서 c를 빼고 나머지를 구하면 r을 얻습니다. 따라서 같은 짝이 서로 다른 두 칸에 나타날 수 없습니다.

예를 들어 첫 성분이 1이고 둘째 성분이 0인 짝을 찾겠습니다. 0 − 1의 나머지는 2이므로 열 번호는 2입니다. 1 − 2의 나머지도 2이므로 행 번호 역시 2입니다. 음수를 다룰 때도 나머지는 0과 1과 2 가운데 하나로 정합니다. 실제 마지막 칸에 1과 0의 짝이 놓이는지 확인할 수 있습니다.

이 구성은 직교성의 뜻을 설명하기 위해 만든 현대적 작은 예입니다. 최석정의 9차 배열 자체를 복원한 것이 아닙니다. 칸을 모두 확인하는 방법과 짝에서 위치를 복원하는 방법은 같은 결론에 이르지만 설명하는 범위가 다릅니다. 뒤의 방법은 왜 중복이 생길 수 없는지를 규칙 전체에서 보여 줍니다.

행 번호	열 0	열 1	열 2
0	0|0	1|2	2|1
1	1|1	2|0	0|2
2	2|2	0|1	1|0

> **탐구**
>
> 첫 성분이 2이고 둘째 성분이 0인 짝은 어느 칸에 있을까요? 같은 두 배열을 4로 나눈 나머지로 만들면 둘째 배열의 첫 행은 어떻게 될까요?

풀이와 확인

열 번호는 0 − 2의 나머지인 1입니다. 행 번호는 2 − 1인 1입니다. 4로 나누면 둘째 배열의 첫 행은 0 / 2 / 0 / 2가 되어 같은 기호가 반복됩니다. 3에서 성립한 구성을 모든 크기에 그대로 적용할 수는 없습니다.

선을 지우고 점을 합치는 셈

복잡한 색칠 문제를 두 부류로 나누면 작은 그래프의 계산으로 돌아갑니다.

삼각형에서 변 AC를 잠시 지우면 세 점 A와 B와 C가 경로를 이룹니다. 이 경로의 올바른 색칠은 A와 C의 색이 다른 경우와 같은 경우로 나뉩니다. 두 경우는 겹치지 않으며 빠짐없이 전체를 이룹니다. 다른 색인 경우만 남기면 원래 삼각형의 색칠입니다.

A와 C가 같은 색인 경우에는 두 점을 하나로 합쳐 생각할 수 있습니다. 합쳐진 점의 색을 q가지로 고른 뒤 B의 색을 q − 1가지로 고르면 됩니다. 따라서 경로의 색칠 수 $q(q-1)^2$에서 $q(q-1)$을 빼면 삼각형의 색칠 수 $q(q-1)(q-2)$가 남습니다. 새 식을 외우지 않고 두 부류의 관계로 계산한 것입니다.

이 방법은 루프가 없는 그래프의 한 변 e에도 적용할 수 있습니다. G−e는 변을 지운 그래프이고 G/e는 그 변의 양 끝점을 합친 그래프라고 쓰겠습니다. 지운 그래프의 색칠을 양 끝의 색이 같은 경우와 다른 경우로 나누면 $P_G(q) = P_{(G-e)}(q) - P_{(G/e)}(q)$를 얻습니다. 합치며 생긴 평행한 변은 같은 색칠 금지 조건을 반복하므로 하나만 남겨도 가짓수는 같습니다.

네 점이 고리로 연결된 정사각형 그래프에 적용해 봅시다. 한 변을 지우면 네 점 경로이므로 색칠 수는 $q(q-1)^3$입니다. 그 변의 양 끝을 합치면 삼각형이 됩니다. 따라서 정사각형 고리의 식은 $q(q-1)^3 - q(q-1)(q-2)$입니다. 전개하면 $q^4 - 4q^3 + 6q^2 - 3q$이고 세 색일 때는 18가지입니다.

이 식의 0이 아닌 계수에 절댓값을 취하면 1 / 4 / 6 / 3을 얻습니다. $4^2 \geq 1 \times 6$과 $6^2 \geq 4 \times 3$이 모두 성립합니다. 허준이의 논문은 작은 예의 확인을 넘어 그래프 색칠 다항식 계수의 로그 오목성을 다룹니다. 여기서의 분류 계산은 그 연구가 묻는 대상을 이해하는 발판이며 일반 정리의 증명은 아닙니다.

대상	색칠 다항식	q = 3
네 점 경로	$q(q-1)^3$	24
삼각형	$q(q-1)(q-2)$	6
네 점 고리	두 식의 차이	18

탐구

네 점 고리를 두 색으로 칠하면 몇 가지일까요? 본문의 식에 대입한 값과 직접 번갈아 칠한 결과를 비교해 보세요.

풀이와 확인

$2 \times 1^3 - 2 \times 1 \times 0 = 2$입니다. 첫 점의 색을 정하면 나머지는 번갈아 정해지며 마지막 점과 첫 점도 다른 색이 됩니다. 첫 점의 선택이 두 가지이므로 전체도 두 가지입니다.

[KR27] June Huh. Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs / [KR28] 국제수학연맹 2022년 필즈상 수상 사유

한국관 / 64

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[KR24] 국사편찬위원회 세종실록 93권 세종 23년 8월 18일 제4기사
https://sillok.history.go.kr/id/kda_12308018_004

[KR25] 국사편찬위원회 세종실록 96권 세종 24년 5월 8일 제1기사
https://sillok.history.go.kr/id/kda_12405008_001

[KR26] 한국학중앙연구원 디지털장서각 구일집 K3-412 서지와 해제
https://jsg.aks.ac.kr/dir/view?dataId=JSG_K3-412

[KR27] June Huh. Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs
https://web.math.princeton.edu/~huh/MilnorChromatic.pdf

[KR28] 국제수학연맹 2022년 필즈상 수상 사유
https://www.mathunion.org/imu-awards/fields-medal/fields-medals-2022

[KR29] 브리티시컬럼비아대학교 수학과 Rimhak Ree 추모 기록
https://webdrupal.math.ubc.ca/about-our-department/memoriam

아프리카관 / 65

하나의 장면에 담기지 않는 지식



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

이 삽화에 나란히 놓인 책과 선 그림과 직물 및 놀이판은 같은 지역과 같은 시대의 한 체계를 뜻하지 않는다. 재료가 다르면 남는 정보도 달라진다. 필사본은 문장의 순서를 보존할 수 있고 선을 그리는 활동은 수행의 순서가 중요한 단서가 될 수 있다. 자료의 형태에 맞는 질문을 골라야 서로 다른 지식을 공정하게 비교할 수 있다.

본문에서는 기하학적 증명과 수 이름의 구조 및 연결과 상태의 변화를 각각 살핀다. 눈에 보이는 규칙이 있다고 제작자가 현대의 정리를 알고 있었다고 결론짓지 않는다. 반대로 문헌이 부족하다는 이유만으로 실제 활동에 구조가 없었다고 판단하지도 않는다. 확인된 관찰을 먼저 적고 그 위에서 가능한 수학적 탐구를 분명히 밝힌다.

아프리카관 / 66

하나의 대륙에서 여러 수학을 읽다

아프리카는 하나의 수학 문화가 아니다

지역과 시대를 함께 읽어야 서로 다른 지식의 얼굴이 드러난다.

알렉산드리아의 기하학과 팀북투의 필사본은 같은 대륙에 놓이지만 언어와 교육 환경이 서로 다르다. 앙골라 동부의 소나와 요루바어의 수 이름도 하나의 체계로 합쳐 설명할 수 없다. 이 책은 장소를 소개한 뒤 자료의 종류와 수학적 질문을 연결한다.

지도는 출발점이다. 지도 위에서 가까운 곳이라고 같은 방식으로 계산했다고 판단하지 않는다. 반대로 멀리 떨어진 곳이라도 책과 사람이 이동하면 지식이 오갈 수 있다. 연결의 주장은 실제 기록이 있을 때 제시하며 빈 공간은 추측으로 메우지 않는다.

각 장의 계산 예시는 오늘의 독자를 위해 새로 구성했다. 예제가 문화적 소재에서 출발하더라도 그 계산식 전체가 해당 공동체의 역사적 기록에 적혀 있었다는 뜻은 아니다. 이러한 구분은 문화의 가치를 낮추지 않는다. 오히려 실제 전통과 새로 만든 설명을 모두 정확하게 이해하게 한다.

비교표의 행에는 지역 이름을 두고 열에는 자료와 계산 도구 및 탐구 질문을 둔다. 같은 열에서 공통점을 찾되 빈칸을 억지로 채우지 않는다. 알려지지 않은 정보는 차이가 없다는 증거가 아니다.

읽을 대상	확인할 맥락
알렉산드리아	도시와 언어 및 문헌
팀북투	필사본과 교육 전통
소나	

아프리카는 하나의 수학 문화가 아니다의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

한 가지 수 이름의 구조를 대륙 전체의 특징으로 부를 수 없는 이유는 무엇일까?

풀이와 확인

한 언어에서 확인한 규칙은 그 언어와 조사된 방언에 관한 증거다. 다른 언어와 지역에도 같은 규칙이 있는지는 별도의 자료로 확인해야 한다. 지역 이름을 구체적으로 적으면 성급한 일반화를 줄일 수 있다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand / [LOC] 미국 의회도서관. Ancient Manuscripts from the Desert Libraries of Timbuktu

유물과 문헌은 다른 질문을 요구한다

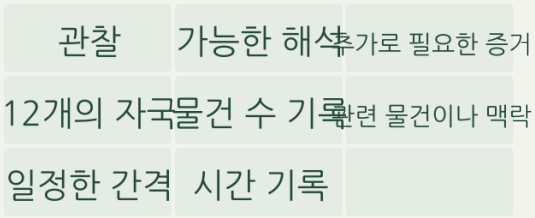
남아 있는 흔적과 그 흔적에 대한 해석을 나누어 읽는다.

뼈에 새긴 자국은 눈으로 세어 볼 수 있다. 그러나 그 자국이 물건의 수를 뜻했는지 날짜를 뜻했는지는 별개의 문제다. 문헌은 문장과 계산을 함께 보존할 수 있지만 필사 과정의 누락이나 손상을 겪기도 한다. 자료의 종류에 따라 확실하게 말할 수 있는 범위가 달라진다.

관찰 기록에는 자국의 개수와 배열처럼 확인 가능한 내용을 쓴다. 해석 기록에는 묶음 세기나 달력이라는 설명을 쓴다. 두 칸을 분리하면 같은 관찰에서 여러 해석이 나올 수 있다는 점이 보인다. 해석이 매력적이라는 이유만으로 사실 칸으로 옮겨 적지 않는다.

수학 활동에서는 한 배열을 여러 방식으로 묶어 보는 것이 유익하다. 다만 오늘의 묶음 규칙이 옛 제작자의 의도를 입증하지는 않는다. 실험으로 가능한 계산을 보여 주는 일과 역사적 목적을 밝히는 일은 다른 종류의 증거를 필요로 한다.

자료 설명에 붙은 확실하다와 추정된다는 표현도 기록의 일부다. 그림만 복사하면서 이런 표현을 빼면 원래 저자가 남겨 둔 불확실성이 사라진다. 요약할 때에도 주장 강도를 유지해야 한다.



유물과 문헌은 다른 질문을 요구한다의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

자국이 12개라는 사실만으로 12진법을 사용했다고 말할 수 있을까?

풀이와 확인

그렇게 말할 수 없다. 12개는 단순한 수량일 수 있다. 12진법을 주장하려면 자릿값이나 반복되는 묶음 규칙 같은 추가 증거가 필요하다. 가능한 해석과 입증된 체계를 구별해야 한다.

[ISHANGO] 벨기에 자연과학연구소. The Ishango Bone

연표를 만드는 세 가지 날짜

제작 시기와 복사 시기와 소장 시기는 서로 같지 않다.

오래된 책을 후대 사람이 베껴 썼다면 현재 남은 종이의 연대는 원저술의 연대와 다를 수 있다. 디지털 자료의 공개 날짜는 다시 그 둘과 구별된다. 자료를 연표에 놓을 때 날짜 옆에 무엇의 날짜인지 적어야 시간 관계가 흐려지지 않는다.

학습용 사례로 어떤 글이 1500년에 작성되고 1750년에 복사되었으며 2000년에 디지털화되었다고 하자. 첫 번째 간격은 250년이다. 두 번째 간격도 250년이다. 간격이 같아도 첫 구간은 필사 전승을 다루고 둘째 구간은 보존과 공개를 다룬다.

세 날짜 중 가장 이른 것을 자동으로 모든 내용의 탄생일로 삼지 않는다. 원저자가 더 오래된 자료를 인용했을 수도 있다. 반대로 후기 사본에 추가 설명이 들어갔을 수도 있다. 연표는 사건을 정리하는 도구이며 문헌의 층위를 대신 판정해 주는 장치는 아니다.

연대를 정확한 한 해로 알 수 없다면 범위로 적는다. 1700년대라는 기록을 1700년으로 바꾸면 근거 없이 정밀도를 높인 셈이다. 연표의 막대는 때로 하나의 점보다 자료의 상태를 잘 보여 준다.

학습용 사건	연도	앞 사건과 간격
최초 작성	1500	기준
후대 필사	1750	250년
디지털 공개	2000	

연표를 만드는 세 가지 날짜의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

1750년 사본을 설명할 때 1500년과 2000년을 함께 적는 이유는 무엇일까?

풀이와 확인

서로 다른 사건을 분리해 보여 주기 위해서다. 저술과 필사와 공개의 날짜를 표시하면 독자는 글의 내용이 전해진 과정과 자신이 보는 자료의 형태를 구별할 수 있다.

길과 연결을 나타내는 추상 지도

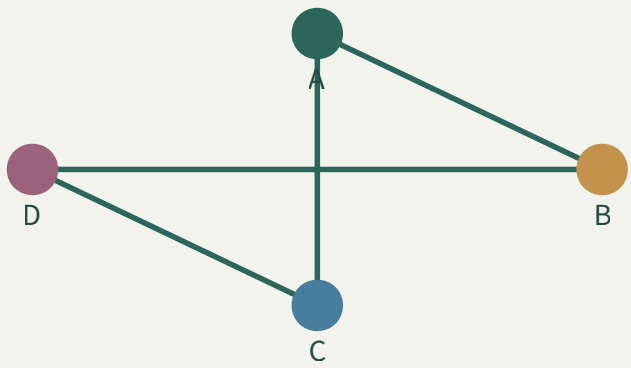
경로도는 실제 거리와 별개로 연결의 구조를 보여 준다.

도시를 점으로 그리고 확인된 이동 관계를 선으로 나타내면 연결망을 만들 수 있다. 선의 길이를 실제 거리로 쓰지 않기로 했다면 그림의 좌우 배치는 단지 읽기 편한 배치다. 가상의 학습망을 역사적 교역로처럼 표시하지 않는 것이 이 활동의 첫 조건이다.

네 지점 A와 B와 C와 D를 두고 A에서 B로 가는 길과 B에서 D로 가는 길을 그린다. 여기에 A에서 C로 가는 길과 C에서 D로 가는 길을 더하면 A에서 D까지 두 개의 두 단계 경로가 생긴다. 어느 경로가 더 짧은지는 선의 개수만으로는 알 수 없다.

길마다 이동 시간을 붙이면 질문이 달라진다. A에서 B까지 3시간이고 B에서 D까지 5시간이면 첫 경로는 8시간이다. A에서 C까지 4시간이고 C에서 D까지 2시간이면 둘째 경로는 6시간이다. 같은 두 단계라도 비용의 합은 서로 다르다.

경로에 비용을 붙인 표는 지도와 함께 보관한다. 선을 길게 그렸다고 시간이 늘어나는 것이 아니며 그림의 좌우를 바꾸어도 합계는 같다. 이 사례의 최선 경로는 표의 시간으로 결정된다.



역사적 교역로를 재현하지 않은 학습용 연결망

경로	구간 시간	합계
A → B → D	3 + 5	8시간
A → C → D	4 + 2	6시간

탐구

연결 수가 같으면 이동 시간도 같다고 할 수 있을까?

풀이와 확인

없다. 경로의 단계 수와 각 구간에 붙인 시간은 별도의 정보다. 이 사례에서는 두 경로가 모두 두 단계지만 8시간과 6시간으로 다르다. 역사 지도를 읽을 때도 선의 의미부터 확인해야 한다.

수량과 수 이름과 숫자 표기

같은 양을 말하는 방법과 적는 방법은 달라질 수 있다.

돌 열일곱 개라는 수량은 말소리나 문자와 별개로 비교할 수 있다. 수 이름은 그 양을 언어로 부르는 방식이다. 숫자 표기는 그 양을 기호로 기록하는 방식이다. 이 세 가지를 구별하면 어떤 언어가 덧셈이나 뺄셈을 포함한 수 이름을 쓴다는 말도 더 정확하게 이해된다.

학습용 카드에 17과 10 + 7과 20 − 3을 각각 적어 보자. 세 식은 같은 수량을 가리키지만 분해 방식은 서로 다르다. 17이라는 십진 표기는 열의 묶음과 낱개를 사용한다. 20 − 3은 가까운 기준량에서 부족한 만큼을 빼는 관점을 보여 준다.

어느 표현이 더 좋은지는 과제에 따라 달라진다. 스무 칸 중 빈칸을 세는 일에는 20 − 3이 편할 수 있다. 열 개 묶음으로 포장할 때에는 10 + 7이 편할 수 있다. 표현의 차이를 능력의 우열로 바꾸지 않고 무엇을 쉽게 드러내는지 비교한다.

표현을 비교할 때에는 숫자의 자릿수와 말의 음절 수도 구분한다. 같은 두 자리 숫자라도 언어에 따라 이름의 길이가 다를 수 있다. 글자 수만 세어 계산 체계의 효율을 평가하지 않는다.

수량	더해서 표현	빼서 표현
17	10 + 7	20 − 3
47	40 + 7	50 − 3
98	90 + 8	

수량과 수 이름과 숫자 표기의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

47을 두 가지 기준량으로 분해하고 각 표현이 편한 상황을 설명해 보자.

풀이와 확인

40 + 7은 스무 개짜리 두 묶음과 남은 낱개를 세기 쉽다. 50 − 3은 쉰 칸에서 빈칸이 세 개라는 상황에 알맞다. 두 표현의 값은 같지만 먼저 눈에 들어오는 구조가 다르다.

도해가 보여 주는 것과 숨기는 것

그림을 읽을 때에는 축척과 방향과 생략을 확인한다.

책 속의 도해는 복잡한 대상을 이해하기 쉽게 바꾼다. 지구를 원으로 그리거나 직조의 실을 같은 굵기의 선으로 그리는 것은 그런 단순화다. 단순화가 잘못은 아니지만 어떤 성질을 남겼는지는 밝혀야 한다. 실제 크기를 보여 주는 그림과 관계만 보여 주는 그림은 용도가 다르다.

가로 6과 세로 4인 직사각형을 가로 3과 세로 2로 그리면 길이는 모두 절반이 된다. 닮음은 유지되지만 넓이는 24에서 6으로 줄어든다. 길이의 축척이 1/2일 때 넓이의 비가 1/4이 된다는 점을 확인하면 도해의 숫자를 더 조심해서 읽게 된다.

반면 연결망에서는 선을 길게 그려도 연결 관계가 같을 수 있다. 그 선에 실제 거리를 부여하지 않았기 때문이다. 그림의 모양이 다르다는 이유로 내용이 다르다고 판단하기 전에 도해가 보존하려는 정보가 길이인지 연결인지 살핀다.

넓이가 네 배인 도형의 길이까지 네 배라고 거꾸로 읽지 않는다. 닮은 평면 도형이라면 길이는 두 배다. 넓이에서 길이의 축척을 찾을 때에는 제곱의 관계를 되돌려 생각해야 한다.

정보	그림에서 확인할 점
길이	축척과 단위
각도	방향과 직각 표시
연결	선의 시작점과 끝점
수량	

도해가 보여 주는 것과 숨기는 것의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

길이를 3배로 확대한 평면 도형의 넓이는 몇 배가 될까?

풀이와 확인

서로 수직인 두 방향의 길이가 각각 3배가 되므로 넓이는 9배가 된다. 확대율을 면적에 그대로 적용하면 틀린다. 도해를 확대해 볼 때에도 실제 수량의 단위는 그대로 유지된다.

역사 자료에서 탐구 문제로

출처가 말한 내용과 수업에서 새로 만든 질문을 구분한다.

소나를 소개하는 자료를 읽고 선을 한 번에 그리는 문제를 만들 수 있다. 이때 한붓그리기 정리가 전통의 모든 의미를 설명한다고 주장하지 않는다. 이야기와 전승 상황은 자료를 통해 읽고 그래프 문제는 현대 수학 활동으로 제시한다. 출발점이 같아도 설명의 층위는 다르다.

탐구 기록에는 먼저 자료에서 직접 확인한 사실을 적는다. 다음에는 그림에서 추출한 점과 선을 적는다. 마지막에는 새로 가정한 규칙을 적는다. 예를 들어 선을 다시 지나가지 않는다는 조건은 활동 설계자가 추가한 조건일 수 있으므로 따로 표시해야 한다.

활동을 마치면 원래 대상에서 무엇이 빠졌는지 돌아본다. 목소리와 몸짓과 모래 표면은 그래프에 남지 않을 수 있다. 수학 모형이 유용하다는 사실과 문화 전체를 설명하지 못한다는 사실은 함께 성립한다. 정확한 모델링은 바로 그 범위를 밝히는 데서 시작한다.

자료에서 추출한 그래프를 바꾸어 다른 규칙을 실험할 수도 있다. 그때마다 버전을 나누어 기록하면 어느 결론이 어느 모형에서 나왔는지 추적할 수 있다. 새 실험이 옛 설명을 덮어쓰지 않게 한다.

층위	적어 둘 내용
자료	공동체와 전승 설명
추출	점과 선의 관계
가정	한 번씩만 지나는 규칙
성찰	

역사 자료에서 탐구 문제로의 핵심 관계를 정리한 표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

현대 수학 활동이라는 표시를 붙이면 독자가 무엇을 구별할 수 있을까?

풀이와 확인

자료에 기록된 전통과 활동을 위해 추가한 규칙을 구별할 수 있다. 그 표시가 있으면 수학적 발견을 즐기면서도 오늘의 기호를 과거 공동체의 말로 오해하지 않게 된다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

아프리카관 / 67

알렉산드리아에서 증명을 읽다

도시의 이름과 학문의 언어

알렉산드리아는 아프리카의 도시이자 지중해 지식의 접점이었다.

유클리드의 기하학을 아프리카관에서 다룬다고 해서 그 저술을 오늘의 국민국가에 배타적으로 귀속시키는 것은 아니다. 장소와 언어와 정치적 배경은 서로 다른 축이다. 한 인물의 활동지를 확인하는 일과 현대의 정체성을 거꾸로 부여하는 일은 구분해야 한다.

이 장은 원론의 모든 명제를 요약하기보다 증명의 기본 동작을 살펴본다. 그림에서 같아 보이는 길이를 왜 같다고 말할 수 있는지 묻는다. 원의 정의와 이미 인정한 성질을 사용하면 눈대중을 넘어서는 설명을 만들 수 있다.

증명은 결론만 적은 답안과 다르다. 독자가 출발 조건에서 결론까지 따라갈 수 있도록 이유를 연결한 글이다. 어떤 보조선을 그렸는지와 그 선이 왜 필요한지도 설명의 일부다. 같은 도형을 그리더라도 근거를 빠뜨리면 설득의 구조가 달라진다.

원론의 명제는 이전 결과를 다시 사용하며 이어진다. 한 명제를 읽을 때 사용된 정의와 앞선 성질을 작은 목록으로 남기면 논증의 의존 관계가 드러난다. 결론을 이해하는 길은 조건을 찾는 데서 시작한다.

읽는 축	묻는 질문
장소	어디에서 활동했는가
언어	어떤 언어로 전해졌는가
논증	어떤 이유로 결론을 얻는가

도시의 이름과 학문의 언어의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

활동지의 인물 소개에는 출생지와 활동지를 왜 나누어 적는 것이 좋을까?

풀이와 확인

지식은 사람의 이동과 함께 여러 장소에 걸쳐 형성되기 때문이다. 서로 다른 지리 정보를 분리하면 한 도시에서 활동했다는 사실을 현대 국가에 대한 단순한 소유 주장으로 바꾸지 않게 된다.

[EUCLID] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Euclid of Alexandria

같은 반지름이 만드는 정삼각형

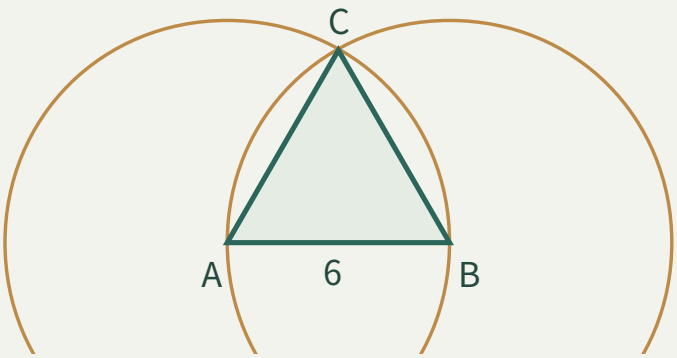
두 원의 교점을 고르면 세 변의 길이를 연결할 수 있다.

선분 AB를 한 변으로 하는 정삼각형을 생각하자. A를 중심으로 하고 반지름이 AB인 원을 그린다. B를 중심으로 하고 반지름이 BA인 원도 그린다. 두 원의 교점 하나를 C로 택하고 A와 C 및 B와 C를 잇는다.

AC는 첫 원의 반지름이므로 AB와 같다. BC는 둘째 원의 반지름이므로 BA와 같다. AB와 BA는 같은 선분의 길이이므로 AC와 BC와 AB가 모두 같다. 그림의 모양이 정삼각형처럼 보인다는 말보다 각 등식의 근거를 차례대로 쓰는 것이 핵심이다.

실제 작도에서는 컴퍼스가 벌어진 정도와 종이의 오차가 영향을 준다. 이상적인 기하학의 결론은 도구의 정밀도와 구별된다. 또한 현대적으로 엄밀하게 다루려면 두 원이 만난다는 존재 조건도 살펴볼 수 있다. 그림이 자연스럽게 보인다는 이유만으로 모든 전제를 생략하지 않는다.

AB의 길이를 두 배로 바꾸어 작도해도 같은 논증이 성립한다. 반지름의 수치가 아니라 서로 같다는 관계가 핵심이기 때문이다. 특정한 길이 6에만 맞는 설명인지 일반적인 이유인지 구별한다.



반지름 AB인 두 원의 교점 C에서 얻는 정삼각형. 원의 일부를 표시했다.

관계	이유
AC = AB	A 중심 원의 반지름
BC = BA	B 중심 원의 반지름
AC = BC = AB	같은 길이의 연결

탐구

교점 C를 선분 아래쪽에서 고르면 정삼각형이라는 결론이 달라질까?

풀이와 확인

달라지지 않는다. 어느 교점을 택해도 C가 두 원 위에 있다는 조건은 같다. 따라서 AC = AB와 BC = BA가 그대로 성립한다. 위아래 방향은 바뀌어도 세 변이 같다는 논증은 유지된다.

[EUCLID] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Euclid of Alexandria

정의는 그림의 사용 규칙이다

원의 정의를 알면 길이의 같음을 읽을 수 있다.

도형의 정의는 사전식 설명을 외우기 위한 문장만은 아니다. 증명에서 어떤 결론을 사용할 수 있는지 정하는 규칙이다. 원의 중심에서 원 위의 점까지 거리가 일정하다는 조건을 알고 있으면 서로 다른 방향의 반지름을 같은 길이로 다룰 수 있다.

중심 O를 가진 원 위에 점 P와 Q를 놓자. OP와 OQ는 모두 반지름이므로 같다. 그러나 원 밖의 점 R에 대해서는 OR이 반지름과 같다고 말할 수 없다. 그림에서 선분의 길이가 비슷해 보이더라도 점이 어디에 있는지 먼저 확인해야 한다.

반지름이 5인 원에서 OP = 5라는 식은 정의와 조건을 함께 사용한 결과다. OQ도 5가 되지만 PQ까지 5라고 결론 내릴 수는 없다. 두 원 위의 점을 잇는 선분은 현이며 위치에 따라 길이가 달라진다. 비슷한 이름의 선분을 구별하는 연습이 증명의 오류를 줄인다.

지름은 중심을 지나면서 양 끝이 원 위에 놓인 선분이다. 반지름 두 개가 일직선으로 이어져 있으므로 길이는 반지름의 두 배다. 현이라는 넓은 범주 안에서 지름이 갖는 추가 조건을 찾아본다.

선분	끝점 조건	길이 판단
OP	P가 원 위	반지름과 같다
OR	R이 원 밖	반지름보다 크다
PQ	P와 Q가 원 위	위치에 따라 달라진다

정의는 그림의 사용 규칙이다의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

원의 중심에서 나온 선분이면 모두 반지름일까?

풀이와 확인

끝점이 원 위에 있어야 반지름이다. 원 내부나 외부에서 끝나는 선분은 중심에서 출발해도 반지름이라고 부를 수 없다. 이름을 붙이기 전에 정의의 모든 조건을 확인한다.

넓이를 잘라 옮기는 논증

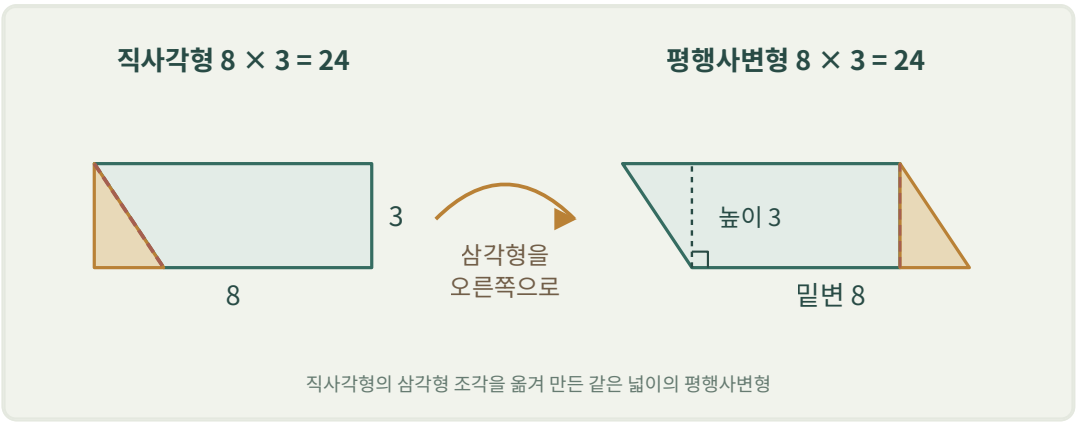
조각을 보존하며 재배치하면 같은 넓이를 설명할 수 있다.

가로 8과 세로 3인 직사각형의 넓이는 24다. 한쪽 끝에서 밑변이 2이고 높이가 3인 직각삼각형을 잘라 반대쪽에 붙이면 같은 높이를 가진 평행사변형을 만들 수 있다. 조각을 겹치거나 잃어버리지 않았다면 전체 넓이는 그대로다.

이 그림은 밑변과 높이가 같은 평행사변형의 넓이가 같다는 생각으로 이어진다. 옆변의 기울기가 바뀌어도 밑변 8과 수직 높이 3이 유지되면 넓이는 24다. 여기서 높이는 기울어진 옆변의 길이가 아니라 두 평행선 사이의 수직 거리다.

자르기 활동을 할 때에는 조각의 경계가 맞는지 살펴본다. 작은 틈이나 겹침이 있으면 겉모양만으로 넓이 보존을 주장할 수 없다. 디지털 그림에서도 같은 원리가 적용된다. 보기 좋은 배열보다 각 조각이 어디로 이동했는지 추적하는 설명이 먼저다.

평행사변형을 삼각형 두 개로 나누면 각 삼각형의 넓이는 전체의 절반이다. 대각선이 만든 두 조각의 대응을 살피면 밑변과 높이의 곱에 1/2이 붙는 삼각형 넓이 공식도 설명할 수 있다.



직사각형의 삼각형 조각을 옮겨 만든 같은 넓이의 평행사변형

탐구

밑변 8과 옆변 5만 알면 평행사변형의 넓이를 구할 수 있을까?

풀이와 확인

높이를 알 수 없으므로 넓이를 하나로 정할 수 없다. 옆변 5가 유지되어도 기울기에 따라 수직 높이가 달라진다. 밑변에 곱해야 할 길이는 옆변이 아니라 높이다.

예시와 증명의 역할은 다르다

몇 가지 수에서 맞는 규칙을 전체로 넓히려면 이유가 필요하다.

연속한 두 자연수의 합을 계산해 보자. 3 + 4는 7이고 8 + 9는 17이다. 두 예는 모두 홀수지만 예시를 많이 모았다는 사실만으로 모든 연속한 자연수에 대한 증명이 끝나지는 않는다. 아직 계산하지 않은 수가 남아 있기 때문이다.

첫 수를 n이라 두면 다음 수는 n + 1이다. 합은 2n + 1이다. 2n은 2의 배수이므로 여기에 1을 더한 값은 홀수다. 이 설명은 특정한 n을 고르지 않았으므로 모든 자연수 n에 같은 방식으로 적용된다.

예시는 규칙을 발견하거나 증명의 오류를 찾는 데 유용하다. 증명은 왜 그 규칙이 필요한 조건에서 항상 성립하는지 설명한다. 두 활동을 경쟁시키지 말고 순서를 연결한다. 먼저 작은 사례를 관찰하고 다음에는 사례에 공통으로 들어 있는 구조를 문자로 나타낸다.

규칙이 틀렸음을 찾는 단계에서는 큰 수를 무작정 계산하기보다 조건의 경계를 살펴본다. 0을 허용하는지와 음수를 포함하는지가 결론을 바꿀 수 있다. 명제의 수 범위를 먼저 읽는 습관을 들인다.

대상	합의 식	결론
연속한 두 수	2n + 1	항상 홀수
연속한 세 수	3(n + 1)	항상 3의 배수

예시와 증명의 역할은 다르다의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

연속한 세 자연수의 합에 대해서는 어떤 규칙을 증명할 수 있을까?

풀이와 확인

n과 n + 1과 n + 2의 합은 3n + 3 = 3(n + 1)이다. 따라서 합은 3의 배수이며 가운데 수의 3배다. 사례를 더 계산하지 않아도 문자식의 구조가 이유를 보여 준다.

반례 하나의 힘

조건을 빠뜨린 문장은 작은 예에서 무너질 수 있다.

모든 사각형의 네 변은 같다는 문장은 정사각형 그림 하나만 보고 만든 잘못된 일반화다. 가로 6과 세로 2인 직사각형은 사각형이지만 네 변이 모두 같지 않다. 이 한 사례가 전체 주장에 대한 반례가 된다.

반례를 제시할 때에는 원래 조건을 만족하는지 확인해야 한다. 삼각형을 가져오면 사각형에 관한 주장을 반박한 것이 아니다. 직사각형이 분명히 사각형이라는 점과 네 변이 같지 않다는 점을 함께 확인해야 논리의 연결이 완성된다.

문장을 고치는 방법도 여러 가지다. 대상을 정사각형으로 좁히면 네 변이 같다는 말이 참이 된다. 대상을 사각형으로 유지하면서 결론을 네 개의 변을 가진다로 바꿀 수도 있다. 어떤 내용을 말하고 싶었는지에 따라 조건과 결론을 함께 조정한다.

반례를 바탕으로 수정한 주장도 다시 점검해야 한다. 모든 직사각형의 변이 같다고 바꾸면 같은 반례가 남는다. 이름이 비슷한 도형을 바꾸어 쓰기보다 네 변이 같다는 정의를 가진 대상을 골라야 한다.

주장	반례	수정 가능한 문장
모든 사각형의 변이 같다	가로 6 세로 2 직사각형	정사각형의 변은 같다
모든 짝수는 4의 배수다	2	4의 배수는 짝수다

반례 하나의 힘의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

모든 짝수는 4의 배수다라는 주장에 대한 가장 작은 양의 반례는 무엇일까?

풀이와 확인

2다. 2는 2로 나누어떨어지므로 짝수지만 4의 정수배는 아니다. 6도 반례지만 가장 작은 양의 반례라는 조건을 붙이면 2를 선택해야 한다.

작도 설명서를 쓰는 순서

다른 사람이 같은 조건을 만들 수 있어야 한다.

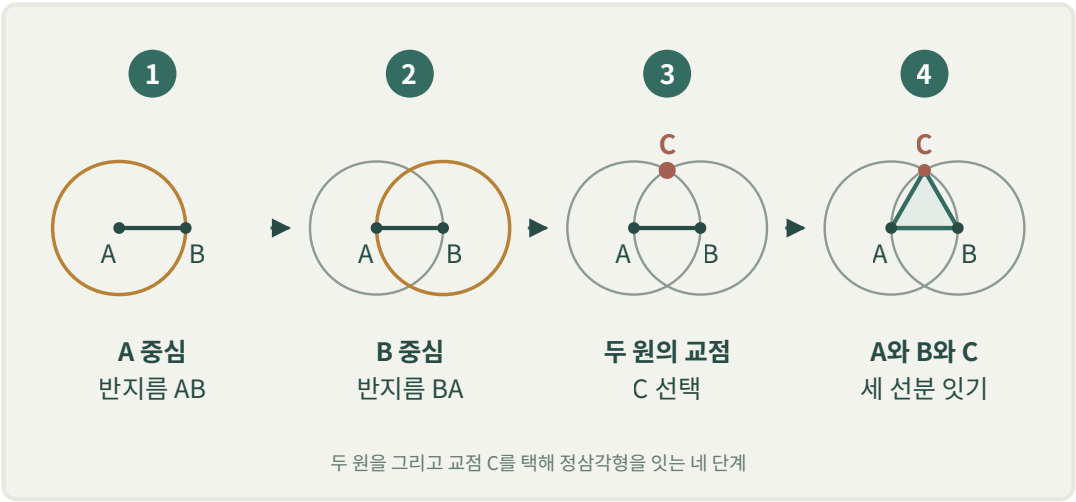
정삼각형 작도 설명서를 쓴다고 하자. 먼저 선분을 그린다라고만 적으면 길이를 어떻게 정할지 알기 어렵다. 주어진 선분 AB를 사용한다고 적으면 출발 조건이 분명해진다. 원을 두 개 그린다라는 지시도 중심과 반지름을 각각 명시해야 실행할 수 있다.

설명서의 동작은 그리기와 선택하기와 잇기로 나누어 볼 수 있다. 원 두 개가 만들어진 뒤에는 어느 교점을 택하는지 정해야 한다. 두 교점 중 하나를 고르면 충분한지 특정 방향의 교점이 필요한지 역시 목적에 따라 달라진다.

마지막 문장에는 결과의 확인을 넣는다. 세 변의 길이를 자로 재어 보는 확인과 원의 반지름 관계로 설명하는 확인을 구별한다. 측정은 실제 그림의 오차를 알려 주고 논증은 이상적인 작도가 정삼각형을 만든다는 이유를 알려 준다.

작도 지시의 순서를 바꾸면 아직 만들지 않은 점을 사용하게 될 수 있다. 교점 C를 선택하기 전에 두 원을 그려야 한다는 선후 관계를 확인한다. 절차의 정확성은 개별 문장과 순서에서 함께 나온다.

결과 기록을 작도와 측정 및 논증으로 나누어 둔다. 작도 칸에는 도구의 동작을 적고 측정 칸에는 실제 오차를 적는다. 논증 칸에는 같은 길이가 되는 이유를 쓴다. 초보 독자에게 필요한 두 원의 반지름 관계까지 간결함을 이유로 지우지 않는다.



두 원을 그리고 교점 C를 택해 정삼각형을 잇는 네 단계

탐구

원을 그린다라는 지시를 실행 가능한 문장으로 고쳐 보자.

풀이와 확인

점 A를 중심으로 하고 선분 AB의 길이를 반지름으로 하는 원을 그린다고 쓸 수 있다. 중심과 반지름이 지정되어야 어떤 원을 그릴지 결정된다. 단순한 동사보다 입력 조건이 중요하다.

반복해서 빼면 남는 공통 단위

원론의 수론을 오늘의 나머지 계산으로 다시 읽는다.

원론은 도형의 성질만 다루는 책이 아니다. 제7권 명제 2는 두 수를 함께 재는 가장 큰 공통 단위를 찾는 문제를 다룬다. 여기서는 원문의 선분 표기 대신 현대의 정수 나눗셈을 사용한다. 표현은 바꾸되 공통 단위가 왜 유지되는지는 직접 설명한다.

길이 84와 30을 같은 정수 길이의 조각으로 남김없이 나누려 한다. 84에서 30을 두 번 빼면 24가 남는다. 84와 30을 함께 나누는 수는 그 차인 24도 나눈다. 거꾸로 30과 24를 함께 나누는 수는 30을 두 번 더한 84도 나눈다.

이제 30과 24로 바꾸어 같은 일을 한다. 남은 수는 6이며 24는 6으로 남김없이 나뉜다. 공통 약수의 집합이 단계마다 같으므로 마지막 6은 원래 두 수의 최대공약수다. 마지막 값이 약수라는 검산과 그보다 큰 공통 약수가 없다는 이유를 함께 얻는다.

절차가 끝나는 까닭도 설명할 수 있다. 나머지는 바로 앞의 나누는 수보다 작고 음이 아닌 정수다. 따라서 같은 방식으로 끝없이 작아지는 양의 정수열은 만들 수 없다. 값이 보존되는 이유와 계산이 끝나는 이유는 서로 다른 두 질문이다.

나눗셈	나머지
84 = 2 × 30 + 24	24
30 = 1 × 24 + 6	6
24 = 4 × 6	0

탐구

길이 126과 48을 함께 재는 가장 큰 정수 단위는 무엇인가?

풀이와 확인

126 = 2 × 48 + 30이다. 이어서 48 = 30 + 18과 30 = 18 + 12 및 18 = 12 + 6을 얻는다. 12가 6으로 나뉘므로 답은 6이다. 실제로 126과 48은 각각 6의 21배와 8배다.

[EUCLIDVII2] 클라크대학교. 유클리드 원론 제7권 명제 2의 원문 번역과 해설

아프리카관 / 68

그림자에서 지구의 크기까지

에라토스테네스의 질문

손이 닿지 않는 전체를 가까운 두 지점의 관계로 추론한다.

에라토스테네스의 지구 측정은 북아프리카의 장소를 연결하는 대표적인 수학사 이야기다. 이 장에서는 전해지는 측정 구상을 현대의 원 모형으로 읽는다. 고대 거리 단위의 정확한 길이와 실제 관측 조건에는 논의가 있으므로 오늘의 미터값을 유일한 역사적 정답처럼 적지 않는다.

핵심은 작은 중심각에 해당하는 지표 거리와 원 전체의 둘레를 비례로 연결하는 것이다. 태양빛을 서로 평행하다고 보고 두 지역의 위치를 단순화하면 그림자에서 얻은 각을 지구 중심의 각과 연결할 수 있다. 측정값만 아니라 이런 기하학적 가정이 계산을 가능하게 한다.

학습용 모형에서 중심각을 7.2°로 두면 한 바퀴의 1/50이다. 해당 지표 거리를 800 km라고 가정하면 둘레는 40000 km가 된다. 여기서 800 km는 계산 원리를 설명하기 위한 둥근 수이며 고대 기록의 단위를 직접 확정한 값이 아니다.

구간 거리와 각을 서로 다른 지점 쌍에서 가져오면 비례식이 성립하지 않는다. 숫자가 각각 정확해도 서로 대응하지 않으면 잘못된 입력이다. 어떤 관측이 어느 거리와 한 쌍인지 표시한다.



원을 7.2°씩 나누면 50조각

360° ÷ 7.2° = 50

호 하나 800 km

둘레 = 50 × 800 km

= 40000 km

7.2°의 호 하나가 원 둘레의 1/50이 되는 비례 모형

탐구

중심각이 한 바퀴의 1/50이라는 말은 어떤 비례식을 뜻할까?

풀이와 확인

중심각에 대응하는 지표 거리도 전체 둘레의 1/50이라는 뜻이다. 원 모형에서 호의 길이는 중심각에 비례한다. 따라서 작은 구간의 거리에 50을 곱하면 모형의 전체 둘레를 얻는다.

[ERATOSTHENES] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Eratosthenes

평행한 빛이라는 가정

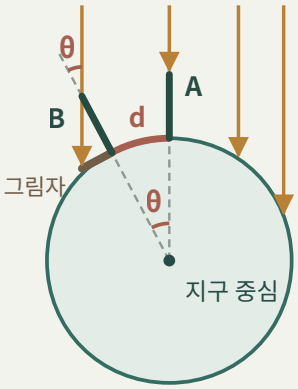
기하학의 각을 연결하려면 빛과 수직선의 관계를 정해야 한다.

그림자 길이만 재어 지구의 중심각을 바로 구할 수는 없다. 두 장소의 수직 방향과 태양빛이 하나의 평면에 놓이는 원 모형을 먼저 정한다. 그 평면에서 각의 방향까지 구별해 읽으면 두 수직선 사이의 각을 얻을 수 있다. 관측한 각의 크기 두 개를 아무 조건 없이 빼는 것은 충분하지 않다.

종이에 평행한 두 선과 그 선들을 가로지르는 선을 그려 보자. 대응하는 각의 관계는 선 사이의 거리를 바꾸어도 유지된다. 지구 그림에서는 이 평행선이 햇빛을 나타내고 반지름이 서로 다른 수직 방향을 나타낸다. 그림자 도해에서 어느 선이 무엇을 뜻하는지 표시해야 한다.

실험용 손전등은 태양처럼 멀리 있지 않다. 가까운 광원에서는 빛이 크게 퍼지므로 같은 모형의 가정을 만족시키기 어렵다. 손전등 실험 결과가 다르다고 해서 각의 성질이 틀린 것은 아니다. 사용한 광원이 평행한 빛이라는 조건에 얼마나 가까운지 먼저 살핀다.

실제 두 장소에서는 같은 자오선에 가까운지와 각 장소의 태양 남중 시각을 확인해야 한다. 두 그림자가 태양의 수직 아래 지점을 사이에 두고 반대쪽으로 생기면 각의 크기를 더해야 하는 경우도 있다. 이 책의 간단한 비례 계산은 대응하는 중심각을 이미 올바르게 얻었다는 조건에서 성립한다.



B의 막대와 햇빛이 이루는 각
= 두 반지름 사이의 중심각
(평행선의 엇각)

θ = 7.2°이면 360°의 1/50
둘레 = 50 × d

그림의 각은 과장했다

평행한 햇빛과 막대가 이루는 각이 두 지점의 중심각과 같다.

모형 요소	대응하는 대상
평행선	멀리서 오는 태양빛
반지름	각 지점의 수직 방향
중심각	두 수직 방향의 차이

탐구

가까운 손전등으로 만든 그림자를 태양빛 관측과 똑같이 다루면 왜 문제가 생길까?

풀이와 확인

가까운 광원에서는 두 지점에 도달하는 빛의 방향이 크게 다를 수 있다. 계산에서 평행하다고 가정한 선이 실제로는 평행하지 않으므로 중심각을 추론하는 관계가 달라진다.

비례식으로 둘레 구하기

측정 구간이 전체의 몇 분의 일인지 찾는다.

원의 둘레를 C라 하고 관측한 두 지점 사이의 호의 길이를 d라 하자. 중심각이 θ도이면 d/C = θ/360이다. 따라서 C = 360d/θ가 된다. 이 식에서 d와 C는 같은 길이 단위로 나타내야 하며 θ에는 도 단위의 수치를 넣는다.

d = 900 km이고 θ = 8°인 학습용 자료를 넣으면 C = 360 × 900 ÷ 8 = 40500 km다. 먼저 360 ÷ 8 = 45를 구한 뒤 900을 곱해도 같다. 8°짜리 구간 45개가 원을 한 바퀴 채운다는 그림으로 계산의 뜻을 설명할 수 있다.

각이 0°이면 이 식으로 유한한 둘레를 구할 수 없다. 분모가 0이 되는 계산 문제일 뿐 아니라 두 지점의 방향 차이를 관측하지 못한 상황이다. 입력값의 범위를 확인하는 일은 수식을 적용하는 과정의 일부다.

각을 라디안으로 쓴다면 식의 360 대신 2π가 들어간다. 도와 라디안은 같은 각을 나타내는 서로 다른 단위다. 단위가 바뀌었는데 식의 상수를 그대로 두면 둘레의 값이 크게 달라진다.

$$d / C = \theta / 360$$

$$C = 360d / \theta$$

$$C = 360 \times 900 / 8 = 40500$$

같은 원에서 호의 길이와 중심각은 비례한다

d	θ	360 ÷ θ	C
900 km	8°	45	40500 km
1000 km	9°	40	40000 km

탐구

d = 1000 km이고 θ = 9°라면 둘레는 얼마일까?

풀이와 확인

360 ÷ 9 = 40이므로 둘레는 1000 × 40 = 40000 km다. 9°의 호가 전체의 1/40이라는 해석과 함께 적으면 단순한 대입을 넘어 비례 구조를 확인할 수 있다.

각의 오차가 둘레를 바꾸는 방식

분모의 값이 작아지면 계산한 둘레는 커진다.

거리를 800 km로 고정하고 각만 조금 바꾸어 보자. 7.2°를 사용하면 둘레는 40000 km다. 7.0°를 사용하면 약 41143 km이며 7.4°를 사용하면 약 38919 km다. 각의 작은 차이가 전체 둘레에 적지 않은 차이를 만든다.

이 변화는 C = 360d/θ에서 θ가 분모에 있기 때문에 생긴다. 거리 d가 일정할 때 θ가 작아지면 같은 거리가 더 작은 중심각에 대응하므로 원 전체는 더 커져야 한다. 식의 계산 결과를 그림의 해석과 연결하면 변화 방향을 기억하기 쉽다.

두 결과의 오차가 정확히 대칭은 아니라는 점도 살펴볼 만하다. 7.2에서 0.2를 빼거나 더한 변화는 대칭이지만 역수의 변화는 대칭이 아니다. 측정의 불확실성을 나타낼 때 입력의 오차와 출력의 오차가 같은 모양이라고 가정하지 않는다.

거리 오차도 결과에 영향을 준다. 각을 고정한 상태에서 거리가 1퍼센트 크게 입력되면 계산한 둘레도 1퍼센트 커진다. 분자와 분모의 오차가 결과에 작용하는 방식이 서로 다름을 비교한다.



거리 800 km를 고정한 학습용 민감도 비교

관측 각	계산한 둘레
7.0°	약 41143 km
7.2°	40000 km
7.4°	약 38919 km

탐구

각을 실제보다 작게 기록하면 계산한 지구 둘레는 어느 방향으로 달라질까?

풀이와 확인

거리 측정이 같다면 둘레가 더 크게 계산된다. 작은 각에 같은 거리가 들어간다고 해석하기 때문이다. 실제보다 크게 기록한 각은 반대로 더 작은 둘레를 만든다.

단위가 바뀌어도 비율은 같다

거리 단위의 해석과 계산 절차의 타당성을 분리한다.

한 구간이 5000개의 옛 거리 단위라고 기록되어 있고 그 구간이 원의 1/50이라고 하자. 모형의 둘레는 같은 단위로 250000이다. 이 단계에서는 그 단위가 오늘의 몇 미터인지 몰라도 비례 계산을 할 수 있다.

학습용 환산값으로 한 단위를 160 m라 두면 40000 km가 되고 180 m라 두면 45000 km가 된다. 두 환산값은 역사적 단위를 확정하려고 제시한 값이 아니다. 단위 길이에 관한 가정이 결과에 어떻게 영향을 주는지 보이기 위해 선택한 수다.

옛 측정이 현대값에 얼마나 가깝다는 평가를 하려면 어떤 단위 환산을 사용했는지 밝혀야 한다. 계산의 원리가 훌륭하다는 설명과 특정한 오차율을 주장하는 설명은 필요한 근거가 다르다. 숫자가 익숙한 단위로 바뀌었다는 이유만으로 불확실성이 사라지는 것은 아니다.

서로 다른 환산값으로 얻은 결과를 평균내어 역사적 단위를 결정할 수는 없다. 환산값마다 근거가 어떤지 먼저 따져야 한다. 불확실한 가정 여러 개를 더한다고 자동으로 신뢰할 만한 값이 되지는 않는다.

가정한 단위 길이	250000단위의 환산
160 m	40000 km
180 m	45000 km

단위가 바뀌어도 비율은 같다의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

한 단위의 길이를 10퍼센트 크게 가정하면 환산한 둘레는 어떻게 될까?

풀이와 확인

같은 옛 단위 수에 환산 계수를 곱하므로 둘레도 10퍼센트 커진다. 이 변화는 각도 계산 때문이 아니라 단위 환산의 가정 때문에 생긴다.

그림자 비율을 직접 재기

막대의 높이와 그림자 길이를 같은 단위로 기록한다.

막대 높이를 h라 하고 수평면 위 그림자의 길이를 s라 하자. 막대가 수직이고 바닥이 수평이라는 조건에서 태양빛과 수직선 사이의 각 θ는 tan θ = s/h로 연결된다. 이 활동은 고대 장비를 복원하는 것이 아니라 오늘의 관측 원리를 확인하는 실험이다.

높이 100 cm인 막대의 그림자가 20 cm라면 s/h = 0.2다. 높이를 50 cm로 줄였을 때 같은 시각과 장소에서 그림자가 10 cm라면 비율은 그대로 0.2다. 두 직각삼각형이 닮았기 때문에 막대 크기가 달라도 각은 같다.

그림자 끝이 흐리면 같은 기준으로 끝점을 선택하고 반복 측정한다. 막대가 기울어졌는지도 확인한다. 여러 값을 평균내는 것으로 기울기처럼 일정하게 작용하는 오차가 자동으로 사라지는 것은 아니다. 측정값의 흔들림과 설치 조건의 문제를 따로 살핀다.

막대 길이와 그림자 길이를 동시에 두 배로 만들면 그 비는 유지된다. 같은 태양 각도에서 높이가 다른 막대를 비교할 수 있는 이유다. 측정한 두 길이가 같은 시각의 값인지도 기록한다.



그림자 비율을 구하는 직각삼각형 모형

높이 h	그림자 s	s/h
100 cm	20 cm	0.2
50 cm	10 cm	0.2
80 cm	16 cm	0.2

탐구

막대 높이 80 cm와 그림자 16 cm는 위 사례와 같은 각을 나타낼까?

풀이와 확인

16 ÷ 80 = 0.2이므로 같은 비율이다. 수직 막대와 수평 바닥이라는 조건이 같다면 같은 θ를 나타낸다. 길이 자체보다 그림자 길이와 높이의 비가 핵심이다.

측정 계획에 필요한 기록

시간과 위치를 빠뜨리면 좋은 숫자도 비교하기 어렵다.

두 장소의 그림자를 비교하는 활동에서는 날짜와 관측 시각을 명확히 기록해야 한다. 장소마다 태양의 위치가 다르므로 아무 시각의 값을 모아 단순히 빼면 원하는 중심각이 나오지 않을 수 있다. 학교 활동에서는 어떤 비교 모형을 사용할지 먼저 정한다.

한 장소에서 같은 막대를 여러 번 측정한다면 막대 높이와 바닥의 수평 상태와 그림자 끝점 기준을 일정하게 유지한다. 측정값만 표에 적기보다 구름이나 흐린 경계처럼 결과에 영향을 줄 수 있는 상황을 간단히 메모한다. 기록의 목적은 다른 사람이 과정을 이해하고 다시 시도하게 하는 데 있다.

자료를 공개할 때에는 개인의 집 주소 같은 불필요한 위치 정보는 넣지 않아도 된다. 학습에 필요한 지역 수준의 정보와 거리 산정 방법을 적으면 충분한 경우가 많다. 정밀한 숫자를 많이 모으는 것보다 비교에 필요한 조건을 일관되게 적는 것이 먼저다.

측정을 반복할 때에는 이전 결과를 보고 숫자를 맞추지 않는다. 각 회차의 원값을 먼저 적고 나중에 비교한다. 기대한 값에 가까운 결과만 고르면 반복 측정이 검증이 아니라 선택이 된다.

기록 항목	필요한 이유
막대 높이	그림자와의 비 계산
날짜와 시각	관측 조건 비교
바닥과 수직 상태	모형 조건 확인
반복값	측정의 흔들림 파악

측정 계획에 필요한 기록의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

그림자 길이만 적힌 표에 어떤 항목을 더해야 비율을 비교할 수 있을까?

풀이와 확인

막대 높이를 추가해야 한다. 같은 길이의 그림자라도 막대 높이가 다르면 각도가 다르다. 측정 날짜와 시각 및 설치 상태도 함께 적으면 결과의 차이를 해석하는 데 도움이 된다.

지구 측정 탐구를 완성하다

결론과 함께 가정의 목록을 제출한다.

학습 자료에서 거리가 750 km이고 중심각이 6.75°라고 하자. 둘레는 360 × 750 ÷ 6.75 = 40000 km다. 계산을 마친 뒤에는 이 숫자가 무엇을 전제로 한 결과인지 한 문단으로 설명한다. 원 모형과 호의 거리와 각의 대응이 그 전제다.

다음에는 거리가 10 km 더 길게 측정되었다면 결과가 어떻게 달라지는지 계산한다. 360 × 760 ÷ 6.75는 약 40533 km다. 각도를 고정한 상태에서는 거리의 증가율과 둘레의 증가율이 같다. 입력 조건을 하나씩 바꾸면 결과 변화의 원인을 분리할 수 있다.

탐구 보고서의 마지막 문장은 측정값을 역사적 기록에 덧씌우지 않는 확인이어야 한다. 오늘 사용한 수는 원리를 배우기 위한 예제이며 실제 고대 측정의 세부를 모두 재현하지 않는다. 이 구분을 적으면 수학적 이해와 역사적 정밀성을 함께 지킬 수 있다.

발표에서는 모형의 계산 결과와 실제 지구에 대한 해석을 별도 문장으로 쓴다. 원 모형의 가정이 실제 조건에 얼마나 가까운지 설명해야 수식의 답이 관측 대상의 크기로 이어질 수 있다.

비교	거리	각	둘레
기준	750 km	6.75°	40000 km
거리 변경	760 km	6.75°	약 40533 km

지구 측정 탐구를 완성하다의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

각도는 그대로 두고 거리를 두 배로 바꾸면 계산한 둘레는 몇 배가 될까?

풀이와 확인

두 배가 된다. C = 360d/θ에서 θ가 일정하면 C는 d에 비례한다. 그러나 실제 지구에서 같은 중심각의 거리가 임의로 두 배가 된다는 뜻이 아니라 입력 자료를 바꾼 모형 비교다.

거리와 각이 함께 흔들릴 때

하나의 답 대신 모형이 허용하는 둘레의 범위를 구한다.

그림자 측정의 오차를 따로 살핀 뒤에는 거리와 각이 동시에 달라지는 경우를 생각한다. 학습용 조사에서 대응하는 호의 거리는 790 km에서 810 km이고 중심각은 7.1°에서 7.3°라고 하자. 두 범위 안의 모든 조합을 허용하는 모형이다.

둘레 식 C = 360d/θ에서 거리 d가 커지면 C도 커진다. 각 θ가 커지면 C는 작아진다. 따라서 최소 둘레는 가장 짧은 거리와 가장 큰 각을 함께 넣어 구한다. 최대 둘레에는 가장 긴 거리와 가장 작은 각을 넣는다.

최소는 360 × 790 ÷ 7.3으로 약 38959 km다. 최대는 360 × 810 ÷ 7.1로 약 41070 km다. 양 끝을 평균낸 수만 남기면 입력 자료가 허용한 넓은 범위를 가리게 된다. 계산 결과의 자릿수가 많다는 사실은 측정이 정밀하다는 뜻이 아니다.

이 범위는 지구의 실제 둘레를 새로 측정한 결과가 아니다. 가상 입력과 원 모형에서 얻은 계산상 범위다. 거리와 각의 오차가 서로 연관되어 모든 조합이 가능하지 않다면 범위는 달라질 수 있다. 입력의 제약까지 알아야 더 좁은 결론을 낼 수 있다.

조건	거리	중심각	둘레
최소	790 km	7.3°	약 38959 km
최대	810 km	7.1°	약 41070 km

탐구

중심각을 정확히 7.2°로 알고 거리만 790 km에서 810 km라면 둘레 범위는?

풀이와 확인

360 ÷ 7.2 = 50이므로 39500 km에서 40500 km다. 각의 불확실성을 없애면 이 모형의 계산 범위가 좁아진다.

[ERATOSTHENES] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Eratosthenes

아프리카관 / 69

방정식과 주석의 전통

디오판토스의 문제를 만나는 태도

오늘의 대수 기호로 옮기더라도 원문과 같은 표기라고 말하지 않는다.

알렉산드리아의 디오판토스는 산술 문제의 전통을 살펴볼 때 중요한 이름이다. 그의 저술을 현대 문자식으로 읽으면 관계를 빠르게 파악할 수 있지만 원래의 표기와 풀이 관행이 오늘의 대수 교과서와 같았다고 생각해서는 안 된다. 번역은 이해를 돕는 동시에 차이를 가릴 수도 있다.

이 장의 예제는 역사적 원문 문제를 그대로 인용한 것이 아니다. 조건을 식으로 옮기고 해의 범위를 정하며 검산하는 과정을 배우기 위해 새로 구성했다. 정수 해를 찾는 질문과 유리수 해를 찾는 질문은 같은 식을 사용해도 다른 과제가 된다.

예를 들어 x + y = 5는 양의 정수 범위에서 네 개의 순서쌍을 가진다. 유리수 범위에서는 훨씬 많은 해를 만들 수 있다. 해가 몇 개인지 묻기 전에 어떤 수를 허용하는지 적어야 답의 의미가 분명해진다.

디오판토스라는 이름이 붙은 현대 방정식 연구는 역사 저술의 내용보다 훨씬 넓다. 오늘의 용어를 옛 책의 분류에 그대로 적용하면 관심의 차이를 놓칠 수 있다. 시대별 용법을 따로 확인한다.

범위	첫 수 x	순서 있는 해의 수
양의 정수	1부터 4	4
음이 아닌 정수	0부터 5	6

디오판토스의 문제를 만나는 태도의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

x + y = 5에서 양의 정수 해와 음이 아닌 정수 해의 개수는 어떻게 다를까?

풀이와 확인

양의 정수 해는 첫 수가 1부터 4까지여서 네 개다. 0을 허용하면 첫 수가 0부터 5까지여서 여섯 개다. 순서를 구별한다는 조건도 함께 명시해야 한다.

[DIOPHANTUS] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Diophantus of Alexandria

합과 차로 두 수 찾기

두 조건을 더하면 한 미지수가 사라진다.

두 수의 합이 20이고 큰 수에서 작은 수를 뺀 차가 6이라고 하자. 큰 수를 x와 작은 수를 y로 두면 x + y = 20과 x − y = 6이다. 두 식을 더하면 y와 −y가 없어져 2x = 26을 얻는다. 따라서 x는 13이고 y는 7이다.

이 풀이에서 더하기는 단순한 요령이 아니다. 같은 양의 y를 한 번 더하고 한 번 빼면 남지 않는다는 구조를 사용한다. 그림으로 보면 두 수의 합에 차이를 보태 작은 수를 큰 수만큼 채운 것이므로 큰 수 두 개가 된다.

검산에서는 합과 차를 모두 확인한다. 13 + 7 = 20만 확인하면 첫 조건만 검사한 셈이다. 13 − 7 = 6까지 적어야 두 조건을 만족했다는 결론을 내릴 수 있다. 여러 조건이 주어진 문제에서는 해를 원래의 모든 조건에 되돌려 넣는다.

큰 수는 합과 차의 합을 반으로 나누고 작은 수는 합에서 차를 뺀 뒤 반으로 나눈다. 이 두 식을 다시 더하면 원래 합이 되고 빼면 원래 차가 되어 일반적인 검산도 가능하다.

$$x + y = 20$$
$$x - y = 6$$
$$2x = 26$$
$$x = 13\ y = 7$$

같은 미지수의 반대 부호를 이용한 소거

단계	식
조건	x + y = 20
조건	x − y = 6
더하기	2x = 26
해	x = 13 및 y = 7

탐구

합이 31이고 차가 9인 두 수를 같은 방법으로 구해 보자.

풀이와 확인

두 식을 더하면 큰 수의 두 배가 40이므로 큰 수는 20이다. 작은 수는 11이다. 합은 31이고 차는 9이므로 두 조건이 모두 맞는다.

짝홀 조건이 알려 주는 가능성

정수 해를 구하기 전에 합과 차의 짝홀을 비교한다.

합을 S와 차를 D라고 쓰면 큰 수는 (S + D)/2이고 작은 수는 (S − D)/2다. 두 수가 정수이려면 S + D와 S − D가 모두 짝수여야 한다. 따라서 합과 차가 같은 짝홀성을 가질 때 정수 해를 얻을 수 있다.

합이 20이고 차가 5라면 큰 수는 12.5이고 작은 수는 7.5다. 식의 해는 존재하지만 정수 해는 아니다. 두 수를 사람 수처럼 반드시 정수인 양으로 해석했다면 조건에 맞는 상황이 없다고 말해야 한다. 소수점이 나왔다는 이유만으로 반올림해서 답을 만들 수는 없다.

반면 길이를 구하는 문제라면 12.5와 7.5를 허용할 수 있다. 수의 범위는 계산 뒤에 편의대로 바꾸는 것이 아니라 문제의 대상에 맞추어 먼저 정한다. 같은 방정식이 상황에 따라 다른 판단을 요구한다는 점이 드러난다.

양의 정수 조건까지 요구하면 합 S가 차 D보다 커야 한다. S = D이면 작은 수가 0이 되어 양수가 아니다. 짝홀 조건만 맞는다고 모든 추가 조건을 만족하는 것은 아니다.

합 S	차 D	정수 해 여부
20	6	가능
20	5	불가능
27	9	가능
27	8	불가능

짝홀 조건이 알려 주는 가능성의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

합이 27이고 차가 8일 때 양의 정수 두 수가 존재할까?

풀이와 확인

존재하지 않는다. 합은 홀수이고 차는 짝수이므로 두 식을 더한 35를 2로 나눈 값은 정수가 아니다. 유리수 해 17.5와 9.5는 있지만 정수 조건을 만족하지 않는다.

유리수 해를 만드는 직선

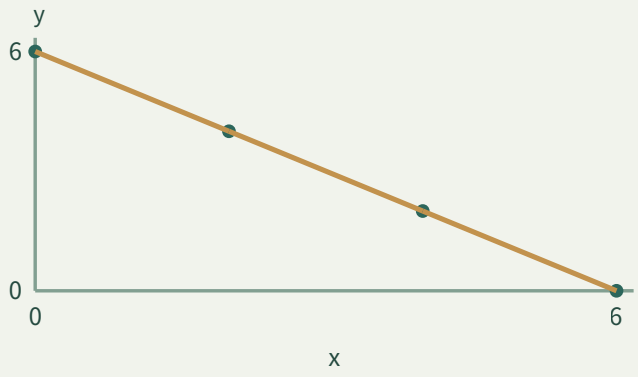
자유롭게 고른 수 하나가 다른 수를 결정한다.

$x + y = 6$에서 x를 유리수 t로 고르면 y는 $6 - t$가 된다. $t = 1/2$이면 $y = 11/2$이고 $t = 7/3$이면 $y = 11/3$이다. 이처럼 한 매개변수를 사용하면 여러 해를 따로 찾는 대신 전체 해의 형태를 나타낼 수 있다.

양의 해만 필요하면 $0 < t < 6$이라는 조건을 붙인다. x가 양수여야 하므로 $t > 0$이고 y도 양수여야 하므로 $t < 6$이다. 식을 만족하는 것과 추가 조건을 만족하는 것은 별도로 점검해야 한다.

좌표평면에서 이 해들은 직선 위에 놓인다. 그러나 직선 위의 모든 점이 유리수 좌표를 갖는 것은 아니다. 유리수 해를 다룬다고 했으면 t에도 유리수라는 조건이 필요하다. 그림은 해의 위치를 보여 주지만 허용되는 수의 범위를 자동으로 표시해 주지는 않는다.

양의 유리수 해는 무한히 많다. 0과 6 사이에서 유리수 t를 계속 고를 수 있기 때문이다. 하지만 두 수가 정수라는 조건을 붙이면 t는 1부터 5까지 다섯 경우로 줄어든다.



x + y = 6을 나타낸 현대 좌표 도해

t	x	y	합
1/2	1/2	11/2	6
7/3	7/3	11/3	6
7	7	−1	6

탐구

t = 7을 넣으면 방정식의 해가 될까? 양의 해도 될까?

풀이와 확인

x = 7과 y = −1이므로 합은 6이다. 방정식의 해는 맞지만 y가 음수이므로 양의 해는 아니다. 원래 식과 부가 조건을 따로 확인해야 한다.

제곱의 차를 곱으로 바꾸기

식의 모양을 바꾸면 정수 조건을 나누어 볼 수 있다.

$x^2 - y^2 = 45$에서 왼쪽을 $(x - y)(x + y)$로 묶을 수 있다. 양의 정수 x와 y를 찾는다면 45의 양의 약수 쌍을 살펴본다. 1과 45를 택하면 $x - y = 1$과 $x + y = 45$이므로 $x = 23$과 $y = 22$가 된다.

3과 15를 택하면 x = 9와 y = 6이며 5와 9를 택하면 x = 7과 y = 2다. 각 약수 쌍은 모두 홀수끼리이므로 합과 차를 반으로 나누었을 때 정수가 된다. 두 인수를 바꾸면 y의 부호가 바뀔 수 있으므로 양의 y라는 조건도 함께 지킨다.

검산은 49 − 4 = 45처럼 원래의 제곱식에서 한다. 인수의 곱이 45라는 사실만 확인해도 대수 변형이 정확하면 충분하지만 원식 검산은 계산 실수를 찾는 데 도움이 된다. 이 예는 역사 원문의 복제가 아닌 현대 학습 문제다.

약수 쌍의 두 값이 같은 짝홀성을 가져야 x와 y가 정수가 된다. 45의 쌍은 모두 홀수지만 다른 수에서는 짝수와 홀수가 섞일 수 있다. 인수분해 뒤에도 정수 조건을 다시 살핀다.

$$x^2 - y^2 = 45$$
$$(x - y)(x + y) = 45$$
$$5 \times 9 = 45$$
$$x = 7\ y = 2$$

약수 쌍으로 바꿔 살펴보는 정수 해

x − y	x + y	x	y
1	45	23	22
3	15	9	6
5	9	7	2

탐구

위의 양의 정수 해 중 x가 가장 작은 것은 무엇일까?

풀이와 확인

양의 약수 쌍을 모두 살펴보면 x = 7과 y = 2가 가장 작은 x를 준다. 45의 양의 약수 쌍은 1과 45 및 3과 15 및 5와 9이므로 빠진 경우가 없다.

히파티아와 남아 있는 기록

전승과 주석의 기여를 말하되 확인되지 않은 발견을 덧붙이지 않는다.

히파티아를 소개할 때에는 수학과 철학을 가르친 활동과 저술 전승에 관한 기록을 함께 살펴본다. 다만 전해지는 자료가 제한적이므로 특정 정리를 처음 발견했다거나 널리 알려진 도구를 혼자 발명했다고 쉽게 단정하지 않는다. 유명한 인물일수록 후대의 이야기와 확인 가능한 기록을 구별할 필요가 있다.

주석은 기존 문장을 그대로 되풀이하는 작업만은 아니다. 계산 사이의 빠진 이유를 설명하고 독자가 어려워하는 기호를 풀어 쓰며 오류가 의심되는 부분을 비교할 수 있다. 수학 지식은 새로운 명제를 만드는 일뿐 아니라 배우고 검토하고 전하는 일로도 이어진다.

학습 활동에서는 짧은 풀이에 주석을 붙여 보자. $2x = 26$에서 $x = 13$으로 넘어가는 줄에 양변을 2로 나눈다는 이유를 적는다. 이런 활동은 히파티아의 실제 주석을 재현하는 것이 아니라 주석이라는 지적 작업의 역할을 이해하기 위한 예다.

전승에 관한 설명은 남은 저술과 다른 저자의 언급을 구분해 적는다. 누군가가 활동을 기록했다는 사실과 그 원고가 오늘까지 남았다는 사실은 같지 않다. 자료의 형태를 제목 옆에 명시한다.

활동	의미
교육	개념과 방법을 배우게 함
주석	풀이의 이유를 드러냄
비교	판본과 계산을 검토함

히파티아와 남아 있는 기록의 핵심 관계를 정리한 표

> **탐구**
>
> 자료가 제한된 인물의 업적을 설명할 때 어떤 문장을 피해야 할까?

풀이와 확인

확인 근거 없이 모든 발견을 혼자 이루었다는 식으로 단정하는 문장을 피한다. 남은 기록이 뒷받침하는 활동을 구체적으로 적고 저술의 귀속이나 내용이 불확실한 부분은 따로 밝힌다.

[HYPATIA] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Hypatia

틀린 풀이에 주석 달기

나누기 전에 나누는 값이 0인지 확인한다.

$x^2 = x$를 보고 양변을 x로 나누어 $x = 1$만 얻었다면 해 하나를 잃어버렸다. x가 0일 가능성을 확인하지 않은 채 나누었기 때문이다. 원식에 0을 넣으면 $0 = 0$이므로 0도 해다. 나누는 동작에는 나누는 값이 0이 아니라는 조건이 붙는다.

모든 해를 찾으려면 $x^2 - x = 0$을 $x(x - 1) = 0$으로 고친다. 두 수의 곱이 0이면 적어도 하나가 0이므로 $x = 0$ 또는 $x = 1$이다. 이 방식은 어떤 해도 나눗셈으로 제외하지 않는다.

주석에는 틀렸다고만 적기보다 잘못된 전제가 들어간 줄을 가리킨다. 양변을 x로 나누는 줄 옆에 $x \neq 0$일 때만 가능하다고 적으면 오류의 위치가 분명해진다. 오류를 설명하는 문장은 다음 문제에서도 사용할 수 있는 조건을 남겨야 한다.

나누기뿐 아니라 제곱근을 취할 때도 해가 달라질 수 있다. $x^2 = 9$에서 $x = 3$만 적으면 -3을 놓친다. 양수라는 조건이 없는 한 두 부호를 모두 검산해야 한다.

풀이 줄	점검할 조건
$x^2 = x$	출발 식
x로 나누기	$x \neq 0$ 필요
$x(x-1) = 0$	해를 보존하는 변형
$x = 0$ 또는 1	원식에 대입해 검산

틀린 풀이에 주석 달기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

$x(x-4) = 0$의 해를 두 개 모두 설명해 보자.

풀이와 확인

곱이 0이므로 $x = 0$이거나 $x - 4 = 0$이다. 따라서 해는 0과 4다. 양변을 x로 바로 나누면 0이라는 해를 놓치므로 인수의 곱이 0이라는 성질을 사용한다.

해의 목록과 완전성

답을 찾았다는 말과 모든 답을 찾았다는 말은 다르다.

$2x + 3y = 12$의 음이 아닌 정수 해를 구하자. y가 0부터 4까지 가능하므로 하나씩 대입한다. y가 0이면 x는 6이고 y가 2이면 x는 3이며 y가 4이면 x는 0이다. y가 1이나 3이면 x가 정수가 되지 않는다.

세 해를 찾았다는 것만으로는 목록이 완전하다는 설명이 부족하다. y가 음이 아니고 $3y \leq 12$이므로 $0 \leq y \leq 4$라는 범위를 먼저 정하면 이 다섯 경우를 모두 검사했다는 근거가 된다. 경우 나누기의 시작과 끝을 밝히는 것이 완전성의 핵심이다.

같은 문제를 짝홀로 줄일 수도 있다. 2x와 12가 짝수이므로 3y도 짝수여야 하고 따라서 y가 짝수다. 범위 안의 짝수 0과 2와 4만 보면 된다. 작은 사례를 빠짐없이 조사하는 방법과 수의 구조로 경우를 줄이는 방법을 비교해 보자.

해의 순서쌍에서 x와 y의 역할도 유지한다. x = 6과 y = 0을 바꾸면 2x + 3y의 값이 달라진다. 계수가 서로 다르므로 두 수를 뒤집은 것이 자동으로 또 다른 해가 되지는 않는다.

y	x = (12 − 3y)/2	정수 해
0	6	가능
1	4.5	불가능
2	3	가능
3	1.5	불가능
4	0	가능

탐구

2x + 3y = 10의 음이 아닌 정수 해는 무엇일까?

풀이와 확인

y의 범위는 0부터 3이고 y는 짝수여야 한다. y = 0이면 x = 5이며 y = 2이면 x = 2다. 따라서 두 해만 존재한다. 범위와 짝홀 조건을 함께 사용했으므로 빠진 경우가 없다.

아프리카관 / 70

이샹고의 자국과 해석의 경계

뼈에 남은 자국을 보는 방법

관찰할 수 있는 배열과 제작 목적을 따로 기록한다.

이샹고의 뼈 유물은 오늘날 콩고민주공화국에 있는 유적에서 발견되었다. 표면의 자국이 여러 묶음으로 보인다는 점 때문에 수량 기록에 관한 논의가 이어졌다. 그러나 어떤 계산을 위해 만든 물건인지에는 여러 해석이 있다. 유물의 중요성을 설명하려고 하나의 가설을 확정된 사실로 바꿀 필요는 없다.

관찰표를 만들 때에는 사진의 어느 면을 보았는지부터 적는다. 그다음 자국 사이의 간격과 묶음의 경계를 기록한다. 손상 때문에 개수를 확신하기 어려운 곳은 물음표로 남긴다. 깨끗하게 정리된 도식은 읽기 쉽지만 실제 표면의 모호함을 감출 수 있다.

이 장에서는 실제 유물의 숫자를 다시 판정하기보다 학습용 자국 배열을 사용한다. 자국을 세는 과정에서 묶음 기준이 결과에 미치는 영향을 살핀다. 현대 독자가 발견한 규칙과 옛 제작자가 의도한 규칙을 구분하는 것이 탐구의 중심이다.

사진의 명암을 조정하면 자국을 더 잘 볼 수 있지만 새로운 흔적이 생긴 듯 보일 수도 있다. 가공 전 사진과 가공 방법을 함께 남겨야 다른 사람이 관찰을 다시 확인할 수 있다.



확실한 8개 + 불확실한 1자리

관찰 범위: 8개 또는 9개

실제 이샹고 유물의 배열이 아닌 판독 불확실성의 학습용 도식

탐구

사진에서 흐릿한 자국 하나를 확신할 수 없을 때 어떻게 기록할까?

풀이와 확인

확정한 개수와 가능한 개수의 범위를 함께 적는다. 예를 들어 분명한 자국이 8개이고 한 자리가 불확실하면 8개 또는 9개라고 기록한다. 추측으로 빈칸을 채우지 않는다.

[ISHANGO] 벨기에 자연과학연구소. The Ishango Bone

같은 배열을 다르게 묶기

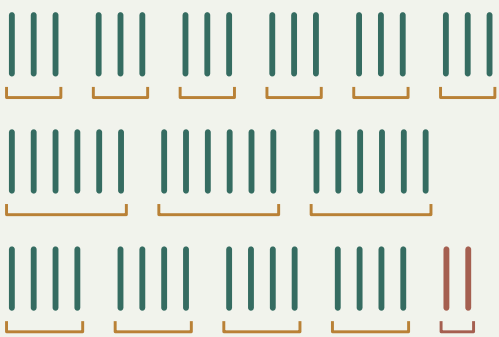
묶음의 경계는 계산 결과의 의미를 바꾼다.

학습용 자국 열여덟 개를 한 줄로 놓아 보자. 세 개씩 묶으면 여섯 묶음이고 여섯 개씩 묶으면 세 묶음이다. 전체 개수는 같아도 묶음 수와 묶음의 크기가 바뀐다. 따라서 묶음의 존재를 알아보았다는 사실만으로 어떤 진법을 사용했다고 결론 내릴 수 없다.

배열에 큰 간격이 있다면 묶음의 근거로 삼을 수 있다. 다만 간격이 제작 과정의 차이나 표면의 손상 때문일 가능성도 살펴야 한다. 규칙을 먼저 정하고 그 규칙에 맞도록 경계를 옮기면 자신이 넣은 가정을 자료에서 발견한 것처럼 착각하게 된다.

계산 활동에서는 같은 열여덟 개를 2×9와 3×6으로 나타낸다. 두 배열을 비교하면 약수라는 개념을 도입할 수 있다. 이는 유물을 계기로 만든 오늘의 수학 수업이며 고대인이 이 식을 적었다는 뜻이 아니다.

전체가 18개일 때 네 개씩 묶으면 네 묶음과 두 개가 남는다. 남은 두 개도 기록해야 전체 수량이 보존된다. 남김없는 묶음만 찾는 질문과 일반적인 나눗셈 문제는 조건이 다르다.



같은 열여덟 개의 자국을 3개씩, 6개씩, 4개씩 묶은 결과

탐구

열여덟 개를 남김없이 같은 크기로 묶을 때 가능한 묶음 크기를 모두 찾아보자.

풀이와 확인

양의 약수인 1과 2와 3과 6과 9와 18이 가능하다. 각 크기로 나눈 나머지가 0인지 검사하면 목록을 확인할 수 있다.

소수처럼 보이는 목록

선택한 수의 범위를 먼저 정해야 규칙을 평가할 수 있다.

11과 13과 17과 19는 모두 소수다. 이 목록만 보면 소수를 의도적으로 고른 것처럼 느껴질 수 있다. 그러나 해석하려는 자료에서 왜 이 네 수를 한 묶음으로 선택했는지 설명해야 한다. 다른 줄이나 다른 구분법을 제외한 이유가 없으면 우연한 규칙을 과장할 위험이 있다.

소수의 뜻을 확인하는 현대 활동에서는 2 이상인 자연수 중 약수가 1과 자신뿐인 수를 찾는다. 15는 3 × 5이므로 소수가 아니다. 17은 2와 3과 4로 나누어떨어지지 않으며 그 제곱근보다 큰 약수는 작은 약수와 짝을 이루므로 더 검사할 필요가 없다.

유물의 자국 수가 소수와 같다는 관찰은 탐구의 시작이 될 수 있다. 그러나 소수 개념을 이해했다는 역사적 주장은 추가 맥락을 요구한다. 오늘의 분류 기준을 적용한 결과와 과거의 의도를 하나로 합치지 않는다.

1은 소수가 아니다. 약수가 1 하나뿐이므로 서로 다른 약수 두 개를 가진다는 정의에 맞지 않는다. 작은 수의 분류를 정확히 해 두면 소수 목록을 이용한 해석에서도 기준이 흔들리지 않는다.

수	검사	판정
15	3 × 5	합성수
17	1과 17만 약수	소수
21	3 × 7	합성수

소수처럼 보이는 목록의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

21이 소수가 아니라는 사실을 가장 짧게 보이려면 무엇을 제시하면 될까?

풀이와 확인

21 = 3 × 7을 제시하면 된다. 1과 21 이외의 약수가 있다는 한 사례만으로 소수의 정의를 만족하지 못함을 알 수 있다.

달력 가설과 주기의 증거

합계 하나가 주기 전체를 입증하지는 않는다.

어떤 자국의 합이 달의 한 주기와 비슷하다고 해서 곧바로 달력이라고 부를 수는 없다. 관측의 시작과 끝을 어떻게 정했는지와 비슷한 묶음이 반복되는지가 중요하다. 여러 목적의 기록도 우연히 비슷한 합을 만들 수 있다.

학습용으로 29일과 30일을 번갈아 쓰는 두 달을 만들면 합은 59일이고 평균은 29.5일이다. 이 모형은 실제 천문 현상의 변화를 모두 표현하지 않는다. 특히 두 달의 평균이 맞는다고 매달의 관측 오차가 사라지는 것은 아니다.

표에는 첫 달의 값과 둘째 달의 값을 따로 남긴다. 평균만 적으면 변동을 잃어버리기 때문이다. 고대 기록을 해석할 때도 합계와 세부 배열을 모두 확인해야 한다. 유리한 부분만 남긴 설명은 다른 가능한 목적을 검토하기 어렵게 한다.

평균 주기를 사용해 먼 시점을 예측하면 작은 차이가 누적될 수 있다. 한 주기마다 0.1일씩 차이가 나면 열 주기 뒤에는 1일이다. 평균이 비슷하다는 관찰과 정확한 달력 운영 능력은 다른 주장이다.

구분	일수
29일인 달 6개	174
30일인 달 6개	180
합계	354

달력 가설과 주기의 증거의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

29일과 30일을 여섯 번씩 사용한 모형의 총일수와 평균은 얼마일까?

풀이와 확인

총일수는 $29 \times 6 + 30 \times 6 = 354$일이다. 열두 달로 나누면 평균은 29.5일이다. 이 계산은 가정한 모형의 결과이며 실제 달력을 확인한 증거는 아니다.

두 관찰자의 기록 비교

불일치를 지우기 전에 그 위치를 찾아본다.

같은 사진을 두 사람이 읽었는데 첫 사람은 묶음마다 4와 6과 8을 기록하고 둘째 사람은 4와 7과 8을 기록했다고 하자. 합계는 18과 19로 다르다. 평균인 18.5를 유물의 자국 수라고 쓰기보다 가운데 묶음의 판독 차이를 찾아야 한다.

불일치가 있는 부분을 확대하고 조명 방향이 다른 사진을 비교한다. 여전히 판단하기 어렵다면 두 판독을 함께 보존한다. 수량이 정수인 대상에 평균을 적용했다고 해서 불확실성이 해결되는 것은 아니다. 평균은 관찰자 차이를 요약할 수 있지만 실제 개수를 대신 확정하지 못한다.

협업 기록에는 누가 어떤 자료를 보고 셌는지도 적는다. 같은 도식을 복사해 본 두 사람의 일치는 독립적인 관찰 두 개와 다르다. 기록 과정의 독립성과 자료의 선명도가 결론의 신뢰도를 좌우한다.

관찰자가 합의해 하나의 수를 고르더라도 원래의 두 기록을 지우지 않는다. 합의의 근거가 새 사진인지 단순한 타협인지 적어 두어야 한다. 최종값만 남기면 판독 과정의 불확실성을 되짚기 어렵다.

묶음	관찰자 A	관찰자 B
첫째	4	4
둘째	6	7
셋째	8	8

두 관찰자의 기록 비교의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

두 기록의 합계만 비교하는 것보다 묶음별 값을 비교하는 것이 유리한 이유는 무엇일까?

풀이와 확인

차이가 발생한 위치를 바로 찾을 수 있기 때문이다. 합계 하나로 줄이면 어느 묶음에서 판독이 달랐는지 알 수 없어 원자료를 다시 살피기 어렵다.

규칙을 찾기 전에 예측하기

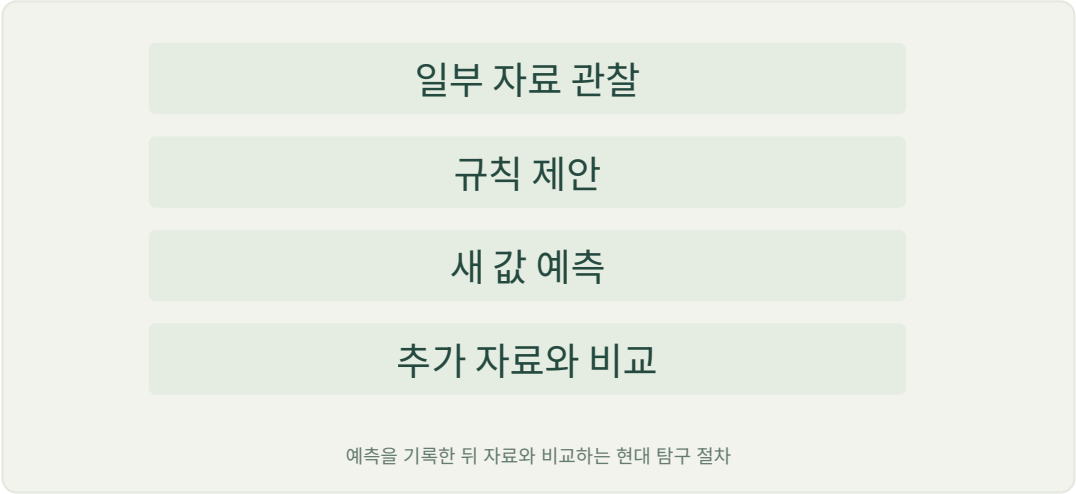
이미 본 배열에 맞춘 설명과 새 자료를 맞힌 설명을 구분한다.

2와 4와 6이라는 배열 뒤에는 8이 올 것 같지만 다른 규칙도 만들 수 있다. 처음 세 항이 같고 넷째 항만 9인 규칙도 수학적으로 가능하다. 짧은 목록을 본 뒤 만든 설명은 유일하지 않다는 점을 기억해야 한다.

학습 실험에서는 앞부분만 공개하고 다음 값을 먼저 기록하게 한다. 뒤의 값을 본 뒤 규칙을 바꾸면 수정 이유도 남긴다. 이런 절차는 예측과 사후 설명을 구별하게 한다. 자료를 본 뒤 규칙을 바꾸는 일이 항상 잘못은 아니지만 그 변경을 숨겨서는 안 된다.

유물에서는 새로운 독립 자료가 충분하지 않을 수 있다. 그럴 때에는 여러 해석의 가능성을 그대로 제시하는 것이 정확하다. 하나의 멋진 이야기로 모든 빈틈을 채우는 것보다 어떤 자료가 추가되면 해석을 구별할 수 있을지 묻는 편이 생산적이다.

다음 값을 맞혔다고 규칙이 유일해지는 것은 아니다. 같은 예측을 내는 다른 규칙도 있을 수 있다. 여러 규칙이 서로 다른 결과를 내는 새로운 조건을 찾으면 가설을 구별하는 실험을 설계할 수 있다.



예측을 기록한 뒤 자료와 비교하는 현대 탐구 절차

탐구

2와 4와 6 다음이 반드시 8이라고 증명할 수 있을까?

풀이와 확인

주어진 세 수만으로는 증명할 수 없다. 연속한 짝수라는 규칙이 명시되면 8이지만 다른 생성 규칙도 같은 앞부분을 만들 수 있다.

손상된 자료의 범위 계산

정확한 하나의 값 대신 가능한 구간을 제시할 수 있다.

세 묶음 중 첫째는 5개이고 둘째는 7개다. 셋째는 손상 때문에 3개부터 5개까지 가능하다고 하자. 전체는 최소 15개이며 최대 17개다. 확실한 두 묶음의 합 12에 불확실한 묶음의 양 끝값을 더하면 범위를 구할 수 있다.

범위를 적으면 정보가 부족하다는 사실을 계산 안에 남길 수 있다. 가운데 값인 16만 제시하면 원자료가 정확한 것처럼 보인다. 반대로 아무것도 알 수 없다고 쓰면 확인된 12개와 나머지 범위라는 유용한 정보를 잃는다.

두 손상 구간을 더할 때도 각 구간의 최소와 최대를 살펴본다. 다만 서로 연관된 제약이 있다면 끝값을 마음대로 결합할 수 없는 경우가 있다. 계산 전에 각 불확실성이 독립적으로 가능한지 확인하는 습관이 필요하다.

손상된 두 구간이 각각 2개에서 3개와 4개에서 6개라면 합은 6개에서 9개다. 최소끼리와 최대끼리를 더해 범위를 얻는다. 이는 두 범위의 조합이 모두 가능하다는 가정에서 성립한다.

경우	계산	합계
최소	5 + 7 + 3	15
최대	5 + 7 + 5	17

손상된 자료의 범위 계산의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

확실한 자국이 20개이고 흐릿한 부분에 2개부터 4개가 더 있다면 전체 범위는?

풀이와 확인

22개부터 24개다. 최소와 최대를 함께 기록하면 23이라는 중앙값만 쓰는 것보다 자료의 상태를 정확하게 전한다.

작은 유물의 전시 설명 만들기

확실한 관찰 하나와 열린 질문 하나를 함께 남긴다.

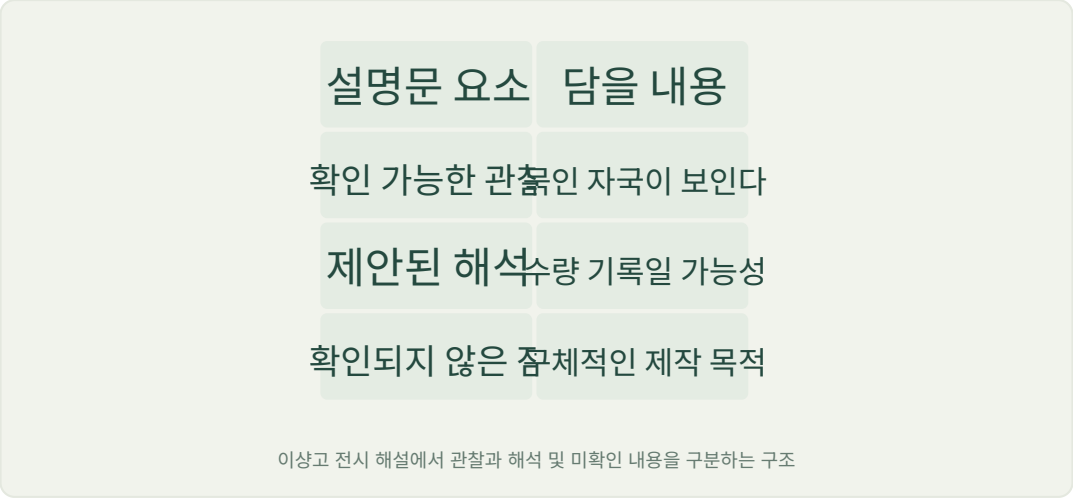
전시 설명은 유물을 대단하게 보이게 하는 문구의 경쟁이 아니다. 독자가 실제로 볼 수 있는 특징을 짚어 주고 그 특징이 어떤 질문을 낳는지 알려 주는 글이다. 이샹고의 경우 묶인 자국이라는 관찰과 기능에 대한 다양한 해석을 함께 적을 수 있다.

설명문의 첫 문장에는 유물과 발견 장소를 적는다. 둘째 문장에는 자국의 배열이라는 관찰을 적는다. 셋째 문장에는 계산 도구나 다른 기록이라는 해석이 논의되지만 목적이 확정되지 않았다고 밝힌다. 세 문장의 역할이 다르면 짧은 글도 충분한 정보를 담을 수 있다.

마지막으로 도해에 학습용 재구성이라는 표시가 있는지 확인한다. 실제 사진을 사용하지 않았는데 정밀 복제처럼 보이게 하면 독자는 그림의 세부를 증거로 오해할 수 있다. 좋은 전시물은 호기심과 근거의 경계를 함께 지킨다.

설명문과 그림에 같은 확실성 수준을 유지한다. 문장에서는 가설이라고 썼는데 그림 제목에 완성된 달력이라고 붙이면 메시지가 충돌한다. 본문과 캡션 및 제목을 함께 검토해야 한다.

해설의 주어와 숫자의 단위도 점검한다. 확인된 공동체를 대륙 전체로 넓혀 쓰지 않으며 자국 수와 묶음 수를 구별한다. 같은 그림에 붙은 제목과 본문이 서로 다른 확실성을 주장하지 않는지도 함께 읽는다.



이샹고 전시 해설에서 관찰과 해석 및 미확인 내용을 구분하는 구조

탐구

이 유물은 최초의 소수표다라는 제목을 어떤 방향으로 고치면 좋을까?

풀이와 확인

이샹고의 자국과 수량 기록의 가능성처럼 관찰과 질문을 드러내는 제목으로 바꿀 수 있다. 소수표라는 해석을 소개하더라도 확정된 제작 목적과 구분한다.

[ISHANGO] 벨기에 자연과학연구소. The Ishango Bone

아프리카관 / 71

팀북투의 필사본과 계산

사막의 도시에서 읽던 책

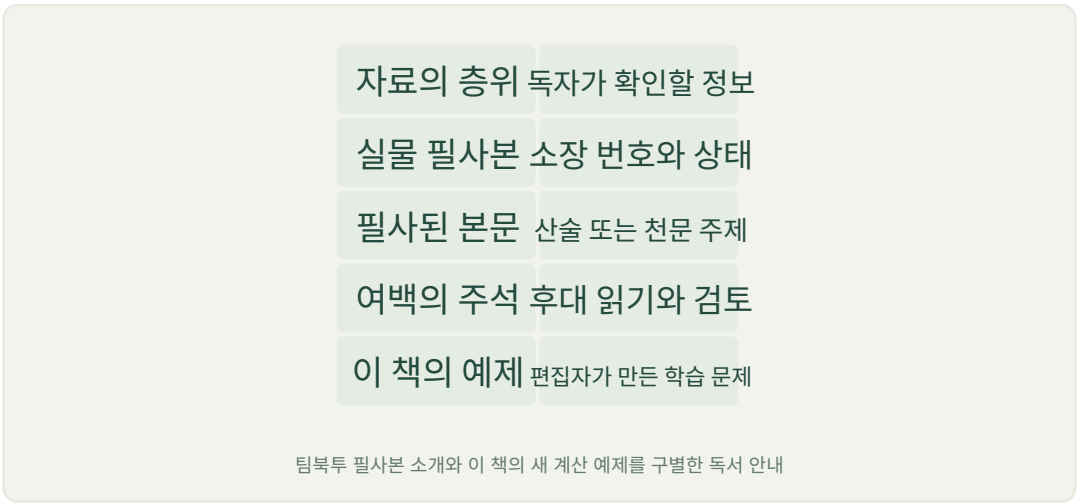
산술과 천문학도 필사본의 세계에 들어 있었다.

미국 의회도서관의 팀북투 필사본 전시는 산술과 천문학을 포함한 여러 분야의 문헌을 소개한다. 이 자료는 서아프리카의 지식 활동을 구전만으로 설명할 수 없음을 보여 준다. 그러나 문헌이 남았다는 사실 때문에 구전과 실습의 역할을 반대로 지울 필요도 없다.

필사본은 내용뿐 아니라 배우고 고쳐 읽은 흔적을 보존한다. 본문과 여백의 주석을 구분하면 계산 절차를 설명한 사람과 나중에 검토한 사람의 목소리가 겹쳐 있음을 알 수 있다. 한 권을 단일한 순간에 완성된 고정물로만 보면 전승의 과정을 놓치기 쉽다.

이 장의 산술 문제는 전시된 문헌의 원문 번역이 아니다. 분수와 비례와 천문 계산이라는 주제에서 출발해 만든 현대 학습 예다. 실제 필사본의 명칭과 소장 정보를 따로 확인할 수 있도록 출처를 함께 제공한다.

소장처가 공개한 자료 번호는 제목과 함께 기록한다. 비슷한 제목의 산술 문헌을 구별할 수 있고 나중에 이미지 주소가 바뀌어도 자료를 다시 찾는 데 도움이 된다. 제목만으로 동일성을 판단하지 않는다.



팀북투 필사본 소개와 이 책의 새 계산 예제를 구별한 독서 안내

탐구

산술 필사본을 소개하면서 계산 문제를 새로 만들었다면 어떤 표시가 필요할까?

풀이와 확인

문헌의 주제에서 착안한 현대 학습 문제라고 밝혀야 한다. 원문에 실제로 실린 문제와 편집자가 만든 문제를 독자가 구별할 수 있어야 한다.

[LOC] 미국 의회도서관. Ancient Manuscripts from the Desert Libraries of Timbuktu

비례표에서 단가 찾기

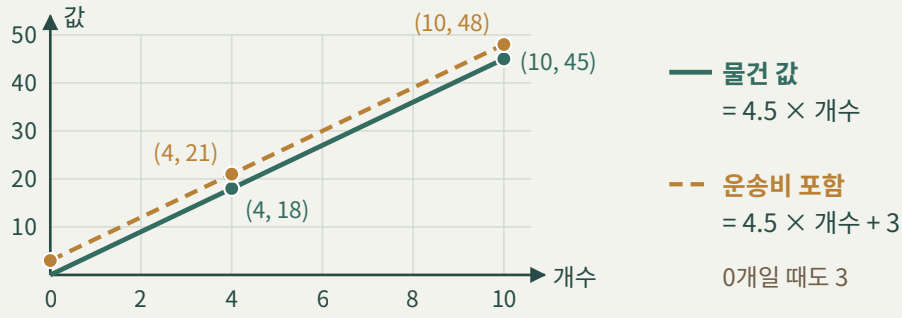
전체 값과 개수를 같은 단위로 맞추어 비교한다.

학습용 거래에서 같은 물건 4개의 값이 18단위라고 하자. 한 개의 값은 18 ÷ 4 = 4.5단위다. 10개의 값은 4.5 × 10 = 45단위가 된다. 이 계산은 물건 하나의 값이 수량에 따라 바뀌지 않는다는 가정을 포함한다.

표의 한 열에는 개수를 적고 다른 열에는 전체 값을 적는다. 값의 차가 일정한지만 보지 말고 전체 값을 개수로 나눈 비가 일정한지 확인한다. 수량 간격이 일정하지 않으면 차이만으로 정비례를 판단하기 어렵다.

운송비가 거래마다 3단위씩 따로 붙는다면 식은 달라진다. 물건의 값에 고정비를 더한 전체 지불액은 개수에 단순 비례하지 않는다. 실제 계산을 모형으로 바꿀 때에는 무엇을 포함한 금액인지 먼저 정해야 한다.

개수가 0일 때 물건 값은 0이지만 운송비가 항상 부과되는 모형에서는 지불액이 3이다. 이 차이는 정비례와 고정비가 있는 관계를 구별하는 방법이다. 실제 주문이 없는 경우에도 비용이 드는지는 따로 정해야 한다.



원점을 지나는 정비례 직선과 운송비 3만큼 올라간 직선

탐구

한 개 값이 4.5단위이고 고정 운송비가 3단위라면 10개의 지불액은?

풀이와 확인

물건 값 45단위에 운송비 3단위를 더하여 48단위다. 4개의 전체 지불액에 단순히 10/4를 곱하면 고정비까지 비례시켜 잘못 계산하게 된다.

몫을 분수로 나누기

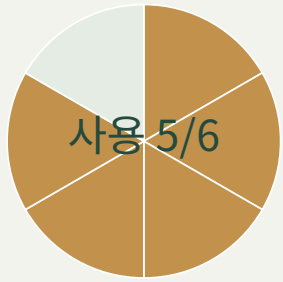
분모를 같게 만들면 합계와 남는 양을 확인하기 쉽다.

가상의 공동 기금 120단위 중 절반을 재료에 쓰고 3분의 1을 운반에 쓴다고 하자. 두 비율의 합은 1/2 + 1/3 = 5/6이다. 따라서 남는 비율은 1/6이며 실제 남는 양은 20단위다. 이는 역사적 상속 규칙을 재현한 문제가 아니라 분수 계산 연습이다.

공통분모 6을 사용하면 전체를 같은 크기의 여섯 몫으로 나누어 볼 수 있다. 재료는 세 몫이고 운반은 두 몫이다. 분모를 더하지 않는 이유는 각 조각의 크기를 같게 맞춘 뒤 조각 수를 더해야 하기 때문이다.

각 항목의 양을 따로 계산해도 검산할 수 있다. 60과 40과 20의 합은 120이다. 비율의 합과 실제 양의 합을 모두 확인하면 단위나 분모를 잘못 처리한 오류를 발견하기 쉽다.

전체가 무엇인지 바꾸면 같은 분수의 양도 바뀐다. 120의 절반은 60이고 남은 60의 절반은 30이다. 전체의 절반과 나머지의 절반을 같은 몫으로 읽지 않도록 기준량을 문장마다 확인한다.



동일한 크기 여섯 몫 중 다섯 몫을 사용한 모형

탐구

180단위를 같은 비율로 나누면 남는 양은 얼마일까?

풀이와 확인

남는 비율은 그대로 1/6이므로 180 ÷ 6 = 30단위다. 재료 90과 운반 60을 더한 뒤 전체에서 빼도 30이 나온다.

필사 오류를 검산으로 찾기

답의 크기를 어림하면 자리 하나의 누락을 알아챌 수 있다.

24 × 15의 답을 36으로 베껴 썼다면 일의 자리만 보아서는 오류를 알아채기 어렵다. 그러나 24 × 10이 240이므로 답은 240보다 커야 한다. 대략적인 크기 비교만으로도 36은 불가능하다는 사실을 알 수 있다.

정확히 계산하면 24 × (10 + 5) = 240 + 120 = 360이다. 베껴 쓴 값에서 0 하나가 빠졌을 가능성을 생각할 수 있지만 계산 오류인지 필사 오류인지는 원자료 비교가 더 필요하다. 틀린 결과를 찾는 일과 오류의 원인을 밝히는 일은 다르다.

검산은 여러 방향으로 할 수 있다. 곱셈 결과를 15로 나누면 24가 되는지 확인하고 다른 판본의 숫자도 살펴본다. 한 가지 검사가 통과했다고 모든 오류가 사라지는 것은 아니므로 검산의 목적에 맞는 방법을 고른다.

나눗셈 검산에서 360 ÷ 15가 어렵다면 360 ÷ 3 ÷ 5로 나눌 수 있다. 15 = 3 × 5라는 관계를 사용한 것이다. 서로 다른 분해로 같은 값을 얻으면 자리 계산을 한 번 더 점검할 수 있다.

$$24 \times 15 = 24 \times (10 + 5)$$
$$240 + 120 = 360$$
$$360 / 15 = 24$$

곱셈을 분해하고 나눗셈으로 되돌리는 검산

탐구

48 × 21의 답이 1008인지 어림과 분해로 확인해 보자.

풀이와 확인

48 × 20 = 960이므로 답은 960보다 조금 커야 한다. 여기에 48을 더하면 1008이므로 계산이 맞다. 크기와 정확한 분해 결과가 서로 일치한다.

천문표의 중간값 읽기

두 행 사이를 채우려면 변화에 대한 가정을 적어야 한다.

학습용 천문표에 시각 2의 값이 14이고 시각 4의 값이 22로 적혀 있다고 하자. 시각 3의 값을 두 값의 평균인 18로 잡는 것은 선형 보간이다. 두 점 사이에서 값이 일정한 속도로 변한다고 가정한 셈이다.

시각이 한 단위 증가할 때 값은 4씩 늘어난다. 따라서 시각 2.5의 값은 14 + 4 × 0.5 = 16으로 추정한다. 중간값을 채울 수 있다고 해서 실제 현상이 그 구간에서 정확히 직선으로 변했다는 뜻은 아니다.

표의 간격이 넓거나 변화가 빠른 구간에서는 보간 오차가 커질 수 있다. 계산값 옆에 관측값인지 보간값인지 표시하면 자료의 성격을 유지할 수 있다. 매끈한 표를 만드는 편의가 원자료의 정확도를 높여 주지는 않는다.

표의 두 끝값 바깥으로 같은 직선을 늘리는 것은 보간이 아니라 외삽이다. 시각 6의 값을 추정하면 관측 구간을 벗어나므로 변화가 계속 일정하다는 더 강한 가정이 필요하다. 두 작업의 이름과 범위를 구별한다.



실제 천문 수치를 옮기지 않은 보간 학습용 표

탐구

같은 가정에서 시각 3.5의 추정값은 얼마일까?

풀이와 확인

시각 2보다 1.5단위 늦으므로 14 + 4 × 1.5 = 20이다. 이 값은 표의 두 관측값 사이를 선형으로 연결한 추정값이다.

누락된 끝부분을 다루는 태도

본문이 끊겼다고 계산의 결말을 임의로 채우지 않는다.

의회도서관에 소개된 천문 계산 필사본 중에는 마지막 부분이 남아 있지 않은 자료가 있다. 문헌이 불완전하다는 정보도 자료 설명의 일부다. 남아 있는 부분에서 저자의 전체 결론을 추정할 때에는 그 추정의 범위를 밝혀야 한다.

학습용 풀이가 3x + 7 = 22 다음 줄에서 끊겼다면 현대 독자는 x = 5를 구할 수 있다. 그러나 그 풀이를 원저자가 같은 방식으로 마무리했다고 단정할 수는 없다. 수학적으로 가능한 복원과 문헌적으로 확인된 문장은 구별된다.

복원판을 만들 때에는 원문과 보충문을 다른 서체나 테두리로 표시할 수 있다. 또한 보충의 근거를 설명해 다음 독자가 검토하게 한다. 빈 부분을 매끈하게 채우는 것보다 어떤 부분이 남았는지를 정확하게 전달하는 편이 연구에 도움이 된다.

다른 사본에 결말이 남아 있다면 복원의 근거가 늘어난다. 그래도 두 사본이 같은 계통인지와 후기 수정이 있는지를 비교해야 한다. 비슷한 문장을 찾았다는 사실만으로 빠진 부분의 원형을 확정하지 않는다.

남은 식: 3x + 7 = 22
현대적 보충: 3x = 15
따라서 x = 5
검산: 3 × 5 + 7 = 22

끊긴 학습용 풀이의 보충 예. 마지막 세 줄은 원문 확인이 아닌 현대 계산이다.

> **탐구**
> 끊긴 풀이를 완성한 답안에 어떤 설명을 덧붙여야 할까?

풀이와 확인

남아 있는 식을 바탕으로 편집자가 계산한 보충 풀이임을 밝힌다. 원문이 실제로 같은 문장이나 방법을 사용했는지는 확인할 수 없다고 구분한다.

[LOCASTRO] 미국 의회도서관. On the Calculation of Numbers in the Science of Astronomy

서가를 목록으로 만들기

내용과 물리적 자료와 디지털 파일을 연결한다.

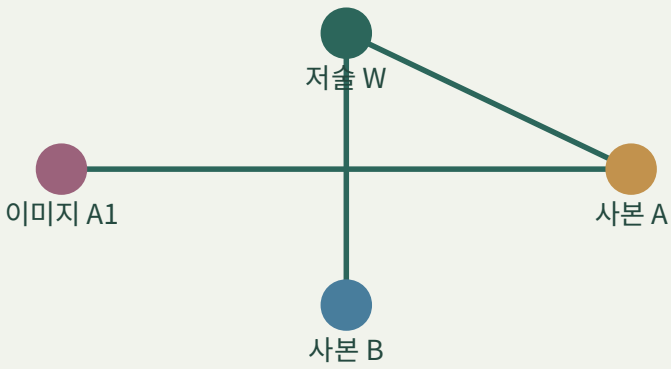
같은 저술을 담은 사본 두 권이 있다고 하자. 내용 제목은 같지만 종이 상태와 필사 시기와 소장 번호는 다를 수 있다. 디지털 목록에서 제목만 남기면 두 자료를 하나로 합쳐 버릴 위험이 있다. 각각의 사본에 별도 식별자를 부여해야 한다.

가상의 자료 A와 B를 같은 저술 항목 W에 연결한다. A에서 촬영한 이미지 파일은 A1과 A2로 기록한다. 이런 연결을 만들면 독자가 어느 사본의 어느 면을 보았는지 추적할 수 있다. 파일 이름이 바뀌더라도 자료 식별자는 안정적으로 유지하는 편이 좋다.

목록 작성도 수학적 분류 문제와 닿아 있다. 같은 저술이라는 관계와 같은 실물이라는 관계는 다른 동치 기준이다. 무엇을 같은 대상으로 묶었는지 명시하면 중복을 없애다가 중요한 차이까지 지우는 일을 막을 수 있다.

디지털 파일의 순서를 바꾸어도 사본의 원래 면 순서는 보존해야 한다. 화면에서 보기 편한 배열과 실물의 순서를 따로 기록하면 분리된 낱장이 어디에 놓였는지에 관한 논의도 남길 수 있다.

목록의 링크는 해설인지 원문 이미지인지 구별해 적고 실제로 열리는지 확인한다. 소개 문장과 독자가 새로 계산한 예도 분리한다. 단위의 현대 환산값을 모르면 같은 단위끼리의 비율까지만 계산하며 확인하지 못한 환산계수를 추가하지 않는다.



같은 저술과 서로 다른 실물 자료를 구분한 목록 모형

탐구

제목이 같다는 이유로 두 필사본의 이미지를 한 폴더에 뒤섞으면 어떤 문제가 생길까?

풀이와 확인

필사 시기와 여백 주석이 다른 사본을 구별하기 어려워진다. 독자는 인용한 문장이 어느 실물에 있는지 되짚어 확인할 수 없게 된다.

아프리카관 / 72

요루바 수 이름과 기준량

언어가 수를 나누는 방식

같은 수량을 어떤 기준에서 바라보는지 살핀다.

요루바어의 수 이름을 다룬 언어학 연구는 스무 개의 묶음과 덧셈 및 뺄셈이 결합되는 구조를 분석한다. 다만 표준어와 조사된 방언 사이에도 차이가 있으므로 모든 화자의 표현을 한 규칙으로 정리해서는 안 된다. 이 장은 발음을 흉내 내기보다 수 이름을 분석할 때의 수학적 관점을 다룬다.

17이라는 수량은 10 + 7로도 20 − 3으로도 나타낼 수 있다. 첫 표현은 이미 가진 열 개에 일곱 개를 더하고 둘째 표현은 스무 개에서 세 개가 부족하다고 본다. 두 표현의 차이는 수량의 차이가 아니라 기준량의 선택에 있다.

아래 식은 언어의 문법을 그대로 번역한 사전이 아니다. 언어 자료에서 만나는 더하기와 빼기의 구조를 이해하기 위한 현대 수식이다. 실제 수 이름을 쓰려면 성조와 형태 변화 및 사용 맥락을 확인한 언어 자료가 별도로 필요하다.

한 수를 두 방식으로 표현할 수 있다는 사실은 등식의 의미를 익히는 데도 도움이 된다. 등호는 계산을 시작하라는 신호만이 아니라 양쪽이 같은 수량이라는 관계다. 식을 오른쪽에서 왼쪽으로 읽어도 성립한다.

$$17 = 10 + 7$$

$$17 = 20 - 3$$

$$17 + 3 = 20$$

같은 수량을 서로 다른 기준에서 분해한 학습용 식

탐구

17을 20 − 3으로 나타낼 때 기준량과 부족한 양은 각각 무엇일까?

풀이와 확인

기준량은 20이고 부족한 양은 3이다. 세 개를 되돌려 더하면 기준량에 도달하므로 17 + 3 = 20으로 검산할 수 있다.

[YORUBA] Felix Abídèmí Fábùnmi. Vigesimal Numerals on Ifè Dialects of Yorùbá. Linguistik Online

스무 개씩 묶어 세기

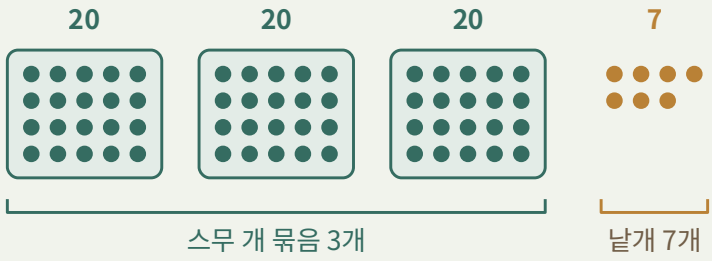
묶음 수와 남은 낱개를 나누면 큰 수가 단순해진다.

돌 67개를 스무 개씩 묶으면 세 묶음과 낱개 일곱 개가 남는다. 따라서 $67 = 3 \times 20 + 7$이다. 이 분해에서는 묶음 수 3과 나머지 7이 서로 다른 역할을 맡는다. 일곱 묶음과 낱개 세 개로 바꾸면 143이 되어 원래 수와 달라진다.

나머지는 0 이상이고 20보다 작아야 한다. 스무 개 이상의 낱개가 남았다면 새 묶음을 하나 더 만들 수 있기 때문이다. 이 조건을 붙이면 같은 수량에 대한 묶음 수와 나머지가 하나로 정해진다.

묶음 계산을 사용한다고 반드시 자리값 숫자를 사용하는 것은 아니다. 말로 묶음을 표현하는 체계와 각 위치의 값이 20배씩 커지는 표기 체계는 구별해야 한다. 이 구분은 서로 다른 문화의 숫자를 비교할 때 특히 중요하다.

자리값 20진 표기를 현대 활동으로 따로 만들면 두 자리의 값은 $20a + b$가 된다. 이때 b는 0부터 19까지다. 언어의 수 이름 연구와 구분해 만든 표기 모형이라고 표시해야 두 체계를 혼동하지 않는다.



67 = 3 × 20 + 7 (낱개는 20보다 작다)

점 67개를 스무 개 묶음 3개와 낱개 7개로 나눈 모형

탐구

94개를 스무 개씩 묶었을 때 묶음 수와 나머지는?

풀이와 확인

네 묶음이 80개이므로 14개가 남는다. 94 = 4 × 20 + 14이며 나머지 14는 20보다 작으므로 묶기가 끝났다.

가까운 기준에서 빼기

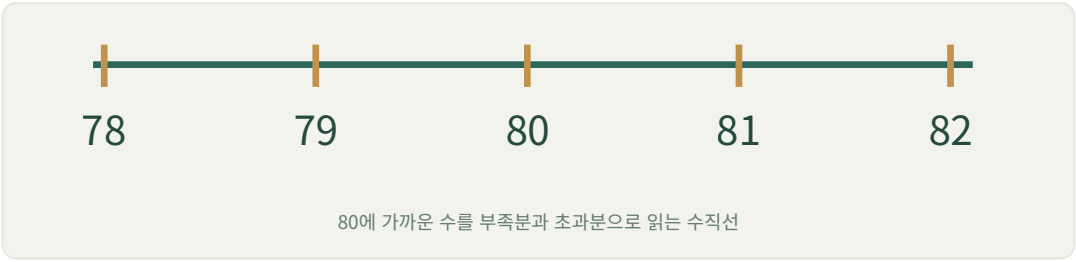
기준량에 가까운 수는 부족분이 더 작을 수 있다.

98개의 물건을 직접 하나씩 세는 대신 백 개짜리 틀에서 빈칸이 두 개인지 확인할 수 있다. 이때 98 = 100 − 2라는 표현이 상황에 잘 맞는다. 기준량을 정하는 것은 계산을 더 쉽게 만드는 표현 선택이다.

59는 60 − 1로 나타낼 수도 있고 40 + 19로 나타낼 수도 있다. 두 식은 같은 답을 주지만 다루어야 할 작은 수의 크기가 다르다. 차이가 작은 기준을 택하면 머릿속으로 보충하거나 검산하기 쉬울 수 있다.

그러나 가장 가까운 기준이 언제나 언어의 실제 수 이름을 결정하지는 않는다. 언어는 역사와 관습과 문법을 함께 가지기 때문이다. 편리해 보이는 산술 규칙을 만들어 실제 화자의 표현을 대신 설명하지 않도록 주의한다.

계산할 때 쓴 기준량을 바꾸어 검산할 수 있다. 79를 80 − 1로 구한 뒤 60 + 19로도 확인한다. 서로 다른 분해가 같은 값에 도달하면 부족분의 부호를 잘못 처리한 실수를 발견하기 쉽다.



80에 가까운 수를 부족분과 초과분으로 읽는 수직선

탐구

79와 121을 가까운 스무 개의 배수에서 표현해 보자.

풀이와 확인

79 = 80 − 1이고 121 = 120 + 1이다. 같은 기준량 계열에서 하나는 부족분을 빼고 다른 하나는 초과분을 더한다.

표현식을 되돌려 읽기

빼기와 곱하기의 범위를 괄호로 구별한다.

4 × 20 − 3은 스무 개짜리 네 묶음에서 세 개를 뺀 77이다. 반면 4 × (20 − 3)은 열일곱 개짜리 네 묶음이므로 68이다. 같은 수와 연산 기호를 사용해도 어느 연산이 먼저 묶이는지에 따라 값이 달라진다.

언어의 수 이름을 수식으로 옮길 때도 이런 범위가 중요하다. 낱말의 순서만 따라 기호를 늘어놓기보다 어떤 덩어리가 하나의 단위를 이루는지 분석해야 한다. 괄호는 현대 수식에서 그 결합 관계를 드러내는 장치다.

두 식의 차이는 9다. 첫 식에서는 세 개를 한 번만 빼고 둘째 식에서는 네 번 빼기 때문에 12개를 뺀다. 식의 모양과 물건 묶음을 함께 비교하면 괄호의 의미가 계산 순서 암기를 넘어 선명해진다.

괄호가 없는 긴 설명을 들었을 때에는 묶음을 먼저 그림으로 표시한다. 스무 개짜리 네 묶음 전체에서 빼는지 각 묶음에서 빼는지 확인한다. 말을 수식으로 바꾸는 과정은 단어 치환보다 구조 분석에 가깝다.

$$4 \times 20 - 3 = 77$$
$$4 \times (20 - 3) = 68$$
$$77 - 68 = 9$$

괄호가 가리키는 묶음 범위의 차이

탐구

3 × 20 − 2와 3 × (20 − 2)의 차이를 설명해 보자.

풀이와 확인

첫 값은 58이고 둘째 값은 54다. 첫 식은 2를 한 번 빼지만 둘째 식은 세 묶음에서 각각 2를 빼므로 총 6을 뺀다.

보충량으로 더하기

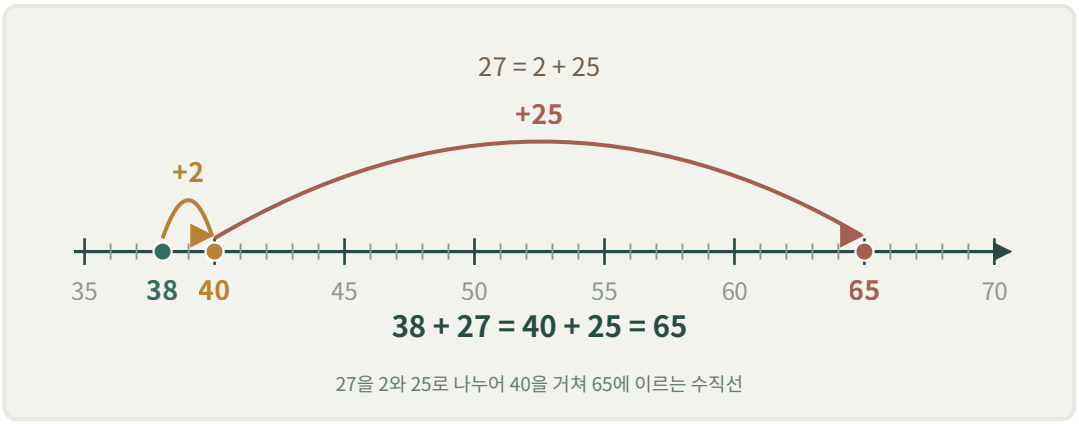
큰 합을 만들기 전에 기준량을 채워 본다.

38 + 27을 계산할 때 38에 2를 보태 40을 만들 수 있다. 그 2는 27에서 가져왔으므로 나머지는 25다. 따라서 38 + 27 = 40 + 25 = 65가 된다. 한쪽에 더한 양만큼 다른 쪽에서 빼면 합이 유지된다.

이 과정을 보충이라고 부를 수 있지만 특정 언어의 모든 화자가 같은 암산법을 쓴다고 주장하는 것은 아니다. 수 이름이 제공하는 기준량의 관점에서 새로 설계한 학습 활동이다. 실제 계산 관습을 말하려면 관찰 자료가 필요하다.

그림에서는 27개의 묶음에서 두 개를 옮기는 화살표를 그린다. 물건을 새로 만들거나 없앤 것이 아니므로 전체 수량은 변하지 않는다. 식의 등호마다 왜 값이 보존되는지 설명하면 계산 요령을 다른 숫자에도 적용할 수 있다.

같은 보충법을 뺄셈에 쓸 때에는 두 수에 같은 양을 더하면 차가 유지된다. 83 − 39는 84 − 40과 같다. 합을 유지하는 이동과 차를 유지하는 이동의 방향이 다르다는 점을 비교한다.



27을 2와 25로 나누어 40을 거쳐 65에 이르는 수직선

탐구

59 + 18을 60을 기준으로 계산해 보자.

풀이와 확인

18에서 1을 옮겨 59를 60으로 만들면 17이 남는다. 따라서 60 + 17 = 77이다. 1을 양쪽에 동시에 더하지 않았는지 확인한다.

부족분으로 곱하기

기준량의 배수에서 모자란 양을 빼면 된다.

19 × 6은 (20 − 1) × 6으로 바꾸어 계산할 수 있다. 스무 개짜리 여섯 묶음은 120개이며 각 묶음에서 하나씩 부족하므로 총 여섯 개를 뺀다. 답은 114다. 부족분은 한 번만 빼는 것이 아니라 묶음 수만큼 빼야 한다.

이 설명은 분배법칙의 구체적인 모습이다. 6 × 20 − 6 × 1이라는 식이 물건 묶음의 이동과 맞아떨어진다. 식을 외우기 전에 각 곱이 어떤 수량을 세는지 말해 보면 오류를 줄일 수 있다.

기준량을 백으로 잡으면 98 × 7 = 700 − 14 = 686도 같은 구조로 계산된다. 십진법과 스무 개 묶음에서 모두 사용할 수 있는 일반적인 수학 성질이다. 문화적 출발점과 보편적으로 검산 가능한 계산을 함께 연결한다.

기준보다 큰 수에서도 같은 분배법칙을 쓸 수 있다. 21 × 6은 20 × 6에 1 × 6을 더해 126이다. 기준에서 부족한지 초과하는지에 따라 부호만 달라지며 묶음마다의 차이를 합한다는 구조는 같다.

$$19 \times 6 = (20 - 1) \times 6$$
$$20 \times 6 - 1 \times 6$$
$$120 - 6 = 114$$

묶음마다 부족한 수를 곱한 뒤 전체에서 뺀다

탐구

39 × 4를 40을 기준으로 계산해 보자.

풀이와 확인

40 × 4에서 1 × 4를 빼면 160 − 4 = 156이다. 부족한 하나가 네 묶음에 각각 있으므로 4를 빼야 한다.

방언의 차이를 표에 남기기

다른 표현을 오류로 처리하기 전에 사용 범위를 확인한다.

요루바어의 방언을 비교한 연구는 같은 수량을 만드는 덧셈과 뺄셈의 사용 범위가 달라질 수 있음을 보여 준다. 하나의 표에서 본 규칙을 다른 방언에 그대로 적용하면 실제 언어 자료를 잘못 읽을 수 있다. 서로 다른 표현은 먼저 각각의 맥락에서 기록한다.

학습용 비교표에는 수량과 표현 A 및 표현 B를 별도 열로 둔다. 실제 언어 예를 옮길 때에는 연구자가 조사한 지역과 표기 방식을 함께 적는다. 이 책의 20 − 3 같은 수식은 의미 구조를 설명한 것이며 발음과 문법 정보를 모두 담고 있지 않다.

차이를 발견했을 때 더 간단한 체계를 우수하다고 평가할 필요는 없다. 언어의 표현은 사용자의 경험과 관습 안에서 기능한다. 수학 활동에서는 두 표현의 값이 같은지 검산하고 언어학 활동에서는 어떤 조건에서 각 표현을 쓰는지 묻는다.

방언 이름과 조사 시점은 표의 주석으로 남긴다. 언어가 변할 수 있으므로 한 시기의 조사 결과를 모든 시대의 고정 규칙으로 말하지 않는다. 자료가 보여 주는 사용 범위를 존중하는 것이 비교의 출발점이다.

기록 항목	수학적 비교	언어적 비교
대상	수량과 식의 값	지역과 조사된 방언
표현	20 − 3 = 17	철자와 성조와 문법
검사	양쪽 값이 같은가	맥락에서 쓰이는가

수식의 값 비교와 실제 요루바 방언 표현의 확인은 서로 다른 작업이다.

탐구

두 표현의 값이 같으면 발음이나 사용 맥락도 같다고 할 수 있을까?

풀이와 확인

없다. 값의 동등성은 수학적 관계다. 발음과 성조와 방언의 사용 범위는 별도 자료로 확인해야 하는 언어적 정보다.

[YORUBA] Felix Abídèmí Fábùnmi. Vigesimal Numerals on Ifè Dialects of Yorùbá. Linguistik Online

나만의 수 표현 사전 만들기

뜻과 구조와 출처를 한 항목 안에서 연결한다.

수 표현 사전의 한 항목을 만들 때에는 먼저 나타내려는 수량을 적는다. 다음에 더하기나 빼기로 분석한 구조를 적고 마지막에 그 표현을 확인한 출처를 붙인다. 실제 언어 자료가 없으면 내가 만든 학습용 표현이라고 분명하게 표시한다.

예를 들어 47을 $2 \times 20 + 7$로 분해한 카드는 스무 개 묶음에 관한 수학 카드다. 이것만으로 실제 요루바어의 47을 적었다고 주장할 수는 없다. 언어 사전 항목에는 철자와 성조 및 사용 맥락이 추가로 필요하기 때문이다.

카드끼리 교환한 뒤 상대가 수량을 정확히 복원하는지 확인한다. 오해가 생기면 괄호의 위치나 묶음 단위를 고친다. 이 활동은 계산 능력뿐 아니라 자신이 사용한 표현의 규칙을 다른 사람에게 명확히 전달하는 능력을 기른다.

카드에는 역문제도 붙일 수 있다. 96을 받은 독자가 같은 규칙으로 5 × 20 − 4를 만들게 한다. 다만 다른 동등한 식도 가능하므로 허용할 기준량과 형식 조건을 미리 정해 평가한다.

사전 항목	적을 정보
수량	96
분석 구조	5 × 20 − 4
자료 성격	현대 학습용 수식

나만의 수 표현 사전 만들기의 핵심 관계를 정리한 표

> **탐구**
>
> 5 × 20 − 4라는 학습용 표현을 받은 사람이 복원해야 할 수량은?

풀이와 확인

100 − 4 = 96이다. 곱셈으로 만든 기준량에서 네 개를 빼는 구조이며 5 × (20 − 4)인 80과는 다르다.

아프리카관 / 73

소나의 선과 연결

모래 위의 그림과 이야기

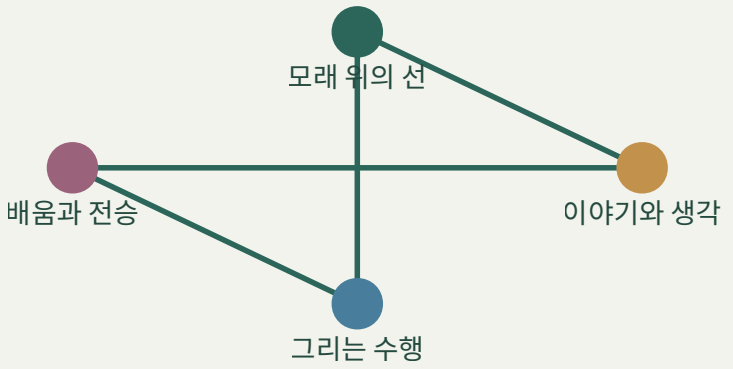
선을 수학으로 읽기 전에 전승의 장면을 살핀다.

유네스코는 앙골라 동부의 룬다 초크웨와 이웃 공동체가 전승하는 소나를 모래 위의 그림과 기하 도형으로 소개한다. 그림은 생각과 믿음 및 자연과 사람의 관계를 표현한다. 선의 규칙만 뽑아내면 이러한 이야기와 전승의 맥락을 놓칠 수 있다.

이 장에서는 소나에서 착안한 점과 선 활동을 다룬다. 제시하는 격자와 경로는 전통 도안을 정확하게 복제한 것이 아니라 수학적 연결을 탐구하기 위해 새로 만든 모형이다. 실제 전승자의 설명을 대신할 수 없다는 점을 처음부터 밝힌다.

점의 배열은 눈에 잘 들어오는 기준을 제공하고 선의 이동은 순서를 만든다. 완성된 그림뿐 아니라 그리는 과정에도 정보가 담긴다. 따라서 두 그림이 비슷해 보이더라도 출발점과 진행 순서를 함께 기록해야 활동을 재현할 수 있다.

소나의 복수와 단수 명칭을 소개하는 자료도 확인할 수 있다. 번역 과정에서 이름의 쓰임이 달라질 수 있으므로 출처의 용법을 따라 설명한다. 익숙하지 않은 이름을 임의로 하나의 장식 유형으로 축소하지 않는다.



소나를 볼 때 함께 읽을 요소의 개념도. 전통 도안의 재현이 아니다.

> **탐구**
>
> 완성 사진만으로는 알기 어려운 정보에는 무엇이 있을까?

풀이와 확인

그린 순서와 손을 떼었는지 여부 및 이야기와 몸짓의 흐름을 알기 어렵다. 사진은 중요한 기록이지만 수행 전체를 담지는 못한다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

점의 배열을 좌표로 옮기기

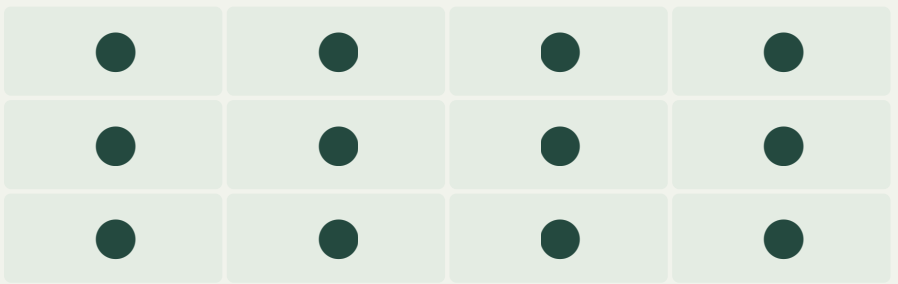
행과 열의 기준을 정하면 같은 위치를 다시 찾을 수 있다.

가로 방향으로 네 점을 놓은 행을 세 줄 만든다. 전체 점은 4 × 3 = 12개다. 행은 가로로 이어진 점 묶음이며 열은 세로로 이어진 점 묶음이다. 따라서 이 배열은 세 행과 네 열을 갖는다. 방향과 개수를 함께 적으면 점 수와 줄 수의 혼동을 줄일 수 있다.

왼쪽 아래 점을 기준으로 가로 위치를 x와 세로 위치를 y라고 쓰자. x는 0부터 3까지이고 y는 0부터 2까지다. 각 점은 두 좌표로 구별된다. 가로 위치만 같아도 세로 위치가 다르면 다른 점이다.

좌표는 현대적인 기록 장치다. 격자를 좌표로 옮겼다고 원래 전통이 이 기호를 썼다고 말하지 않는다. 모형화의 목적은 위치를 정확히 공유하는 데 있다. 종이의 실제 간격이 조금 달라도 행과 열의 관계는 유지될 수 있다.

격자의 바깥을 따라 생기는 작은 칸은 가로 세 칸과 세로 두 칸이므로 여섯 칸이다. 점은 열두 개다. 점 수와 사이의 칸 수를 나란히 세면 곱셈에서 무엇을 곱하는지가 분명해진다.



소나의 복제가 아닌 4 × 3 점 배열 활동

탐구

가로 다섯 점과 세로 네 점인 격자에는 점이 몇 개 있을까?

풀이와 확인

5 × 4 = 20개다. 선 사이의 칸 수와 점 수를 혼동하지 않는다. 가로 네 칸을 만들려면 점은 다섯 개가 필요하다.

교차점과 지나치는 선

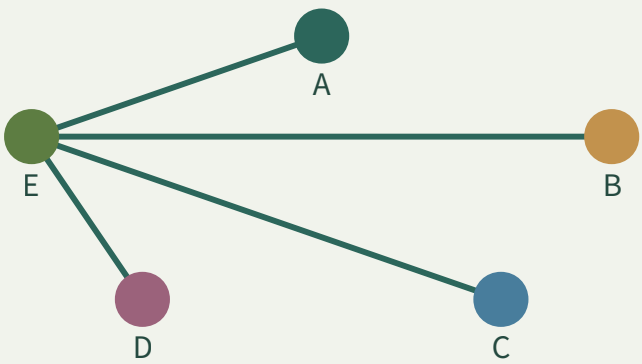
만나는 모양과 연결된 상태는 다를 수 있다.

두 선이 종이 위에서 교차할 때 그 지점에서 방향을 바꿀 수 있는지 정해야 한다. 다리처럼 한 선이 다른 선 위를 지나간다면 교차해 보여도 연결점은 아니다. 그래프를 만들 때에는 이러한 차이를 점의 표시로 구별한다.

네 지점 A와 B와 C와 D를 잇는 두 선 AB와 CD가 가운데서 교차한다고 하자. 교차점에 E를 두어 실제로 연결하면 선은 AE와 EB 및 CE와 ED 네 구간으로 나뉜다. E에서 다른 방향으로 갈 수 있으므로 이동 가능성도 바뀐다.

도형을 분석하기 전에 연결 규칙을 쓰는 이유가 여기에 있다. 같은 그림을 보고도 사람마다 다른 경로를 셀 수 있기 때문이다. 선의 길이나 색만 아름답게 맞추는 것보다 어느 점에서 갈아탈 수 있는지 명시하는 편이 수학적으로 더 중요하다.

그래프의 선을 휘게 그려도 끝점이 그대로면 연결 관계는 유지된다. 선을 곧게 그린 정도가 그래프의 핵심은 아니다. 다만 교차를 연결점으로 바꾸는 수정은 구조를 바꾸므로 단순한 꾸미기와 구별한다.



가운데 E에서 실제로 연결되는 경우의 추상 그래프

탐구

교차점에서 연결되지 않는 두 선에는 연결된 성분이 몇 개일까?

풀이와 확인

다른 곳에서도 만나지 않는다면 두 개다. 교차점을 연결점으로 정하면 하나가 된다. 종이 위의 겹침과 경로상의 연결을 구별해야 한다.

한 번씩 지나는 길 찾기

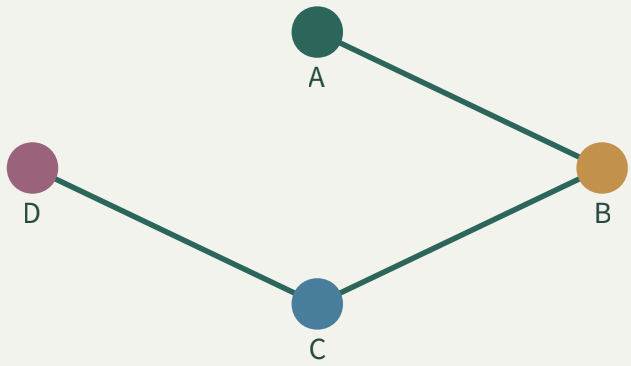
들어온 선과 나가는 선을 짝지어 본다.

선을 한 번씩만 지나며 그림 전체를 따라가는 활동을 생각하자. 중간에 방문한 점에서는 들어오는 선과 나가는 선이 한 쌍을 이룬다. 따라서 출발점과 도착점을 제외한 점의 연결선 수는 짝수여야 한다. 이 조건은 한붓그리기 가능성을 판단하는 실마리다.

연결된 그래프에서 홀수 개의 선이 붙은 점이 두 개라면 그 두 점을 시작과 끝으로 하는 경로를 찾을 수 있다. 홀수 점이 없으면 출발점으로 돌아오는 경로가 가능하다. 여기서는 선을 다시 지나가지 않는다는 현대 그래프 문제의 규칙을 사용한다.

이 정리가 모든 소나 도안의 의미를 설명하는 것은 아니다. 전승의 선을 어떤 그래프로 바꾸었는지에 따라 조건이 달라질 수 있다. 수학적 성질은 정한 모형 안에서 정확하게 사용하고 문화적 설명은 별도의 근거로 보완한다.

한붓 경로를 찾았으면 지난 선에 표시를 하며 실제로 모두 한 번씩 사용했는지 확인한다. 끝점 조건이 맞는다는 사실과 직접 제시한 경로가 정확하다는 사실은 따로 검산할 수 있다.



홀수 차수인 두 끝점을 가진 연결 그래프

탐구

연결선 수가 1과 2와 2와 1인 한 줄 그래프는 어디에서 시작하고 끝나야 할까?

풀이와 확인

연결선 수가 1인 양 끝점에서 시작하고 끝나야 한다. 가운데 점에서는 들어온 뒤 다른 선으로 나가므로 두 선이 짝을 이룬다.

닫힌 경로와 짝수 차수

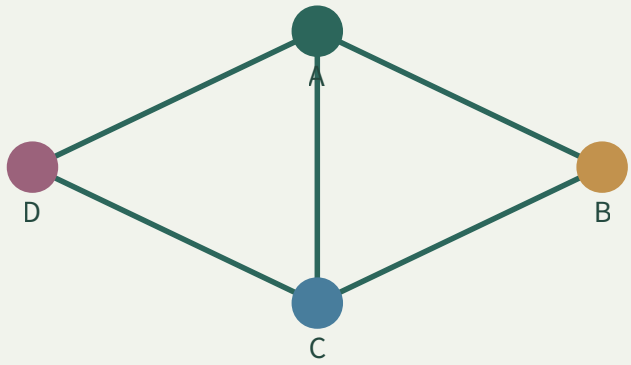
돌아오는 길에서는 모든 방문을 쌍으로 셀 수 있다.

사각형의 네 변을 차례대로 따라가면 출발점으로 돌아온다. 각 꼭짓점에는 두 선이 붙어 있으므로 연결선 수가 모두 짝수다. 한 번 들어간 점에서 한 번 나오는 동작이 짝을 이룬다는 생각을 그림으로 확인할 수 있다.

사각형에 대각선 하나를 더하면 그 대각선의 양 끝점만 연결선 수가 3이 된다. 이제 모든 선을 한 번씩 지나는 길은 가능하지만 출발점과 도착점이 달라진다. 두 홀수 점 중 하나에서 시작해 다른 하나에서 끝나야 한다.

선을 하나 더 그리는 작은 수정이 경로의 성질을 바꾼다. 그래서 완성 그림이 비슷하다는 이유만으로 같은 한붓그리기 문제라고 볼 수 없다. 선을 추가하거나 지울 때마다 각 점의 차수가 어떻게 바뀌는지 기록하면 변화의 이유를 설명할 수 있다.

한붓그리기의 차수 조건에는 선이 있는 부분 전체가 연결되어 있다는 조건이 붙는다. 서로 떨어진 닫힌 고리 두 개는 모든 점의 차수가 짝수여도 손을 떼지 않고 하나의 길로 전부 지날 수 없다. 고립된 점은 지나야 할 선을 만들지 않으므로 별도로 다룬다.



대각선 하나를 더하면 양 끝점의 차수가 홀수로 바뀐다

탐구

사각형에 두 대각선을 모두 넣고 교차점을 연결점으로 정하면 홀수 점은 몇 개일까?

풀이와 확인

네 꼭짓점은 각각 차수 3이므로 홀수 점 네 개다. 가운데 교차점은 차수 4다. 따라서 모든 선을 한 번씩 지나는 단일 경로는 없다.

반복되는 동작을 기록하기

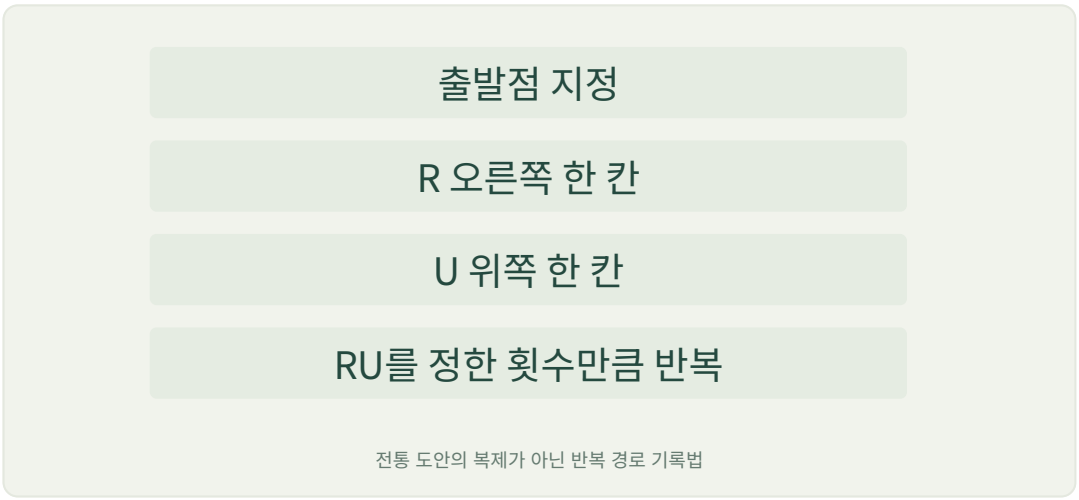
짧은 규칙으로 긴 경로를 재현할 수 있다.

격자에서 오른쪽 한 칸과 위쪽 한 칸을 번갈아 이동하는 경로를 만들자. 동작을 R과 U로 적으면 RURU라는 네 동작이 된다. 기본 묶음 RU를 세 번 반복하면 가로 세 칸과 세로 세 칸 이동한다. 반복 기호는 긴 설명을 압축한다.

하지만 동작 목록만으로는 경로가 완전히 정해지지 않는다. 출발점과 방향의 기준 및 한 칸의 크기가 필요하다. 시작을 왼쪽 아래로 정했는지 화면의 위쪽을 양의 방향으로 정했는지에 따라 결과가 달라질 수 있다.

규칙을 다른 사람에게 주어 같은 경로를 그려 보게 한다. 결과가 다르면 손재주를 탓하기 전에 설명에서 빠진 조건을 찾는다. 전승의 수행을 알고리즘으로 바꾸는 활동은 단순화가 무엇을 보존하고 무엇을 생략하는지 드러내는 좋은 사례다.

R과 U의 횟수가 같아도 순서가 다르면 경로의 모양은 달라진다. RRUU와 RURU는 같은 도착점에 이르지만 지나간 점은 다르다. 최종 위치와 전체 경로라는 두 정보를 구별해 기록한다.



전통 도안의 복제가 아닌 반복 경로 기록법

탐구

RU를 다섯 번 반복하면 시작점에서 가로와 세로로 각각 얼마나 이동할까?

풀이와 확인

가로 다섯 칸과 세로 다섯 칸 이동한다. 전체 동작은 열 번이다. 이동 거리의 합과 시작점에서의 직선거리는 서로 다른 양이다.

도형을 돌려도 남는 성질

모양의 방향이 달라도 연결 관계는 보존된다.

점과 선으로 만든 경로를 종이째 90° 돌려 보자. 오른쪽을 향하던 선은 위쪽을 향하지만 어느 점과 어느 점이 연결되었는지는 바뀌지 않는다. 각 점의 차수와 한붓그리기 가능성도 그대로다. 이런 성질을 회전에 대해 변하지 않는다고 말한다.

반면 위로 이동한 횟수는 달라질 수 있다. 방향에 의존하는 기록이기 때문이다. 같은 그림을 비교할 때 어떤 정보를 보존 대상으로 삼았는지 정해야 한다. 연결 문제와 위치 문제는 요구하는 기준이 다르다.

좌표를 원점 중심으로 90° 반시계 회전하면 점의 좌표 x와 y는 −y와 x로 바뀐다. 이 식은 현대 좌표 활동이며 실제 모래 그림의 수행 지침이 아니다. 도형의 변환과 기록 방식의 변화를 함께 살펴보는 데 사용한다.

90° 회전을 네 번 반복하면 원래 위치로 돌아온다. 좌표 변환을 차례로 적용하면 두 번째에는 두 부호가 바뀌고 네 번째에 처음 좌표가 나온다. 동작의 합성도 작은 규칙의 반복으로 검산할 수 있다.

회전 전: x = 2 y = 1

90° 반시계 회전

회전 후: x = −1 y = 2

좌표 표현은 바뀌어도 점 사이의 연결은 유지된다

탐구

점의 좌표가 x = 2와 y = 1일 때 90° 반시계 회전한 좌표는?

풀이와 확인

x = −1과 y = 2다. 원점에서의 거리는 유지되지만 좌표의 값은 바뀐다. 그림을 그려 방향까지 확인하면 부호 오류를 찾기 쉽다.

같은 도착점에 이르는 다른 길

동작의 횟수가 같아도 그 순서는 달라질 수 있다.

소나의 수행과 현대 좌표 모형을 구별한 상태에서 경로를 세는 질문을 더해 본다. 왼쪽 아래에서 오른쪽 세 칸과 위쪽 두 칸만 움직여 반대 꼭짓점에 도달한다. 되돌아가는 동작은 허용하지 않는다. 이 규칙은 특정 전통 도안의 그리는 법을 복원한 것이 아니다.

모든 경로에는 R 세 번과 U 두 번이 들어간다. RRRUU와 RURRU는 같은 도착점에 이르지만 지나간 선은 다르다. 다섯 동작 자리 중 U가 들어갈 두 자리를 고르면 경로 하나가 정해진다. 서로 다른 자리 두 개를 고르는 방법은 $5 \times 4 \div 2 = 10$가지다.

2로 나누는 이유는 두 U의 순서를 구별하지 않기 때문이다. 첫째와 셋째 자리를 선택한 경우를 셋째와 첫째 자리의 선택과 따로 세면 같은 경로를 두 번 센다. 같은 종류의 동작을 세는 문제에서는 무엇을 다른 경우로 볼지 먼저 정한다.

한 교차점을 통과하지 못하도록 하면 단순한 열 가지에서 금지된 경로를 빼야 한다. 오른쪽 한 칸과 위쪽 한 칸인 점까지 가는 길은 두 가지다. 그 점에서 끝까지는 오른쪽 두 번과 위쪽 한 번이므로 세 가지다. 금지점을 지나는 길 여섯 개를 빼면 네 개가 남는다.

세는 대상	경로 수
제약 없는 전체	10
금지점까지	2
금지점에서 끝까지	3
금지점을 피한 경로	$10 - 2 \times 3 = 4$

> **탐구**
>
> 오른쪽 두 칸과 위쪽 두 칸만 움직이면 서로 다른 최단 경로는 몇 개인가?

풀이와 확인

네 동작 중 위쪽 동작 두 자리의 선택은 $4 \times 3 \div 2 = 6$가지다. 모든 길은 네 칸 길이지만 중간에 지나는 점은 서로 다를 수 있다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

전통에서 배운 모형을 되돌아보기

수학적 결과와 남겨 둔 맥락을 함께 설명한다.

활동 결과를 발표할 때에는 내가 만든 그래프에서 무엇을 증명했는지 구체적으로 적는다. 예를 들어 홀수 차수의 점 두 개를 찾아 한붓 경로의 시작과 끝을 정했다고 쓸 수 있다. 이것을 소나 전체의 의미를 해명했다는 문장으로 넓히지 않는다.

발표의 다른 칸에는 모형에 들어오지 않은 요소를 적는다. 이야기와 전승자와 그리는 몸의 움직임이 그 예다. 모형의 한계를 밝히는 일은 수학을 포기하는 것이 아니다. 어떤 질문에는 유용하고 어떤 질문에는 다른 자료가 필요한지 알려 주는 일이다.

마지막으로 공동체의 명칭과 출처를 확인한다. 모래 그림이라는 넓은 말만 쓰면 서로 다른 지역의 전통을 섞기 쉽다. 학습용 도해에는 새로 만든 모형이라고 붙이고 전승 소개에는 확인한 자료를 연결해 독자가 두 층위를 구별하게 한다.

모형의 한계를 적은 뒤 더 배우고 싶은 질문을 남긴다. 전승자가 그림을 설명하는 방식이나 도안을 배우는 과정처럼 수식만으로 답할 수 없는 질문이 다음 자료 탐색의 방향을 정해 준다.

결과	함께 적을 범위
한붓 경로 존재	이번에 만든 그래프
소나 소개	특정 공동체와 출처
생략한 요소	이야기와 수행 맥락

전통에서 배운 모형을 되돌아보기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

내 그림에 한붓 경로가 있다는 사실로 전통 도안 모두에 같은 성질이 있다고 말할 수 있을까?

풀이와 확인

없다. 확인한 것은 내가 정한 점과 선 및 연결 규칙의 성질이다. 다른 도안에는 다른 연결 관계가 있을 수 있으므로 각각 살펴야 한다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

아프리카관 / 74

만칼라에서 상태와 전략을 읽다

같은 이름 아래의 여러 게임

판의 모양보다 실제 규칙을 먼저 확인한다.

만칼라는 여러 지역에서 전해지는 수 세기와 이동 게임의 넓은 계열명이다. 박물관 소장품에도 서로 다른 모양과 지역의 판이 들어 있다. 구멍 수가 비슷하더라도 씨앗을 옮기는 방향과 잡는 조건 및 종료 규칙은 다를 수 있다. 하나의 규칙을 대륙 전체의 전통으로 소개하지 않는다.

이 장에서는 실제 전통 게임을 완전하게 재현하는 대신 규칙을 단순화한 씨앗 이동 모형을 사용한다. 여섯 칸을 원형으로 연결하고 한 칸의 씨앗을 모두 집어 다음 칸부터 하나씩 놓는다. 잡기와 승패는 처음에는 사용하지 않는다.

규칙을 줄인 이유는 이동 과정과 보존되는 양을 명확하게 보기 위해서다. 특정 전통의 이름을 빌려 만든 새 모형임을 표시하면 수학 활동과 문화 소개를 혼동하지 않을 수 있다. 실제 게임을 배우려면 해당 지역의 온전한 규칙을 따로 읽어야 한다.

박물관의 오래된 소장품 설명에는 과거의 분류나 기원 추정이 들어 있을 수 있다. 판의 재료와 형태라는 관찰과 기원에 관한 해석을 구별한다. 한 항목의 설명을 계열 전체의 역사로 확대하지 않는다.

규칙	이 장의 학습 모형
판	원형으로 연결한 여섯 칸
이동	다음 칸부터 하나씩 놓기
출발 칸 재방문	씨앗을 놓는다
처음의 분석	잡기와 승패를 생략

만칼라 계열 전체의 규칙이 아니라 이 장에서 새로 정한 분석용 규칙

탐구

구멍이 열두 개인 두 게임판이 있다고 해서 같은 게임이라고 판단할 수 없는 이유는?

풀이와 확인

씨앗 분배와 잡기와 종료 조건이 다를 수 있기 때문이다. 판의 외형은 규칙의 일부만 알려 준다. 어떤 규칙으로 사용했는지에 관한 자료가 필요하다.

[MANCALA] 대영박물관 소장 만칼라판. Af1996 17 1 a bl

이동 전후의 상태를 기록하기

각 칸의 수를 같은 순서로 적으면 변화를 추적할 수 있다.

학습판의 여섯 칸을 1번부터 6번까지 정하고 처음 상태를 3과 0과 2와 1과 0과 0으로 둔다. 1번 칸의 세 씨앗을 집어 2번과 3번과 4번에 하나씩 놓으면 상태는 0과 1과 3과 2와 0과 0이 된다. 칸의 순서를 고정해야 두 상태를 비교할 수 있다.

선택한 칸은 먼저 0으로 만들고 그다음 씨앗을 분배한다. 출발 칸의 씨앗을 그대로 둔 채 더하면 전체 개수가 늘어나는 오류가 생긴다. 한 차례의 이동을 여러 작은 동작으로 나누어 기록하면 이런 실수를 찾기 쉽다.

상태 기록에는 누구의 차례인지도 필요할 수 있다. 지금 모형은 혼자 움직이므로 생략했지만 두 사람이 번갈아 하는 게임에서는 같은 씨앗 배열이라도 다음 선택권이 다르면 다른 상황이다. 수학적 상태는 미래의 행동을 결정하는 정보를 담아야 한다.

여섯 칸의 이름을 시계 방향으로 붙였는지 반시계 방향으로 붙였는지도 정해야 한다. 같은 숫자열을 보아도 번호의 방향이 다르면 실제 판 위의 이동이 달라진다. 상태와 배치의 대응을 먼저 고정한다.



1번 칸의 씨앗 3개를 다음 세 칸에 하나씩 놓은 이동

탐구

이동 전과 뒤의 씨앗 총수는 각각 얼마일까?

풀이와 확인

두 상태 모두 6개다. 3 + 0 + 2 + 1 = 6이며 0 + 1 + 3 + 2 = 6이다. 위치만 바뀌고 씨앗을 만들거나 제거하지 않았기 때문이다.

변하지 않는 합계

보존량을 알면 잘못된 이동을 빠르게 찾는다.

씨앗을 판 안에서 옮기기만 하는 규칙에서는 전체 씨앗 수가 변하지 않는다. 이런 양을 불변량 또는 보존량이라고 부른다. 모든 칸의 값을 더한 합이 이동 전후에 같아야 한다는 조건은 긴 게임 기록을 검사하는 데 유용하다.

처음 합이 12였는데 어느 단계에서 13이 되었다면 이동 기록에 오류가 있다. 다만 합이 같다고 기록이 반드시 정확한 것은 아니다. 한 칸에 하나를 잘못 더하고 다른 칸에서 하나를 잘못 빼면 합은 유지되기 때문이다.

그래서 합계 검사는 필요한 검사이지만 충분한 검사는 아니다. 선택한 칸의 수와 씨앗을 놓은 경로를 함께 확인해야 한다. 간단한 보존량은 오류를 빨리 찾고 상세한 경로 검사는 어디서 틀렸는지 알려 준다.

합계가 맞는 잘못된 예를 직접 만들어 보면 검산의 한계가 드러난다. 0과 1과 3과 2 대신 0과 2와 2와 2를 적어도 합은 6이다. 따라서 총수 검사 뒤에는 분배 경로를 반드시 대조한다.

놀이 칸 합 + 저장칸 합 = 전체
이동 전 전체 = 이동 뒤 전체
위치는 변해도 개수는 보존

잡힌 씨앗까지 포함해 범위를 정한 보존량

탐구

실제 게임에서 씨앗을 잡아 저장칸으로 옮긴다면 어떤 합을 보존량으로 삼을까?

풀이와 확인

놀이 칸과 저장칸을 모두 합한 씨앗 수를 사용한다. 놀이 칸만 더하면 잡기가 일어날 때 합이 줄지만 판 전체의 씨앗 수는 유지될 수 있다.

여러 바퀴를 도는 분배

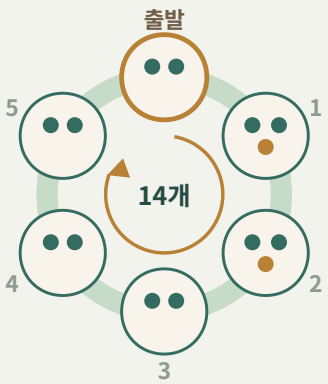
몫과 나머지가 한꺼번에 들어가는 양을 알려 준다.

여섯 칸을 원형으로 놓고 출발 칸도 다시 만날 때 씨앗을 놓는다고 정하자. 씨앗 14개를 분배하면 두 바퀴에 12개가 필요하고 두 개가 남는다. 따라서 모든 칸에 두 개씩 놓인 뒤 다음 두 칸에 하나씩 더 놓인다.

이 규칙에서는 $14 = 2 \times 6 + 2$라는 나눗셈이 이동을 압축한다. 몫 2는 모든 칸에 공통으로 더해지는 양이고 나머지 2는 추가로 한 개씩 받는 칸의 수다. 출발 칸을 건너뛰는 다른 규칙을 쓴다면 분모가 달라질 수 있으므로 주의한다.

끝나는 칸도 나머지로 찾을 수 있다. 다음 칸부터 세었을 때 두 번째 칸에서 마지막 씨앗을 놓는다. 다만 나머지가 0이면 다음 칸이 아니라 한 바퀴의 마지막 칸에서 끝난다. 경계 사례를 직접 그려 확인하면 실수가 줄어든다.

씨앗 수가 여섯의 배수일 때 마지막 씨앗은 출발 칸에 놓인다. 여섯 칸 모두를 한 바퀴에 방문한다는 규칙 때문이다. 실제 게임에서 출발 칸을 건너뛰면 이 결론이 달라진다는 점도 함께 확인한다.



$$14 = 2 \times 6 + 2$$

- 몫 2: 여섯 칸 모두 2개씩
- 나머지 2: 1번과 2번에 1개 더

마지막 씨앗은 2번 칸

출발 칸도 다시 만나면 놓는 규칙

씨앗 14개를 여섯 칸에 두 바퀴 돌리고 남은 2개를 놓기

> **탐구**
>
> 같은 여섯 칸 모형에서 씨앗 20개를 놓으면 각 칸의 기본 증가량과 추가 칸 수는?

풀이와 확인

$20 = 3 \times 6 + 2$이므로 모든 칸에 세 개씩 놓고 다음 두 칸에 하나씩 더 놓는다. 마지막 칸은 출발점 다음의 두 번째 칸이다.

선택의 나무 만들기

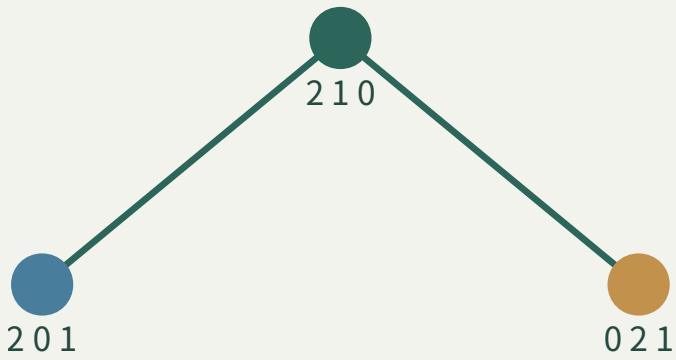
가능한 다음 상태를 빠짐없이 펼친다.

상태가 2와 1과 0인 세 칸 원형 모형을 생각하자. 비어 있지 않은 칸만 선택할 수 있으므로 가능한 첫 선택은 1번과 2번이다. 1번의 두 씨앗을 옮기면 0과 2와 1이 되고 2번의 한 씨앗을 옮기면 2와 0과 1이 된다.

두 결과에서 다시 가능한 선택을 펼치면 나무 모양의 탐색도가 된다. 각 선에는 어떤 칸을 골랐는지 적는다. 상태 이름만 적고 선택을 생략하면 같은 결과에 이르는 서로 다른 동작을 구별하기 어렵다.

탐색을 깊게 할수록 경우의 수가 빠르게 늘 수 있다. 그러나 같은 상태가 다시 나타나면 이미 계산한 결과를 재사용할 수도 있다. 이때 씨앗 배열뿐 아니라 차례와 종료 조건까지 같아야 같은 상태로 취급할 수 있다.

두 갈래를 비교할 때 나무의 가로 위치는 우열을 뜻하지 않는다. 왼쪽에 그린 선택이 더 좋은 수라는 의미는 없다. 선택의 이름과 결과 값을 선명하게 적어 도해의 배치가 판단을 대신하지 않게 한다.



첫 선택 두 가지가 만드는 다음 상태의 분기

> **탐구**
>
> 처음 상태 2와 1과 0에서 3번 칸을 선택할 수 없는 이유는?

풀이와 확인

선택할 수 있는 칸을 비어 있지 않은 칸으로 정했기 때문이다. 이동할 씨앗이 없는 동작을 허용하면 아무 변화 없이 차례만 넘기는 등 다른 게임이 된다.

순환과 종료 조건

가능한 상태가 적어도 게임이 저절로 끝나는 것은 아니다.

두 칸 모형에서 한 씨앗을 다음 칸으로 옮기는 규칙만 사용하면 상태 1과 0 다음은 0과 1이며 그다음은 다시 1과 0이다. 가능한 상태는 두 개뿐이지만 이동은 끝없이 반복할 수 있다. 상태 수가 유한하다는 사실만으로 종료를 보장할 수 없다.

실제 게임에는 잡기나 금지 수 및 종료 조건이 따로 들어갈 수 있다. 이러한 규칙은 재미뿐 아니라 반복을 어떻게 다루는지에도 영향을 준다. 새 학습 게임을 만들 때에는 언제 끝나는지를 처음부터 명시해야 한다.

종료를 증명하려면 매번 줄어드는 음이 아닌 정수량 같은 장치를 찾을 수 있다. 하지만 씨앗 총수는 이 모형에서 일정하므로 종료 증명에 바로 쓸 수 없다. 불변량과 감소량은 서로 다른 역할을 한다.

같은 상태로 돌아왔다는 것을 증명하려면 모든 칸과 차례가 처음과 같은지 확인한다. 일부 칸만 같아서는 순환이 아니다. 기록을 완전한 상태 단위로 저장하면 반복을 더 정확하게 찾을 수 있다.



두 상태를 번갈아 반복할 수 있는 단순 이동 모형

탐구

씨앗 총수가 유지된다는 사실만으로 게임이 끝난다고 증명할 수 있을까?

풀이와 확인

없다. 총수 보존은 같은 상태를 반복하는 것을 막지 못한다. 종료를 보이려면 반복을 금지하는 규칙이나 매번 감소하는 양 등 별도의 이유가 필요하다.

당장의 이익과 다음 수

전략을 평가할 때 상대의 선택까지 생각한다.

학습 게임에 점수 규칙을 추가하면 많은 씨앗을 즉시 얻는 수가 좋아 보일 수 있다. 그러나 다음 차례에 상대가 더 큰 이득을 얻는다면 현재 점수만으로 최선의 수를 고를 수 없다. 전략은 연속된 선택의 결과를 비교하는 활동이다.

가상의 선택 A는 지금 4점을 얻지만 상대에게 5점을 허용한다. 선택 B는 지금 2점을 얻고 상대에게 1점을 허용한다. 두 차례의 점수 차만 평가한다면 A는 −1이고 B는 1이므로 B가 낫다. 이 수치는 실제 전통 게임의 기록이 아닌 전략 비교용 예다.

평가 기준을 바꾸면 선택도 달라질 수 있다. 승패만 중요한지 점수 차가 중요한지와 앞으로 몇 차례를 살필지가 영향을 준다. 계산 결과를 제시할 때에는 무엇을 최대화했는지 함께 밝혀야 다른 사람이 결론을 검토할 수 있다.

상대가 항상 가장 큰 이득을 택한다고 가정했는지도 밝혀야 한다. 상대의 선택 모형이 바뀌면 평가가 달라질 수 있다. 전략의 수치는 규칙과 상대 행동에 관한 가정 위에서 계산된다.

선택	내 점수	상대 점수	차
A	4	5	−1
B	2	1	1
C	5	3	2

당장의 이익과 다음 수의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

선택 C가 지금 5점을 얻고 상대에게 3점을 허용한다면 같은 기준에서 평가는?

풀이와 확인

두 차례의 점수 차는 5 − 3 = 2다. A의 −1과 B의 1보다 크므로 주어진 짧은 평가 기준에서는 C가 가장 좋다. 더 먼 결과까지 좋다는 보장은 없다.

씨앗의 배치를 빠짐없이 세기

가능한 상태와 실제로 도달하는 상태를 나누어 생각한다.

씨앗 네 개를 이름이 붙은 세 칸에 놓는 학습 모형을 생각한다. 씨앗끼리는 구별하지 않으며 빈칸도 허용한다. 이때 상태는 첫 칸과 둘째 칸 및 셋째 칸의 수량으로 정해진다. 같은 네 씨앗이라도 어느 칸에 놓였는지에 따라 다른 상태다.

첫 칸에 놓인 수를 0부터 4까지 나누어 세면 목록을 빠뜨리지 않을 수 있다. 첫 칸이 0이면 남은 네 개를 둘째와 셋째 칸에 나누는 방법은 다섯 가지다. 첫 칸이 1이면 네 가지이며 이후 세 가지와 두 가지 및 한 가지가 남는다.

전체 상태 수는 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15다. 이 수는 분배 규칙을 실행하지 않아도 셀 수 있다. 특정 시작 상태에서 씨앗을 뿌리는 이동을 적용했을 때 열다섯 상태가 모두 나타나는지는 별도의 문제다. 수량 조건만 맞는 상태와 규칙으로 도달 가능한 상태를 구분한다.

상태를 세면 기록 공간의 크기를 미리 가늠할 수 있다. 열다섯 칸의 표를 만들고 실제로 만난 상태에만 표시해 보자. 같은 상태가 다시 나온 뒤에도 다음에 어떤 칸을 선택하는지에 따라 다른 진행이 가능하다. 상태가 반복되었다는 사실만으로 모든 미래가 같아지지는 않는다.

첫 칸의 씨앗	나머지 두 칸의 배치 수
0	5
1	4
2	3
3	2
4	1

탐구

씨앗 다섯 개를 세 칸에 같은 조건으로 놓으면 상태는 몇 개인가?

풀이와 확인

첫 칸을 0부터 5까지 정하면 나머지 배치 수는 6과 5와 4와 3과 2와 1이다. 합은 21이다. 이동 규칙으로 실제 도달하는 상태 수가 21이라는 뜻은 아니다.

[MANCALA] 대영박물관 소장 만칼라판. Af1996 17 1 a bl

규칙 카드로 게임 검증하기

다른 사람이 같은 상태를 만들면 설명이 작동한 것이다.

게임을 소개하는 카드에는 판의 칸 수와 시작 씨앗 수를 적는다. 다음에 선택할 수 있는 칸과 이동 방향 및 출발 칸을 다시 만났을 때의 처리 방법을 적는다. 마지막에는 잡기와 종료 및 승리 조건을 적는다. 어느 한 가지가 빠져도 서로 다른 게임이 될 수 있다.

시험자는 카드만 보고 첫 세 차례를 실행한다. 제작자는 결과를 고치기 전에 어느 지시가 모호했는지 기록한다. 규칙을 머릿속으로 알고 있다는 사실과 다른 사람이 읽어 실행할 수 있다는 사실은 다르다.

문화 소개에는 출처를 따로 두고 학습용 변경 사항을 표시한다. 단순화하면서 뺀 규칙이 무엇인지 알면 독자는 실제 게임을 배울 때 혼란을 줄일 수 있다. 좋은 수학 활동은 놀이를 존중하면서도 분석에 필요한 조건을 명확하게 정한다.

규칙을 수정한 뒤에는 같은 시작 상태로 다시 시험한다. 시작값까지 함께 바꾸면 결과의 차이가 규칙 때문인지 입력 때문인지 알기 어렵다. 한 번에 한 조건을 바꾸는 비교가 이해에 도움이 된다.

규칙 항목	확인할 내용
시작	칸 수와 씨앗 수
이동	방향과 건너뛰는 칸
판정	잡기와 종료와 승리

규칙 카드로 게임 검증하기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

출발 칸을 다시 만나면 씨앗을 놓는지 여부가 빠졌다면 어떤 계산이 달라질까?

풀이와 확인

여러 바퀴를 도는 분배의 주기와 마지막 칸이 달라진다. 여섯 칸 모두에 놓는지 다섯 칸만 사용하는지에 따라 몫과 나머지의 기준도 바뀐다.

[MANCALA] 대영박물관 소장 만칼라판. Af1996 17 1 a bl

아프리카관 / 75

직조의 격자와 무늬

좁은 띠가 넓은 천이 되는 과정

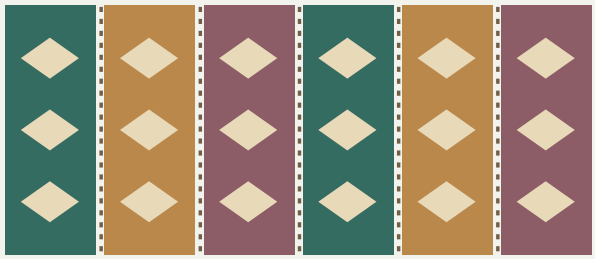
재료의 연결 방식은 완성 무늬의 구조를 만든다.

메트로폴리탄미술관은 켄테 천을 설명하며 따로 짠 좁은 띠를 이어 큰 천을 만드는 과정을 소개한다. 아산테와 에웨의 작품을 같은 물건처럼 합치기보다 소장품의 제작 공동체와 구조를 각각 확인해야 한다. 색과 무늬의 의미도 구체적인 자료를 통해 읽는다.

이 장의 격자 무늬는 실제 전통 도안을 그대로 복제하지 않은 현대 학습용 설계다. 띠의 폭과 반복 단위 및 대칭을 수학적으로 살펴본다. 계산 도해가 직조자의 기술과 문화적 의미를 모두 설명하지는 못한다.

띠를 이어 붙일 때에는 무늬의 시작 위치가 맞아야 한다. 각각의 띠가 정확하게 짜였어도 길이가 다르거나 반복 단위의 위상이 어긋나면 전체 배열이 달라진다. 부분의 규칙과 조립의 규칙을 함께 생각해야 완성된 구조를 이해할 수 있다.

띠를 옆으로 돌려 붙이면 세로 무늬가 가로 무늬로 보일 수 있다. 제작 때의 실 방향과 전시 때의 화면 방향을 구별한다. 완성품의 사진만으로 날실과 씨실을 단정하지 않고 제작 설명을 함께 읽는다.



전통 켄테 문양의 복제가 아닌 띠 조립 학습 모형. 점선은 이음 경계다.

탐구

같은 길이의 띠라도 무늬가 이어지지 않을 수 있는 이유는 무엇일까?

풀이와 확인

반복 무늬가 시작하는 위치나 방향이 다를 수 있기 때문이다. 길이뿐 아니라 반복 단위의 정렬도 맞추어야 경계에서 무늬가 이어진다.

[KENTE] 메트로폴리탄미술관. Asante Akan artist Wrapper

날실과 씨실을 격자로 나타내기

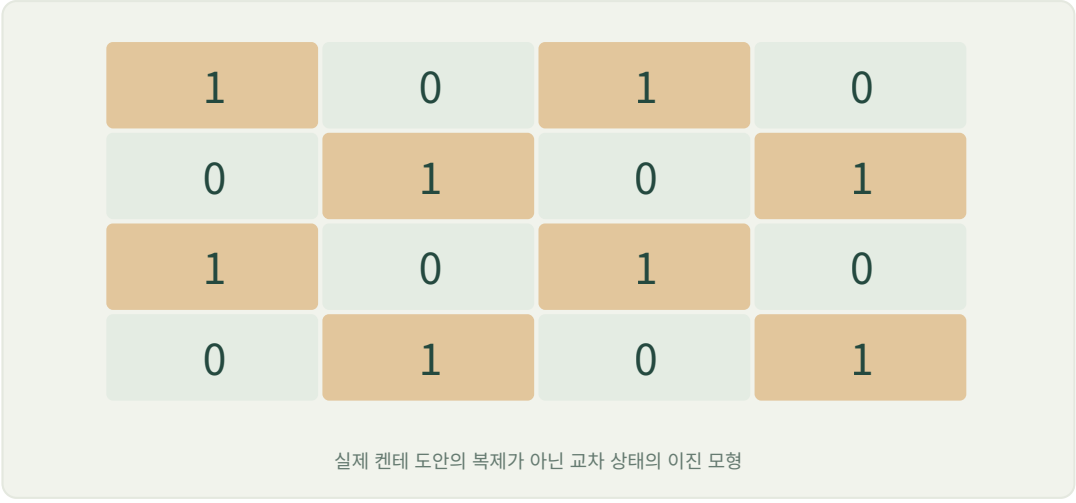
교차의 위아래를 두 값으로 기록한다.

서로 수직으로 놓인 실이 만나는 지점에서 어느 실이 위로 지나가는지 표시해 보자. 학습 모형에서는 날실이 위면 1이고 씨실이 위면 0으로 적는다. 두 값은 색이 아니라 교차 상태를 나타낸다. 실제 직조는 실의 재료와 장력 등 더 많은 조건을 포함한다.

가장 단순한 번갈아 교차 모형에서는 첫 줄을 1과 0으로 반복하고 다음 줄은 0과 1로 반복한다. 네 칸씩 네 줄을 만들면 체커판 같은 배열이 된다. 옆 칸과 아래 칸이 모두 반대 값이라는 규칙을 확인할 수 있다.

같은 이진표를 사용해도 실의 색이 달라지면 보이는 무늬가 바뀔 수 있다. 구조 정보와 색 정보는 별도의 층위다. 따라서 직조 도안을 기록할 때 0과 1이 어떤 성질을 나타내는지 범례를 반드시 붙인다.

0과 1을 모두 뒤집으면 위로 지나가는 실이 서로 바뀐다. 이때 표의 규칙성은 유지되지만 교차 구조는 반대가 된다. 같은 기하 배열이라고 해서 제작상의 앞뒷면까지 같다고 볼 수는 없다.



실제 켄테 도안의 복제가 아닌 교차 상태의 이진 모형

탐구

번갈아 교차하는 모형에서 첫 칸이 1이면 바로 오른쪽과 바로 아래는 무엇일까?

풀이와 확인

둘 다 0이다. 대각선 아래 오른쪽은 다시 1이 된다. 가로와 세로로 한 번씩 바뀌면 두 번 바뀐 셈이기 때문이다.

반복 단위의 최소 길이

눈에 띄는 묶음이 언제나 가장 작은 단위는 아니다.

ABABAB라는 무늬는 AB를 세 번 반복한 것으로 볼 수 있다. ABAB를 반복 단위로 택해도 일부 구간을 설명할 수 있지만 가장 작은 반복 단위는 AB다. 최소 단위를 찾으면 긴 무늬를 짧게 기록하고 필요한 재료를 계산하기 쉽다.

ABBABBABB의 경우에는 ABB가 최소 반복 단위다. A와 B 두 종류의 기호만 사용한다고 주기가 반드시 2인 것은 아니다. 기호의 종류 수와 배열의 주기는 서로 다른 정보다.

유한한 천 조각에서는 끝이 잘려 완전한 반복이 보이지 않을 수 있다. 관찰한 부분이 ABBAB라면 뒤에 B가 올 것이라고 예상할 수 있지만 실제 더 긴 무늬가 무엇인지는 추가 자료가 필요하다. 반복 규칙의 추론에도 자료 범위를 표시한다.

서로 다른 색을 같은 기호로 합치면 원래 주기가 더 짧아 보일 수 있다. 색 A와 색 C를 모두 어두운색으로 기록하는 경우가 그렇다. 무늬의 정보를 줄인 방식이 반복 분석에 영향을 준다.

A	B	C	A	B	C
1	1	1	2	2	2

같은 세 기호 묶음이 이어지는 반복 단위

탐구

ABCABCABCABC의 최소 반복 단위와 반복 횟수는?

풀이와 확인

최소 단위는 ABC이며 네 번 반복된다. A만이나 AB만으로는 전체 배열을 같은 순서로 만들 수 없으므로 더 짧은 단위는 아니다.

평행이동으로 무늬 이어 붙이기

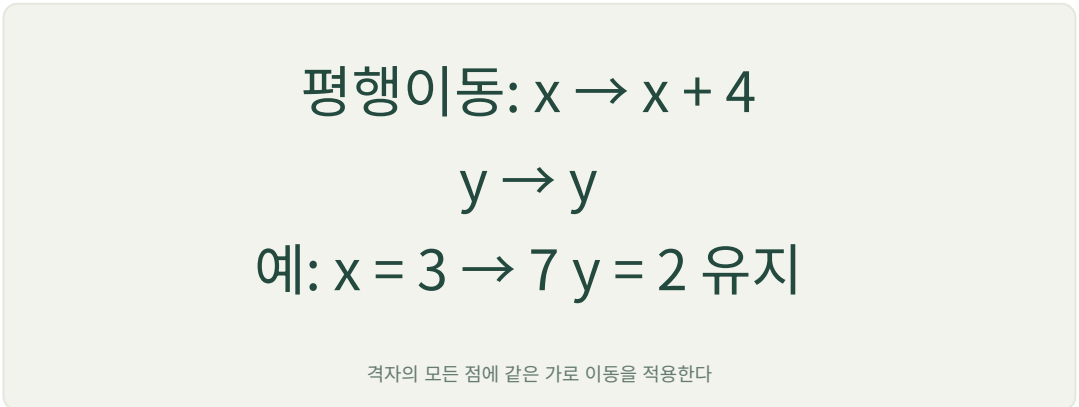
모양과 방향을 유지한 채 위치만 바꾼다.

격자 무늬의 작은 모티프를 오른쪽으로 네 칸 옮겨 복사한다고 하자. 각 점의 가로 좌표에 4를 더하고 세로 좌표는 그대로 둔다. 모티프의 크기와 방향이 유지되므로 이것은 평행이동이다. 단순히 비슷하게 다시 그리는 것과 구별된다.

모티프의 가로 폭이 네 칸이면 같은 이동을 반복해 빈틈없이 띠를 채울 수 있다. 폭이 다르면 겹치거나 사이가 벌어질 수 있으므로 이동량과 모티프의 실제 경계를 비교해야 한다. 그림의 중심 사이 거리만 보고 판단하지 않는다.

평행이동 대칭을 가진 무늬에서는 일정한 거리만큼 옮긴 뒤 원래 무늬와 겹친다. 다만 실제 천은 유한하므로 가장자리까지 무한히 이어지는 것은 아니다. 수학적 무늬는 가장자리 영향을 생략한 이상화라는 점을 함께 적는다.

오른쪽 네 칸 이동을 두 번 하면 오른쪽 여덟 칸 이동과 같다. 반대로 네 칸 이동한 뒤 왼쪽 네 칸 이동하면 원래 위치다. 평행이동의 합성은 이동량의 덧셈으로 간단하게 표현된다.



격자의 모든 점에 같은 가로 이동을 적용한다

탐구

점의 가로 좌표가 3이고 세로 좌표가 2일 때 오른쪽 네 칸 이동하면?

풀이와 확인

가로 좌표는 7이고 세로 좌표는 2다. 모든 점에 같은 이동을 적용해야 모양이 유지된다. 일부 점만 옮기면 도형이 변형된다.

반사와 회전을 구별하기

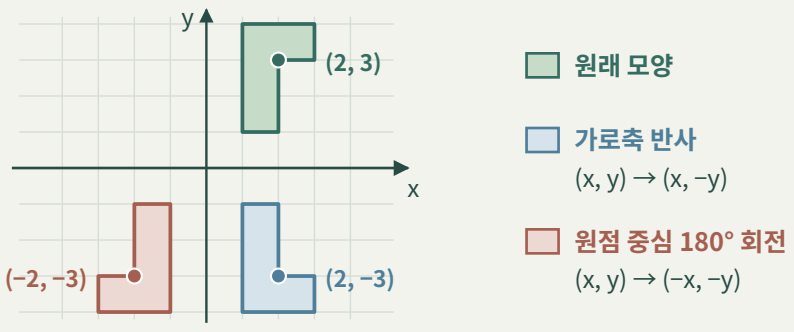
닮아 보이는 두 무늬도 뒤집는 방법은 다르다.

오른손 모양을 종이에서 돌리면 여전히 오른손 모양이다. 거울에 비추면 왼손처럼 보인다. 회전은 평면 안에서 방향을 돌리는 동작이고 반사는 기준선의 양쪽을 맞바꾸는 동작이다. 무늬를 비교할 때 어떤 변환이 필요한지 구별해야 한다.

가로축에 대한 반사는 가로 좌표를 유지하고 세로 좌표의 부호를 바꾼다. 원점 중심의 180° 회전은 두 좌표의 부호를 모두 바꾼다. 점 하나의 위치만 비교하기보다 비대칭 모티프의 여러 점을 함께 옮기면 차이가 드러난다.

대칭축처럼 보이는 선을 찾았으면 선 양쪽의 각 점이 같은 수직 거리에 있는지 검사한다. 색을 포함한 대칭을 말할 때에는 모양뿐 아니라 대응 위치의 색도 같아야 한다. 어떤 정보를 보존하는 대칭인지 범례에 적어 둔다.

모티프 자체가 대칭이면 서로 다른 변환이 같은 모습으로 보일 수 있다. 차이를 배우려면 비대칭인 작은 모양을 사용하는 편이 낫다. 예제를 고르는 일도 관찰하려는 성질에 맞추어야 한다.



같은 모양을 가로축에 반사한 결과와 180° 회전한 결과

탐구

x = 2와 y = 3인 점을 가로축에 반사한 결과와 180° 회전한 결과는?

풀이와 확인

반사하면 x = 2와 y = −3이다. 180° 회전하면 x = −2와 y = −3이다. 가로 좌표의 변화가 두 동작을 구별한다.

띠를 잇는 길이 계산

완성 폭과 재단 폭 사이에는 이음 부분이 있다.

학습용 천을 만들기 위해 폭 8 cm인 띠 여섯 개를 나란히 잇는다고 하자. 각 이음에서 전체 폭이 1 cm씩 줄어든다고 정하면 이음은 다섯 곳이다. 완성 폭은 $6 \times 8 - 5 \times 1 = 43$ cm가 된다. 띠의 수와 이음의 수는 하나 차이가 난다.

이음마다 줄어드는 1 cm는 두 띠에 걸친 총감소량으로 정의했다. 양쪽에서 각각 1 cm가 접힌다는 뜻으로 바꾸면 감소량은 2 cm가 되어 답도 달라진다. 실제 제작 계산에서는 시접의 정의를 정확하게 맞추어야 한다.

띠 수를 n이라 하면 같은 모형의 완성 폭은 $8n - (n - 1) = 7n + 1$이다. 문자식은 띠를 하나 늘릴 때 완성 폭이 7 cm씩 증가한다는 점을 보여 준다. 첫 띠에는 연결 손실이 없다는 예외도 식에 들어 있다.

완성 폭이 50 cm 이상이어야 한다면 $7n + 1 \geq 50$을 푼다. n은 정수이므로 최소 일곱 띠가 필요하고 완성 폭은 50 cm다. 제작 수량은 소수 해를 그대로 사용할 수 없다는 점을 확인한다.

$$\text{띠 } 6\text{개} \rightarrow \text{이음 } 5\text{곳}$$

$$\text{완성 폭} = 6 \times 8 - 5 \times 1$$

$$48 - 5 = 43\ \text{cm}$$

이음 하나의 총감소량을 1 cm로 정한 제작 모형

탐구

같은 규칙으로 띠 열 개를 이으면 완성 폭은 얼마일까?

풀이와 확인

이음 아홉 곳에서 9 cm가 줄어드므로 80 − 9 = 71 cm다. 식 7n + 1에 n = 10을 넣어도 같은 결과가 나온다.

색의 비율과 실제 사용량

무늬 칸의 비율과 실 길이의 비율은 같지 않을 수 있다.

가상의 무늬 한 주기가 빨강 세 칸과 파랑 두 칸으로 이루어졌다면 빨강 칸의 비율은 3/5다. 열 주기를 그리면 전체 50칸 중 빨강은 30칸이다. 이 계산은 같은 넓이의 색칠 칸을 세는 문제다.

실제 직조에서 필요한 빨강 실의 길이가 전체의 정확히 3/5라고 곧바로 결론 내릴 수는 없다. 실이 보이지 않는 뒤쪽으로 지나가거나 교차 구조에 따라 길이가 달라질 수 있기 때문이다. 표면 색의 면적과 재료 사용량을 구별해야 한다.

재료량을 계산하려면 작은 시험 조각을 만들어 실제 실 길이를 재는 방법을 사용할 수 있다. 다만 가장자리 손실과 연결 부분이 큰 작품에서도 같은 비율로 늘어나는지 살펴야 한다. 면적 확대와 재료 소비를 연결할 때에는 추가 가정이 필요하다.

무늬 칸의 크기가 서로 다르면 칸 수의 비가 면적 비와 같지 않다. 빨강 칸이 파랑 칸보다 두 배 넓다면 넓이에 가중치를 주어야 한다. 무엇을 같은 단위 하나로 셌는지 먼저 확인한다.



실 길이가 아닌 같은 넓이의 색칠 칸 수 비교

탐구

같은 색칠 주기를 열두 번 반복하면 빨강 칸과 파랑 칸은 각각 몇 개일까?

풀이와 확인

빨강은 3 × 12 = 36칸이며 파랑은 2 × 12 = 24칸이다. 합은 60칸이고 빨강의 비율은 여전히 3/5다.

두 무늬가 다시 만나는 이음

주기와 시작 위치를 함께 알아야 무늬를 맞출 수 있다.

두 띠를 옆에 놓고 같은 높이에서 특징적인 색칸이 다시 만나는 지점을 찾는다. 첫 띠의 반복 길이는 여섯 칸이며 둘째 띠는 네 칸이라고 하자. 두 특징이 처음 위치에서 나란히 시작하면 다음 일치는 열두 칸 뒤다. 이는 두 반복 길이의 최소공배수다.

시작 위치가 다르면 주기만으로 답할 수 없다. 첫 띠의 특징이 0과 6과 12에 나타나고 둘째 띠의 특징이 2와 6과 10에 나타난다면 첫 일치는 6이다. 그다음 일치는 18이다. 공통 주기 열둘은 같지만 만나는 위치는 달라진다.

둘째 띠를 한 칸 더 옮겨 특징이 1과 5와 9에 나타나게 하면 두 특징은 만나지 않는다. 첫 띠의 위치는 모두 짝수이고 둘째는 모두 홀수이기 때문이다. 그림에서 자꾸 어긋나는 까닭을 짝홀의 조건으로 증명할 수 있다.

이 탐구는 특정 켄테 문양이나 직조자의 계산법을 재현하지 않은 창작 띠 모형이다. 실제 천을 이어 붙일 때에는 시접과 장력 및 무늬의 의미도 함께 고려한다. 수학은 여기서 반복 길이와 시작 위치가 만드는 정렬 조건을 설명한다.

첫 띠 위치	둘째 띠 위치	판단
0 + 6n	0 + 4m	12칸마다 일치
0 + 6n	2 + 4m	6에서 첫 일치
0 + 6n	1 + 4m	짝홀이 달라 불일치

탐구

주기가 8칸과 6칸인 두 띠가 같은 위치에서 시작하면 다음 일치는 언제인가?

풀이와 확인

두 수의 최대공약수는 2이므로 최소공배수는 $8 \times 6 \div 2 = 24$다. 8칸 무늬 세 번과 6칸 무늬 네 번이 끝나는 지점에서 다시 만난다.

[KENTE] 메트로폴리탄미술관. Asante Akan artist Wrapper

무늬 해설의 두 층위

수학적 변환과 문화적 의미에 각각 근거를 붙인다.

무늬가 좌우 대칭이라는 설명은 도형을 비교해 검산할 수 있다. 그 무늬가 특정한 격언이나 사회적 지위를 뜻한다는 설명은 제작 공동체와 작품 자료를 통해 확인해야 한다. 수학적 관찰만으로 문화적 의미까지 알아낼 수는 없다.

전시 카드를 만들 때 위쪽에는 제작자와 공동체 및 자료 출처를 적는다. 아래쪽에는 반복 단위나 평행이동처럼 직접 분석한 내용을 적는다. 새로 만든 모티프라면 실제 전통 문양의 이름을 붙이지 않고 학습용 창작 무늬라고 표시한다.

이러한 분리는 서로의 가치를 낮추지 않는다. 오히려 직조자의 기술과 작품의 의미를 존중하면서 수학적 질문을 구체적으로 할 수 있게 한다. 아름다운 무늬를 기하학의 예시로만 소비하지 않고 만든 사람과 제작 과정을 함께 읽는다.

창작 도안을 전시할 때에도 영감을 얻은 자료를 밝혀 둘 수 있다. 출처를 표시하는 것과 실제 전통 도안이라고 주장하는 것은 다르다. 새 작품의 성격과 참고한 문화 자료를 함께 정확하게 설명한다.

설명 층위	필요한 근거
평행이동과 대칭	도형의 대응 검사
이름과 상징	공동체와 작품 자료
재료와 제작	직조 과정의 기록

무늬 해설의 두 층위의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

대칭 도형을 발견했다는 이유로 그 무늬의 이름이나 상징을 추정하면 왜 곤란할까?

풀이와 확인

같은 기하 형태도 공동체와 상황에 따라 다른 이름과 의미를 가질 수 있기 때문이다. 상징 해석은 도형 자체만으로 결정되지 않는다.

[KENTE] 메트로폴리탄미술관. Asante Akan artist Wrapper

아프리카관 / 76

반복과 자기닮음의 모형

닮은 부분을 찾는 새로운 렌즈

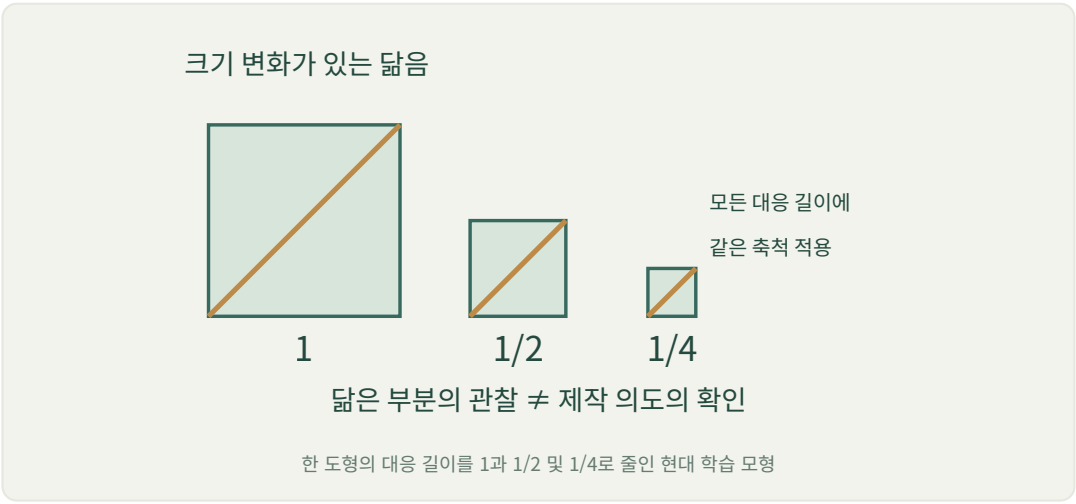
현대의 분석 개념과 전통의 실제 설계를 구별한다.

론 에글래시의 연구와 교육 자료는 아프리카 여러 지역의 설계에서 반복과 크기 변화의 관계를 살펴본다. 이 관점은 기하학을 일상적 제작 활동과 연결하는 계기가 된다. 그러나 모든 건축이나 무늬가 프랙털이라는 식으로 대륙 전체를 하나의 특징에 묶어서는 안 된다.

자기닮음은 부분의 모양이 전체와 닮은 관계를 말한다. 실제 물건에서는 재료의 굵기와 제작 한계 때문에 반복이 유한하다. 무한히 작은 부분까지 같은 규칙이 이어지는 수학적 도형은 현실의 물건을 분석하기 위한 이상화다.

이 장은 특정 마을이나 작품을 정확하게 복제하지 않고 크기가 줄어드는 사각형과 분기 모형을 사용한다. 원래 설계자의 의도는 현장 기록으로 확인해야 하며 오늘의 수식만으로 거꾸로 단정하지 않는다. 계산은 모형의 성질을 밝히는 데 집중한다.

자기닮음 여부를 비교할 때에는 먼저 어떤 변환을 허용할지 정한다. 확대와 축소만 허용하는지 회전도 허용하는지에 따라 대응이 달라진다. 같은 모양이라는 말에 포함된 조건을 명시한다.



한 도형의 대응 길이를 1과 1/2 및 1/4로 줄인 현대 학습 모형

> **탐구**
>
> 같은 크기의 모양이 반복되는 것만으로 자기닮음의 크기 변화를 설명할 수 있을까?

풀이와 확인

그것만으로는 부족하다. 같은 크기의 반복과 다른 크기 사이의 닮음은 구분해야 한다. 어떤 부분이 어떤 확대율로 전체와 대응하는지 보여 주어야 한다.

[FRACTAL] 노스캐롤라이나대학교 그린즈버러. African Fractals. Ron Eglash 교육 자료

길이를 절반으로 줄이기

같은 축척을 모든 방향에 적용해야 닮음이 유지된다.

한 변이 16인 정사각형을 절반 크기로 줄이면 한 변은 8이 된다. 다시 절반으로 줄이면 4이고 다음은 2다. 길이는 16과 8과 4와 2로 변하며 매번 앞의 값에 1/2을 곱한다. 같은 비율이 반복되는 수열이다.

가로만 절반으로 줄이고 세로를 그대로 두면 정사각형은 직사각형이 된다. 원래 도형과 닮지 않으므로 자기닮음 모형의 축소라고 부를 수 없다. 길이의 비를 한 방향에서만 확인하지 않고 모든 대응 길이에서 확인한다.

실제 도안을 줄일 때에는 선의 두께를 어떻게 다룰지도 정해야 한다. 선까지 같은 비율로 줄이면 인쇄에서 보이지 않을 수 있다. 읽기 쉬운 도해를 위해 선 두께를 유지했다면 도해의 선폭이 실제 축척을 따르지 않는다는 점을 이해해야 한다.

처음 도형과 두 번째 축소 도형의 길이 비는 1/4이다. 한 번의 비율 1/2을 두 번 곱한 결과다. 단계 번호와 길이의 비를 표로 정리하면 누적 축척과 한 단계 축척을 혼동하지 않는다.



같은 비율로 줄어드는 정사각형의 상대 크기

탐구

한 변이 24인 정사각형을 세 번 연속 절반으로 줄이면 마지막 변의 길이는?

풀이와 확인

$24 \times (1/2)^3 = 3$이다. 단계마다 12와 6과 3이 된다. 세 번 줄였다는 말은 처음 도형을 포함해 도형 네 개를 나열한다는 뜻이다.

축소한 조각들의 전체 넓이

조각 수와 조각 하나의 넓이를 함께 곱한다.

한 정사각형을 길이가 절반인 작은 정사각형 네 개로 나누면 각 조각의 넓이는 원래의 1/4이다. 네 조각의 합은 1이므로 원래 넓이를 모두 채운다. 길이가 절반이라는 사실만 보고 각 조각의 넓이도 절반이라고 계산하면 전체가 두 배가 되는 모순이 생긴다.

작은 정사각형 세 개만 남기는 모형에서는 남은 넓이가 3/4이다. 남긴 각 조각에서 같은 규칙을 한 번 더 적용하면 전체 넓이는 다시 3/4배가 되어 9/16이 된다. 같은 모양의 축소와 남기는 조각 수가 넓이의 변화를 함께 결정한다.

이 도형은 실제 전통 건축의 평면을 설명하는 것이 아니라 반복 규칙의 학습 모형이다. 현실의 공간에는 길과 출입구 및 기능 같은 조건이 있어 단순한 면적 비만으로 설계를 설명할 수 없다.

남기는 세 조각이 서로 겹치지 않는다는 조건도 필요하다. 겹친 부분이 있으면 조각별 넓이를 단순히 더할 때 중복 계산한다. 개수와 축척만 아니라 조각의 배치가 전체 넓이에 영향을 준다.

$$\text{남는 비율} = 3 \times (1/2)^2 = 3/4$$

$$\text{두 단계: } (3/4)^2 = 9/16$$

$$256 \times 9/16 = 144$$

길이 축척과 조각 수를 함께 사용한 넓이 계산

탐구

처음 넓이가 256일 때 매 단계 3/4씩 남기면 두 단계 뒤 넓이는?

풀이와 확인

256 × 3/4 × 3/4 = 144다. 첫 단계는 192이며 둘째 단계는 그 3/4인 144다. 처음 넓이에서 같은 양을 반복해 빼는 과정이 아니다.

분기하는 나무의 개수

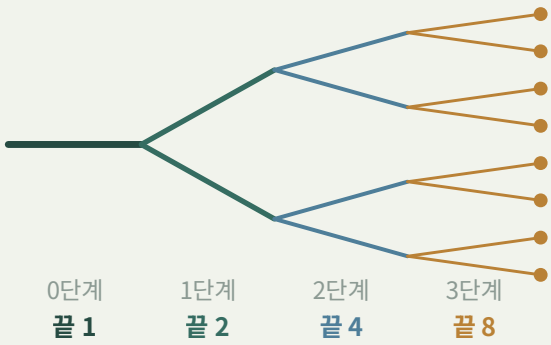
각 끝에서 같은 수로 갈라지면 곱셈이 반복된다.

학습용 분기 모형에서 첫 줄 하나의 끝이 두 갈래로 나뉜다고 하자. 한 번 분기한 끝은 2개이고 두 번 분기하면 4개이며 세 번 분기하면 8개다. n번 뒤의 끝점 수는 2^n이다. 각 끝이 모두 같은 규칙으로 갈라진다는 조건이 필요하다.

전체 선분 수는 마지막 끝점 수와 다르다. 처음 선분을 포함하고 세 번 분기했다면 선분은 1 + 2 + 4 + 8 = 15개다. 끝부분만 세는지 누적된 전체를 세는지에 따라 답이 달라진다.

실제 나무나 공간 조직은 모든 가지가 같은 횟수로 분기하지 않을 수 있다. 이 모형의 목적은 균일한 반복 규칙의 결과를 계산하는 데 있다. 현실의 불균등함을 오차로 버리지 않고 다른 설계 조건을 알려 주는 정보로 볼 수 있다.

세 번 분기한 모형에서 마지막 가지 한 개가 빠지면 끝점 수는 7개가 된다. 균일한 2^n 공식의 조건이 깨진 사례다. 실제 자료가 공식과 다를 때에는 계산 실수뿐 아니라 모형의 가정도 점검한다.



n단계 뒤 끝점 수 = 2^n

3단계 끝점: $2^3 = 8$

전체 선분 수

1 + 2 + 4 + 8 = 15

각 끝이 두 갈래로 나뉘며 끝점이 1, 2, 4, 8로 늘어나는 나무

탐구

네 번 분기한 끝점 수와 처음 선분을 포함한 전체 선분 수는?

풀이와 확인

끝점은 $2^4 = 16$개다. 전체 선분은 1 + 2 + 4 + 8 + 16 = 31개다. 두 수는 서로 다른 대상을 세므로 같은 답이 될 필요가 없다.

전체 길이가 늘어나는 조건

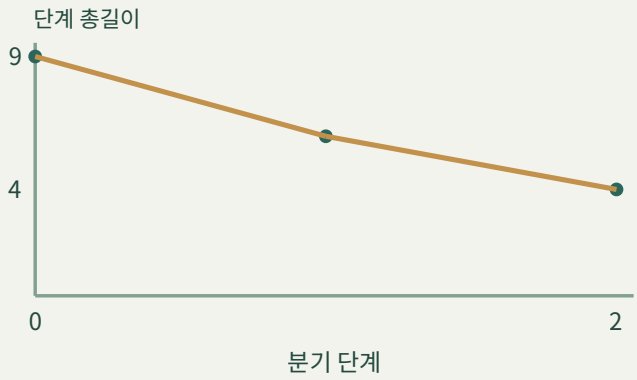
가지 수가 늘어도 각 가지가 짧아지는 효과를 함께 보아야 한다.

각 가지가 두 개로 갈라지고 새 가지의 길이는 이전 가지의 1/3이라고 하자. 한 단계의 새 가지 총길이는 이전 단계 총길이의 2/3이 된다. 개수는 두 배지만 길이는 각각 1/3이므로 두 효과를 곱해야 한다.

처음 길이가 9이면 다음 단계의 두 가지는 각각 3이고 합은 6이다. 그다음 네 가지는 각각 1이므로 합은 4다. 단계별 총길이가 9와 6과 4로 줄어든다. 가지가 많아진다는 인상만으로 전체 길이가 커진다고 판단하면 틀린다.

축소 비율이 1/2이면 단계별 총길이는 일정하고 3/4이면 3/2배로 늘어난다. 조각 수와 축척의 곱을 비교하면 증가와 감소의 경계를 찾을 수 있다. 이 분석은 선분 길이에 관한 것이며 넓이에는 축척의 제곱이 들어간다.

단계별 길이와 지금까지의 누적 길이는 다르다. 9와 6과 4를 모두 합하면 19다. 단계별 값이 줄어들어도 누적 합은 계속 늘 수 있으므로 그래프의 세로축이 무엇을 뜻하는지 명시한다.



두 갈래 분기와 1/3 축소를 함께 적용한 길이 변화

탐구

세 갈래로 나뉘고 각 길이가 1/4이 되면 단계별 총길이는 어떻게 변할까?

풀이와 확인

3 × 1/4 = 3/4배가 되므로 줄어든다. 가지 수가 늘어도 각 길이의 감소가 더 크게 작용한 결과다.

차원이라는 수를 조심해서 읽기

같은 모양의 복사본 수와 축척 사이의 관계를 본다.

선분 하나는 길이를 절반으로 줄인 선분 두 개로 채울 수 있다. 정사각형 하나는 같은 축척의 정사각형 네 개로 채울 수 있다. 이 관계를 $N = 2^D$로 쓰면 선분은 $D = 1$이고 정사각형은 $D = 2$다. N은 필요한 복사본 수다.

축척이 1/2인 복사본 세 개로 이루어진 이상적인 자기닮음 모형에서는 $2^D = 3$이 된다. 따라서 D는 1과 2 사이에 있다. 이 수는 도형의 채움 정도를 비교하는 한 방식이지만 모든 실제 무늬에 그대로 부여할 수 있는 값은 아니다.

현실의 유한한 물체에 차원을 추정하려면 어떤 길이 범위에서 어떤 측정법을 썼는지 밝혀야 한다. 사진 한 장에서 닮은 모양이 보인다는 이유만으로 정확한 비정수 차원을 선언하지 않는다. 이 장의 식은 조건이 정해진 이상적 모형을 위한 설명이다.

이상적인 자기닮음 차원 식은 조각의 겹침 등 조건을 살펴 사용한다. 아무 복잡한 그림에서 복사본 수를 대충 세어 넣으면 의미 있는 값이 나오지 않는다. 먼저 모형의 정확한 생성 규칙이 필요하다.

대상	1/2 축척 복사본 수	D
선분	2	1
정사각형	4	2
정육면체	8	3

차원이라는 수를 조심해서 읽기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

축척 1/2의 복사본 수가 8인 입체 모형에서는 D가 얼마일까?

풀이와 확인

$2^3 = 8$이므로 D = 3이다. 선분과 정사각형 및 정육면체의 사례를 비교하면 길이 축척에 따른 조각 수의 차이를 이해할 수 있다.

유한한 반복의 끝을 정하기

화면의 점과 실제 재료에는 최소 크기가 있다.

한 변이 128픽셀인 정사각형을 계속 절반으로 줄이면 64와 32와 16을 거쳐 1픽셀이 된다. 일곱 번 줄인 결과가 1픽셀이므로 그보다 작은 같은 모양을 화면에서 분명하게 구별하기 어렵다. 수학적 무한 반복과 표시 가능한 반복 수는 다르다.

종이 오리기에서도 가위의 두께와 종이의 강도가 한계를 만든다. 반복을 멈추는 조건을 한 변이 5 mm보다 작아지기 전이라고 정하면 재현 가능한 제작 지침이 된다. 단순히 아주 작게라는 말보다 수치와 조건을 적는 편이 좋다.

디지털 도해에서는 단계 수를 바꾸어 비교할 수 있지만 더 많은 단계가 언제나 더 유익한 것은 아니다. 작은 선이 겹쳐 무늬가 검게 뭉치면 구조를 읽기 어렵다. 설명하려는 관계를 보여 주는 단계 수를 선택하는 것도 편집의 판단이다.

파일을 확대해서 보더라도 원본의 정보가 무한히 늘지는 않는다. 작은 비트맵의 픽셀을 크게 보여 주는 것과 새로운 세부를 계산하는 벡터 도형은 다르다. 확대 기능의 성격에 맞게 그림을 읽는다.



탐구

한 변 80 mm를 절반씩 줄이되 5 mm까지 허용하면 몇 번 줄일 수 있을까?

풀이와 확인

80에서 40과 20과 10과 5로 이어지므로 네 번이다. 한 번 더 줄이면 2.5 mm가 되어 정한 최소 크기보다 작아진다.

문화 자료를 바탕으로 모형 쓰기

닮음을 발견한 단계와 의도를 확인한 단계를 분리한다.

모형 보고서에는 먼저 어떤 자료의 어느 부분을 관찰했는지 적는다. 그다음 크기가 다른 부분 사이에서 어떤 대응을 찾았는지 그림으로 보인다. 마지막에는 복사본 수와 축척을 어떻게 정했는지 설명한다. 이 순서가 있어야 독자가 분석 과정을 따라갈 수 있다.

설계자가 의도적으로 같은 수학 규칙을 사용했다고 주장하려면 별도의 증언이나 제작 기록이 필요하다. 관찰자가 현대 개념으로 설명할 수 있다는 사실과 제작자의 개념이 같다는 사실은 다르다. 두 종류의 지식을 구별하면서 서로 대화하게 할 수 있다.

보고서의 결론에는 모형이 놓친 기능도 적는다. 집의 배치는 통로와 생활 방식에 영향을 받고 직조는 재료와 기술에 영향을 받는다. 기하학적 관계는 중요한 한 측면이지만 대상을 완전히 대신하는 설명은 아니다.

모형이 맞지 않는 부분을 따로 모아 보면 새로운 질문이 생긴다. 반복이 끊기는 경계나 다른 크기의 공간이 실제 기능과 관련될 수 있다. 어긋난 부분도 대상의 구조를 알려 주는 자료다.

분석 단계	확인할 근거
형태 관찰	대응하는 부분
수학 모형	축척과 복사본 수
의도 해석	제작자의 설명과 기록

문화 자료를 바탕으로 모형 쓰기의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

사진에서 비슷한 도형 세 개를 찾았을 때 바로 말할 수 있는 것과 더 필요한 것은?

풀이와 확인

관찰한 부분들의 형태가 비슷하다는 점은 말할 수 있다. 정확한 축척과 설계자의 의도를 주장하려면 측정 자료와 제작 맥락이 추가로 필요하다.

[FRACTAL] 노스캐롤라이나대학교 그린즈버러. African Fractals. Ron Eglash 교육 자료

아프리카관 / 77

오늘의 수학과 열린 탐구

아프리카 수학을 현재형으로 읽기

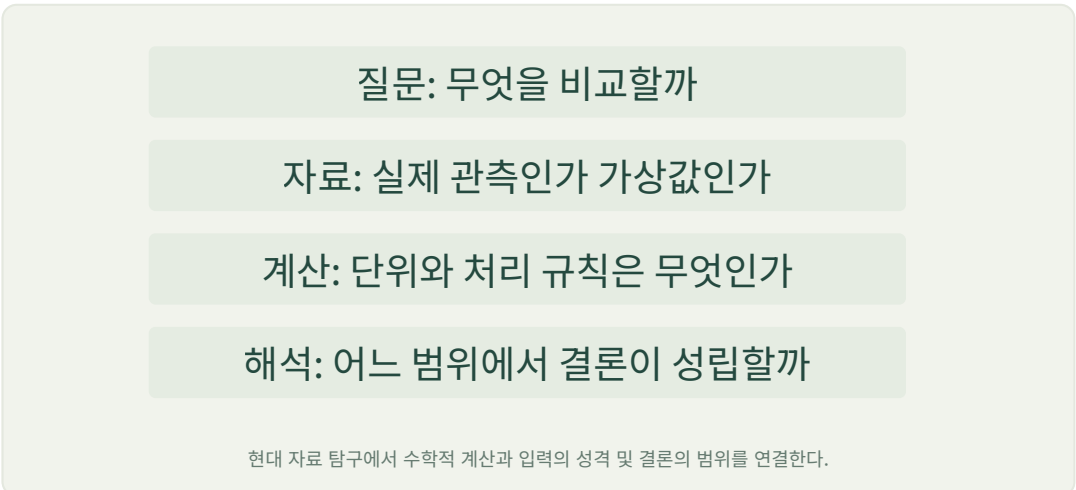
과거의 유산과 오늘의 연구를 함께 바라본다.

아프리카 수학을 오래된 유물과 전통 놀이로만 소개하면 오늘의 연구자와 교육기관이 보이지 않는다. 아프리카수리과학원 AIMS는 수리과학 교육과 연구를 연결하는 기관망의 사례다. 이 책의 마지막 장은 역사 소개에서 배운 정확한 기록과 검산을 현대적인 자료 탐구에 연결한다.

여기서 사용하는 교통 시간과 강수량 및 학생 수는 실제 지역을 평가하려고 수집한 통계가 아니다. 계산의 원리를 설명하기 위해 만든 작은 가상 자료다. 실제 아프리카 국가나 공동체의 상황을 이 숫자로 대표해서는 안 된다.

자료 분석에서는 수식만큼 질문의 범위가 중요하다. 무엇을 측정했고 누구의 경험이 빠졌는지를 확인해야 계산 결과가 의미를 가진다. 과거 자료의 해석에서 지켜 온 출처와 불확실성의 구분은 현재의 데이터에서도 그대로 필요하다.

2026년 10월에 확인한 AIMS의 교육 안내는 수리과학의 대학원 교육과 연구 및 대중 참여를 연결하는 기관망을 소개한다. 교육 과정과 기관망은 바뀔 수 있으므로 이 설명은 확인 당시의 기관 역할을 보여 주는 사례로 읽는다.



현대 자료 탐구에서 수학적 계산과 입력의 성격 및 결론의 범위를 연결한다.

탐구

가상 강수량 자료로 계산한 평균을 실제 지역의 기후라고 소개하면 왜 잘못일까?

풀이와 확인

숫자가 실제 관측에서 나온 것이 아니기 때문이다. 계산 절차가 정확해도 입력 자료의 성격을 바꾸어 해석할 수는 없다.

[AIMS] African Institute for Mathematical Sciences. 기관 소개와 교육 자료

평균만으로 보이지 않는 차이

같은 합계라도 값이 퍼진 모양은 다르다.

가상의 이동 시간 A는 10분과 20분과 30분이고 B는 19분과 20분과 21분이라고 하자. 두 집단 모두 평균은 20분이다. 그러나 A는 가장 빠른 값과 가장 느린 값의 차가 20분이며 B는 2분이다. 평균 하나로 두 상황의 변동을 알 수 없다.

범위는 최댓값에서 최솟값을 뺀 간단한 퍼짐 지표다. 계산하기 쉽지만 중간값들의 분포를 모두 보여 주지는 않는다. 자료가 많아지면 중앙값과 사분위수 등 다른 요약도 함께 사용할 수 있다.

생활 계획에서는 평균뿐 아니라 늦어질 가능성이 중요할 수 있다. 두 교통편의 평균이 같아도 도착 시간을 일정하게 맞춰야 한다면 변동이 작은 쪽을 선호할 수 있다. 어떤 요약이 유용한지는 질문과 사용 상황에 따라 달라진다.

세 값의 중앙값도 두 집단 모두 20이다. 평균과 중앙값을 함께 써도 퍼짐까지 같아지는 것은 아니다. 작은 자료에서는 원값을 모두 보여 주는 표가 요약 통계 몇 개보다 더 많은 정보를 전달한다.

자료	첫째	둘째	셋째	평균
A	10	20	30	20
B	19	20	21	20

실제 관측이 아닌 이동 시간의 평균 비교 모형

탐구

자료 5와 20과 35의 평균과 범위는 얼마일까?

풀이와 확인

합이 60이므로 평균은 20이다. 범위는 35 − 5 = 30이다. 앞의 두 집단과 평균은 같지만 퍼짐은 더 크다.

표본의 크기를 함께 쓰기

비율이 같아도 관찰한 정보의 양은 다를 수 있다.

가상 설문에서 첫 집단은 10명 중 6명이 찬성했고 둘째 집단은 100명 중 60명이 찬성했다고 하자. 두 비율은 모두 60퍼센트다. 그러나 조사한 사람 수는 열 배 차이가 난다. 비율만 적으면 표본의 크기와 조사 범위를 알 수 없다.

표본이 크다고 자동으로 대표성이 확보되는 것은 아니다. 같은 장소에서 편한 사람만 골랐다면 많은 응답을 모아도 빠진 집단이 있을 수 있다. 무작위 추출 여부와 응답하지 않은 사람의 특성을 함께 고려해야 한다.

보고서에는 분자와 분모를 함께 적는 습관을 들인다. 60퍼센트라는 문장 옆에 100명 중 60명이라고 쓰면 계산을 검산하고 조사 규모를 파악하기 쉽다. 모집단 전체에 대한 결론은 표본을 뽑은 방법까지 검토한 뒤 신중하게 내린다.

찬성하지 않은 사람과 응답하지 않은 사람은 구별한다. 무응답을 모두 반대로 처리하면 비율의 뜻이 달라진다. 분모가 조사 대상 전체인지 응답자만인지 표의 제목에서 분명하게 밝혀야 한다.

$$6 / 10 = 60\%$$
$$60 / 100 = 60\%$$
$$\text{같은 비율} \neq \text{같은 조사 규모}$$

비율과 표본 수를 함께 읽는 가상 설문

탐구

20명 중 12명과 50명 중 30명의 찬성 비율은 각각 얼마일까?

풀이와 확인

둘 다 60퍼센트다. 그러나 비율이 같다는 사실은 같은 사람들을 조사했다거나 같은 정확도를 갖는다는 뜻이 아니다.

가장 빠른 경로를 계산하기

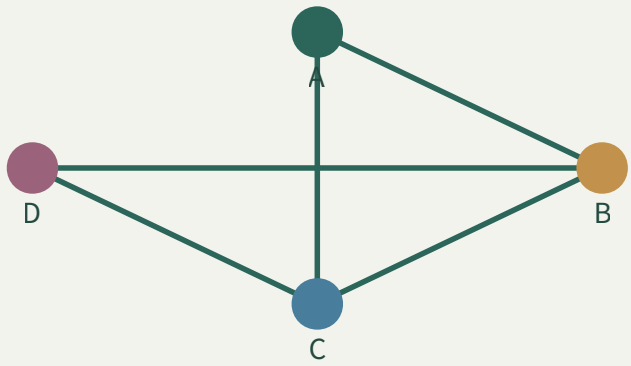
직선거리보다 구간 비용의 합이 목적에 맞을 수 있다.

가상의 네 지점 A와 B와 C와 D를 연결한다. A에서 B까지 4분이고 B에서 D까지 7분이다. A에서 C까지는 6분이고 C에서 D까지는 3분이다. 두 경로의 합은 11분과 9분이므로 주어진 값에서는 C를 거치는 길이 빠르다.

B에서 C까지 1분인 길을 더하면 A에서 B와 C를 거쳐 D로 가는 경로는 8분이다. 구간 수가 더 많아도 총시간은 줄어들 수 있다. 가장 적은 단계와 가장 적은 비용은 서로 다른 최적화 문제다.

실제 길찾기에는 시간대와 혼잡 및 도로 상태가 영향을 준다. 하나의 고정값으로 계산한 결과는 그 가정 아래에서만 최선이다. 모형을 제시할 때에는 값이 관측인지 추정인지와 어느 시점에 적용되는지를 함께 적어야 한다.

이 예에서는 모든 이동 시간이 양수이므로 같은 지점을 괜히 다시 도는 경로는 시간을 늘린다. 경로 후보를 줄이는 근거가 된다. 비용에 다른 보상이나 제약이 들어가면 이런 판단도 다시 검토해야 한다.



실제 지도가 아닌 경로 선택 모형. 시간은 본문에 제시했다.

탐구

B에서 C까지의 시간이 5분으로 늘어나면 B와 C를 모두 거치는 경로는 얼마일까?

풀이와 확인

4 + 5 + 3 = 12분이다. 이때는 C만 거치는 9분 경로가 더 빠르다. 한 구간의 변화가 전체 최적 경로를 바꿀 수 있다.

연립방정식으로 자원 배분하기

두 조건을 동시에 만족하는 조합을 찾는다.

가상의 수업에서 작은 꾸러미와 큰 꾸러미를 합해 10개 준비한다. 작은 꾸러미에는 연필 2자루가 들어가고 큰 꾸러미에는 5자루가 들어간다. 연필 총수가 32자루라면 작은 꾸러미 수 x와 큰 꾸러미 수 y는 x + y = 10과 2x + 5y = 32를 만족한다.

첫 식을 두 배 하면 2x + 2y = 20이다. 둘째 식에서 이를 빼면 3y = 12이므로 y = 4다. 따라서 x는 6이다. 결과를 두 조건에 넣으면 꾸러미 수 10과 연필 수 32가 모두 맞는다.

이 문제에서는 꾸러미 수가 음이 아닌 정수여야 한다. 식의 해가 소수나 음수로 나오면 현실의 조건을 만족하지 못할 수 있다. 수식을 푸는 과정과 실제 배분이 가능한지 판단하는 과정을 끝까지 연결한다.

총연필 수가 20보다 작거나 50보다 크면 이 조건의 꾸러미 열 개로는 만들 수 없다. 전부 작은 경우와 전부 큰 경우가 가능한 범위의 양 끝이다. 방정식을 풀기 전에 답의 가능 범위를 점검할 수 있다.

$$x + y = 10$$
$$2x + 5y = 32$$
$$3y = 12 \rightarrow y = 4$$
$$x = 6$$

꾸러미 수와 연필 수를 동시에 맞추는 학습용 배분

탐구

꾸러미 총수는 10개로 유지하고 연필을 35자루로 바꾸면 작은 것과 큰 것은 몇 개일까?

풀이와 확인

2x + 5y = 35에서 2x + 2y = 20을 빼면 3y = 15다. 큰 꾸러미는 5개이고 작은 꾸러미도 5개다.

계산 결과를 다시 만들 수 있게

입력과 규칙을 남겨야 다른 사람이 검산할 수 있다.

평균이 20이라는 결과만 적으면 독자는 어떤 값에서 나온 수인지 알 수 없다. 입력 자료와 누락 처리 방식 및 계산식을 함께 남겨야 재현할 수 있다. 자료에 빈칸이 있었는지도 중요하다. 빈칸을 0으로 바꾸는 것과 계산에서 제외하는 것은 다른 선택이다.

값이 10과 빈칸과 30이라면 관측된 두 값의 평균은 20이다. 빈칸을 0으로 바꾸어 세 값의 평균을 구하면 약 13.33이 된다. 어느 방식이 맞는지는 빈칸이 실제 0인지 관측 누락인지에 달려 있다. 편한 답을 얻으려고 처리 방식을 바꾸지 않는다.

작업 기록에는 원자료를 보존하고 가공한 표를 별도로 둔다. 숫자를 고쳤으면 이유와 날짜를 적는다. 이런 습관은 거대한 연구만을 위한 절차가 아니다. 작은 교실 활동에서도 실수를 찾고 협업의 신뢰를 높이는 데 도움이 된다.

소수점 반올림도 마지막 단계에서 하는 편이 좋다. 중간값을 일찍 반올림하면 뒤의 계산에서 오차가 커질 수 있다. 원래 값과 표시용 값을 구분해 저장하면 다시 계산하기도 쉽다.

처리	사용 값	평균
누락 제외	10과 30	20
누락을 0으로 간주	10과 0과 30	약 13.33

계산 결과를 다시 만들 수 있게의 핵심 관계를 정리한 표

탐구

강수량 표의 빈칸을 곧바로 0 mm라고 쓰면 어떤 문제가 생길까?

풀이와 확인

관측하지 못한 날을 비가 전혀 오지 않은 날로 바꾸게 된다. 평균 강수량이 낮아질 수 있으며 자료가 실제로 말하지 않은 사실을 추가한 셈이다.

작은 공동 탐구 설계하기

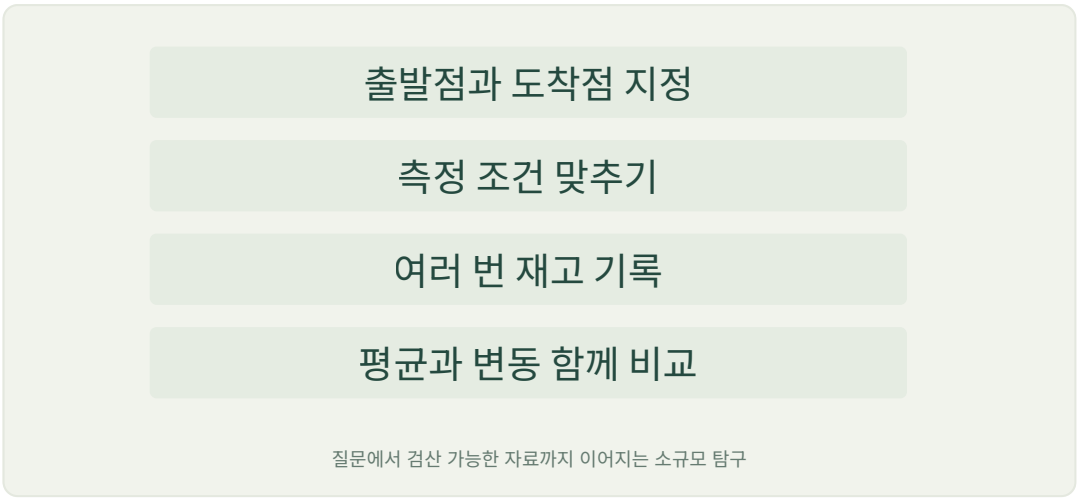
질문을 좁히면 필요한 측정이 구체적이 된다.

학교 안에서 어느 길이 가장 빠른가라는 질문은 출발점과 도착점이 없으면 측정하기 어렵다. 도서관 입구에서 운동장 문까지 걷는 시간을 비교한다고 좁히면 필요한 자료가 분명해진다. 걷는 속도와 측정 시간대도 가능하면 일정하게 맞춘다.

각 경로를 한 번씩만 재면 우연한 지연의 영향을 크게 받을 수 있다. 여러 번 재고 모든 값을 보존하면 평균과 변동을 함께 비교할 수 있다. 불편한 결과를 지우기보다 왜 차이가 났는지를 기록한다. 실제 사람을 관찰한다면 개인을 드러낼 필요가 없는 방식으로 설계한다.

결과 보고에는 가장 빠른 경로라는 결론과 측정 조건을 함께 쓴다. 비가 오는 날이나 혼잡한 시간에는 달라질 수 있다는 범위를 밝혀야 한다. 제한된 자료로 얻은 결과를 모든 상황의 규칙으로 넓히지 않는 태도는 역사 연구와 현대 탐구에 공통으로 필요하다.

측정 결과를 친구와 비교할 때에는 초와 분을 같은 단위로 맞춘다. 90초와 1.5분은 같은 시간이지만 단위를 빼면 다른 값처럼 보인다. 작은 탐구에서도 단위 표기가 결과 해석을 좌우한다.



탐구

한 경로만 점심시간에 재고 다른 경로는 빈 시간에 재면 비교가 왜 어려울까?

풀이와 확인

경로의 차이와 혼잡 시간대의 차이가 함께 섞이기 때문이다. 같은 조건에서 재거나 시간대의 영향을 별도로 기록해야 원인을 구별할 수 있다.

다양한 수학을 연결하는 독자에게

정확한 비교는 차이를 남겨 둔 채 관계를 찾는다.

이 책은 알렉산드리아의 논증에서 출발해 유물의 자국과 필사본 및 수 이름과 모래 그림을 살펴보았다. 각 주제는 서로 다른 자료와 맥락을 갖는다. 모두를 하나의 기원 이야기로 합치는 대신 어떤 질문과 도구를 공유하는지 비교하면 연결이 더 풍부해진다.

원의 비례에서는 관측과 가정을 나누었고 이샹고에서는 관찰과 해석을 나누었다. 소나와 직조에서는 전통의 의미와 현대의 모형을 구별했다. 현대 자료 분석에서도 입력값과 처리 규칙 및 결론의 범위를 확인했다. 이런 구분은 지식을 멀어지게 하는 장벽이 아니라 정확하게 연결하는 기준이다.

마지막 활동은 마음에 남은 두 장을 골라 공통점 하나와 차이점 하나를 쓰는 것이다. 공통점에는 실제 계산이나 논증을 제시하고 차이점에는 자료의 종류와 맥락을 적는다. 독자가 직접 검산하고 다시 질문할 수 있을 때 책의 탐구는 다음 단계로 이어진다.

책의 출처 목록은 모든 질문에 답하는 종착점이 아니다. 각 자료의 원문과 도해를 다시 읽으며 설명이 어떤 근거에 기대었는지 확인하는 출발점이다. 좋은 독자는 답을 얻은 뒤에도 조건을 다시 살핀다.

다시 묻는 질문	독자의 확인
무엇을 관찰했는가	원자료와 출처
무엇을 가정했는가	모형의 조건
어디까지 말할 수 있는가	계산과 해석의 범위

다양한 수학을 연결하는 독자에게의 핵심 관계를 정리한 표

> **탐구**
>
> 그림자 측정과 소나 그래프 활동의 공통점과 차이점을 한 가지씩 설명해 보자.

풀이와 확인

둘 다 복잡한 대상을 조건이 정해진 수학 모형으로 바꾼다. 다만 그림자 모형은 각과 거리의 측정을 다루고 소나에서 착안한 그래프는 연결 관계를 다룬다. 필요한 자료와 보존하는 정보가 다르다.

아프리카관 / 78

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[EUCLID] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Euclid of Alexandria
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Euclid/

[ERATOSTHENES] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Eratosthenes
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Eratosthenes/

[DIOPHANTUS] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Diophantus of Alexandria
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Diophantus/

[HYPATIA] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Hypatia
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Hypatia/

[ISHANGO] 벨기에 자연과학연구소. The Ishango Bone
https://www.naturalsciences.be/en/museum/exhibitions-activities/exhibitions/250-years-of-natural-sciences/the-ishango-bone

[LOC] 미국 의회도서관. Ancient Manuscripts from the Desert Libraries of Timbuktu
https://www.loc.gov/exhibits/mali/mali-exhibit.html

[LOCASTRO] 미국 의회도서관. On the Calculation of Numbers in the Science of Astronomy
https://www.loc.gov/item/2021667146/

[YORUBA] Felix Abídèmí Fábùnmi. Vigesimal Numerals on Ifè Dialects of Yorùbá. Linguistik Online
https://bop.unibe.ch/linguistik-online/article/view/411

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand
https://ich.unesco.org/en/RL/sona-drawings-and-geometric-figures-on-sand-01994

[MANCALA] 대영박물관 소장 만칼라판. Af1996 17 1 a bl
https://www.britishmuseum.org/collection/object/E_Af1996-17-1-a-bl

[KENTE] 메트로폴리탄미술관. Asante Akan artist Wrapper
https://www.metmuseum.org/art/collection/search/316800

[FRACTAL] 노스캐롤라이나대학교 그린즈버러. African Fractals. Ron Eglash 교육 자료
https://span.uncg.edu/fractals/homepage.html

[AIMS] African Institute for Mathematical Sciences. 기관 소개와 교육 자료
https://learn.nexteinstein.org/

[EUCLIDVII2] 클라크대학교. 유클리드 원론 제7권 명제 2의 원문 번역과 해설
https://mathcs.clarku.edu/~djoyce/elements/bookVII/propVII2.html

고대 아메리카관 / 79

돌에 남긴 시간과 끈에 남긴 수량



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

왼쪽과 오른쪽의 장면은 메소아메리카와 안데스를 구별해 놓은 것이다. 점과 막대 및 날짜 기록을 읽는 문제와 끈의 위치와 매듭을 통해 수량을 읽는 문제는 필요한 증거가 다르다. 서로 다른 재료를 곧바로 하나의 숫자 체계로 번역하기 전에 어디에서 단위가 정해지고 어떤 정보가 함께 기록되는지 살핀다.

달력의 주기를 계산할 때에는 주기의 길이와 기준 날짜를 구분한다. 합계가 남은 매듭 기록을 읽을 때에는 분류의 순서와 빠진 자료를 구분한다. 경사면과 길의 모형에서는 지형의 조건을 확인한다. 이 세 활동은 모두 주어진 수를 계산하기에 앞서 그 수가 무엇을 세는지 묻는 과정으로 이어진다.

고대 아메리카관 / 80

서로 다른 땅에서 자란 수학

하나의 대륙에 하나의 수학은 없다

마야와 잉카를 구분하는 일에서 탐구를 시작한다.

마야의 문화권은 오늘날 멕시코 남부와 중앙아메리카의 여러 지역에 걸쳐 있다. 잉카를 중심으로 살필 안데스의 기록 전통은 남아메리카 서부와 연결된다. 두 이름을 고대 아메리카라는 제목 아래 놓더라도 같은 장소에서 같은 방식으로 발전한 하나의 문화처럼 읽어서는 안 된다.

이 책의 앞부분은 점과 막대로 수를 나타내는 방법과 마야의 달력을 살핀다. 뒤에서는 끈에 정보를 담는 키푸와 안데스의 공간 문제를 다룬다. 두 전통 사이의 직접적인 전파를 가정하지 않고 각각의 자료에서 확인할 수 있는 내용을 비교한다.

비교의 기준은 누가 먼저 정답을 알았는지가 아니다. 무엇을 기록해야 했는지와 어떤 재료를 썼는지를 물어야 한다. 돌에 새긴 날짜와 끈에 남긴 수량은 같은 숫자라도 읽는 순서와 보존되는 조건이 다르다. 그 차이가 계산 방법의 형태를 바꾼다.

비교 항목	마야를 살필 때	안데스를 살필 때
지역	메소아메리카	남아메리카 서부
대표 자료	달력과 수 표기	키푸와 공간 시설
주의점	여러 공동체 구별	여러 시대 구별

탐구

두 전통을 비교하는 표에는 어떤 항목이 필요할까?

풀이와 확인

장소와 시대 범위부터 나누고 기록 재료와 수의 밑을 적는다. 마야의 점막대 표기와 잉카 시기의 수량 키푸를 구별한 뒤 각각 확인된 기능만 적으면 된다. 자료가 없는 칸을 추측으로 채우지 않는 것이 비교의 출발점이다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time / [A2] Museo Larco | Inca Quipus

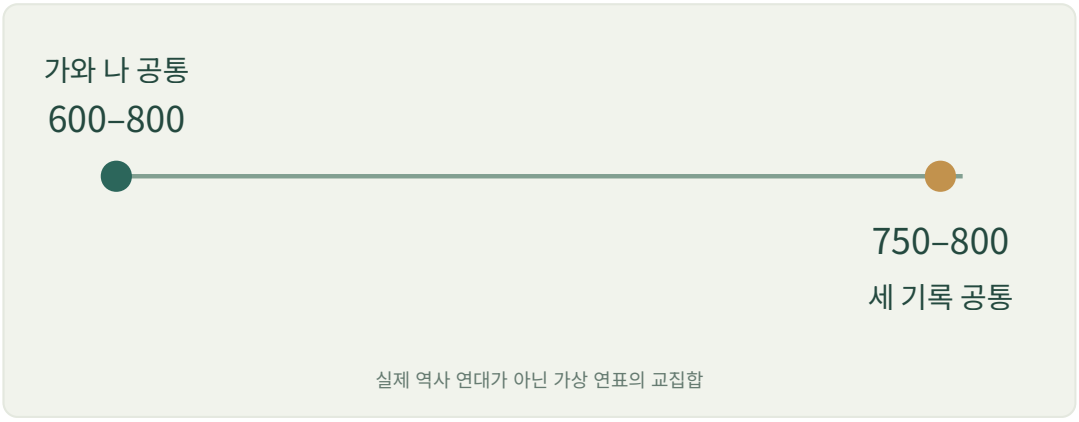
연표를 겹치지 않게 읽기

비교할 대상의 시간 폭부터 맞춘다.

연표에서 가로선이 길다는 이유만으로 하나의 국가가 그 기간 내내 유지되었다고 볼 수는 없다. 문화의 지속과 정치 조직의 존속은 다른 종류의 정보다. 마야의 역사를 잉카 제국의 존속 기간과 곧바로 나란히 놓으면 비교 대상의 크기가 달라진다.

수업에서는 실제 역사 연대와 별도로 연표 읽기 연습을 할 수 있다. 가상 공동체 가의 기록 기간을 200년부터 800년까지로 정하고 나의 기록 기간을 600년부터 950년까지로 정해 보자. 두 기록이 겹치는 기간은 600년부터 800년까지이며 길이는 200년이다.

겹치는 기간이 있다는 사실만으로 두 공동체가 만났다는 결론은 나오지 않는다. 교류를 말하려면 이동 경로와 물품의 맥락 같은 추가 자료가 필요하다. 반대로 기간이 겹치지 않더라도 나중 사람이 이전 자료를 읽었을 가능성은 따로 검토할 수 있다. 시간 관계와 인과 관계를 분리하자.



실제 역사 연대가 아닌 가상 연표의 교집합

가상 기록	시작	끝
가	200년	800년
나	600년	950년
다	750년	900년

탐구

가상 공동체 다의 기간이 750년부터 900년이라면 세 기록의 공통 구간은?

풀이와 확인

세 시작점 가운데 가장 늦은 750년과 세 끝점 가운데 가장 이른 800년을 고르면 된다. 공통 구간의 길이는 50년이다. 이는 가상 연표의 집합 계산이며 실제 마야나 잉카의 연대를 제시한 것이 아니다.

돌과 종이와 끈의 정보

기록 재료는 저장 방식의 일부다.

돌에 새긴 표시를 읽을 때는 닳은 자국과 원래의 선을 구별해야 한다. 종이책의 색이 번졌다면 숫자의 일부가 사라질 수 있다. 끈 기록에서는 매듭뿐 아니라 끈이 붙은 순서와 갈라지는 관계도 관찰 대상이 된다. 내용만 옮긴 텍스트가 원자료의 모든 정보를 보존하지는 않는다.

가상 기록에 항목 셋과 수량 셋이 있다고 하자. 종이 표에는 이름 옆에 숫자를 적을 수 있지만 이름표가 떨어진 끈 세 가닥은 수량을 읽어도 무엇을 센 것인지 알기 어렵다. 이때 수의 해석이 가능하다는 사실과 기록 전체가 해독되었다는 주장을 구분해야 한다.

자료를 다시 그릴 때는 색과 크기를 아름답게 통일하기 전에 어떤 차이가 의미를 가질 수 있는지 살핀다. 편집자가 중요하지 않다고 생각해 지운 간격이 실제로는 자릿수를 구별하는 단서일 수 있다. 복원 그림과 원본 사진을 같은 종류의 증거로 취급하지 않는 이유다.

확인한 정보	가능한 판단
수량 표기	수 자체의 판독
항목 이름	대상의 종류
연결 관계	묶음과 위계

탐구

수량 12와 15와 18을 읽었지만 항목명이 사라졌다면 무엇을 말할 수 있을까?

풀이와 확인

합이 45라는 산술적 사실은 말할 수 있다. 그러나 그것이 곡물량인지 사람 수인지 또는 서로 더해도 되는 같은 단위인지까지는 알 수 없다. 계산 결과와 자료 해석의 범위를 따로 적어야 한다.

[A2] Museo Larco | Inca Quipus

그림에서 본 것과 추측한 것

관찰 문장과 해석 문장은 역할이 다르다.

유물 사진에서 가로줄 세 개와 점 두 개가 보인다고 적는 문장은 형태의 관찰이다. 그 표기가 17을 나타낸다고 읽는 문장은 표기 규칙을 적용한 해석이다. 그 숫자가 특정한 의례의 횟수라고 말하려면 주변 글과 출토 맥락이 더 필요하다.

학습 기록장을 세 칸으로 나누면 판단의 단계가 드러난다. 첫 칸에는 눈으로 확인한 형태를 적고 둘째 칸에는 적용한 규칙을 적는다. 셋째 칸에는 아직 확인하지 못한 의미를 적는다. 이렇게 하면 확실한 계산과 불확실한 배경이 한 문장 안에서 섞이는 일을 줄일 수 있다.

같은 사진을 본 두 사람이 점을 두 개와 세 개로 다르게 세었다면 표기 체계의 논쟁보다 이미지 상태를 먼저 점검해야 한다. 확대 사진과 다른 조명 사진이 도움이 될 수 있다. 자료의 판독 단계에서 생긴 오차를 거창한 역사 해석으로 덮지 않는 태도가 중요하다.

단계	기록 예
관찰	막대 셋과 점 둘이 보임
규칙 적용	5×3+2=17
추가 해석	무엇을 센 수인지는 미정

탐구

막대 세 개와 점 두 개가 확실히 보이며 손상 부분에 점 하나가 더 있었을 가능성이 있다면 어떻게 기록할까?

풀이와 확인

확실히 보이는 점이 두 개이고 손상 부분에 점 하나가 더 있었을 가능성이 있다면 17 또는 18로 기록할 수 있다. 어느 쪽인지 결정할 근거와 필요한 추가 사진을 함께 남긴다. 불확실성을 지우고 18로 단정하지 않는다.

자릿값을 비교하는 공통 언어

같은 수를 다른 묶음으로 표현할 수 있다.

열 개씩 묶는 방식에서 43은 10이 네 묶음이고 1이 세 개다. 스무 개씩 묶는 방식에서는 20이 두 묶음이고 1이 세 개다. 두 표기는 다르지만 물건의 개수는 같다. 수의 값과 수를 적는 모양을 나누어 생각하면 낯선 표기를 읽기 쉬워진다.

이 책에서는 순수한 이십진법 연습과 마야 장기력의 단위를 명확히 구별한다. 순수한 이십진법의 자리 무게는 1과 20과 400으로 커진다. 장기력은 날짜를 세는 별도의 단위 규칙을 갖기 때문에 셋째 자리의 무게가 360이다. 겉모양이 닮아도 같은 표로 계산하면 안 된다.

키푸의 수량 표기에서 살필 십진 자릿값도 막연히 현대 숫자와 같다고 끝내지 않는다. 숫자를 선으로 쓰는 방식과 매듭을 공간에 배치하는 방식은 서로 다르다. 공통된 수학 구조를 찾으면서도 자료의 물리적 차이를 남겨 두는 것이 비교의 목적이다.

체계	분해	값
십진법	4×10+3	43
순수 이십진법	2×20+3	43
확인할 점	자리의 무게	표기 전에 결정

탐구

순수 이십진법에서 아래부터 3과 2가 놓인 수는 얼마인가?

풀이와 확인

일의 자리에 3이 있고 스무 묶음의 자리에 2가 있으므로 3+2×20=43이다. 같은 43을 십진법으로 적으면 4×10+3이 된다. 23이라고 읽는 것은 자리의 무게를 확인하지 않았기 때문에 생긴 오류다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time / [A4] Smithsonian NMAI | The Calendar System

수학 모형과 역사 복원

잘 작동하는 모형이 곧 과거의 실제 방법은 아니다.

교실에서 돌멩이를 옮겨 덧셈하는 판을 만들 수 있다. 그 판으로 모든 예제를 정확히 풀었다고 하더라도 옛사람들이 같은 규칙으로 계산했다고 증명한 것은 아니다. 계산 가능성은 모형의 성질이며 역사적 사용 여부는 별도의 자료가 필요한 주장이다.

모형을 소개할 때는 원자료에서 확인한 부분과 수업을 위해 정한 부분을 다른 색으로 표시해 보자. 기록의 배열을 본떠 칸을 나눈 것은 자료와 연결될 수 있다. 하지만 칸마다 1과 10과 100을 부여한 규칙을 우리가 정했다면 그 사실을 설명해야 한다.

이 구분은 상상력을 막지 않는다. 오히려 여러 모형을 공정하게 비교할 수 있게 한다. 같은 수를 나타내는 데 필요한 돌의 수와 자리 바꿈 횟수를 측정하면 편리함을 논할 수 있다. 편리하다는 결과를 곧 역사적 진실로 바꾸지만 않으면 탐구는 충분히 풍부해진다.

전시를 읽을 때에도 자료의 종류와 제작 공동체 및 확인된 기능을 차례로 묻는다. 후대 그림을 현장 사진처럼 읽지 않으며 수량을 판독했다는 사실을 모든 의미를 해독했다는 주장으로 넓히지 않는다. 오늘의 공동체가 그 자료를 설명하는 목소리도 함께 찾는다.

판단 대상	필요한 근거
계산의 정확성	정의한 규칙과 검산
계산의 편리함	작업 시간과 이동 수
역사적 사용	당시 자료와 맥락

탐구

두 계산판이 모두 37+48을 맞혔다면 어느 쪽이 역사적으로 옳을까?

풀이와 확인

답이 85라는 사실만으로는 결정할 수 없다. 그림과 물건의 형태를 얼마나 잘 설명하는지와 당시 기록에 어떤 규칙이 남아 있는지를 추가로 검토해야 한다. 수업에서는 두 판의 이동 횟수를 비교하는 별도 실험을 할 수 있다.

[A5] Royal Danish Library | The Guaman Poma Website

단위 없는 숫자는 무엇을 놓칠까

계산을 시작하기 전에 대상과 단위를 적는다.

수량을 나타내는 30이라는 기록만으로는 창고의 규모를 알 수 없다. 자루가 서른 개인지 무게가 서른 단위인지에 따라 뜻이 달라진다. 더구나 자루 하나의 크기가 일정하지 않다면 자루 수와 곡물의 총량도 같은 비율로 변하지 않을 수 있다.

수업용 창고에서 가 자루는 4킬로그램이고 나 자루는 6킬로그램이라고 정하자. 각각 다섯 자루가 있다면 자루 수는 같아도 무게는 20킬로그램과 30킬로그램이다. 같은 항목끼리 더한다는 말에는 숫자뿐 아니라 측정 기준이 같아야 한다는 조건이 들어 있다.

이 책의 미터와 킬로그램 예제는 현대의 계산 연습을 위한 것이다. 해당 단위를 고대 마야나 잉카가 그대로 사용했다는 뜻이 아니다. 역사 자료에 나타난 단위를 설명하는 문장과 오늘의 단위로 만든 모형 문제를 구별하면 불필요한 오해를 피할 수 있다.

수업용 자루	개수	무게
가	5	20킬로그램
나	5	30킬로그램
합계	10	50킬로그램

탐구

두 종류의 자루를 합쳐 열 자루라고 적을 때 무엇을 덧붙이면 좋을까?

풀이와 확인

가 자루 다섯 개와 나 자루 다섯 개라는 구성과 각각의 단위 무게를 적는다. 그러면 총무게가 50킬로그램이라는 계산을 검증할 수 있다. 자루 수 열 개만 남기면 나중에 무게를 다시 구할 수 없다.

고대 아메리카관 / 81

점과 막대와 영의 자리

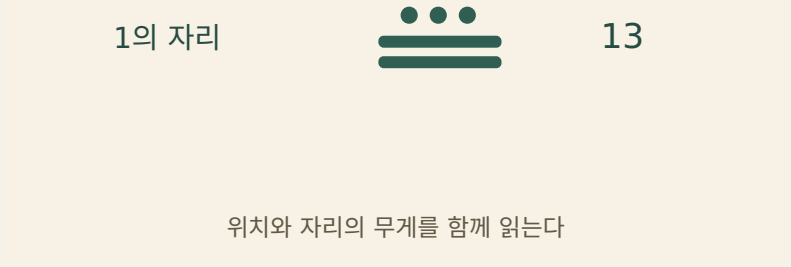
한 점과 한 막대의 약속

작은 기호의 조합으로 여러 수를 만든다.

마야 수 표기의 기본을 배우는 그림에서는 점 하나를 1로 읽고 막대 하나를 5로 읽는다. 막대 두 개와 점 세 개를 함께 놓으면 5+5+3으로 13이다. 여기서 점과 막대는 꾸밈이 아니라 수량을 구별하는 기호다. 선의 길이 자체를 재어 값을 정하지 않는다.

이 책의 도해는 원유물의 모든 글자 모양을 복제한 것이 아니다. 원리를 익히기 위해 형태를 단순화한 수업용 표기다. 실제 자료를 읽을 때는 기호의 방향과 주변 글과 숫자 변형을 함께 살펴야 한다. 쉬운 도해 하나를 배웠다고 모든 비문을 읽을 수 있는 것은 아니다.

다섯 개의 점을 막대 하나로 바꾸면 같은 수량을 더 적은 기호로 나타낼 수 있다. 이 교환 규칙을 직접 실행해 보면 모양이 달라져도 값이 유지된다는 사실을 알 수 있다. 수를 읽는 활동과 기호를 정리하는 활동을 번갈아 하면 계산의 보존 원리가 드러난다.



13을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

기호 구성	계산	값
점 셋	1+1+1	3
막대 하나와 점 셋	5+3	8
막대 둘과 점 셋	10+3	13

탐구

점 여덟 개를 기본 규칙에 맞게 정리하면?

풀이와 확인

점 다섯 개를 막대 하나로 바꾸고 점 세 개를 남긴다. 따라서 막대 하나와 점 세 개가 된다. 정리 전의 값 8과 정리 뒤의 값 5+3이 같으므로 교환이 수량을 바꾸지 않았음을 확인할 수 있다.

[A12] Smithsonian NMAI | Maya Math Game

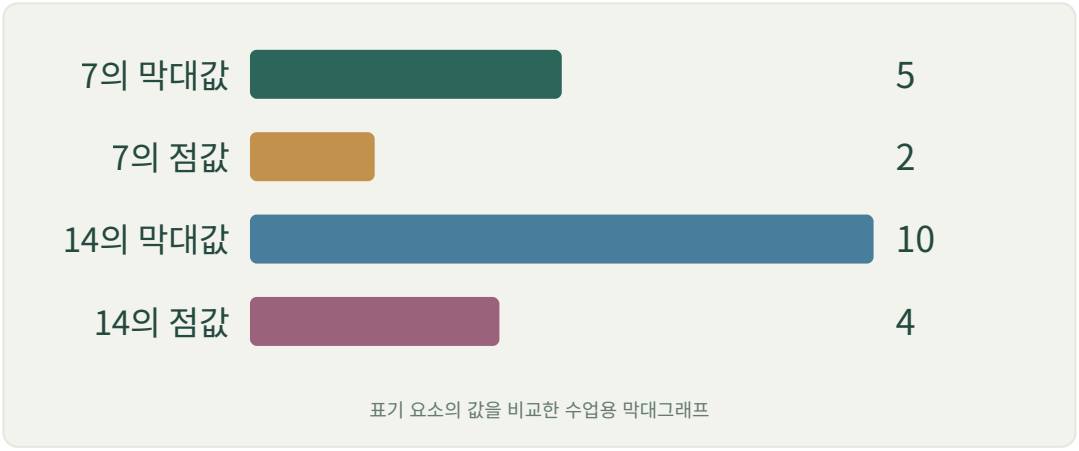
0부터 19까지의 표 만들기

기호를 읽는 규칙은 표 전체에서 일관되어야 한다.

0부터 19까지를 한 줄씩 적어 보면 점의 개수는 0부터 4까지 반복된다. 막대의 개수는 다섯 수마다 하나씩 늘어난다. 7은 막대 하나와 점 둘이며 14는 막대 둘과 점 넷이다. 이때 한 자리 안에서 막대 네 개를 그대로 두지 않고 다음 자리로 묶는 규칙을 나중에 배운다.

수를 5로 나누었을 때의 몫은 막대 개수이고 나머지는 점 개수다. 18을 5로 나누면 몫이 3이고 나머지가 3이므로 막대 셋과 점 셋이 된다. 기호를 외우는 대신 나눗셈으로 만드는 방법을 알면 처음 보는 수에도 같은 원리를 적용할 수 있다.

0은 막대도 점도 없다는 상태를 분명하게 표시하는 기호로 다룬다. 단순히 종이를 비워 두면 아직 쓰지 않은 자리와 값이 0인 자리를 구별하기 어렵다. 빈자리의 의미를 기록하는 일은 큰 수를 표현할 때 더욱 중요해진다.



표기 요소의 값을 비교한 수업용 막대그래프

수	막대 수	점 수
7	1	2
14	2	4
18	3	3

탐구

17과 19는 어떤 부분이 같고 어떤 부분이 다를까?

풀이와 확인

둘 다 막대 세 개를 사용한다. 17은 점 두 개를 더하고 19는 점 네 개를 더한다. 따라서 차이 2는 점의 개수 차이에서 드러난다. 막대의 길이나 간격을 바꾸어 차이를 나타낼 필요는 없다.

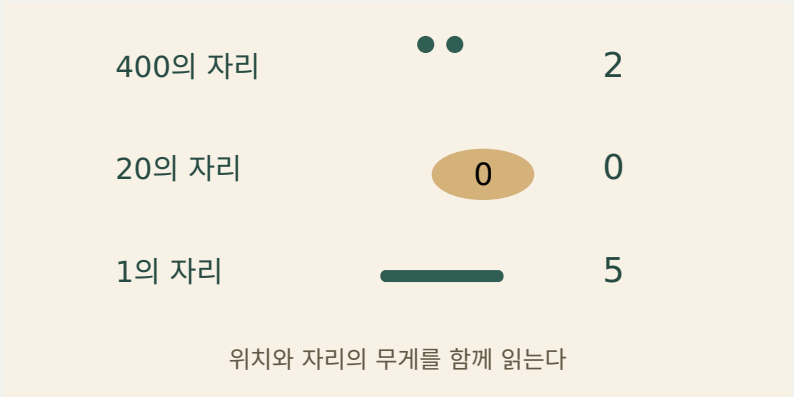
영은 빈 종이와 다르다

없음을 표시해야 다른 자리의 값이 보존된다.

일의 자리가 0이고 스무 묶음의 자리가 1인 수는 20이다. 아래 자리를 지워 버리고 점 하나만 남기면 그것이 1인지 20인지 읽는 사람이 판단하기 어렵다. 자릿값 표기에서 0은 값이 없는 자리를 표시하여 다른 기호의 위치를 보존한다.

현대 십진법에서도 205에서 0을 빼고 25라고 적으면 값이 바뀐다. 두 표기의 공통점은 빈 묶음의 자리를 따로 기록한다는 데 있다. 다만 이 비교는 개념을 설명하기 위한 것이며 서로의 기호가 직접 전해졌다는 역사적 주장을 포함하지 않는다.

수업에서는 세 칸의 표에 400의 자리와 20의 자리와 1의 자리를 붙여 보자. 위 칸에 2를 쓰고 가운데에 0을 쓴 뒤 아래에 5를 쓰면 805다. 가운데를 비워 놓아도 칸이 남아 있으면 읽을 수 있지만 칸까지 사라진 기록에서는 0의 표시가 큰 역할을 한다.



805을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

자리	세 자리 표기	기여하는 값
400의 자리	2	800
20의 자리	0	0
1의 자리	5	5

탐구

순수 이십진법의 위부터 2와 0과 5를 2와 5로 줄이면 어떤 값이 될까?

풀이와 확인

세 자리 표기는 2×400+0×20+5=805다. 두 자리로 줄인 표기는 2×20+5=45가 된다. 값의 차이는 760이다. 숫자 자체를 옮기지 않은 것처럼 보여도 자리 수가 바뀌면 기호의 무게가 달라진다.

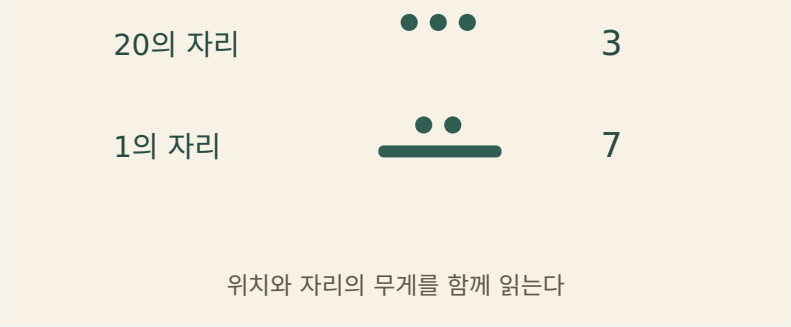
세로 배열을 읽는 방향

위치에 붙은 무게를 먼저 확인한다.

순수 이십진법 연습에서는 맨 아래 자리를 1의 자리로 정한다. 그 위는 20의 자리이고 다시 위는 400의 자리다. 아래에서 위로 이동할 때마다 같은 기호의 값이 스무 배가 된다. 표기된 기호를 읽기 전에 어느 자리인지 확인하는 습관이 필요하다.

위에 3이 있고 아래에 7이 있는 두 자리 수를 생각해 보자. 아래의 7은 그대로 7이며 위의 3은 스무 묶음 세 개를 뜻한다. 전체는 67이다. 위에서 아래로 기호의 모양만 이어 읽어 37이라고 말하는 것은 현대 십진법의 읽기 습관을 잘못 적용한 것이다.

수를 다른 표기로 바꾸는 과정은 번역과 닮았다. 기호 모양을 일대일로 치환하는 것이 아니라 전체 구조를 해석해야 한다. 67을 다시 만들 때도 먼저 20으로 나누어 묶음 수와 남은 수를 구하면 3과 7을 되찾을 수 있다.



67을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

위 자리	아래 자리	값
3	7	67
7	3	143
차이	자리 무게 19	76

탐구

위가 7이고 아래가 3인 표기는 앞의 수와 얼마나 다를까?

풀이와 확인

7×20+3=143이므로 67과의 차이는 76이다. 자리 교환은 값을 보존하지 않는다. 두 자리에 놓인 숫자의 차이 4에 자리 무게의 차이 19를 곱해도 76을 얻을 수 있다.

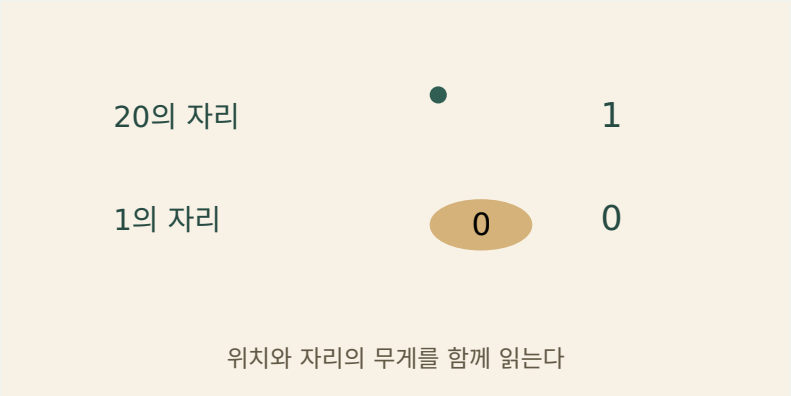
19에서 20으로 넘어가기

한 자리의 한계에서 새 묶음이 생긴다.

19는 막대 셋과 점 넷으로 나타낼 수 있다. 여기에 점 하나를 더하면 점 다섯 개를 막대 하나로 바꿀 수 있다. 막대가 네 개가 되므로 전체 값은 20이다. 순수 이십진법의 표준 자리 표현에서는 이를 위 자리의 1과 아래 자리의 0으로 바꾼다.

두 번의 교환을 구별해 보자. 첫 교환은 점 다섯 개와 막대 하나 사이에서 일어난다. 두 번째 교환은 한 자리의 20과 다음 자리의 1 사이에서 일어난다. 둘 다 모양을 바꾸지만 적용되는 묶음의 크기와 위치 변화가 다르다.

올림을 단순히 숫자 하나를 위에 쓰는 절차로 외우면 왜 그런지 놓치기 쉽다. 실제 말 스무 개를 모아 큰 고리 하나로 교환해 보면 값이 보존되는 이유가 분명해진다. 아래 자리에 남은 양이 없다는 사실도 0으로 함께 기록해야 한다.



20을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

단계	아래 자리	위 자리
39 표시	19	1
1 추가	20	1
정리	0	2

탐구

39에 1을 더할 때 어느 자리에서 교환이 일어날까?

풀이와 확인

39는 20의 자리 1과 1의 자리 19다. 아래 자리에 1을 더하면 20이 되어 위 자리로 1을 올린다. 결과는 위 자리 2와 아래 자리 0으로 40이다. 위 자리의 값은 기존 20과 새로 올라온 20의 합이다.

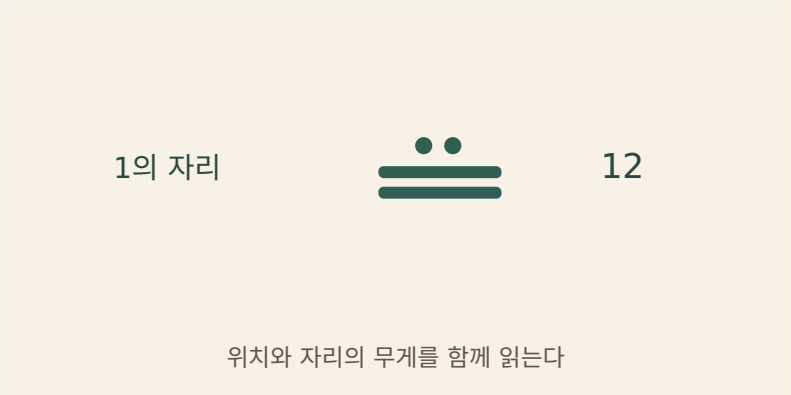
같은 값을 여러 모습으로 놓기

표준화 전후에 무엇이 유지되는지 살핀다.

값이 12인 기호 묶음은 점 열두 개로도 만들 수 있다. 막대 하나와 점 일곱 개로 바꿀 수도 있으며 막대 둘과 점 둘로 정리할 수도 있다. 교환 과정의 모든 상태는 같은 수를 나타낸다. 계산 중간 상태와 최종 표준 표현을 구별하면 실수를 찾기 쉽다.

표준 표현은 읽는 사람이 기호를 매번 오래 세지 않도록 돕는다. 그러나 중간 상태를 틀렸다고만 말하면 계산의 과정을 잃는다. 예를 들어 덧셈 직후에 점이 여섯 개 보이는 것은 아직 정리하지 않았다는 뜻일 수 있다. 먼저 값을 계산하고 다음에 규칙에 맞게 정돈하자.

표기의 경제성을 비교할 수도 있다. 12를 점만으로 나타내면 기호 열두 개가 필요하다. 막대 둘과 점 둘이면 네 개로 줄어든다. 이 비교에서는 점과 막대를 각각 기호 하나로 세었다는 기준을 밝혀야 한다. 막대를 긋는 시간까지 비교하려면 별도의 측정이 필요하다.



12을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

12의 표현	기호 수
점 열두 개	12
막대 하나와 점 일곱 개	8
막대 둘과 점 둘	4

탐구

18을 점만으로 표시한 상태에서 막대 셋과 점 셋으로 정리하면 기호가 몇 개 줄어들까?

풀이와 확인

점 열여덟 개에서 막대 셋과 점 셋인 여섯 개로 줄어든다. 줄어든 기호 수는 12개다. 이 결과는 기호 개수에 대한 비교이며 기록 시간이 정확히 3분의 1로 줄어든다는 뜻은 아니다.

표기의 오류를 찾아 고치기

오답의 원인을 값과 규칙으로 나누어 설명한다.

한 학생이 16을 막대 두 개와 점 여섯 개로 나타냈다고 하자. 값은 10+6으로 16이 맞지만 기본 정리 규칙을 끝내지는 않았다. 점 다섯 개를 막대 하나로 바꾸면 막대 셋과 점 하나가 된다. 값을 잘못 나타낸 경우와 표준화를 덜 한 경우는 피드백이 달라야 한다.

다른 학생은 막대 셋과 점 둘을 32라고 읽었다. 이는 점과 막대의 개수를 현대 숫자의 두 자리처럼 붙인 오류다. 이 경우에는 기호 하나의 값을 다시 확인하고 5×3+2를 계산하도록 안내해야 한다. 표기를 예쁘게 다시 그리는 것만으로는 읽기 규칙의 혼동이 해결되지 않는다.

세 번째 학생이 아래 자리의 0을 생략했다면 위치 정보가 유지되는지 살펴야 한다. 자릿값 표가 남아 있으면 값은 분명할 수 있다. 칸 없는 그림으로 옮기는 순간 모호해질 수 있으므로 전사 과정에서 필요한 정보를 별도로 표시하도록 하자.

사례	문제의 종류	수정 방향
막대 둘과 점 여섯	미완성 정리	5개를 1막대로 교환
막대 셋과 점 둘을 32로 읽음	규칙 혼동	15+2로 계산
아래 자리 삭제	위치 손실	자리와 0 복원

탐구

막대 두 개와 점 다섯 개를 15로 읽은 학생에게 어떤 설명이 적절할까?

풀이와 확인

값의 판독은 맞았다고 인정한 뒤 점 다섯 개를 막대 하나로 바꾸면 막대 셋으로 더 간단히 쓸 수 있다고 설명한다. 정답과 표준 표현을 서로 다른 기준으로 확인하는 피드백이 적절하다.

고대 아메리카관 / 82

스무 개씩 묶는 계산

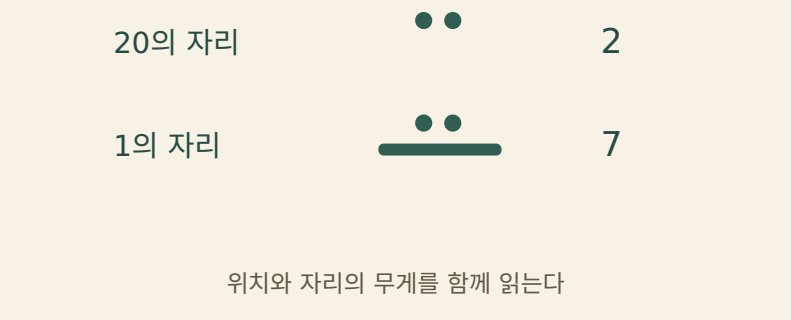
47을 두 자리로 바꾸기

나눗셈의 몫과 나머지가 표기의 구조가 된다.

47개의 말을 스무 개씩 묶으면 두 묶음이 되고 일곱 개가 남는다. 따라서 순수 이십진법에서는 위 자리 2와 아래 자리 7로 나타낼 수 있다. 이 과정을 식으로 쓰면 47=2×20+7이다. 나머지가 20보다 작다는 조건이 표현을 하나로 정해 준다.

나머지를 27로 두고 위 자리를 1로 적어도 합은 47이다. 그러나 아래 자리에 스무 개가 더 있으므로 아직 묶기 작업이 끝나지 않은 상태다. 표준 표현을 만들려면 아래 자리의 20을 위로 옮겨야 한다. 자릿값 규칙은 값의 보존과 정리의 기준을 함께 제공한다.

큰 수에서도 같은 방법을 반복한다. 먼저 20으로 나눈 나머지를 가장 아래에 적고 몫을 다시 20으로 나눈다. 더 이상 묶음이 남지 않을 때까지 진행하면 각 자리가 정해진다. 낮은 자리부터 만들어 가지만 읽을 때는 큰 자리의 무게를 확인하며 합산한다.



47을 순수 이십진법으로 나타낸 단순화한 학습용 그림. 0의 타원은 설명용 기호다.

전체	20의 묶음	남은 수
47	2	7
87	4	7
107	5	7

탐구

87을 두 자리로 나타내고 검산해 보자.

풀이와 확인

87을 20으로 나누면 몫은 4이고 나머지는 7이다. 따라서 위 자리 4와 아래 자리 7이다. 검산은 $4\times20+7=87$로 한다. 아래의 7은 막대 하나와 점 둘로 표현할 수 있다.

올림이 없는 덧셈

자리별로 더한 뒤 전체 값으로 확인한다.

수업용 순수 이십진법에서 26은 위 자리 1과 아래 자리 6이다. 31은 위 자리 1과 아래 자리 11이다. 두 수를 더할 때는 같은 무게의 자리끼리 모은다. 아래 자리 합은 17이고 위 자리 합은 2이므로 결과는 $2\times20+17=57$이다.

아래 자리 합이 20보다 작으므로 새 묶음을 위로 올릴 필요가 없다. 이 경우에는 자리별 계산을 독립적으로 진행할 수 있다. 그러나 결과를 위 2와 아래 17이라고 적은 뒤에도 각 자리의 허용 범위를 확인해야 한다. 단순한 예제일수록 올림 조건을 명확히 말해 두면 다음 문제로 이어진다.

점막대 그림을 겹쳐 놓았다면 아래 자리의 기호도 정리한다. 6은 막대 하나와 점 하나이며 11은 막대 둘과 점 하나다. 합치면 막대 셋과 점 둘로 17이 된다. 숫자식과 기호 그림이 같은 과정을 표현하는지 서로 대조해 보자.

수	20의 자리	1의 자리
26	1	6
31	1	11
합	2	17

탐구

25와 32를 같은 방법으로 더하면 어떤 자리 표현이 될까?

풀이와 확인

25는 위 1과 아래 5이며 32는 위 1과 아래 12다. 자리별 합은 위 2와 아래 17로 57이다. 다른 두 수의 덧셈이 같은 결과를 만들 수 있음을 확인할 수 있다.

올림이 있는 덧셈

20을 넘은 아래 자리에서 새 묶음이 생긴다.

38과 27을 더해 보자. 38은 20의 자리 1과 1의 자리 18이고 27은 위 1과 아래 7이다. 아래 자리 합은 25이므로 20 한 묶음과 5로 나눈다. 위 자리에는 기존 두 묶음과 새 묶음 하나가 합쳐져 3이 놓인다.

결과는 위 자리 3과 아래 자리 5이며 값은 65다. 올림을 표시하지 않고 위 자리 2와 아래 자리 25로 남겨도 값 자체는 65지만 표준 표현은 아니다. 계산 중간의 기록을 지우지 않고 두 상태를 나란히 두면 올림이 값을 보존하는 교환임을 확인할 수 있다.

십진법 덧셈과 비교하면 올림의 기준만 다르고 구조는 닮았다. 십진법에서는 일의 자리 10을 십의 자리 1로 바꾼다. 여기서는 20을 다음 자리 1로 바꾼다. 어떤 밑을 쓰든 자리의 무게에 맞게 교환해야 한다는 원리를 일반화할 수 있다.



아래 자리 점 다섯은 막대 하나로, 막대 넷은 위 자리 점 하나로 바꾼다.

계산 단계	20의 자리	1의 자리
38+27의 원합	2	25
20 한 묶음 이동	3	5
값 확인	60	5

탐구

49와 36의 합을 순수 이십진법으로 나타내 보자.

풀이와 확인

49는 위 2와 아래 9이며 36은 위 1과 아래 16이다. 아래 합 25에서 20을 올리면 위는 4가 되고 아래는 5가 된다. 4×20+5=85이며 십진법 덧셈 49+36으로도 검산된다.

빌림이 필요한 뺄셈

큰 묶음을 풀어도 전체 수량은 변하지 않는다.

62에서 28을 빼려면 62를 위 자리 3과 아래 자리 2로 놓는다. 28은 위 1과 아래 8이다. 아래 자리 2에서는 8을 뺄 수 없으므로 위의 스무 묶음 하나를 푼다. 그러면 위 자리 2와 아래 자리 22가 되고 전체 값은 여전히 62다.

이제 아래에서는 22−8=14를 계산하고 위에서는 2−1=1을 계산한다. 결과는 위 자리 1과 아래 자리 14이므로 34다. 빌림이라는 표현이 실제로 수를 새로 가져오는 것처럼 들릴 수 있지만 전체 안에서 단위를 바꾸어 표현한 것이다.

틀린 풀이를 분석할 때는 빌린 뒤 위 자리를 줄였는지 확인한다. 아래에 20을 더하고 위를 그대로 3으로 두면 원래 수가 82가 되어 버린다. 각 단계에서 위 자리 값과 아래 자리 값을 합산하는 검산은 이런 실수를 빠르게 드러낸다.

62의 상태	20의 자리	1의 자리
처음	3	2
묶음 풀기	2	22
28 빼기	1	14

탐구

81−37을 같은 방법으로 계산하면?

풀이와 확인

81은 위 4와 아래 1이다. 위에서 한 묶음을 풀면 위 3과 아래 21이다. 37의 위 1과 아래 17을 빼면 위 2와 아래 4가 남는다. 2×20+4=44이며 44+37=81로 확인된다.

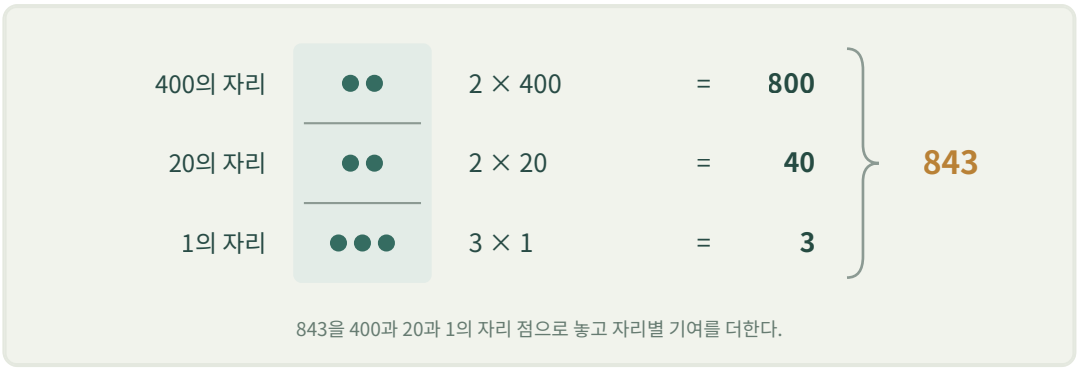
세 자리 수 843

400의 자리를 더하면 표현 범위가 넓어진다.

순수 이십진법의 세 자리 무게는 아래부터 1과 20과 400이다. 843은 400 두 묶음을 빼면 43이 남고 다시 20 두 묶음을 빼면 3이 남는다. 따라서 위부터 2와 2와 3으로 나타낼 수 있다. 각 자리의 기여는 800과 40과 3이다.

세 자리 수를 읽을 때 위의 2와 가운데 2가 같은 값을 갖지 않는다는 점을 강조하자. 기호의 개수는 같지만 자리가 다르므로 각각 800과 40을 나타낸다. 자릿값 표기는 적은 기호로 큰 수를 다루는 대신 위치를 정확하게 보존해야 한다는 조건을 가진다.

이 예제의 400은 순수 이십진법 연습에서 나온 값이다. 다음 장에서 배울 장기력의 셋째 자리 360과 혼동하면 위부터 같은 기호를 놓아도 전체가 달라진다. 제목과 자리 이름을 함께 적는 것은 설명을 위한 장식이 아니라 계산 체계를 구별하는 정보다.



843을 400과 20과 1의 자리 점으로 놓고 자리별 기여를 더한다.

자리	기호값	전체에 더하는 값
400	2	800
20	2	40
1	3	3

탐구

위부터 1과 5와 9인 순수 이십진법 수를 읽어 보자.

풀이와 확인

1×400+5×20+9=509다. 같은 숫자 배열을 장기력의 세 단위로 읽으면 469일이 되므로 체계를 먼저 밝혀야 한다. 이 차이는 기호의 문제가 아니라 셋째 자리 무게가 400인지 360인지의 차이다.

곱셈을 묶음의 반복으로 보기

한 묶음을 여러 번 더하면 곱셈을 설명할 수 있다.

수업용 기록에서 물건 27개를 담은 바구니가 세 개 있다고 하자. 전체 수량은 27×3이다. 27을 20+7로 나누면 스무 묶음 세 개와 작은 말 스물한 개가 된다. 작은 말 21개는 다시 스무 묶음 하나와 말 하나로 바뀐다.

따라서 전체는 스무 묶음 네 개와 말 하나로 81이다. 이 설명은 분배법칙 $3\times(20+7)=60+21$을 기호의 이동으로 나타낸 것이다. 곱셈을 한 번에 외운 답으로 처리하지 않고 묶음 구조로 분해하면 올림이 어디에서 생기는지 분명해진다.

바구니 수가 커지면 같은 방식으로 반복하면 된다. 다만 계산 과정을 실제 고대의 곱셈 알고리즘이라고 소개하지는 않는다. 여기서는 점막대 표기에서 출발해 오늘의 학습자가 자릿값과 분배법칙을 탐구하는 수업용 계산 방법을 구성하고 있다.

$$27\times3=(20+7)\times3$$

$$60+21=80+1$$

$$81=4\times20+1$$

분배법칙을 이용한 현대의 수업용 풀이

구성	수량
20을 세 번	60
7을 세 번	21
합계	81

탐구

18개씩 담긴 바구니가 다섯 개라면 스무 묶음은 몇 개이고 나머지는 얼마인가?

풀이와 확인

$18\times5=90$이며 $90=4\times20+10$이다. 스무 묶음 네 개와 나머지 열 개가 된다. 점막대 표기에서는 위 자리 4와 아래 자리 10을 사용한다. 아래의 10은 막대 두 개로 나타낼 수 있다.

나눗셈과 남은 수

몫을 구한 뒤 나머지의 조건까지 확인한다.

83개의 말을 네 사람에게 같은 수로 나누어 보자. 각자 스무 개씩 주면 80개를 나누고 3개가 남는다. 몫은 20이며 나머지는 3이다. 나머지가 나누는 수 4보다 작으므로 더 이상 모든 사람에게 하나씩 줄 수 없다.

각자 19개씩 주었다면 7개가 남는다. 합계는 여전히 83이지만 같은 수로 더 나눌 수 있으므로 최종 몫은 아니다. 나눗셈의 답은 전체 수를 맞추는 식만으로 완성되지 않는다. 나머지가 0 이상이며 나누는 수보다 작다는 조건이 함께 필요하다.

수업에서는 나머지를 실제로 무엇으로 처리할지도 이야기할 수 있다. 나눌 수 없는 물건이라면 세 개를 남겨 둘 수 있다. 곡물처럼 더 작게 나눌 수 있는 양이라면 한 사람에게 4분의 3 단위를 더 줄 수 있다. 산술과 실제 대상의 성질을 연결하는 지점이다.

전체	사람 수	몫	나머지
83	4	20	3
95	6	15	5
확인	나누는 수×몫+나머지	전체와 같음	나누는 수보다 작음

> **탐구**
>
> 95개를 여섯 사람에게 같은 수로 나누면 어떻게 될까?

풀이와 확인

한 사람에게 15개씩 주면 90개를 나누고 5개가 남는다. 95=6×15+5이며 5는 6보다 작다. 물건을 쪼갤 수 있는지에 따라 남은 다섯 개의 처리 방법은 달라지지만 정수 나눗셈의 몫과 나머지는 같다.

두 체계로 교차 검산하기

표기의 변환은 답을 확인하는 또 하나의 방법이다.

계산을 마친 뒤 같은 결과를 십진법으로 바꾸어 확인하면 서로 다른 단계의 오류를 찾을 수 있다. 예를 들어 순수 이십진법의 위 4와 아래 5는 85다. 원래 문제 49+36을 십진법으로 계산한 값과 같다면 적어도 최종 수량은 일치한다.

다만 같은 잘못을 두 번 적용하면 검산도 통과할 수 있다. 처음부터 자리 무게를 10으로 잘못 읽고 결과도 같은 방식으로 읽으면 계산이 맞아 보일 수 있다. 검산에서는 원래 물건 수를 직접 세거나 다른 표현으로 분해하는 등 독립적인 확인 방법을 택하는 것이 좋다.

검산 기록에는 결과뿐 아니라 확인한 관계를 적는다. 덧셈은 합에서 한 수를 빼는 방법으로 확인할 수 있다. 뺄셈은 차에 뺀 수를 더하면 된다. 곱셈은 반복 덧셈이나 나눗셈으로 대조한다. 표기법을 배우는 활동이 연산 사이의 관계를 이해하는 활동으로 이어진다.

연산	독립적인 확인
덧셈	합에서 한 수 빼기
뺄셈	차에 뺀 수 더하기
곱셈	같은 수의 반복 합으로 대조

탐구

위 3과 아래 12라는 덧셈 결과를 어떻게 검산할 수 있을까?

풀이와 확인

먼저 3×20+12=72로 변환한다. 원래 두 수의 합을 별도로 계산해 72인지 확인하고 72에서 한 수를 빼서 다른 수가 나오는지도 살핀다. 원래 피연산자가 없으면 결과의 표기만 읽을 수 있을 뿐 덧셈 전체의 정답 여부는 판단할 수 없다.

고대 아메리카관 / 83

장기력으로 긴 시간을 세다

하루를 묶는 다섯 단위

장기력의 자리를 순수 이십진법과 구별한다.

마야 장기력을 계산할 때는 각 자리의 무게를 먼저 적는다. 킨은 하루이며 위날은 20일이다. 툰은 위날 열여덟 묶음이므로 360일이다. 카툰은 툰 스무 묶음으로 7200일이며 박툰은 다시 스무 묶음으로 144000일이다.

주의할 곳은 위날에서 툰으로 올라가는 경계다. 모든 자리가 스무 배라고 가정하면 툰을 400일로 잘못 계산한다. 날짜를 기록하는 체계의 규칙을 일반적인 이십진법의 규칙보다 먼저 적용해야 한다. 같은 점막대 기호를 사용해도 자리의 뜻은 달라질 수 있다.

여기서 툰의 360일을 오늘의 한 해와 같다고 부르지 않는다. 태양의 계절 주기를 근사하는 365일 달력과 장기력의 묶음 단위는 목적이 다르다. 단위 이름 옆에 일수를 함께 쓰면 두 체계가 섞이는 오류를 줄일 수 있다.

단위	킨	위날	툰	카툰
일수	1	20	360	7200

장기력의 단위 무게

탐구

2툰과 3위날과 4킨은 며칠인가?

풀이와 확인

2×360+3×20+4=784일이다. 2툰을 800일로 바꾸면 안 된다. 각 자리의 기여를 따로 계산한 뒤 합하면 예외적인 묶음 규칙을 놓치지 않는다.

[A13] Smithsonian NMAI | Maya Calendar Converter

기록을 일수로 펼치기

여러 단위의 합을 하나의 기준으로 바꾼다.

가상의 기간 기록을 1카툰 2툰 3위날 4킨으로 정해 보자. 이는 특정 비문의 날짜를 옮긴 것이 아니라 장기력의 단위를 배우는 예제다. 각 항목을 일수로 환산하면 7200과 720과 60과 4가 된다. 합계는 7984일이다.

자리 이름을 생략한 숫자열만 적으면 어느 쪽이 큰 자리인지 혼동하기 쉽다. 이 책의 예제는 가장 큰 단위를 먼저 쓴다. 처음에는 숫자 아래에 단위를 붙여 적고 익숙해진 뒤에 간단한 표기로 바꾸는 편이 안전하다. 간단한 표기는 규칙을 공유하는 독자에게만 편리하다.

합산 뒤에는 역순으로 묶어 보며 검산한다. 7984에서 카툰 한 묶음을 덜면 784가 남는다. 여기서 툰 둘과 위날 셋과 킨 넷을 차례로 찾을 수 있다. 읽기와 쓰기가 반대 방향의 계산이라는 점이 드러난다.

$$7200+720+60+4$$

$$7984일$$

$$7984-7200=784$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

1툰 17위날 19킨은 며칠인가?

풀이와 확인

360+340+19=719일이다. 여기에 하루를 더하면 720일이 되어 정확히 2툰이 된다. 각 자리의 최댓값 근처에서 계산하면 올림이 여러 단계로 이어지는 모습을 볼 수 있다.

일수를 다시 묶는 방법

큰 단위부터 몫과 나머지를 구한다.

1000일을 장기력의 작은 단위로 바꾸어 보자. 360으로 나누면 툰 두 묶음과 280일이 남는다. 남은 280일을 20으로 나누면 위날 열네 묶음이 된다. 따라서 1000일은 2툰 14위날 0킨이다.

이때 위날의 숫자는 0부터 17까지 놓일 수 있다. 18이 되면 툰 하나로 교환되기 때문이다. 킨은 0부터 19까지 허용된다. 자리마다 가능한 숫자의 범위를 적어 두면 표기 결과가 정리된 상태인지 곧바로 확인할 수 있다.

역변환은 전체 일수를 재구성하는 과정이다. 2×360+14×20+0이 1000과 같아야 한다. 같은 수를 표현하는 중간 상태는 여러 개일 수 있지만 각 자리 범위까지 만족하는 정리된 표현은 하나로 정해진다.



$$1000 = 2 \times 360 + 14 \times 20 + 0$$

1000일을 툰 두 묶음과 위날 열네 묶음으로 나눈 비례 막대

탐구

1500일을 툰과 위날과 킨으로 나타내면?

풀이와 확인

1500=4×360+60이므로 4툰 3위날 0킨이다. 3위날은 60일이며 전체는 1440+60=1500일이다. 위날이 18보다 작으므로 더 올릴 묶음은 없다.

서로 다른 두 올림

킨과 위날의 경계는 같은 크기가 아니다.

17위날 19킨에 하루를 더하면 킨이 20이 된다. 이것을 위날 하나로 교환하면 18위날이 된다. 다시 18위날을 툰 하나로 바꾸므로 결과는 1툰 0위날 0킨이다. 한 번의 덧셈이 두 종류의 올림을 일으킨다.

십진수처럼 매번 같은 기준으로 올리면 틀리기 쉽다. 첫 경계의 교환 수는 20이며 다음 경계는 18이다. 연산 알고리즘은 실제로 각 단위의 교환표를 따라 움직인다. 단순히 큰 자리로 하나 올린다고 외우는 것보다 조건을 적어 보자.

달력과 시계에도 비슷한 구조가 있다. 오늘의 시간 표기에서 60초와 60분과 24시간은 서로 다른 묶음 규칙을 갖는다. 이는 구조를 이해하기 위한 비교이며 두 체계가 역사적으로 연결되었다는 뜻은 아니다.

단계	툰	위날	킨
처음	0	17	19
하루 추가	0	18	0
다시 교환	1	0	

단위 경계가 다른 두 번의 올림 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

1툰 17위날 18킨에 3일을 더하면?

풀이와 확인

킨은 21이므로 1위날을 올리고 1킨을 남긴다. 위날은 18이 되어 1툰을 올린다. 결과는 2툰 0위날 1킨이며 721일이다.

날짜의 차이 구하기

기간은 두 누적 일수의 차로 계산할 수 있다.

가상의 두 기록을 같은 기준점에서 잰 3툰 2위날 5킨과 3툰 5위날 12킨으로 놓자. 앞의 기록은 1125일이며 뒤의 기록은 1192일이다. 두 값의 차는 67일이다. 기준점이 같다는 조건을 확인해야 뺄셈이 의미를 가진다.

자리별로 계산해도 같은 답이 나와야 한다. 툰의 차는 없고 위날은 셋 늘었으며 킨은 일곱 늘었다. $3\times20+7=67$이다. 작은 자리에서 빌림이 필요한 예제라면 전체 일수로 먼저 바꾸는 방법이 특히 편리하다.

실제 비문의 날짜를 현대 달력의 연월일로 바꾸는 일에는 추가적인 대응 기준이 필요하다. 여기서는 두 기록 사이의 상대 기간만 계산한다. 상대적인 차를 구하는 문제와 절대 날짜를 정하는 문제를 분리하면 해석의 조건이 선명해진다.

$$1192-1125=67$$

$$3\times20+7=67$$

$$\text{상대 기간은 } 67\text{일}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

2툰 1위날 2킨에서 1툰 17위날 18킨을 빼면?

풀이와 확인

앞은 742일이며 뒤는 718일이다. 차이는 24일로 1위날 4킨이다. 단위별로 빌려 계산할 때도 툰 하나가 18위날이라는 규칙을 적용해야 한다.

큰 자리의 변화가 뜻하는 것

자리의 전환을 시간 전체의 끝으로 읽지 않는다.

큰 자리의 숫자가 바뀌는 순간은 체계 안의 경계다. 자동차 거리계가 여러 자리를 한꺼번에 바꾸더라도 이동이 끝나는 것은 아니다. 장기력의 큰 단위가 전환되는 사건도 숫자 구조와 역사적 의미를 구별하여 해석해야 한다.

예를 들어 19카툰과 그 아래의 마지막 날 다음에는 박툰의 수가 하나 늘어난다. 이는 카툰 스무 묶음을 박툰 하나로 교환한 결과다. 계산 규칙에서 곧바로 세계가 끝난다는 결론을 얻을 수는 없다. 그런 주장을 하려면 독립적인 문헌과 맥락이 필요하다.

숫자 경계가 문화적으로 중요할 수 있다는 점은 인정하면서도 특정한 의미를 단정하지 않는 태도가 필요하다. 기념일은 산술적으로 정의할 수 있지만 그 날에 사람들이 부여한 의미는 별도의 역사적 질문이다. 수학은 해석의 일부를 도와줄 뿐 전부를 대신하지 않는다.

$$20 \times 7200 = 144000$$

19카툰 19툰 17위날 19킨

다음 날은 1박툰

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

19카툰 19툰 17위날 19킨에 하루를 더하면?

풀이와 확인

작은 자리부터 교환하면 모두 0이 되고 박툰이 하나 늘어난다. 전체 일수는 144000일이다. 이 답은 묶음 규칙의 결과이며 미래 사건을 예언하는 내용은 아니다.

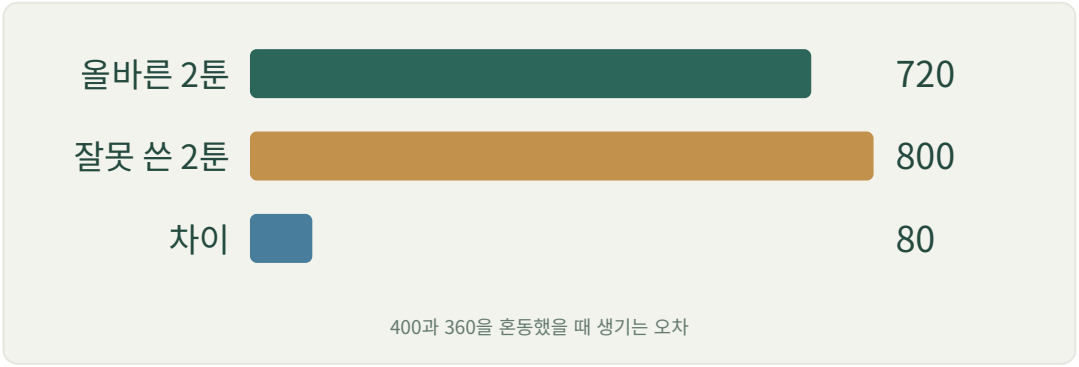
단위 표가 틀렸을 때

계산 실수와 체계 선택의 오류를 구별한다.

학생이 2툰 3위날을 860일이라고 계산했다면 덧셈만 다시 시켜서는 원인이 해결되지 않는다. 2×400+3×20으로 계산했기 때문이다. 문제는 더하기가 아니라 툰의 무게를 400으로 선택한 데 있다.

올바른 식은 2×360+3×20이며 결과는 780일이다. 두 답의 차이 80일은 툰 한 단위의 오차 40일을 두 번 적용한 값이다. 오류의 크기를 분석하면 어느 자리의 규칙이 잘못 쓰였는지 추적할 수 있다.

검산 질문을 단계별로 만들면 효과적이다. 먼저 단위 이름을 적었는지 묻고 다음에는 환산 값을 확인한다. 마지막에 곱셈과 합산을 살핀다. 처음부터 답 숫자만 비교하면 개념의 혼동과 단순 실수가 같은 오답으로 보인다.



400과 360을 혼동했을 때 생기는 오차

탐구

같은 오류로 5툰을 계산하면 실제 값과 얼마나 차이 날까?

풀이와 확인

틀린 값은 2000일이며 올바른 값은 1800일이다. 차이는 200일로 5×40이다. 툰의 숫자에 비례해 오차가 커지므로 단위 표를 먼저 고쳐야 한다.

장기력 계산표를 설계하기

입력 조건까지 적어야 검산 가능한 도구가 된다.

종이에 장기력 계산표를 만든다면 첫 줄에는 단위 이름을 적고 둘째 줄에는 각 단위의 일수를 적는다. 셋째 줄에 입력값을 쓴 뒤 넷째 줄에서 자리별 곱을 구한다. 마지막으로 곱들을 모두 더하면 누적 일수가 나온다.

표에는 허용 범위도 붙여 두자. 킨은 20보다 작아야 하고 위날은 18보다 작아야 한다. 툰과 카툰도 큰 자리로 교환하기 전에는 20보다 작아야 한다. 범위를 벗어난 값은 곧바로 삭제하기보다 아직 정리되지 않은 입력인지 살핀다.

완성한 도구에는 알려진 예제 두 개를 넣어 시험한다. 1툰이 360일로 계산되는지와 1카툰이 7200일이 되는지를 확인하면 핵심 단위의 오류를 찾을 수 있다. 도구의 디자인과 계산 규칙을 함께 검토하는 작은 제작 과제다.

단위	툰	위날	킨
일수	360	20	1
입력	2	3	4
자리의 값	720	60	

입력과 환산을 분리한 계산표 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

입력값에 0툰 18위날 3킨이 들어오면 어떻게 처리할까?

풀이와 확인

값을 보존하며 1툰 0위날 3킨으로 정리한다. 총일수는 363일이다. 범위 오류라는 안내만 보여 주는 대신 무엇을 교환해야 하는지 알려 주면 학습자가 규칙을 이해할 수 있다.

고대 아메리카관 / 84

두 달력이 맞물리는 날

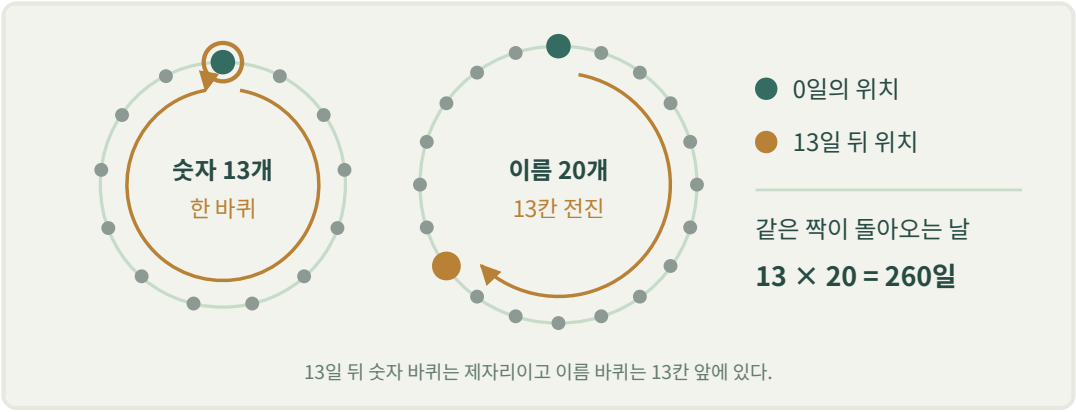
13과 20의 두 순환

서로 다른 주기가 날짜의 짝을 만든다.

260일 순환을 이해하는 수학 모형으로 숫자 열세 개와 이름 스무 개가 각각 반복된다고 생각하자. 하루마다 두 목록을 한 칸씩 함께 전진시킨다. 숫자 목록이 한 바퀴 돌아도 이름 목록은 아직 처음으로 돌아오지 않는다.

두 목록이 같은 짝으로 돌아오려면 경과한 날수가 13의 배수이면서 20의 배수여야 한다. 두 수는 공약수가 1뿐이므로 가장 작은 양의 공배수는 260이다. 그래서 열세 숫자와 스무 이름의 조합을 차례로 따라가면 긴 순환을 만들 수 있다.

실제 달력의 이름과 의례적 의미는 단순한 번호 이상의 지식을 담는다. 이 페이지에서는 그 의미를 임의로 번역하지 않고 반복 구조만 분석한다. 숫자 모형이 문화적 설명의 전체를 대신하지 않는다는 범위를 분명히 한다.



13일 뒤 숫자 바퀴는 제자리이고 이름 바퀴는 13칸 앞에 있다.

탐구

13일 뒤에 두 목록의 상태는 어떻게 달라질까?

풀이와 확인

숫자 목록은 시작 위치로 돌아온다. 이름 목록은 시작점에서 13칸 전진한 상태다. 두 목록이 동시에 돌아오는 것은 260일 뒤이므로 한 목록의 반복과 날짜 짝의 반복을 구별해야 한다.

[A4] Smithsonian NMAI | The Calendar System

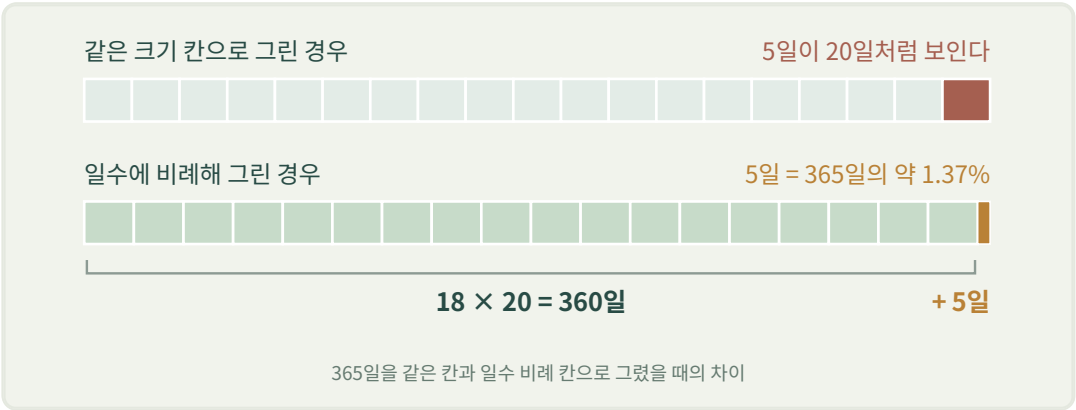
365일을 나누는 방식

18묶음의 스무 날에 다섯 날을 더한다.

365일 순환은 스무 날짜리 묶음 열여덟 개와 추가 다섯 날로 계산할 수 있다. 18×20은 360이며 여기에 5를 더하면 365가 된다. 앞에서 배운 툰의 360일과 숫자가 겹치더라도 두 단위의 쓰임은 따로 설명해야 한다.

원형 그림을 그릴 때 모든 부분을 같은 크기로 나누면 추가 다섯 날이 스무 날 한 묶음과 같은 길이처럼 보일 수 있다. 기간의 비율을 표현하려면 조각의 크기를 실제 일수에 맞추거나 일정한 길이의 칸으로 표시해야 한다.

달력을 공간에 배치하는 일에는 편집상의 선택이 들어간다. 이름을 잘 읽게 만드는 도표와 기간의 비율을 정확히 보여 주는 도표는 목적이 다를 수 있다. 그림을 보기 전에 어떤 정보가 보존되어 있는지 설명문을 확인하자.



365일을 같은 칸과 일수 비례 칸으로 그렸을 때의 차이

탐구

추가 다섯 날은 전체 365일 중 어느 정도인가?

풀이와 확인

비율은 5/365이며 약 1.37퍼센트다. 스무 날 한 묶음의 4분의 1 길이이므로 같은 크기의 달 조각으로 그리면 기간이 과장된다. 단순한 칸 배치는 실제 기간 비율과 다를 수 있다.

[A4] Smithsonian NMAI | The Calendar System

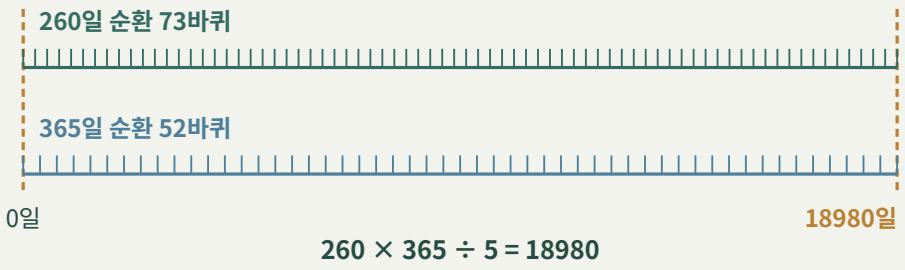
260과 365의 첫 만남

동시에 반복되는 시점은 최소공배수다.

260일 순환과 365일 순환이 함께 출발했다고 하자. 두 달력의 날짜 짝이 처음으로 다시 같아지는 날을 찾으려면 두 수의 최소공배수를 구한다. 260과 365의 최대공약수는 5이므로 두 수의 곱을 5로 나눈다.

260×365÷5는 18980이다. 이 기간에 260일 순환은 73번 돌고 365일 순환은 52번 돈다. 흔히 달력 라운드로 설명하는 결합 주기의 산술 구조다. 한 달력의 이름만 같아지는 날과 두 날짜의 짝이 모두 같아지는 날은 다르다.

실제 날짜 이름을 외우지 않아도 반복의 논리를 탐구할 수 있다. 다만 계산한 52를 곧바로 현대 윤년을 포함한 52년과 완전히 같은 기간이라고 말해서는 안 된다. 여기서는 한 해를 365일로 센 순환을 비교하고 있다.



260일 눈금과 365일 눈금이 처음 다시 겹치는 18980일

탐구

18980일이 두 순환의 공배수인지 검산해 보자.

풀이와 확인

18980÷260=73이며 18980÷365=52다. 두 몫이 모두 정수다. 또한 최대공약수 5로 나눈 곱이므로 가장 작은 양의 공배수라는 점까지 확인할 수 있다.

나머지로 오늘의 위치 찾기

긴 기간을 모두 펼치지 않아도 현재 위치를 알 수 있다.

0일을 출발점으로 정한 수업용 순환에서 1000일 뒤의 위치를 구해 보자. 260으로 나누면 세 바퀴를 돌고 220일이 남는다. 365로 나누면 두 바퀴를 돌고 270일이 남는다. 따라서 위치의 짝은 220과 270이다.

이 숫자는 실제 달력 날짜의 이름이 아니다. 이름 목록을 생략한 계산용 위치 번호다. 0부터 세는지 1부터 세는지에 따라 표시 숫자가 달라지므로 출발 규칙을 먼저 정해야 한다. 같은 날을 두고 답이 하나 차이 나는 이유가 여기에 있을 수 있다.

계산 과정에서는 몫과 나머지를 함께 기록하면 검산하기 좋다. 3×260+220과 2×365+270이 모두 1000이 되어야 한다. 서로 다른 주기의 시계가 같은 경과 기간을 다르게 표현하는 것이다.

경과	260으로 나눈 나머지	365로 나눈 나머지
500일	240	135
1000일	220	

0일을 기준으로 정한 학습용 위치 번호 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

500일 뒤의 두 나머지는 얼마인가?

풀이와 확인

500을 260으로 나눈 나머지는 240이며 365로 나눈 나머지는 135다. 따라서 수업용 위치 짝은 240과 135다. 실제 날짜 이름으로 바꾸려면 각 달력의 기준 이름도 알아야 한다.

가능한 짝과 불가능한 짝

두 나머지는 공통 약수에 대한 조건을 만족한다.

같은 경과 일수를 260과 365로 나눈 두 나머지를 비교해 보자. 두 나머지의 차는 반드시 5의 배수다. 두 주기가 모두 5의 배수이므로 원래 일수에서 두 종류의 완전한 바퀴를 빼도 5로 나눈 나머지는 같기 때문이다.

예를 들어 위치 10과 15는 이 조건을 만족하지만 10과 12는 만족하지 않는다. 조건을 만족하지 않는 날짜 짝을 입력했다면 계산표가 잘못되었거나 기준점이 다르게 설정되었을 수 있다. 오류를 발견하는 빠른 검사 규칙으로 쓸 수 있다.

이 논리는 모든 두 주기에 적용된다. 주기가 6과 8이라면 두 나머지는 짝홀성이 같아야 한다. 공통 약수는 순환이 만들 수 있는 조합의 범위를 제한한다. 단순한 경우로 먼저 연습하면 큰 달력 수에서도 관계가 보인다.

$$260=5\times52$$

$$365=5\times73$$

$$\text{나머지의 차는 5의 배수}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

나머지 37과 102는 같은 경과 일수에서 나올 수 있는 조건을 만족할까?

풀이와 확인

차이가 65로 5의 배수이므로 필요한 호환 조건을 만족한다. 두 수를 각각 5로 나누면 나머지가 2로 같다. 실제 경과 일수를 찾으려면 한쪽 주기의 배수를 더하며 다른 조건을 맞추면 된다.

작은 달력으로 원리를 실험하기

큰 숫자의 구조를 작은 순환에서 관찰한다.

길이가 4인 색 순환과 길이가 6인 도형 순환을 만들어 하루에 한 칸씩 옮겨 보자. 두 목록의 처음 짝은 12번 이동한 뒤에 돌아온다. 4×6인 24번까지 기다릴 필요가 없는 까닭은 두 주기에 공통 약수 2가 있기 때문이다.

종이에 0부터 12까지의 경과 횟수를 쓰고 각 수를 4와 6으로 나눈 나머지를 적는다. 같은 짝이 처음으로 반복되는 행을 찾으면 최소공배수를 눈으로 확인할 수 있다. 두 목록을 그린 종이 바퀴를 사용해도 같은 결과가 나온다.

이 실험은 마야 달력의 실제 크기를 축소한 복제품이 아니라 반복 수학의 모형이다. 작은 예제에서는 모든 상태를 나열할 수 있다는 장점이 있다. 실험 결과를 일반적인 식과 연결한 뒤 260과 365의 경우로 돌아가 보자.

이동	0	4	6	8	12
4순환	0	0	2	0	0
6순환	0	4	0	2	

작은 주기를 이용한 교실 실험 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

주기가 4와 7이라면 동시에 처음으로 돌아오는 이동 횟수는?

풀이와 확인

최대공약수가 1이므로 4×7=28번이다. 주기가 4와 6일 때의 12번과 비교하면 공통 약수가 있는지에 따라 조합이 반복되는 시점이 달라짐을 알 수 있다.

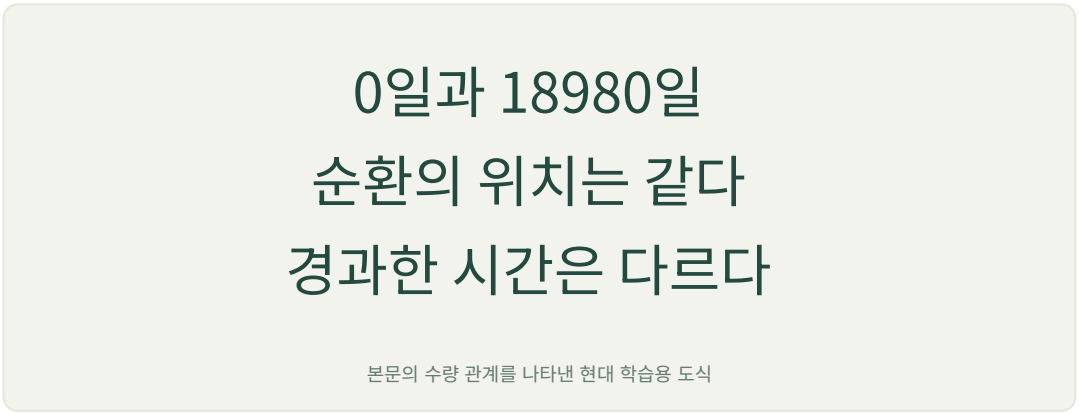
여러 번 돌아도 남는 기록

순환 위치와 누적 시간은 서로 다른 정보다.

달력의 위치 짝이 같더라도 실제로 같은 순간은 아닐 수 있다. 18980일이 지난 뒤에는 두 순환의 날짜 짝이 다시 나타난다. 위치 정보만 기록하면 어느 반복 회차에 해당하는지 별도로 알 수 없다.

시계가 3시를 가리킨다는 말에 날짜가 없으면 오늘인지 내일인지 모르는 것과 비슷하다. 순환식 표기는 반복되는 활동을 조직하는 데 편리하지만 긴 기간의 앞뒤 관계에는 누적 정보를 덧붙여야 한다. 두 표현은 경쟁하기보다 다른 질문에 답한다.

기록을 설계할 때는 나중에 무엇을 알고 싶은지 생각해야 한다. 의례의 순환 위치만 필요한지 두 사건 사이의 일수까지 계산해야 하는지에 따라 필요한 항목이 달라진다. 숫자를 더 많이 적는 것이 항상 좋은 것이 아니라 목적에 맞는 정보가 필요하다.



본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

같은 날짜 짝이 적힌 두 기록 사이의 기간을 하나로 확정할 수 있을까?

풀이와 확인

순환 위치만으로는 확정할 수 없다. 기간은 0일일 수도 있고 18980일의 양의 배수일 수도 있다. 누적 연대나 사건의 순서를 알려 주는 별도 자료가 있어야 회차를 구분할 수 있다.

두 나머지에서 날짜를 되찾기

주기를 앞으로 세는 계산을 거꾸로 풀어 본다.

같은 0일에서 출발한 두 순환을 생각한다. 260으로 나눈 나머지는 37이며 365로 나눈 나머지는 102라고 하자. 앞에서 두 나머지의 차가 5의 배수라는 호환 조건을 확인했다. 이제 그 조건을 만족하는 실제 경과 일수 가운데 가장 작은 음이 아닌 값을 구한다.

첫 조건을 만족하는 수는 37 + 260k로 쓸 수 있다. 둘째 조건까지 맞추려면 260k를 365로 나눈 나머지가 65여야 한다. 양쪽과 주기를 5로 줄이면 52k를 73으로 나눈 나머지가 13인 문제다. 이 변형은 세 수가 모두 5의 배수이기 때문에 가능하다.

52 × 7 = 364는 73의 다섯 배보다 1 작다. 따라서 52에 −7을 곱하면 73으로 나눈 나머지가 1이다. 필요한 13을 곱하면 k는 −91과 같은 나머지를 가져야 한다. 여기에 73을 두 번 더하면 가장 작은 음이 아닌 k는 55가 된다.

경과 일수는 37 + 260 × 55 = 14337일이다. 실제로 365 × 39 + 102도 14337이다. 다른 해는 18980일씩 더한 값이며 이 계산은 실제 마야 날짜 이름을 판독한 것이 아니다. 오늘의 합동식으로 달력의 순환 구조를 탐구한 예다.

조건	검산
260일 순환	14337 = 260 × 55 + 37
365일 순환	14337 = 365 × 39 + 102
다음 같은 위치	14337 + 18980 = 33317

탐구

주기 6과 8에서 나머지가 각각 1과 3이면 가장 작은 음이 아닌 경과 수는?

풀이와 확인

6으로 나눈 나머지가 1인 수 1과 7과 13과 19를 차례로 확인하면 19가 8로 나눈 나머지 3을 준다. 두 주기의 최소공배수가 24이므로 다음 해는 43이다.

[A4] Smithsonian NMAI | The Calendar System

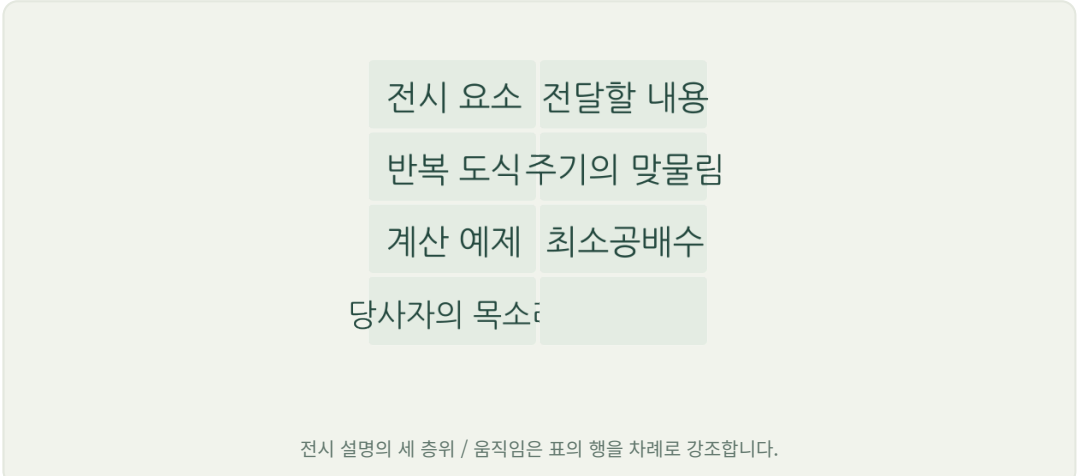
달력 전시의 설명문 쓰기

수학적 관계와 살아 있는 전통을 함께 보여 준다.

달력 전시의 첫 문장은 260과 365의 두 순환이 있다는 사실을 간명하게 설명할 수 있다. 다음 문장에서는 두 순환이 18980일 뒤에 같은 짝으로 돌아오는 관계를 보여 준다. 독자는 계산의 핵심을 따라갈 수 있어야 한다.

그러나 달력을 거대한 퍼즐로만 다루면 그것을 사용하고 해석하는 사람들의 활동이 사라진다. 스미스소니언의 교육 자료는 오늘의 마야 공동체가 시간을 이해하는 목소리도 함께 소개한다. 수학을 설명하는 전시에서도 누가 지식을 이어 가는지 밝혀야 한다.

설명문에 불필요한 신비화는 넣지 않는다. 매우 큰 수를 사용했다는 사실이 초자연적인 예언의 근거는 아니다. 계산 원리와 자료의 맥락을 나란히 제시하면 감탄을 유지하면서도 검증 가능한 지식으로 읽을 수 있다.



전시 설명의 세 층위 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

달력 라운드를 설명하는 두 문장을 만들어 보자.

풀이와 확인

260일 순환과 365일 순환은 18980일 뒤에 같은 날짜 짝으로 돌아온다. 이는 두 주기의 최소공배수이며 달력을 사용하는 공동체의 시간 경험은 이 산술 관계보다 풍부하다. 두 문장은 계산과 맥락의 역할을 나누어 보여 준다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time

고대 아메리카관 / 85

하늘의 반복을 표에 담다

드레스덴 사본의 금성표

반복 관찰을 기록하는 표의 구조를 살핀다.

드레스덴의 마야 사본에는 금성의 주기를 다루는 표가 있다. 소장 도서관의 설명은 584일 주기를 중심으로 이어지는 계산을 소개한다. 여기서 584일은 금성이 태양을 한 바퀴 도는 공전 기간을 뜻하지 않는다. 지구에서 관측한 상대적 배치의 반복과 연결된 수다.

관찰자가 어떤 곳에서 무엇을 기준으로 움직임을 재는지가 주기의 정의를 바꾼다. 운동장 안쪽과 바깥쪽 트랙을 도는 두 사람의 만남 간격이 각자의 한 바퀴 시간과 다른 것처럼 생각할 수 있다. 비유는 구조를 설명할 뿐 실제 행성 궤도의 세부를 재현하지 않는다.

이 장의 수열과 오차 계산은 사본의 모든 절차를 복원한 것이 아니다. 알려진 주기 수에서 출발해 표를 작성하고 검산하는 수학 활동이다. 역사 자료의 내용과 새로 만든 탐구 문제의 경계를 유지한다.

관측 위치를 먼저 정한다 공전 주기와 회합 주기 서로 다른 질문의 답

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

584일을 금성의 공전 기간이라고 쓴 문장을 어떻게 고칠까?

풀이와 확인

지구에서 보이는 금성의 상대적인 주기를 다루는 대표값이라고 고친다. 공전과 지구에서 관측한 회합 주기를 구별하면 같은 천체에 서로 다른 주기 수가 등장하는 이유를 설명할 수 있다.

[A6] SLUB Dresden | The Dresden Maya Codex Content

584를 반복해서 더하기

표의 행 사이 차이는 검산의 단서가 된다.

584일을 한 묶음으로 하여 누적표를 만들어 보자. 첫 다섯 값은 584와 1168과 1752와 2336과 2920이다. 이 수열에서 이웃한 두 행의 차이는 언제나 584다. 표 전체를 처음부터 다시 계산하지 않고도 차이를 이용해 오류를 찾을 수 있다.

넷째 행이 2346으로 잘못 적혔다면 앞 행과의 차이는 594가 되고 다음 행과의 차이는 574가 된다. 한 행의 오차가 양쪽 차이에 반대 방향으로 나타난다. 합계표를 읽을 때 변화량을 함께 살피면 오타의 위치를 좁힐 수 있다.

현대 계산기로 표를 만들더라도 검산 원리는 같다. 곱셈으로 만든 열과 앞값에 584를 더해 만든 열을 대조할 수 있다. 서로 다른 계산 경로를 이용하면 한 가지 수식의 잘못을 그대로 반복하는 위험을 줄인다.



584일을 반복해 더한 수업용 누적표

탐구

여섯 번째 누적값과 다섯 번째 값의 차이는 얼마인가?

풀이와 확인

여섯 번째 값은 3504이며 다섯 번째 값 2920과의 차이는 584다. 일반적으로 n번째 값은 584n이므로 이웃한 행의 차이는 항상 584가 된다.

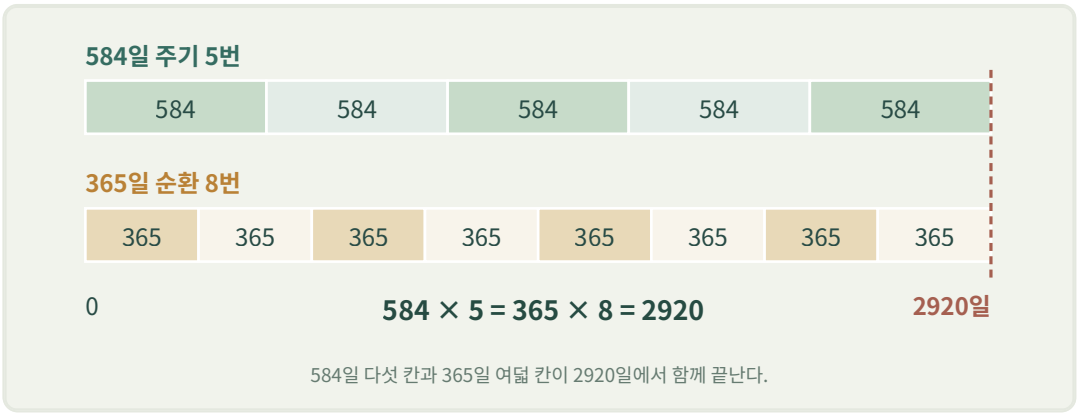
다섯 주기와 여덟 해

서로 다른 반복의 근접 관계를 계산한다.

584일을 다섯 번 더하면 2920일이다. 한 해를 정확히 365일로 놓고 여덟 번 더해도 2920일이다. 따라서 이 두 정수 모형에서는 금성의 다섯 주기와 365일의 여덟 순환이 일치한다.

이 식은 주기 수를 정수로 정했을 때 정확하다. 실제 천체의 운동과 계절의 길이를 무한히 정확하게 표현한다는 뜻은 아니다. 계산 모형에서의 등식과 자연 현상의 근사 관계를 나누어 설명하는 것이 중요하다.

반복표에서 이런 관계를 찾으면 긴 기간을 묶는 데 도움이 된다. 584를 매번 다섯 번 더하는 대신 2920을 한 단위처럼 사용할 수 있다. 작은 주기와 큰 묶음을 오가며 표의 구조를 이해하는 방법이다.



584일 다섯 칸과 365일 여덟 칸이 2920일에서 함께 끝난다.

탐구

2920일을 두 번 반복하면 365일 순환과 584일 순환은 각각 몇 번인가?

풀이와 확인

전체는 5840일이다. 365일 순환은 16번이며 584일 순환은 10번이다. 두 비율 8대5가 같은 배수로 확대되었음을 확인할 수 있다.

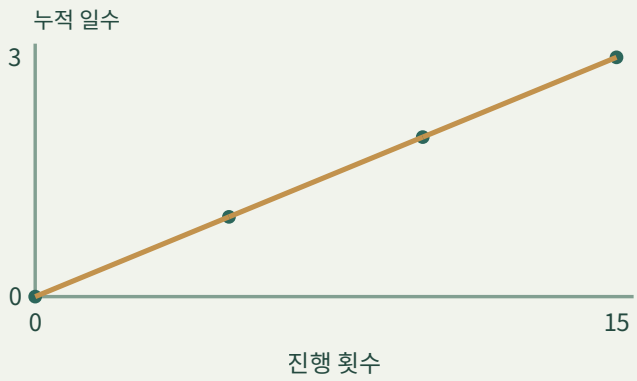
작은 차이가 쌓이는 방식

근삿값의 오차는 반복 횟수와 함께 커진다.

오차를 이해하기 위해 실제 천문값과 무관한 가상 모형을 만들자. 표에서는 한 주기를 100일로 적었지만 관찰 평균은 99.8일이었다고 가정한다. 한 번의 차이는 0.2일이며 열 번 반복하면 누적 차이는 2일이다.

여기서 오차를 단순히 반복 횟수에 곱할 수 있는 것은 매회 같은 평균 차이가 있다고 가정했기 때문이다. 관찰 오차가 매번 같은 방향이 아니라면 실제 누적 양상은 달라질 수 있다. 계산에는 어떤 종류의 오차를 가정했는지 함께 적어야 한다.

근삿값은 틀린 숫자라서 쓸모없는 것이 아니다. 필요한 정확도와 사용 기간에 따라 충분히 좋은 도구가 될 수 있다. 다만 긴 기간에 사용할 때는 허용 오차를 넘는 시점과 보정 방법을 검토해야 한다.



주기당 0.2일의 일정한 차이가 있다는 가상 모형

탐구

같은 모형에서 허용 누적 오차가 1일이라면 몇 주기까지 허용할 수 있을까?

풀이와 확인

주기당 0.2일이므로 다섯 주기에서 1일이 된다. 오차가 1일 이하라는 조건이라면 다섯 주기까지 가능하다. 여섯 주기에서는 1.2일로 허용값을 넘는다.

관찰 간격의 평균

여러 기록을 모을 때 무엇을 평균내는지 확인한다.

가상의 반복 관측 간격이 583일과 585일과 584일과 584일이었다고 하자. 합은 2336일이며 네 간격의 평균은 584일이다. 평균은 각 기록을 대표하는 하나의 수지만 개별 기록이 모두 같았다는 뜻은 아니다.

관측 날짜 다섯 개로 네 간격을 계산했다면 자료의 개수와 간격의 개수를 혼동하지 않아야 한다. 처음과 마지막 날짜의 차를 네 번의 간격으로 나눈 값이 평균 간격이다. 날짜 다섯 개라는 이유로 5로 나누면 잘못된 답이 나온다.

이 예제의 숫자는 계산을 위해 만든 자료다. 사본의 실제 관측 행을 옮긴 것처럼 제시하지 않는다. 재구성 자료에는 가상이라는 표시와 사용한 단위를 붙여야 독자가 원자료와 활동지를 구분할 수 있다.



평균 계산을 위한 가상 관측 간격

탐구

관측 간격 582일과 586일을 앞의 네 간격에 더하면 평균은?

풀이와 확인

전체 합은 3504일이며 간격은 여섯 개다. 3504÷6=584이므로 평균은 같다. 새 기록의 차이가 서로 상쇄되어 평균이 유지되었지만 자료의 분포는 달라졌다.

관찰하지 못한 날의 처리

자료가 없는 칸을 0으로 채우지 않는다.

구름 때문에 관측하지 못한 날을 생각해 보자. 이 날의 기록은 천체가 없었다는 뜻이 아니라 보지 못했다는 뜻이다. 표에서 빈칸을 0으로 바꾸면 실제 관측값과 결측 자료가 섞인다. 숫자의 의미를 구별하는 표시가 필요하다.

수업용 밝기 관측값이 3과 4와 미관측과 5라면 확인한 세 값의 평균은 4다. 미관측을 0으로 채워 네 값의 평균을 구하면 3이 되어 결과가 달라진다. 계산 규칙만 맞아도 입력의 뜻이 틀리면 해석이 잘못된다.

역사 기록의 빈칸에는 손상과 생략과 관측 실패 등 여러 원인이 있을 수 있다. 하나로 단정하기보다 자료 상태를 별도로 기록하자. 복원한 값이 있다면 원래 읽힌 값과 구분해 표시하는 편이 검증에 도움이 된다.

시점	1	2	3	4
기록	3	4	미관측	5
평균 대상	포함	포함	제외	

자료가 없는 상태와 값 0을 구별한다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

값 2와 미관측과 6의 평균을 구할 때 어떤 설명을 덧붙여야 할까?

풀이와 확인

확인된 두 관측의 평균은 4라고 적는다. 전체 세 시점의 평균을 정확히 안다는 뜻은 아니다. 빠진 시점의 값이 알려지지 않았으므로 관측된 자료의 범위 안에서 결론을 내려야 한다.

정렬된 건물과 하늘

방향의 일치는 출발점이며 해석의 끝이 아니다.

건물의 축이 특정 방향을 가리킨다는 사실을 측정할 수 있다. 그러나 그 방향이 어느 천체와 관련되는지 해석하려면 지형과 관측 위치와 제작 시기 등을 함께 살펴야 한다. 비슷한 각도가 나왔다는 이유만으로 설계 목적을 확정할 수 없다.

가상 조사에서 건물 방향을 89도와 91도와 90도로 측정했다고 하자. 평균은 90도지만 측정의 흔들림이 있다는 정보도 남겨야 한다. 각도를 소수점 여러 자리까지 적는다고 실제 측정의 정확도가 높아지는 것은 아니다.

이 페이지의 도형은 방향 측정의 원리를 설명하는 현대 활동이다. 특정 마야 건축물의 정밀 조사 결과를 대신하지 않는다. 수학적 일치가 역사적 의도의 증거가 되려면 얼마나 정밀하게 맞고 어떤 대안 설명을 배제할 수 있는지 따져야 한다.

측정	1차	2차	3차
방향각	89°	91°	90°
평균	90°		

방향과 오차를 생각하는 가상 조사

탐구

평균 90도를 얻었으니 정동향 의도를 증명했다고 말해도 될까?

풀이와 확인

측정 결과가 동쪽과 가까움을 보여 줄 수는 있다. 설계 의도까지 증명하려면 측정 오차와 주변 구조와 관련 자료가 필요하다. 수치의 일치와 의도의 해석은 서로 다른 단계다.

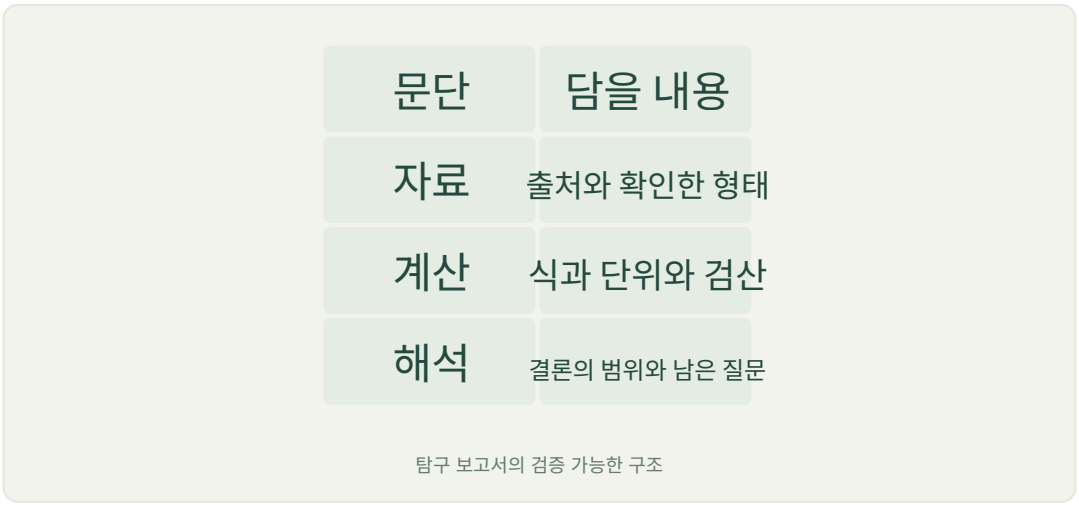
천문표를 읽는 탐구 보고서

자료와 모형과 해석을 세 문단으로 나눈다.

첫 문단에는 어떤 자료를 보았는지 쓴다. 소장 기관과 자료 이름을 밝히고 실제 자료에서 확인한 수나 표의 형태를 설명한다. 잘 읽히지 않는 부분을 임의로 채운 경우에는 복원임을 표시해야 한다.

둘째 문단에는 자신이 만든 계산을 적는다. 584의 누적합이나 365와의 공통 묶음을 계산했다면 식을 보여 주고 단위를 붙인다. 이 단계에서는 다른 사람이 같은 입력으로 같은 결과를 얻을 수 있어야 한다.

셋째 문단에는 계산이 말해 주는 범위와 남은 질문을 적는다. 정수 모형의 관계를 알았다고 실제 관측의 모든 세부가 해명된 것은 아니다. 관측 방법과 표의 수정과 사용 목적은 더 많은 자료를 필요로 하는 별도 주제다.



탐구 보고서의 검증 가능한 구조

탐구

보고서에서 584×5=365×8 뒤에 어떤 설명이 필요할까?

풀이와 확인

두 정수 주기 모형이 2920일에서 일치한다는 설명을 붙인다. 이 등식만으로 실제 천체 운동이 오차 없이 반복된다고 주장하지 않는다. 계산 결과의 정확성과 자연 모형의 정확성을 구별해야 한다.

고대 아메리카관 / 86

매듭이 담는 수량

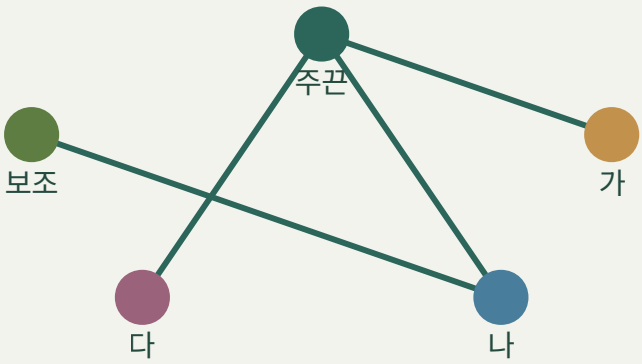
끈의 구조부터 읽기

숫자를 찾기 전에 연결 관계를 살핀다.

키푸는 주된 끈에 여러 끈이 달리고 다시 그 끈에 보조 끈이 이어질 수 있는 기록 장치다. 숫자만 종이에 옮기면 어느 끈이 어디에 붙어 있었는지 잃어버릴 수 있다. 원자료의 연결 구조를 함께 기록해야 한다.

가지가 있는 나무 모양의 도식으로 구조를 정리할 수 있다. 주된 끈을 출발점으로 놓고 매달린 끈을 가지로 나타낸다. 이 그림은 실제 매듭의 생김새를 복제한 것이 아니라 연결 정보만 추린 현대의 분석 도식이다.

끈의 개수와 매듭의 개수는 같은 항목이 아니다. 수량을 담지 않은 연결 끈이 있을 수 있으며 한 끈에 여러 자리의 매듭이 있을 수 있다. 기록표에서는 끈 번호와 부모 끈 번호와 관찰한 매듭을 분리해 적는 편이 좋다.



실물 형태가 아닌 연결 관계의 모형

탐구

주된 끈 하나에 매달린 끈 셋이 있고 그중 하나에 보조 끈 둘이 있다면 전체 끈 수는?

풀이와 확인

주된 끈을 포함하면 여섯 가닥이다. 주된 끈 1과 매달린 끈 3과 보조 끈 2를 더한다. 수량 값의 합과 끈 가닥 수의 합은 서로 다른 계산임을 밝혀야 한다.

[A2] Museo Larco | Inca Quipus

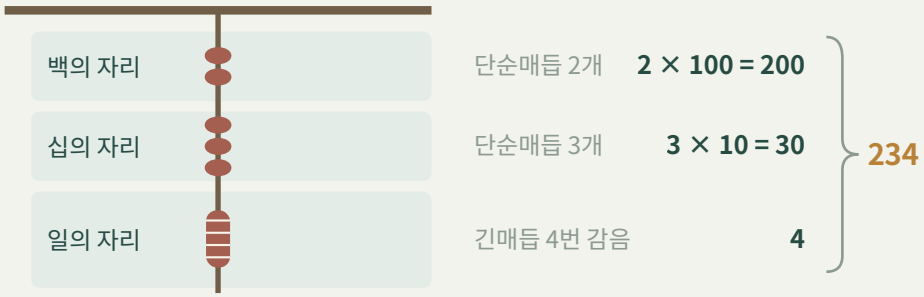
매듭의 위치와 십진 자리

같은 형태도 놓인 높이에 따라 값이 달라진다.

수량을 기록한 키푸의 널리 알려진 구조에서는 끈을 따라 십진 자릿값을 읽는다. 하나의 매듭 묶음이 일의 자리인지 십의 자리인지에 따라 기여하는 값이 달라진다. 정확한 판독에는 매듭의 종류와 다른 끈들의 배열도 함께 살핀다.

수업용 도식에서 백의 자리에 2와 십의 자리에 3과 일의 자리에 4를 놓아 보자. 각 기여는 200과 30과 4이며 전체는 234다. 실제 유물의 매듭을 단순한 숫자 칸으로 바꾼 그림이라는 점을 표시한다.

자리 구조는 현대 십진 숫자와 비교할 수 있지만 기호의 물리적 실현은 다르다. 잉크로 쓴 숫자와 손으로 만질 수 있는 매듭은 읽고 보존하는 방식에 차이가 있다. 공통된 원리를 찾되 재료의 차이를 지우지 않는다.



한 끈의 세 자리 영역에 놓인 매듭으로 234를 읽는다.

탐구

백의 자리 3과 십의 자리 0과 일의 자리 7은 어떤 수인가?

풀이와 확인

300+0+7=307이다. 가운데 자리가 비었다고 나머지 두 값을 붙여 37로 읽으면 위치 정보가 사라진다. 여러 끈의 자리 높이를 비교하는 것이 판독을 돕는 이유다.

[A3] NIST Museum | Standardizing an Empire

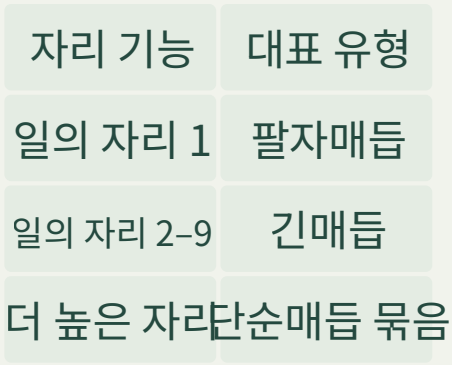
일의 자리에서 구별되는 매듭

매듭의 종류는 위치 판독을 돕는 정보다.

수량 키푸의 대표적인 설명에서는 일의 자리 1에 팔자매듭을 사용하며 2부터 9까지는 감은 수가 다른 긴매듭을 사용한다. 더 높은 자리에서는 단순매듭의 묶음으로 자릿값을 나타낸다. 모든 끈을 동일한 구슬 줄처럼 그리면 이런 차이가 사라진다.

이 페이지의 그림은 실제 매듭을 묶는 순서를 가르치는 공예 도면이 아니다. 기능의 차이를 표로 정리한 개념도다. 실제 유물에서는 꼬임과 매듭 방향과 손상 상태도 판독에 영향을 줄 수 있으므로 전문 기록과 대조해야 한다.

매듭의 유형이 일의 자리를 식별하는 단서라면 빈자리 문제를 해결하는 데도 도움이 된다. 단순히 가장 아래에 있는 매듭을 항상 일의 자리로 읽는 규칙은 충분하지 않다. 형태와 위치를 함께 읽는 것이 중요하다.



대표적인 수량 표기의 기능 구분

탐구

가장 아래 매듭이 있다는 이유만으로 무조건 일의 자리라고 할 수 있을까?

풀이와 확인

그렇게 단정할 수 없다. 매듭의 유형과 다른 끈의 자리 배열을 확인해야 한다. 일의 자리가 0이면 실제 매듭이 없는 상태일 수 있으므로 맨 아래라는 위치만으로 값을 결정하지 않는다.

[A7] INALCO | Quechua oral numeration and its writing in quipus

아무것도 없는 자리의 의미

0은 형태보다 관계로 드러날 수 있다.

수업용 키푸 표에서 백의 자리에 4가 있고 십의 자리에는 매듭이 없으며 일의 자리에 2가 있다고 하자. 자리를 올바르게 정했다면 값은 402다. 비어 있는 영역은 십의 자릿값이 0임을 나타낸다.

그러나 손상으로 끈이 끊어진 경우와 원래 매듭이 없던 경우는 다르다. 기록자가 빈 영역을 0으로 읽었는지 판독 불가로 남겼는지 구분해야 한다. 자료의 부재를 숫자의 부재로 자동 변환하지 않는 원칙이다.

0을 별도 기호로 그리는 마야의 설명과 나란히 놓으면 흥미로운 비교가 된다. 두 방식 모두 자릿값을 유지해야 하지만 이를 물리적으로 표현하는 방법은 다르다. 한 방식이 더 발전했다는 서열보다 어떤 조건에서 읽기 쉬운지를 살펴보자.

$$4\times100+0\times10+2=402$$

$$4\times100+3\times10+2=432$$

증가한 값은 30

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

백 4와 십 0과 일 2의 배열에서 십 자리에 3이 추가되면 얼마나 증가할까?

풀이와 확인

값은 402에서 432가 되므로 30이 증가한다. 추가된 숫자 3은 십의 자리에 있으므로 3이 아니라 30을 뜻한다. 원래 빈 영역이 실제로 0이었다는 전제에서만 가능한 계산이다.

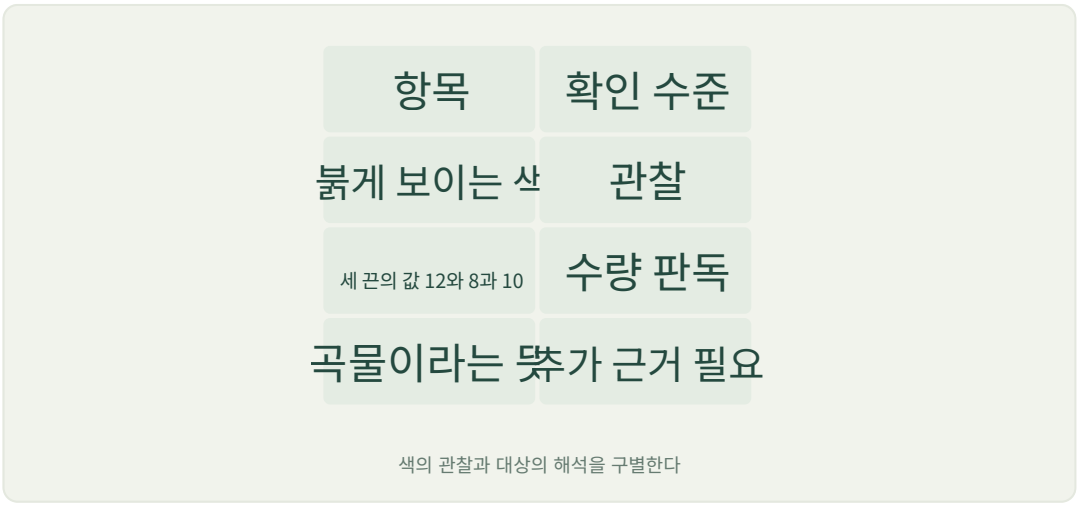
색을 곧바로 사전으로 만들지 않기

색 차이를 관찰하는 일과 뜻을 해독하는 일은 다르다.

끈의 색은 중요한 관찰 항목이다. 그러나 모든 키푸에서 한 색이 언제나 같은 물건을 뜻한다고 가정하면 안 된다. 특정 자료의 색 구분을 다른 자료에 그대로 옮기려면 연결 근거가 있어야 한다. 색이 의미를 가질 가능성과 그 의미를 확정했다는 주장은 다르다.

교실에서는 붉은 끈을 곡물로 정하고 푸른 끈을 옷감으로 정하는 분류 활동을 할 수 있다. 이때 색의 뜻은 수업에서 새로 정한 약속이라고 적는다. 역사적 색 사전을 복원한 것처럼 표현하지 않으면 분류의 원리를 안전하게 탐구할 수 있다.

퇴색도 고려해야 한다. 현재 보이는 색이 제작 당시와 다를 수 있으며 조명과 사진 보정에 따라 색감도 달라진다. 관찰 기록에는 색 이름뿐 아니라 촬영 조건이나 판독의 어려움도 남길 수 있다.



색의 관찰과 대상의 해석을 구별한다

탐구

붉은 끈 세 가닥의 수가 12와 8과 10이면 곡물 합계를 30이라고 말할 수 있을까?

풀이와 확인

붉은색이 곡물을 뜻하며 같은 단위를 쓴다는 근거가 있어야 한다. 수업에서 그렇게 약속했다면 합은 30이다. 실제 유물에서 색의 뜻이 미정이라면 붉은 끈에서 읽은 세 수의 합이라고 제한해 설명한다.

[A3] NIST Museum | Standardizing an Empire

수량 판독과 전체 해독

알려진 부분을 인정하면서 남은 문제를 남긴다.

일부 키푸의 십진 수량 구조를 이해한다고 해서 모든 키푸의 모든 의미를 읽을 수 있는 것은 아니다. 끈의 색과 연결과 꼬임 등이 어떤 정보를 담는지에 대해서는 연구가 이어진다. 숫자를 읽는 성취와 의미 해독의 한계를 함께 설명해야 한다.

예를 들어 세 끈에서 20과 30과 50이 읽힌다면 20+30=50이라는 관계를 확인할 수 있다. 하지만 앞의 두 끈이 어떤 항목이며 뒤의 끈이 총합을 뜻하는지는 배열과 맥락을 추가로 살펴야 한다. 우연히 합이 맞는 경우도 생각할 수 있다.

연구 가설은 여러 자료에서 반복되는 관계를 예측할 때 힘을 얻는다. 한 사례에 잘 맞는 설명이 다른 사례를 어떻게 다루는지 확인하는 과정이 필요하다. 흥미로운 가설을 소개할 때는 확정된 사실과 같은 문장으로 쓰지 않는다.

20+30=50
수학적 관계는 확인 가능
기록의 의미는 추가 검토

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

20과 30과 50의 관계만으로 무엇까지 주장할 수 있을까?

풀이와 확인

세 수가 덧셈 관계를 이룬다는 사실을 주장할 수 있다. 마지막 끈이 합계 끈이라는 해석은 연결 위치와 유사 사례가 뒷받침할 때 더 강해진다. 무엇을 센 것인지는 별도 증거가 필요하다.

[A8] Harvard Archaeology | Building Pathways into Khipu Research

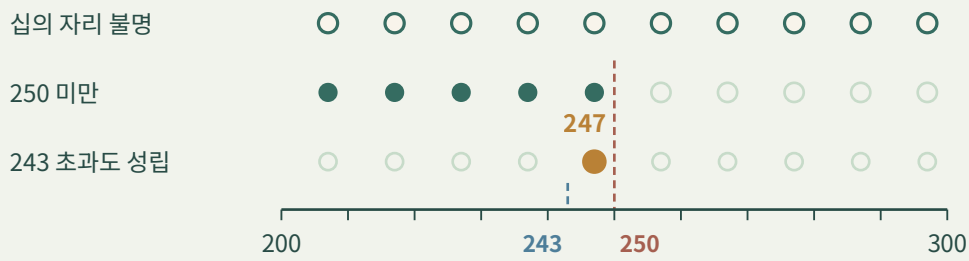
손상된 수의 가능한 범위

한 숫자를 읽지 못하면 답을 구간으로 나타낸다.

가상의 끈에서 백의 자리 2와 일의 자리 7이 읽히지만 십의 자리가 손상되었다고 하자. 십의 자리는 0부터 9까지 가능하므로 전체 값은 207에서 297 사이에 있다. 가능한 값은 10씩 증가하는 열 가지다.

가장 작은 값과 가장 큰 값만 적으면 그 사이의 모든 정수가 가능한 것처럼 보일 수 있다. 따라서 207과 217과 227처럼 간격이 10이라는 조건을 덧붙여야 한다. 범위와 가능한 값의 집합은 서로 다른 정보다.

다른 기록에서 전체가 250보다 작다는 조건을 얻었다면 가능한 값은 207과 217과 227과 237과 247로 줄어든다. 추가 증거가 불확실성을 어떻게 줄이는지 수학적으로 표현할 수 있다. 단서가 없는 자리를 느낌으로 채우지 않는다.



십의 자리 손상으로 생긴 열 가지 후보가 두 조건으로 247까지 줄어든다.

탐구

이 값이 다른 끈의 243보다 크다는 조건까지 알면 가능한 값은?

풀이와 확인

250보다 작다는 앞의 조건도 유지한다면 247만 남는다. 두 조건이 독립적인 근거에서 나왔는지 확인해야 한다. 같은 추측을 되풀이해 조건 두 개처럼 사용하면 확실성이 과장된다.

현대의 키푸는 무엇을 새로 약속하는가

전통에 바탕을 둔 창작과 역사 자료의 판독을 나눈다.

미국 국립표준기술연구소의 전시는 고고학자 제프리 스플릿스토서가 만든 국제단위계 키푸를 소개한다. 이 현대 작품은 측정 단위를 끈으로 나타내며 소수와 영 및 십의 거듭제곱을 표현하는 약속도 확장한다. 옛 키푸를 그대로 복제한 물건으로 읽어서는 안 된다.

새로운 기호가 필요한 이유를 간단한 학습 예로 살핀다. 125와 1.25와 0.0125는 같은 세 숫자를 포함하지만 값은 서로 다르다. 정수 자리만 나타낸 매듭 도식에 1과 2와 5를 놓으면 어느 수인지 결정되지 않는다. 소수점 위치나 별도의 축척 정보를 반드시 더해야 한다.

우리가 만드는 카드에서는 정수 부분 125와 축척 1/100을 별도 칸에 기록한다고 약속한다. 그러면 전체 값은 125 × 1/100 = 1.25다. 이는 전시에 있는 작품의 구체적인 매듭 규칙을 복원한 것이 아니라 표현 확장이 왜 필요한지 설명하는 현대 활동이다.

창작 규칙을 역사 자료에 거꾸로 적용하면 안 된다. 지금 만든 축척 표지가 편리하다는 이유만으로 옛 끈의 비슷한 장식도 같은 뜻이라고 단정할 수는 없다. 새 도구의 설계는 공개한 약속으로 검증하며 유물의 해석은 그 자료의 맥락과 비교 증거로 검토한다.

정수 카드	축척 카드	복원한 값
125	1	125
125	1/100	1.25
125	1/10000	0.0125

탐구

정수 카드가 375이고 축척 카드가 1/1000이면 어떤 값을 나타내는가?

풀이와 확인

$375 \times 1/1000 = 0.375$다. 정수 카드만 남기면 축척 정보를 잃어버리므로 같은 값을 확정할 수 없다. 이 규칙은 학습자가 새로 정한 것이다.

[A3] NIST Museum | Standardizing an Empire

나만의 전사 기록 만들기

나중에 원자료로 돌아갈 길을 남긴다.

키푸를 표로 옮긴 전사에는 자료 식별자와 끈 번호가 필요하다. 각 끈의 부모 관계와 관찰한 색과 매듭 위치를 적고 읽어 낸 수량을 별도 칸에 둔다. 관찰 자료와 계산된 값이 섞이지 않도록 구성하는 것이 좋다.

숫자 칸에 0을 넣었을 때는 실제로 0을 판독한 것인지 아직 읽지 않은 것인지 구분한다. 미판독 표시는 별도의 기호나 단어를 사용한다. 어느 날 새 사진으로 판독을 바꾸더라도 이전 기록과 바뀐 이유를 남길 수 있어야 한다.

이런 전사표는 특정 해독을 강요하지 않으면서 여러 가설을 비교할 토대가 된다. 같은 관찰에서 다른 해석이 나왔다면 어느 규칙이 다른지 추적할 수 있다. 디지털 자료를 만드는 일도 역사 연구의 일부다.

끈 ID	부모	관찰	판독
가1	주끈	세 자리 관찰	234
가2	주끈	가운데 손상	미확정
가2a	가2	일의 자리 관찰	7

실제 유물이 아닌 전사 형식의 예

탐구

전사표에 반드시 넣고 싶은 검증 항목 하나를 고르고 이유를 설명해 보자.

풀이와 확인

원자료의 끈 번호를 넣으면 전사된 숫자가 어느 위치에서 왔는지 다시 확인할 수 있다. 이 연결이 없으면 수량은 남아도 순서와 부모 관계를 복원하기 어렵다. 확인 가능한 기록은 원자료로 돌아가는 경로를 포함한다.

고대 아메리카관 / 87

합계와 분류의 수학

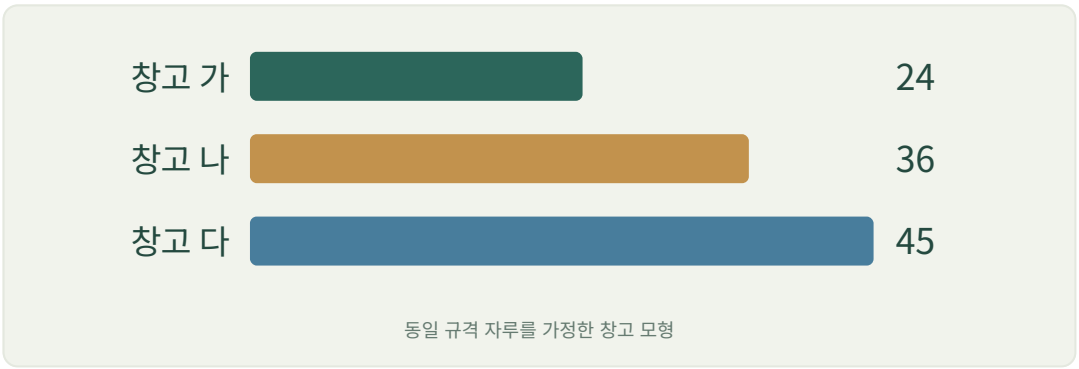
작은 창고의 수량표

합계를 내려면 항목과 단위가 같아야 한다.

수업용 창고 세 곳의 같은 규격 자루 수를 24와 36과 45로 정하자. 전체 자루 수는 105다. 이 합계는 세 창고의 기록이 같은 시점을 가리키고 같은 물건을 같은 단위로 셌다는 조건 아래에서 의미가 있다.

한 창고는 오늘 기록이고 다른 창고는 지난달 기록이라면 합이 현재 재고를 뜻하지 않을 수 있다. 단위가 같아도 시간 기준이 다르면 합산 전에 확인해야 한다. 숫자 연산의 정확성은 자료의 비교 가능성을 보장하지 않는다.

이 예제는 키푸의 행정적 수량 기록에서 착안한 현대 활동이다. 특정 유물에 적힌 창고 자료를 옮긴 것이 아니다. 수와 분류와 시간이라는 세 가지 기준을 함께 설계하는 연습으로 읽는다.



동일 규격 자루를 가정한 창고 모형

탐구

두 번째 창고의 36자루 중 6자루가 첫 창고에서 이동한 뒤 중복 기록되었다면?

풀이와 확인

중복된 6자루를 한 번 빼서 전체는 99자루가 된다. 창고별 숫자의 합이 맞더라도 이동 기록이 겹치면 전체 재고가 과대 계산될 수 있다. 기록 시점을 맞추는 일이 필요하다.

부분합으로 구조 찾기

여러 수를 묶는 방법을 비교한다.

가상 기록에 12와 18과 30이라는 세 수가 있고 다른 묶음에는 7과 9와 16이 있다고 하자. 각 묶음에서 앞의 두 수를 더하면 마지막 수가 된다. 반복되는 구조는 마지막 항목이 부분합일 가능성을 생각하게 한다.

그러나 합계 가설을 검토하려면 끈의 연결과 순서도 맞는지 보아야 한다. 숫자만 임의로 재배열하면 합이 맞는 조합을 얼마든지 찾을 수 있다. 분석 규칙을 먼저 정하고 그 규칙이 자료 전체에 얼마나 일관되게 적용되는지 확인한다.

부분합은 계산을 빠르게 검산하는 데도 유용하다. 12와 18을 먼저 묶어 30으로 만든 뒤 7과 9의 16을 더하면 전체는 46이다. 묶는 순서가 달라도 합이 같다는 덧셈의 성질을 이용한다.

$$12+18=30$$

$$7+9=16$$

$$\text{총량은 } 30+16=46$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

12와 18과 30을 모두 더해 60을 총량이라 하면 어떤 문제가 있을까?

풀이와 확인

30이 앞의 두 수의 부분합이라면 같은 수량을 두 번 센 것이다. 항목인지 합계인지 구별한 뒤 더해야 한다. 수량표를 읽을 때 숫자의 역할을 표시하는 이유다.

행 합계와 열 합계

같은 자료를 두 방향으로 모아 검산한다.

두 마을의 수업용 자루 기록을 표로 만들자. 가 마을에는 곡물 20자루와 콩 15자루가 있고 나 마을에는 곡물 30자루와 콩 10자루가 있다. 자루 규격이 모두 같다고 가정하면 전체 자루 수는 75다.

마을별로 먼저 더하면 35와 40을 얻는다. 품목별로 먼저 더하면 50과 25를 얻는다. 두 방향의 합계가 모두 75로 일치해야 한다. 같은 데이터의 분류 축을 바꾸어 보는 교차 검산이다.

다만 서로 다른 물품의 무게가 자루당 다르면 이 합계는 자루 개수의 합일 뿐 총무게가 아니다. 어떤 양을 더하는지 정확하게 이름 붙여야 한다. 단위의 범위를 지키는 습관은 복잡한 표에서도 필요하다.

구분	곡물	콩	합
가	20	15	35
나	30	10	40
합	50	25	75

두 방향으로 검산하는 가상 수량표

탐구

가 마을의 콩이 15가 아니라 18이었다면 행과 열 합계는 어떻게 바뀔까?

풀이와 확인

가 마을 합은 38로 늘고 콩의 합은 28로 늘며 전체는 78이 된다. 나 마을 합과 곡물 합은 변하지 않는다. 하나의 입력 변화가 관련 합계에만 전파되는지 살피면 표의 구조를 이해할 수 있다.

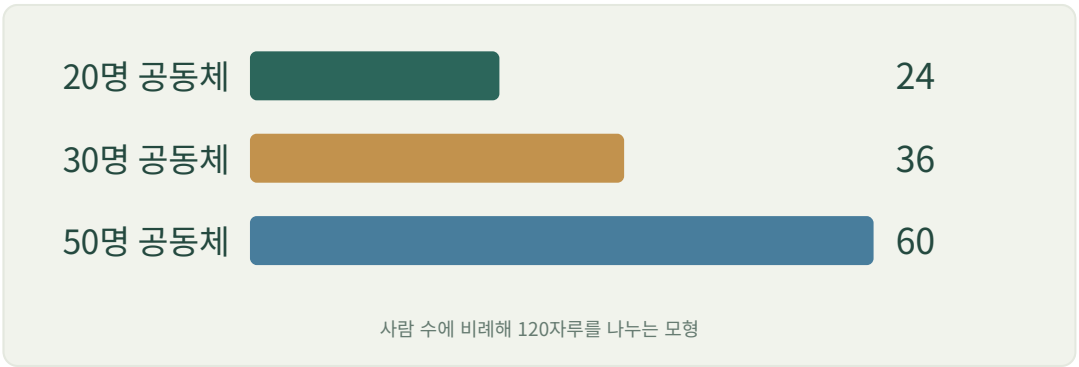
분배의 기준을 명시하기

같게 나누는 방법도 기준에 따라 달라진다.

자루 120개를 세 공동체에 나누는 수업 문제를 생각하자. 공동체마다 같은 수를 주면 40개씩이다. 그러나 사람 수가 20명과 30명과 50명이라면 사람마다 같은 양을 주는 분배는 다른 결과를 만든다.

전체 사람 수는 100명이므로 한 사람당 1.2자루에 해당한다. 공동체별 몫은 24와 36과 60자루다. 두 분배는 모두 명확한 규칙을 따르지만 무엇을 같게 했는지가 다르다. 계산 전에 공정성의 기준을 토론해야 한다.

이 예제를 실제 잉카의 분배 제도라고 단정하지 않는다. 행정 기록이 담을 수 있는 수량 문제를 오늘의 언어로 탐구하는 활동이다. 역사적 제도의 해석에는 당시 노동과 의무와 권력 관계를 함께 살펴야 한다.



사람 수에 비례해 120자루를 나누는 모형

탐구

공동체마다 40자루를 주면 사람당 몫은 어떻게 되는가?

풀이와 확인

각각 2자루와 약 1.33자루와 0.8자루다. 공동체의 몫은 같지만 개인의 몫은 다르다. 어느 기준을 택했는지 밝히지 않은 채 공평하다고만 말하면 판단의 근거가 숨겨진다.

유입과 유출의 장부

남은 수는 시작량과 이동량으로 결정된다.

창고에 처음 80자루가 있고 35자루가 들어온 뒤 42자루가 나갔다면 남은 수는 73이다. 식은 80+35−42로 쓴다. 들어온 양과 나간 양을 구별하지 않고 모두 더하면 재고와 활동량이 혼동된다.

활동량을 따로 묻는다면 이동한 총자루 수는 35+42=77이다. 순증감은 35−42=−7이다. 세 숫자 73과 77과 −7은 서로 다른 질문에 대한 답이다. 표의 제목이 계산 결과의 의미를 정한다.

실제 남은 자루를 세었더니 71이라면 장부와 실물 사이에 2자루 차이가 있다. 곧바로 원인을 특정하지 말고 누락 기록과 단위 차이와 계수 실수를 차례로 점검한다. 차이를 발견한 것과 원인을 밝힌 것은 다르다.

$$
\begin{aligned}
&\text{시작 } 80 + \text{유입 } 35 - \text{유출 } 42 \\
&\text{최종 재고 } 73 \\
&\text{순증감 } -7
\end{aligned}
$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

나간 수가 42가 아니라 45였다면 순증감과 최종 재고는?

풀이와 확인

순증감은 35−45=−10이며 최종 재고는 70이다. 기록 한 항목의 증가가 최종 재고를 반대로 감소시킨다. 이동 방향을 표시하면 이런 관계를 쉽게 검산할 수 있다.

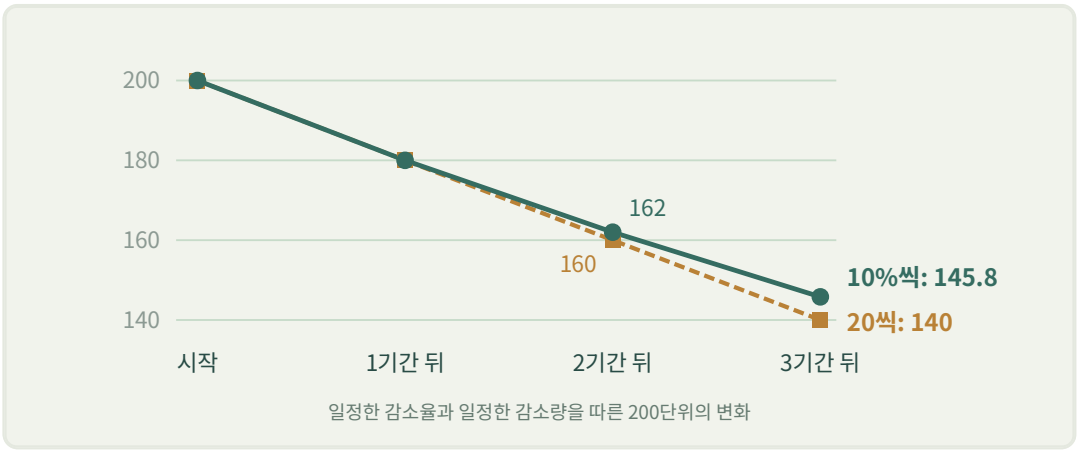
일정한 비율로 줄어드는 양

감소량과 감소율을 혼동하지 않는다.

보관 모형에서 200단위의 재료가 첫 기간에 10퍼센트 줄었다면 20단위가 감소하여 180이 남는다. 다음 기간에도 남은 양의 10퍼센트가 줄면 18이 감소하여 162가 남는다. 두 번째 감소량은 첫 번째와 같지 않다.

매번 20씩 줄어드는 모형이라면 두 기간 뒤에 160이 된다. 일정한 감소량 모형과 일정한 감소율 모형은 결과가 다르다. 현실에 어느 모형이 맞는지는 자료를 보고 판단해야 하며 계산의 편리함만으로 정할 수 없다.

이 수치는 고대 창고의 실제 손실률을 제시한 것이 아니다. 저장과 운송의 수량 문제를 이해하기 위한 가상 실험이다. 역사 자료에 비율이 적혀 있지 않다면 그 값을 임의로 만들어 실제 성과처럼 비교하지 않는다.



일정한 감소율과 일정한 감소량을 따른 200단위의 변화

탐구

남은 양의 10퍼센트가 한 번 더 줄면 얼마가 남을까?

풀이와 확인

162×0.9=145.8이다. 처음 양에서 모두 54.2가 줄었다. 매번 최초 200의 10퍼센트를 빼는 계산과 다르므로 비율의 기준량을 문장에 분명히 적어야 한다.

합계가 맞아도 오류는 남는다

서로 상쇄되는 입력 오류를 찾는다.

두 항목 24와 36의 합계가 60이라고 하자. 첫 항목을 27로 잘못 옮기고 둘째를 33으로 잘못 옮겨도 합은 여전히 60이다. 전체 합계가 맞는다는 사실만으로 각 항목이 정확하다고 결론 내릴 수 없다.

오류 하나가 더하고 다른 오류가 빼면 합계 검산을 통과할 수 있다. 그래서 원자료와 항목별 대조가 필요하다. 합계 검산은 유용한 도구지만 모든 오류를 잡아내는 만능 절차는 아니다.

자료 전사에서는 두 사람이 독립적으로 읽고 차이가 나는 항목을 다시 확인하는 방법을 쓸 수 있다. 같은 사람이 첫 기록을 보며 다시 적으면 기존 오류를 그대로 따라갈 가능성이 있다. 검산 절차의 독립성이 중요하다.

기록	항목 가	항목 나	합
원래	24	36	60
잘못 전사	27	33	60

합계만으로 발견할 수 없는 상쇄 오류

탐구

24와 36을 25와 35로 잘못 읽었을 때 합계 이외에 무엇을 확인할 수 있을까?

풀이와 확인

각 항목을 원자료의 해당 끈과 대조해야 한다. 항목의 순서와 색과 자리 판독을 따로 검토하면 합계에 드러나지 않은 이동 오류를 찾을 수 있다. 합이 같다는 이유로 원자료 확인을 생략하지 않는다.

합계 네 개로 빈칸을 복원할 수 있을까

정보가 충분한지 확인하는 것이 복원의 첫 계산이다.

키푸의 합계 구조에서 착안한 현대 표를 만든다. 두 행과 두 열의 네 칸에 수량이 들어 있다. 첫 행 합은 30이며 둘째 행 합은 40이다. 첫 열 합은 25이며 둘째 열 합은 45다. 네 합계가 있다고 네 빈칸이 자동으로 하나씩 정해지는지 묻는다.

왼쪽 위를 x라 두면 오른쪽 위는 30 − x다. 왼쪽 아래는 25 − x이며 오른쪽 아래는 15 + x다. 어느 x를 넣어도 나머지 합계가 맞는다. 행 합계의 합과 열 합계의 합이 모두 70이라는 조건 때문에 네 방정식 중 하나는 다른 세 식에 이미 들어 있다.

음이 아닌 정수만 허용하면 x는 0부터 25까지다. 따라서 가능한 표가 스물여섯 개다. 합계가 빠짐없이 남았더라도 개별 항목을 복원할 정보는 부족할 수 있다. 아무 값이나 하나 고른 뒤 유일한 원래 표라고 부르면 남은 불확실성을 숨기는 셈이다.

새 사진에서 왼쪽 위가 12라고 판독되면 나머지는 18과 13과 27로 결정된다. 이때 계산으로 복원한 값은 직접 읽은 값과 표시를 달리한다. 실제 유물에서는 네 합계가 같은 단위와 같은 분류에 관한 값이라는 해석도 먼저 확인해야 한다.

구분	첫 열	둘째 열	행 합
첫 행	x	30 − x	30
둘째 행	25 − x	15 + x	40
열 합	25	45	70

탐구

왼쪽 위 값이 8이라는 독립적인 증거를 얻었다면 나머지 세 값은?

풀이와 확인

오른쪽 위는 22이며 왼쪽 아래는 17이고 오른쪽 아래는 23이다. 행 합은 30과 40이며 열 합은 25와 45로 모두 맞는다.

[A2] Museo Larco | Inca Quipus / [A3] NIST Museum | Standardizing an Empire

수량 기록의 책임

무엇을 세었는지와 누가 세었는지를 함께 묻는다.

행정 기록은 사회를 바라보는 창이지만 사회 전체를 그대로 비추는 거울은 아니다. 기록을 만든 목적에 따라 어떤 사람과 물건은 자세히 남고 다른 활동은 빠질 수 있다. 숫자가 있다는 이유만으로 중립적인 전체 모습이라고 가정하지 않는다.

수업용 노동 기록에 세 집단의 작업일이 10과 12와 8로 적혀 있다면 총작업일은 30이다. 그러나 개인이 얼마나 오래 일했는지와 누가 일을 결정했는지는 이 합계만으로 알 수 없다. 숫자의 단위와 집계 기준을 분명히 해야 한다.

통계를 읽는 질문은 역사 자료에도 도움이 된다. 기록 대상에 포함된 사람과 빠진 사람을 구별하고 누락 이유를 검토한다. 계산의 정밀함과 기록의 포괄성은 별개의 성질이며 둘 다 평가해야 한다.

$$10+12+8=30 \text{ 작업일}$$

$$\text{작업일} \neq \text{참여 인원}$$

$$\text{집계 단위를 먼저 확인한다}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

작업일 합계 30을 일한 사람 수 30명이라고 읽으면 왜 잘못인가?

풀이와 확인

한 사람이 여러 날 일했을 수 있기 때문이다. 작업일은 사람 수와 기간이 결합된 양이다. 참여 인원과 개인별 기간이 따로 기록되어야 사람 수를 구할 수 있다.

고대 아메리카관 / 88

계산판을 새로 구성하다

유파나를 대하는 출발점

사료의 그림과 오늘의 계산 규칙을 구분한다.

유파나와 관련된 역사 자료는 안데스의 계산 활동을 연구하는 중요한 단서다. 그러나 그림에 보이는 칸과 말의 배치만으로 모든 연산 규칙이 자동으로 결정되지는 않는다. 여러 해석이 가능한 부분에는 확정되지 않았다는 설명이 필요하다.

이 장에서는 세 열을 백과 십과 일의 자리로 정한 현대 학습용 판을 만든다. 이것은 특정 유파나의 유일한 역사적 사용법을 복원한 것이 아니다. 자리 교환과 연산 보존을 손으로 확인하기 위한 명시적인 모형이다.

모형의 규칙을 처음에 공개하면 활동을 검증할 수 있다. 한 열의 말 열 개를 왼쪽 열의 말 하나로 바꾼다. 말을 옮길 때 전체 값이 변하는지 매 단계 점검한다. 작동하는 계산판과 역사적으로 확인된 계산판은 구별하여 설명한다.

판의 안내서에는 백과 십과 일의 자리 이름을 적고 덧셈과 뺄셈 예를 각각 넣는다. 한 열의 말이 열 개 이상이면 왼쪽 자리로 교환하고 뺄 말이 모자라면 왼쪽 묶음을 푼다는 다음 행동도 안내한다. 제목에는 현대 학습용 판이라는 성격을 명시한다.

백	십	일
0	3	7

이 장에서 새로 정의한 십진 학습용 판

탐구

우리의 판이 37+48을 정확히 계산하면 무엇이 검증된 것인가?

풀이와 확인

정의한 십진 교환 규칙이 이 덧셈에서 값을 보존하며 답 85를 만든다는 사실이다. 그것만으로 과거 유파나의 실제 규칙을 증명한 것은 아니다. 역사적 주장은 다른 자료의 뒷받침이 필요하다.

[A5] Royal Danish Library | The Guaman Poma Website

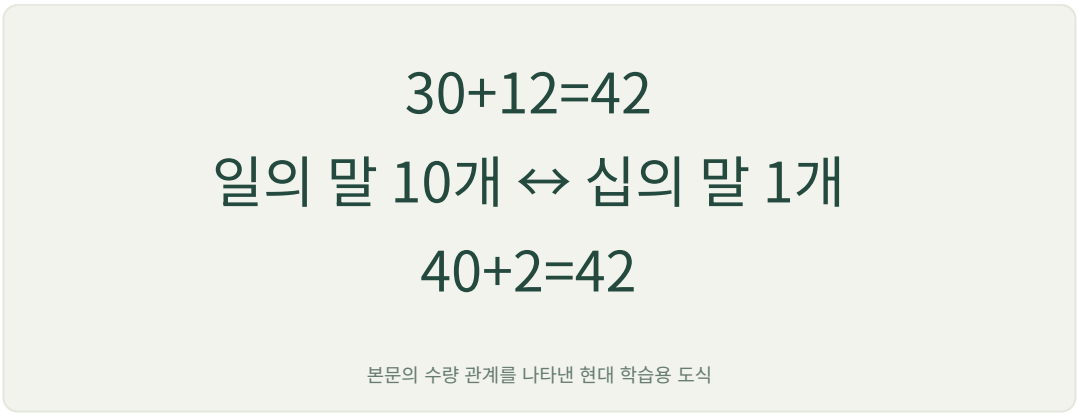
한 수를 놓는 여러 상태

말의 위치와 개수를 함께 읽는다.

학습용 판에서 42를 놓으려면 십의 열에 말 네 개와 일의 열에 말 두 개를 둔다. 십의 말 셋과 일의 말 열두 개로 놓아도 전체 값은 42다. 정리 전과 정리 후의 상태를 비교하면 자리 교환의 뜻이 보인다.

표준 상태에서는 각 열의 말 수를 아홉 개 이하로 제한한다. 일의 말 열 개를 십의 말 하나로 교환하면 3과 12가 4와 2로 바뀐다. 숫자만 바뀌었을 뿐 전체 수량은 보존된다.

처음부터 정답 상태만 보여 주면 계산판은 숫자를 장식적으로 표시하는 도구가 된다. 중간 상태를 허용하고 교환을 설명하게 하면 연산의 원리를 탐구할 수 있다. 손으로 움직인 결과를 식으로 기록하는 활동을 덧붙인다.



본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

십의 말 다섯 개와 일의 말 열세 개를 정리하면?

풀이와 확인

일의 말 열 개를 십의 말 하나로 바꾸어 십 여섯 개와 일 세 개가 된다. 값은 63이다. 정리 전의 50+13과 정리 뒤의 60+3이 같음을 확인한다.

두 수를 합치는 덧셈

모으기와 교환을 서로 다른 단계로 진행한다.

37과 48을 각각 다른 색의 말로 놓아 보자. 십의 말은 셋과 넷을 합쳐 일곱 개다. 일의 말은 일곱과 여덟을 합쳐 열다섯 개다. 먼저 두 색을 한 판에 모으는 단계에서 값은 70+15가 된다.

다음에 일의 말 열 개를 십의 말 하나로 바꾼다. 십의 말 여덟 개와 일의 말 다섯 개가 남아 85가 된다. 색은 어느 수에서 온 말인지를 보여 주지만 최종 값은 색과 무관하다.

모으기와 교환을 나누어 기록하면 오류의 위치를 찾기 쉽다. 일의 말이 처음부터 열네 개였다면 합치는 단계의 계수 오류다. 열다섯 개를 제대로 모았지만 십의 말을 늘리지 않았다면 교환 단계의 오류다.

단계	십	일
37	3	7
48	4	8
합치기	7	15
정리	8	5

모으기와 교환을 분리한 37+48

탐구

56+27을 같은 판으로 계산하면 어떤 교환이 필요한가?

풀이와 확인

십의 말은 일곱 개이며 일의 말은 열세 개다. 일의 열 개를 십의 하나로 바꾸면 십 여덟 개와 일 세 개가 되어 83이다. 정리 전의 70+13과 정리 뒤의 80+3이 같은지 확인한다.

묶음을 풀어 빼기

빼기 전에 원래 값을 다른 모습으로 바꾼다.

학습용 판에서 52−28을 계산한다. 십의 말 다섯 개와 일의 말 두 개만으로는 일의 말 여덟 개를 제거할 수 없다. 십의 말 하나를 일의 말 열 개로 바꾸면 십 넷과 일 열둘이 된다.

이제 십의 말 두 개와 일의 말 여덟 개를 제거한다. 십 둘과 일 넷이 남으므로 차는 24다. 묶음을 푼 직후에 값이 40+12=52로 유지되는지 확인하는 것이 핵심이다.

계산판에서 빌림은 외부에서 수량을 가져오는 일이 아니다. 같은 전체를 다른 단위의 말로 바꾸는 일이다. 따라서 교환과 제거의 순서를 설명하게 하면 뺄셈 알고리즘을 기계적으로 외우는 부담이 줄어든다.

$$52=40+12$$
$$(40-20)+(12-8)$$
$$20+4=24$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

71−46을 계산하는 중간 상태는 어떻게 되는가?

풀이와 확인

71을 십 여섯 개와 일 열한 개로 바꾼다. 여기서 십 넷과 일 여섯 개를 제거하면 십 둘과 일 다섯 개가 남아 25다. 결과에 46을 더해 71이 되는지 검산한다.

반복 덧셈으로 곱하기

같은 묶음을 여러 번 놓고 정리한다.

24를 세 번 놓으면 십의 말 여섯 개와 일의 말 열두 개가 된다. 일의 말 열 개를 십의 말 하나로 교환하면 십 일곱 개와 일 두 개가 남는다. 따라서 24×3=72다.

이 과정은 분배법칙을 눈에 보이게 한다. 24의 십 부분 20을 세 번 놓은 값 60과 일 부분 4를 세 번 놓은 값 12를 더한 것이다. 계산판의 움직임을 3×(20+4)=60+12라는 식과 연결한다.

곱하는 수가 커지면 말의 수가 많아져 불편해질 수 있다. 편리한 계산 도구를 평가할 때 정확성뿐 아니라 필요한 동작 수와 공간도 고려할 수 있다. 어떤 상황에 적합한지 측정하는 것이 도구 비교의 구체적인 방법이다.

$$24\times3=(20+4)\times3$$
$$60+12=70+2$$
$$\text{곱은 }72$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

16을 다섯 번 놓으면 몇 번의 십진 교환이 필요한가?

풀이와 확인

일의 말이 30개이므로 열 개를 하나로 바꾸는 교환을 세 번 한다. 십의 말 다섯 개에 셋을 더해 여덟 개가 된다. 결과는 80이며 일의 말은 남지 않는다.

나눗셈을 공평한 묶음으로

묶음 수와 남은 말을 동시에 기록한다.

말 74개를 세 판에 똑같이 나누는 모형을 만들어 보자. 먼저 각 판에 십의 말 두 개씩 주면 60을 나누고 14가 남는다. 남은 14를 일의 말로 풀어 각 판에 네 개씩 주면 2가 남는다.

각 판에는 24가 놓였고 나머지는 2다. 검산은 $3\times24+2=74$로 한다. 나머지가 나누는 수 3보다 작아야 작업이 끝났다는 조건도 확인한다. 각 판에 23을 놓고 5를 남긴 상태는 아직 더 나눌 수 있다.

실제 물건을 나눌 때는 나머지를 쪼갤 수 있는지도 따져야 한다. 돌멩이는 정수 개로 남기지만 곡물처럼 분할 가능한 양은 분수로 나눌 수 있다. 같은 계산판이라도 문제의 대상에 따라 최종 답의 표현이 달라진다.

$$74=60+14$$

$$3\times24+2=74$$

몫 24와 나머지 2

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

86개를 네 판에 나누면 정수 몫과 나머지는?

풀이와 확인

각 판에 21개씩 놓으면 84개를 나누고 2개가 남는다. $4\times21+2=86$이다. 나머지 2가 나누는 수 4보다 작으므로 더 이상 한 개씩 똑같이 줄 수 없다.

움직임의 수로 도구 비교하기

빠르다는 인상을 측정 가능한 질문으로 바꾼다.

두 계산판으로 38+47을 풀 때 한 판은 말을 하나씩 옮기고 다른 판은 다섯 개 묶음 말을 쓴다고 하자. 어떤 동작을 한 번으로 셀지 먼저 정해야 비교가 가능하다. 잡기와 이동과 교환을 각각 셀 수도 있고 한 묶음 이동을 한 번으로 셀 수도 있다.

실험자는 같은 문제를 여러 번 풀고 수행 순서를 바꾸어 본다. 두 번째 판이 항상 나중에 등장하면 연습 효과 때문에 빨라질 수 있다. 도구의 효과와 사용자의 익숙함을 분리하려는 간단한 실험 설계다.

이 활동의 결론은 우리가 정한 조건에서의 편리함에 한정된다. 동작이 적다는 사실이 특정 판의 역사적 사용을 증명하거나 모든 사용자에게 더 낫다는 뜻은 아니다. 평가 기준을 명확히 하면 과장 없이 장단점을 설명할 수 있다.



탐구

가 판의 동작 수가 18과 20과 19라면 평균은?

풀이와 확인

평균은 19회다. 나 판의 평균과 비교하되 같은 문제와 같은 동작 정의를 사용했는지 확인한다. 시간까지 비교하려면 별도로 측정해야 하며 동작 수가 곧 소요 시간은 아니다.

고대 아메리카관 / 89

산비탈을 바꾸는 기하

계단식 땅을 평면으로 보기

입체 공간에서 어떤 면적을 재는지 정한다.

마추픽추의 유산 설명에는 농업용 계단식 경작지와 산지의 공간 구성이 등장한다. 이 장에서는 이런 산지 공간에서 떠올릴 수 있는 면적과 경사 문제를 살핀다. 실제 유적의 치수를 임의로 제시하지 않고 별도의 수업용 모형을 사용한다.

경사진 면의 넓이와 위에서 내려다본 수평 투영 면적은 같지 않을 수 있다. 계단의 평평한 경작면을 합하는 계산과 벽면까지 포함한 전체 표면 계산도 다르다. 무엇을 재는지 그림에 표시한 뒤 수를 넣어야 한다.

길이 12미터와 폭 4미터인 평평한 구획을 직사각형으로 단순화하면 면적은 48제곱미터다. 실제 경계가 휘어 있다면 이 값은 근삿값일 수 있다. 간단한 도형을 사용한 이유와 생략한 부분을 함께 설명한다.



실제 유적 치수가 아닌 직사각형 경작면 모형

탐구

길이 12미터와 폭 4미터라는 값만으로 경작지의 정확한 면적을 알 수 있을까?

풀이와 확인

직사각형이라는 가정이 필요하다. 경계가 불규칙하면 같은 최대 길이와 폭을 가진 땅도 면적이 다를 수 있다. 이 예제의 48제곱미터는 정의한 직사각형 모형의 정확한 값이다.

[A10] UNESCO | Historic Sanctuary of Machu Picchu

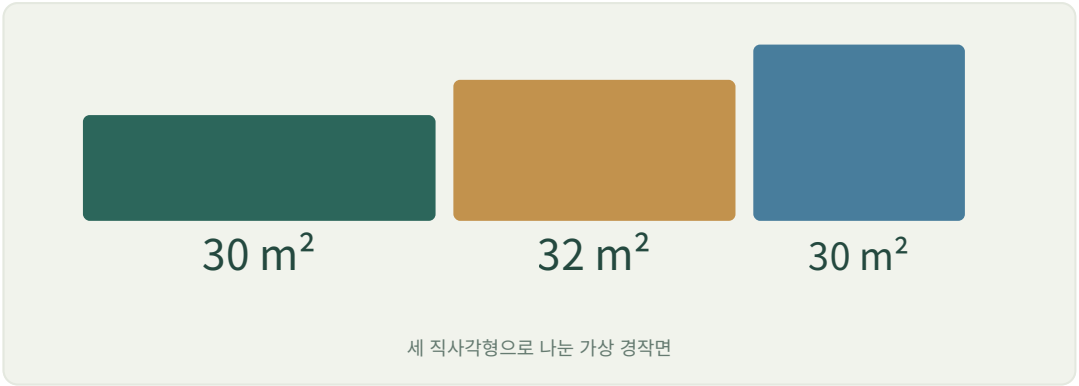
여러 구획의 면적 합

겹침과 빠진 부분을 확인하며 분해한다.

가상의 직사각형 경작면 세 구획을 생각한다. 첫째는 길이 10 m와 폭 3 m이며 둘째는 길이 8 m와 폭 4 m다. 셋째는 길이 6 m와 폭 5 m다. 면적은 각각 30 m^2와 32 m^2 및 30 m^2이며 합은 92 m^2다. 구획이 겹치지 않는다는 조건에서 더한다.

길과 배수 공간이 가운데 포함되어 있다면 경작 가능 면적에서는 빼야 할 수도 있다. 예를 들어 전체 92제곱미터 중 길이 8제곱미터를 차지하면 실제 심을 수 있는 면적은 84제곱미터다. 총면적과 순사용 면적의 이름을 구별한다.

분해 방법은 하나가 아니다. 같은 땅을 다른 직사각형으로 나누어 계산해 같은 결과가 나오는지 확인할 수 있다. 서로 다른 분해에서 답이 다르면 겹친 부분이나 빠진 부분을 찾아보자.



세 직사각형으로 나눈 가상 경작면

탐구

세 구획 중 둘째 구획의 폭이 4에서 5미터가 되면 합계는?

풀이와 확인

둘째 구획의 면적이 8제곱미터 늘어 전체는 100제곱미터가 된다. 폭의 증가 1미터에 길이 8미터를 곱한 값이다. 다른 두 구획이 변하지 않았다는 조건에서 계산한다.

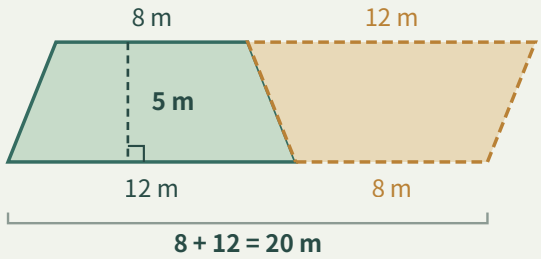
사다리꼴로 근사한 구획

양쪽 길이가 다른 땅을 계산한다.

서로 평행한 양 끝 경계의 길이가 다른 구획을 사다리꼴로 단순화한다. 평행한 두 변이 8미터와 12미터이며 두 변 사이의 수직 거리가 5미터라고 하자. 두 평행변의 평균 길이 10에 높이 5를 곱하면 면적은 50제곱미터다.

여기서 높이는 기울어진 옆변의 길이가 아니라 평행변 사이의 수직 거리다. 두 길이를 혼동하면 면적이 과대 계산될 수 있다. 도형에 직각 표시를 넣어 어떤 거리를 측정했는지 분명히 하자.

공식을 기억하기 어렵다면 같은 사다리꼴을 하나 더 뒤집어 붙여 평행사변형을 만들어 본다. 바닥 길이는 8+12이고 높이는 5다. 두 도형의 합이 100제곱미터이므로 원래 하나는 그 절반이다.



사다리꼴 두 개
= 20 × 5 = 100 m²

사다리꼴 하나
= 100 ÷ 2 = 50 m²

뒤집은 사다리꼴을 붙여 만든 평행사변형으로 넓이 50 m²를 구한다.

탐구

평행변 6미터와 10미터 사이의 수직 거리가 4미터라면?

풀이와 확인

(6+10)×4÷2=32제곱미터다. 평균 길이 8미터와 높이 4미터를 곱해도 같다. 옆변 길이가 별도로 주어져도 면적식의 높이 자리에 그대로 넣지 않는다.

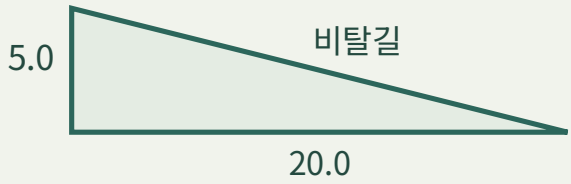
경사를 비율로 나타내기

높이 차와 수평 이동을 서로 나눈다.

수업용 비탈에서 수평으로 20미터 이동할 때 높이가 5미터 올라간다고 하자. 높이 변화와 수평 거리의 비는 5/20으로 1/4이다. 이를 백분율로 표현하면 25퍼센트 경사다.

25퍼센트와 25도는 같은 각도가 아니다. 백분율 경사는 두 길이의 비를 100배 한 값이며 각도는 회전의 크기를 다른 단위로 나타낸다. 서로 다른 표현을 숫자가 같다는 이유로 바꾸어 쓰면 안 된다.

경사를 비교할 때는 같은 기준 거리인지 확인한다. 수평 거리 대신 비탈을 따라 잰 길이를 분모에 넣으면 다른 비율이 된다. 현장에서 측정한 거리가 무엇인지 기록하는 것이 계산의 첫 단계다. 단위가 같은 두 길이를 비교해야 비율을 바로 해석할 수 있다.



수평 거리와 높이 차를 구분한 경사 모형

탐구

수평 거리 30미터에서 높이 차가 6미터라면 경사 비율은?

풀이와 확인

6/30=1/5이며 20퍼센트다. 앞의 25퍼센트 모형보다 완만하다. 두 예제 모두 수평 거리를 기준으로 했기 때문에 비율을 직접 비교할 수 있다.

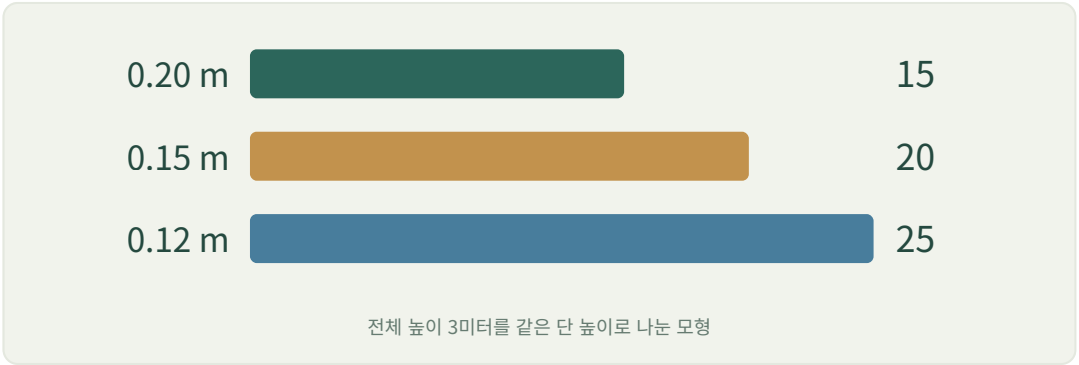
계단을 나누는 두 기준

같은 높이를 오르는 여러 설계를 비교한다.

전체 높이 차가 3미터인 모형 계단을 생각하자. 한 단의 높이를 0.15미터로 정하면 스무 단이 필요하다. 한 단의 높이가 0.2미터라면 열다섯 단이다. 같은 전체 높이에 도달해도 단 수와 발판 배치는 달라진다.

발판의 수평 깊이를 0.3미터로 고정한 단순 모형에서는 스무 단의 수평 길이가 6미터가 된다. 실제 계단의 시작과 끝 발판을 어떻게 셀지에 따라 계산 항목이 달라질 수 있으므로 모형의 정의를 적어 둔다.

이 수치는 실제 유적의 계단 규격도 안전한 건축 설계 지침도 아니다. 높이를 일정한 단위로 나누는 비례 관계를 배우는 문제다. 역사적 구조의 실제 쓰임과 편의성은 현장 자료와 사용 맥락을 함께 살펴야 한다.



전체 높이 3미터를 같은 단 높이로 나눈 모형

탐구

한 단 높이를 0.12미터로 정하면 3미터를 오르는 데 몇 단이 필요한가?

풀이와 확인

3÷0.12=25단이다. 단 높이가 작아지면 필요한 단 수가 늘어난다. 전체 높이를 고정했을 때 두 양의 곱이 일정하다는 관계를 확인할 수 있다.

물의 양과 단면

단면적과 길이를 곱하면 부피가 된다.

수업용 수로의 물이 차 있는 단면을 폭 0.4미터와 깊이 0.2미터인 직사각형으로 단순화하자. 단면적은 0.08제곱미터다. 이런 단면이 길이 10미터 동안 일정하다면 물의 부피는 0.8세제곱미터다.

단면적은 제곱미터이며 부피는 세제곱미터다. 단위를 함께 계산하면 무엇을 곱해야 하는지 확인할 수 있다. 면적에 길이를 한 번 더 곱해야 부피가 되는 이유가 단위의 차이에 드러난다.

이 계산만으로 흐르는 물의 양을 시간당 얼마라고 말할 수는 없다. 유량을 구하려면 속도나 시간 정보가 더 필요하다. 정지한 공간의 부피와 단위 시간에 지나가는 부피를 구별해야 한다.

$$0.4 \times 0.2 = 0.08\ \mathrm{m}^2$$

$$0.08 \times 10 = 0.8\ \mathrm{m}^3$$

$$\text{면적} \times \text{길이} = \text{부피}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

단면적 0.08제곱미터에서 평균 속도가 초당 0.5미터라고 가정하면 유량은?

풀이와 확인

0.08×0.5=0.04세제곱미터 매초다. 단면에 수직인 평균 속도를 사용하며 흐름이 일정하다는 단순 모형이다. 이는 실제 역사 수로의 측정값이 아니다.

축소 모형의 길이와 면적

축척을 바꾸면 차원에 따라 비율이 달라진다.

실제 길이를 100분의 1로 줄이는 모형에서 20미터는 20센티미터가 된다. 길이 20미터와 폭 10미터인 직사각형은 모형에서 20센티미터와 10센티미터가 된다. 두 방향의 길이가 모두 줄어든다.

따라서 면적의 비율은 100분의 1이 아니라 10000분의 1이다. 길이 축척을 면적에 그대로 적용하면 큰 오차가 생긴다. 입체 모형의 부피라면 세 방향이 함께 줄어 1000000분의 1이 된다.

축척 모형을 전시할 때는 길이 축척을 명확히 표시하고 세로와 가로를 다르게 과장했는지도 밝힌다. 산지의 높이를 더 크게 표현하면 지형이 잘 보일 수 있지만 실제 경사각은 보존되지 않는다. 보기 좋은 그림과 측정 가능한 그림의 차이다.

$$
\text{길이 비율 } 1/100
$$

$$
\text{면적 비율 } 1/10000
$$

$$
\text{부피 비율 } 1/1000000
$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

길이를 10분의 1로 줄인 모형의 면적과 부피 비율은?

풀이와 확인

면적은 100분의 1이며 부피는 1000분의 1이다. 축척이 두 번 또는 세 번 곱해지는 까닭을 생각하면 외우지 않고 구할 수 있다.

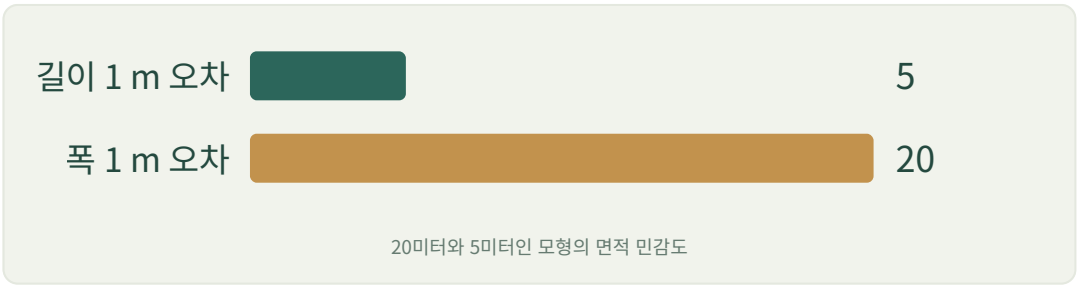
지형 모형의 가정을 점검하기

도형의 답과 실제 공간의 차이를 기록한다.

모형 보고서에는 계산에 사용한 모양과 치수를 적는다. 경작면을 직사각형으로 보았는지 수로 단면이 일정하다고 가정했는지 설명한다. 가정이 달라지면 답도 달라질 수 있으므로 결과 숫자만 제출하지 않는다.

다음에는 어떤 측정이 답에 가장 크게 영향을 주는지 살핀다. 길이 20미터와 폭 5미터인 땅에서 길이가 1미터 틀리면 면적 오차는 5제곱미터다. 폭이 1미터 틀리면 20제곱미터의 차이가 난다. 같은 길이 오차라도 영향은 다르다.

마지막으로 더 나은 자료가 생겼을 때 무엇을 바꿀지 적는다. 굽은 경계를 여러 작은 구획으로 나누거나 높이 차를 더 자주 재면 모형을 개선할 수 있다. 단순화의 한계를 아는 것이 계산을 버리는 뜻은 아니다.



20미터와 5미터인 모형의 면적 민감도

탐구

앞의 직사각형에서 폭 측정을 더 정밀하게 할 이유는 무엇인가?

풀이와 확인

같은 1미터 오차가 생겼을 때 폭의 오차가 면적에 네 배 큰 영향을 주기 때문이다. 실제 측정의 난이도와 예상 오차도 고려해야 하지만 민감도를 비교하면 노력을 어디에 집중할지 판단할 수 있다.

고대 아메리카관 / 90

길과 다리를 연결하는 수학

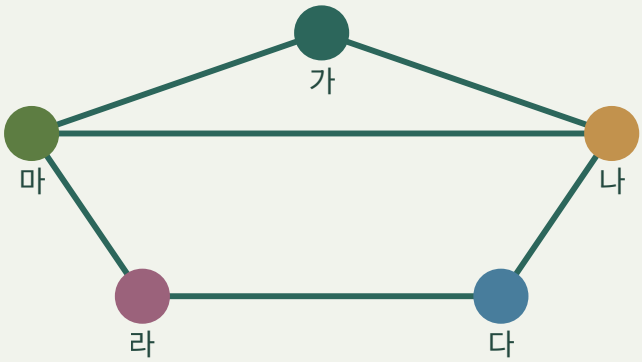
카팍냔을 연결망으로 읽기

길은 한 줄이 아니라 장소 사이의 관계다.

카팍냔은 안데스의 길과 관련 시설이 이어진 광범위한 체계다. 유네스코는 이를 여러 나라에 걸친 유산으로 소개한다. 길 자체만큼 거점과 저장과 이동의 관계를 함께 살펴야 전체 기능이 드러난다.

수학 활동에서는 장소를 점으로 나타내고 직접 이어진 길을 선으로 나타내는 그래프를 만들 수 있다. 이 도식은 실제 지리 지도가 아니다. 두 장소가 연결되어 있는지와 경로가 몇 가지인지에 집중하기 위해 거리와 방향을 생략한 모형이다.

같은 연결망도 점을 다른 위치에 배치하여 그릴 수 있다. 선의 모양이 달라도 어떤 점끼리 연결되는지가 같다면 같은 구조를 나타낸다. 지도에서 보이는 모양과 연결 관계를 구별하는 첫 단계다.



실제 도로 지도가 아닌 연결망 학습 모형

탐구

가와 나와 다가 각각 서로 연결된 모형에는 직접 연결선이 몇 개인가?

풀이와 확인

가와 나 사이와 나와 다 사이와 다와 가 사이의 세 개다. 방향을 구별하지 않는 길이라는 가정 아래에서 센다. 왕복 가능 여부가 다르면 모형에 방향 표시를 추가해야 한다.

[A9] UNESCO | Qhapaq Ñan Andean Road System

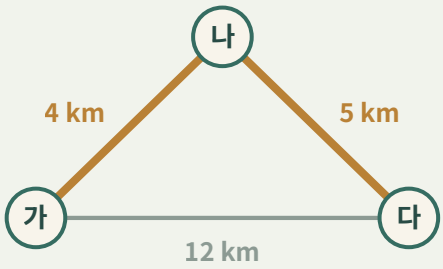
가장 짧은 길 찾기

직접 연결된 길이 언제나 최단 경로는 아니다.

가에서 다까지 직접 가는 길의 길이가 12킬로미터라고 하자. 가에서 나까지는 4킬로미터이며 나에서 다까지는 5킬로미터다. 나를 거쳐 가면 전체가 9킬로미터이므로 직접 연결된 길보다 짧다.

도식에서 두 점 사이의 선이 곧게 그려졌다고 실제 거리도 가장 짧은 것은 아니다. 그래프의 선은 연결을 뜻하며 거리 값은 별도로 붙인 숫자다. 그림의 길이를 자로 재어 비교하는 실수를 피해야 한다.

후보 경로를 나열한 뒤 각 길이를 더하면 작은 연결망의 최단 경로를 찾을 수 있다. 같은 장소를 반복 방문하는 경로는 모든 길이가 양수라면 더 길어지므로 후보에서 줄일 수 있다. 가정을 이용해 탐색을 효율화하는 방법이다.



짧게 그려진 직접 연결보다 나를 거치는 길이 더 짧다.

탐구

가에서 라까지 나를 거치는 길이 4+7이고 다를 거치는 길이 12+2라면?

풀이와 확인

각각 11킬로미터와 14킬로미터이므로 두 후보 중에는 나를 거치는 길이 짧다. 다른 연결이 있다면 그것도 검토해야 하므로 이 비교만으로 전체 연결망의 최단 경로라고 단정하지 않는다.

거리와 시간의 다른 최적화

빠른 길과 짧은 길은 다를 수 있다.

가상의 두 경로를 비교하자. 산길은 8킬로미터이며 평균 속도가 시속 2킬로미터다. 완만한 길은 12킬로미터이며 시속 4킬로미터로 갈 수 있다고 가정한다. 산길은 4시간이고 완만한 길은 3시간이다.

따라서 거리를 최소화하면 산길을 택하지만 시간을 최소화하면 완만한 길을 택한다. 최적이라는 말에는 무엇을 줄이거나 늘리는지가 포함되어야 한다. 목적을 밝히지 않으면 서로 다른 정답이 충돌하는 것처럼 보일 수 있다.

실제 이동 시간은 고도와 날씨와 짐과 휴식에 영향을 받는다. 이 페이지의 일정한 속도는 계산을 위한 가정이다. 하나의 평균값으로 현장 이동을 완벽하게 예측한다고 주장하지 않는다.

경로	거리	속도	시간
산길	8 km	2 km/h	4 h
완만한 길	12 km	4 km/h	3 h

거리와 시간을 다르게 비교하는 가상 이동

탐구

완만한 길의 평균 속도가 시속 3킬로미터로 줄면 어느 길이 빠를까?

풀이와 확인

완만한 길도 12÷3=4시간이 걸려 두 경로의 시간이 같다. 거리는 여전히 다르다. 조건 하나가 바뀌면 최적 선택이 달라질 수 있으므로 가정의 변화를 함께 검토한다.

중계 구간의 합

한 사람이 전부 움직이는 모형과 구별한다.

길을 여러 사람이 이어 달리는 중계 모형을 생각하자. 세 구간의 이동 시간이 12분과 15분과 10분이며 각 인계에 1분씩 필요하다. 세 사람이 두 번 인계하면 총시간은 39분이다.

구간 시간만 더하면 37분이며 인계 시간을 놓치게 된다. 반대로 사람 수 세 명을 그대로 인계 횟수로 세면 40분이 된다. 시작과 끝을 제외한 연결 지점의 수를 확인해야 한다.

이 계산은 실제 잉카 전령의 속도나 운영 간격을 제시하는 것이 아니다. 도로와 정보 전달을 함께 생각하기 위한 수업 모형이다. 역사적 이동 성과를 말하려면 출처가 있는 거리와 시간 자료가 필요하다.

$$12+15+10=37\text{분}$$

$$\text{인계 } 2\text{회} \times 1\text{분}$$

$$\text{총시간 } 39\text{분}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

네 구간이 각각 10분이며 구간 사이 인계가 2분이라면 전체 시간은?

풀이와 확인

이동 시간 40분에 세 번의 인계 시간 6분을 더해 46분이다. 구간이 네 개이면 내부 연결은 세 곳이다. 첫 출발과 마지막 도착을 인계로 더 세지 않는다.

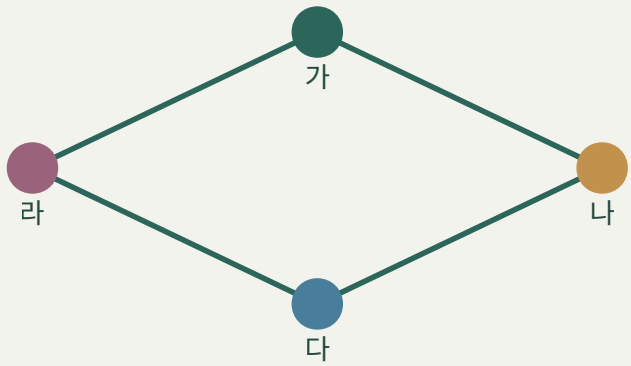
다리가 끊기면 생기는 일

한 연결선이 전체 구조를 나눌 수 있다.

네 거점 가와 나와 다와 라가 한 줄로 연결되어 있다고 하자. 가운데 나와 다 사이의 길을 제거하면 연결망은 둘로 나뉜다. 이런 선은 전체 연결을 유지하는 데 특별한 역할을 한다.

가와 라를 잇는 우회 길을 추가하면 가운데 길이 끊겨도 모든 거점에 도달할 수 있다. 한 연결을 더하는 일이 평소의 최단 거리뿐 아니라 고장 상황의 접근성도 바꾼다. 효율성과 견고함을 서로 다른 기준으로 비교할 수 있다.

실제 도로 체계에서 우회로는 유지 비용과 지형 조건을 고려해야 한다. 모든 점을 모두 연결하면 좋다는 단순한 결론은 적절하지 않다. 제한된 자원 안에서 어떤 연결이 가장 큰 도움을 주는지 탐구하는 문제로 바꿀 수 있다.



우회 연결을 추가한 가상 도로망

탐구

가–나–다–라 연결에서 가와 다를 추가로 이으면 모든 단일 단절을 견딜까?

풀이와 확인

라가 여전히 다에만 연결되어 있으므로 다와 라 사이가 끊기면 라는 고립된다. 우회가 생긴 부분과 여전히 취약한 부분을 따로 확인해야 한다.

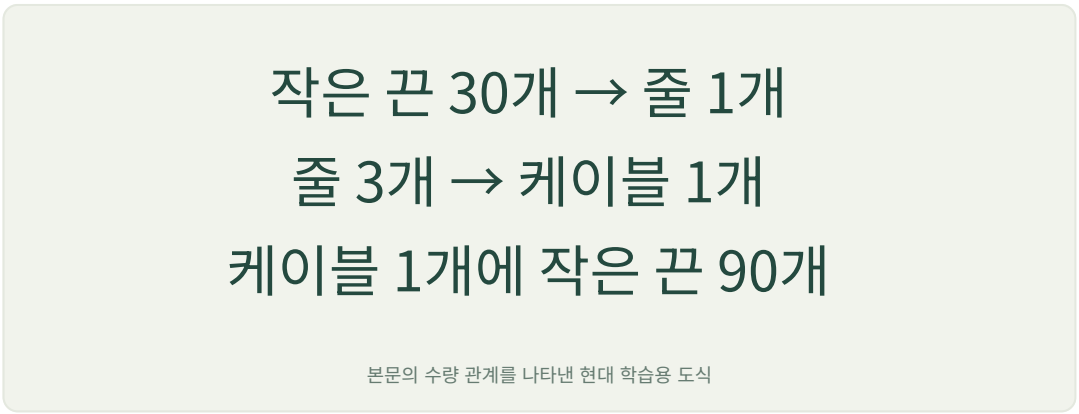
케스와차카의 이어지는 기술

다리를 만드는 지식은 오늘의 공동체에도 있다.

케스와차카의 풀로 엮은 다리는 지역 공동체가 전통 기술을 이어 가며 새로 만드는 사례다. 스미스소니언의 자료는 작은 끈을 합쳐 더 큰 줄을 만들고 그것을 다시 케이블로 엮는 과정을 소개한다. 기술은 완성된 물건뿐 아니라 공동 작업에도 담겨 있다.

모형 계산에서 작은 끈 30개로 한 줄을 만들고 이런 줄 세 개를 엮으면 케이블 하나에 작은 끈 90개가 포함된다. 단계별 묶음을 곱셈으로 표현할 수 있다. 재료의 길이가 같으며 손실을 따로 세지 않았다는 조건을 적는다.

끈의 개수를 안다고 실제 다리의 하중을 계산할 수 있는 것은 아니다. 재료의 강도와 엮음과 고정 방식과 노후 상태 등이 필요하다. 이 페이지의 곱셈은 구성 수량의 계산이며 실제 구조 안전을 판단하는 공식이 아니다.



본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

같은 묶음 규칙으로 케이블 네 개를 만들면 작은 끈은 몇 개 필요한가?

풀이와 확인

90×4=360개다. 이 계산은 구성 수량만 센다. 여분과 연결 손실이 있다면 실제 준비량은 달라지므로 제작 계획에서는 추가 조건을 반영해야 한다.

[A11] Smithsonian NMAI | The Bridge at Q'eswachaka

기록된 길이의 오차

경로의 합에도 측정의 한계가 누적된다.

가상 경로의 세 구간 길이가 각각 10킬로미터와 8킬로미터와 12킬로미터라고 기록되어 있다. 각 값의 오차가 최대 0.5킬로미터라고 가정하면 합계 30킬로미터의 최대 절대 오차는 1.5킬로미터다.

가장 짧은 경우는 9.5+7.5+11.5로 28.5킬로미터다. 가장 긴 경우는 10.5+8.5+12.5로 31.5킬로미터다. 모든 오차가 같은 방향으로 나타날 수 있다는 보수적인 범위를 계산한 것이다.

실제 측정 오차가 독립적이며 특정한 분포를 따른다면 다른 통계적 방법을 사용할 수 있다. 여기서는 그런 조건을 가정하지 않는다. 어떤 방식으로 오차 범위를 계산했는지 명시하면 숫자의 신뢰 범위를 과장하지 않을 수 있다.

$$\text{기록 합계 } 10+8+12=30 \text{ km}$$

$$\text{최소 } 28.5 \text{ km}$$

$$\text{최대 } 31.5 \text{ km}$$

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

기록 합계가 30킬로미터인 이 길과 30.5킬로미터인 다른 길 중 어느 쪽이 확실히 짧을까?

풀이와 확인

각 경로의 오차 범위를 알아야 판단할 수 있다. 첫 경로만 해도 28.5에서 31.5까지 가능하므로 중심값 30이 작다는 이유만으로 반드시 짧다고 할 수 없다.

길이 넓어져도 운반량이 늘지 않는 까닭

연결망의 병목은 구간별 능력과 전체 흐름을 나누어 보게 한다.

안데스 도로망에서 떠올린 현대 운반 모형을 만든다. 출발 S에서 A로 하루 네 꾸러미를 보낼 수 있고 A에서 도착 T로는 두 꾸러미를 보낼 수 있다. 다른 길 S에서 B로는 세 꾸러미이며 B에서 T로는 다섯 꾸러미다. 실제 역사적 운송량을 나타내는 수치는 아니다.

A를 거치는 길은 앞 구간이 넓어도 뒤 구간 때문에 하루 두 꾸러미만 끝까지 옮길 수 있다. B를 거치는 길은 출발 쪽의 세 꾸러미가 제한이 된다. 두 길을 함께 쓰면 하루 다섯 꾸러미가 도착한다. 중간 거점에 계속 쌓아 두지 않는 정상적인 흐름을 가정한다.

A에서 B로 하루 두 꾸러미를 보낼 수 있는 연결을 추가하면 상황이 바뀐다. S에서 A로 간 네 꾸러미 중 둘은 T로 보내고 둘은 B로 보낸다. B는 S에서 받은 셋과 A에서 받은 둘을 합해 다섯 꾸러미를 T로 보낸다. 전체 도착량은 일곱이다.

이것이 최대인 이유도 찾을 수 있다. S에서 나오는 능력의 합이 4 + 3 = 7이므로 어떤 경로를 택해도 하루 일곱을 넘길 수 없다. 실제로 일곱을 보내는 배치를 만들었으므로 상한과 실행 결과가 맞는다. 좋은 해를 찾는 일과 더 좋은 해가 없음을 보이는 일이 만난다.

구간	하루 최대 꾸러미
S → A	4
A → T	2
S → B	3
B → T	5
추가 A → B	2

> **탐구**
>
> 추가 연결 A에서 B의 능력이 하루 한 꾸러미라면 최대 도착량은?

풀이와 확인

A에서 T로 둘과 A에서 B를 거쳐 T로 하나를 보낸다. S에서 B로 바로 보내는 셋을 더하면 여섯이다. A 쪽에서는 둘과 하나만 빠져나갈 수 있으므로 남은 한 꾸러미를 더 보낼 길이 없다.

[A9] UNESCO | Qhapaq Ñan Andean Road System

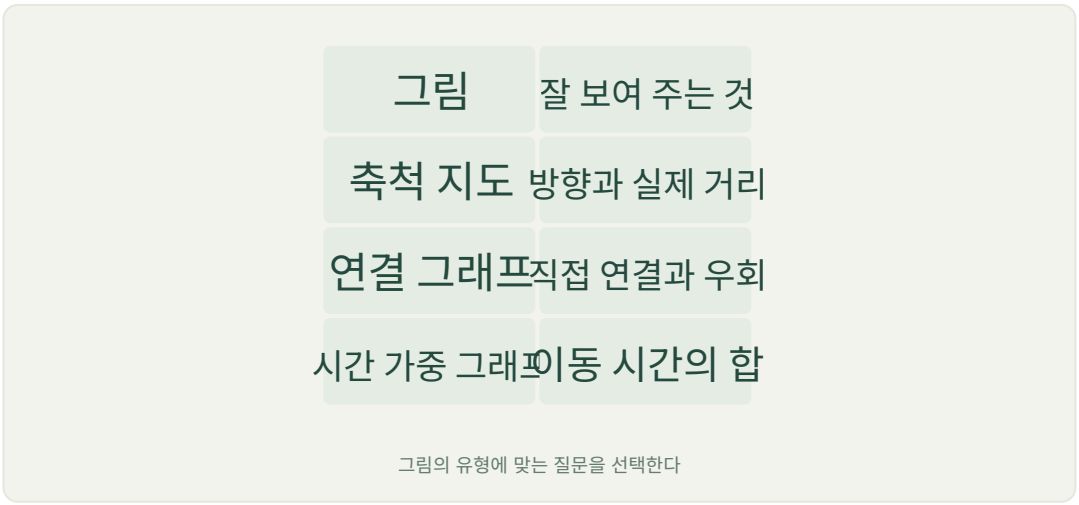
연결망 전시를 설계하기

지도와 그래프를 나란히 놓으면 역할이 드러난다.

전시에서 지리 지도와 연결 그래프를 나란히 보여 주면 독자는 서로 다른 질문을 할 수 있다. 지도에서는 산과 계곡과 거리의 방향을 살피고 그래프에서는 거점 사이의 연결과 우회 가능성을 살핀다. 하나의 그림으로 모든 정보를 표현하려 하지 않는다.

그래프에 수치를 붙일 때는 거리인지 시간인지 비용인지 적는다. 같은 선에 붙은 5라는 숫자도 단위에 따라 경로 선택을 바꾼다. 범례는 장식이 아니라 계산 규칙을 정의하는 부분이다.

전시 활동에서는 특정 연결 하나를 가리고 나머지 길로 도달할 수 있는지 찾게 할 수 있다. 실제 유산의 위치 자료와 별도로 만든 실험 연결망을 구별하면 과거 공간을 왜곡하지 않으면서 원리를 탐구할 수 있다.



탐구

관람객이 선의 길이를 자로 재어 실제 거리를 구하려 한다면 무엇을 고쳐야 할까?

풀이와 확인

연결 그래프는 축척 지도와 다르다는 설명을 붙이고 거리 숫자를 별도로 표시한다. 실제 거리를 재는 활동이라면 축척이 있는 지도를 제공해야 한다. 그림의 목적을 분명히 하면 오독을 줄일 수 있다.

고대 아메리카관 / 91

살아 있는 지식과 우리의 전시

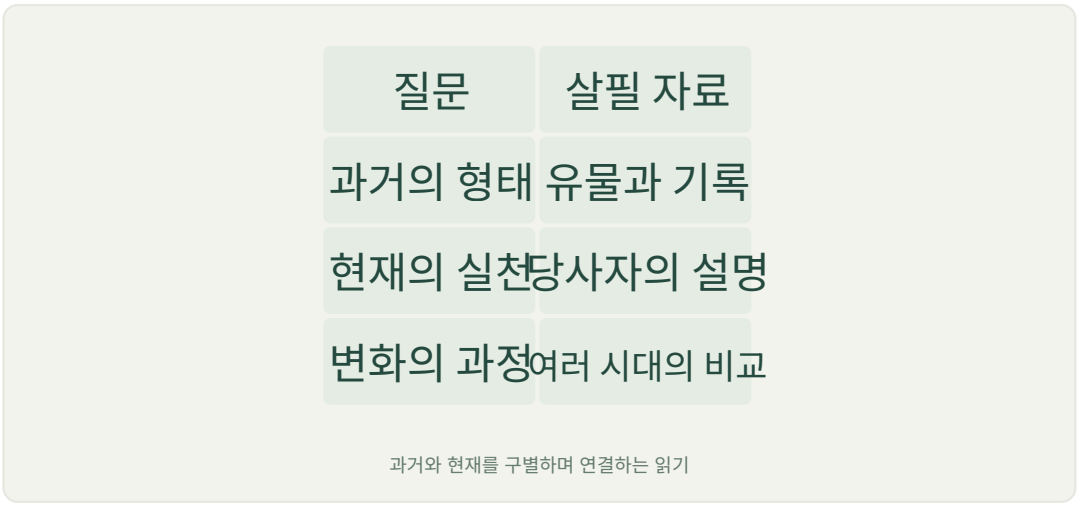
과거형으로만 쓰지 않기

자료를 만든 전통과 오늘의 사람들을 연결한다.

마야와 안데스의 지식을 소개할 때 모든 문장을 사라진 문명의 이야기로 쓰지 않는다. 달력의 실천과 다리의 기술을 이어 가는 오늘의 공동체가 있다. 유물의 제작 시기와 현재의 문화적 존재를 서로 다른 질문으로 다루어야 한다.

박물관 교육 자료에서 당사자가 설명하는 영상을 보면 숫자와 구조에 대한 우리의 질문이 더 넓어진다. 다리가 얼마나 긴지뿐 아니라 누가 함께 만들고 어떤 관계를 이어 가는지 물을 수 있다. 수학적 관심과 사회적 맥락은 서로 보완한다.

한 사람의 설명을 모든 공동체의 유일한 목소리로 확대하지 않는 것도 중요하다. 지역과 언어와 세대에 따라 차이가 있을 수 있다. 출처가 누구의 어떤 경험을 담는지 구체적으로 밝히면 다양성을 지킬 수 있다.



과거와 현재를 구별하며 연결하는 읽기

탐구

옛사람들이 쓰던 지식은 모두 사라졌다는 문장을 어떻게 고칠까?

풀이와 확인

과거 자료 중 해석이 어려운 부분이 있으며 일부 지식과 실천은 오늘의 공동체에서 이어진다고 구체화한다. 사라진 자료와 살아 있는 사람을 하나의 결론으로 묶지 않는 것이 핵심이다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time / [A11] Smithsonian NMAI | The Bridge at Q'eswachaka

구아만 포마의 기록을 읽는 위치

제작 시기와 관점이 사료의 성격을 정한다.

구아만 포마의 연대기는 식민지 시기의 중요한 그림과 글 자료다. 덴마크 왕립도서관은 원고의 이미지와 전사 등을 디지털로 제공한다. 이를 접촉 이전 시대의 현장 사진처럼 취급하지 않고 제작 시점과 목적을 확인하며 읽어야 한다.

그림은 인물과 도구와 활동을 보여 주지만 무엇을 강조하고 생략했는지도 생각해야 한다. 하나의 장면에서 계산판을 보았다고 모든 작동 규칙을 읽었다고 할 수는 없다. 글과 그림을 함께 확인하고 다른 자료와 비교하는 과정이 필요하다.

디지털 이미지의 쪽 번호와 원고 자체의 번호가 다를 수 있으므로 인용 위치를 정확히 남긴다. 나중 독자가 같은 그림을 찾아 확인할 수 있어야 주장의 근거가 검토된다. 자료를 찾은 행위와 자료를 해석한 행위를 기록에서 구별하자.

확인 항목	이유
제작 시기	동시대성 판단
글과 그림	장면의 맥락
정확한 쪽 번호	재확인 가능성

그림 사료를 읽기 전의 확인 항목

탐구

그림의 일부만 잘라 전시에 쓰면 어떤 정보가 사라질 수 있을까?

풀이와 확인

주변 글과 다른 인물과 장면의 배열이 사라져 도구의 맥락이 약해질 수 있다. 부분 확대를 쓰더라도 전체 쪽의 위치와 원자료 정보를 함께 제공하면 독자가 맥락을 확인할 수 있다.

[A5] Royal Danish Library | The Guaman Poma Website

유물 사진과 재구성 그림

시각 자료의 종류를 명확히 표시한다.

유물 사진은 실물의 표면을 보여 주지만 조명과 각도와 손상 때문에 읽기 어려울 수 있다. 선으로 다시 그린 도해는 구조를 명료하게 만들지만 편집자의 판단이 들어간다. 두 종류의 장점을 활용하되 같은 증거로 취급하지 않는다.

생성형 도구로 만든 분위기 그림은 시대와 장소를 떠올리게 하는 장식으로 사용할 수 있다. 그러나 정확한 유물 복원이나 수학적 구조의 증거로 제시하면 안 된다. 이 책의 표지 역시 실물 사진과 구별되는 편집용 이미지다.

수학 도식은 규칙과 수치를 확인하여 제작한다. 그림 안의 점 수와 표의 숫자가 맞는지 검산하고 축척을 썼다면 명시한다. 아름다운 편집과 정확한 정보는 함께 점검해야 하는 별도의 품질 기준이다.

자료 종류	주요 역할
유물 사진	실물의 관찰
재구성 도해	구조의 설명
표지 삽화	분위기와 주제 제시

시각 자료를 용도에 따라 구분한다

탐구

점 다섯 개가 그려진 그림의 설명에 점 넷이라고 적혔다면 무엇을 먼저 고칠까?

풀이와 확인

자료가 전달하려는 값과 원래 규칙을 확인한 뒤 그림과 설명을 일치시킨다. 정확한 수량이 핵심인 도식에서는 분위기에 맞춘 임의 수정이 아니라 수학적 검산에 따라 고쳐야 한다.

표기법을 번역하는 전시

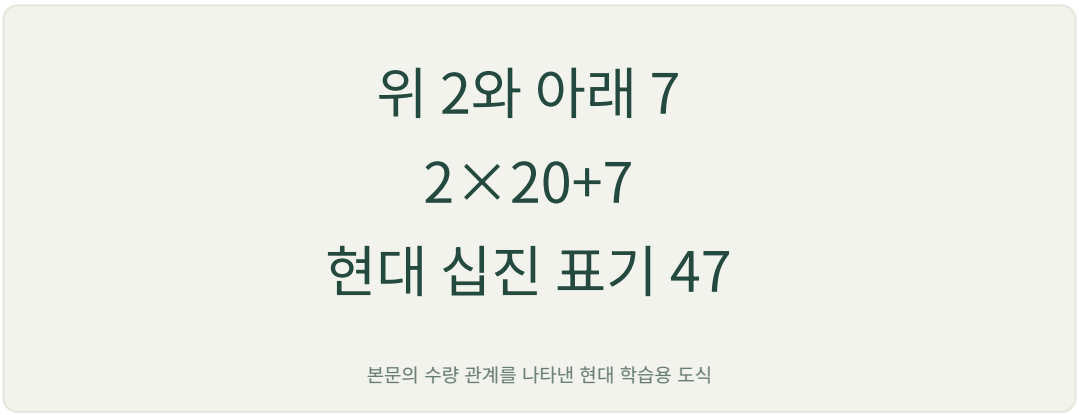
낯선 기호를 익숙한 숫자로만 지우지 않는다.

마야의 점막대 수를 현대 숫자로 번역할 때 원래 기호도 함께 보여 주면 좋다. 값만 27이라고 적으면 위의 자리 1과 아래의 자리 7이라는 구조가 사라진다. 번역은 읽기를 돕지만 원자료의 형식을 대체할 필요는 없다.

키푸의 234를 숫자로 옮길 때도 매듭의 위치와 연결을 함께 표시할 수 있다. 숫자 값과 원래 매체가 나란히 있으면 독자는 같은 수학 구조가 다른 재료에서 어떻게 구현되는지 비교할 수 있다.

원문과 번역과 설명을 구분한 전시는 독자의 수준에 따라 여러 입구를 만든다. 먼저 값만 보고 이해한 사람도 다음에는 자리 규칙을 살펴볼 수 있다. 단순화한 설명에서 더 자세한 자료로 이동할 길을 남기는 방식이다.

표기 안내에는 쉬운 예와 경계 예를 함께 둔다. 8은 점과 막대의 결합을 보여 주며 19에서 20으로 가는 변화는 자리 교환을 드러낸다. 40의 아래 자리 0도 표시한다. 독자에게 27과 60을 읽게 하고 설명에서 빠진 규칙을 찾아 고친다.



본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

순수 이십진법의 위 2와 아래 7을 전시에 소개하는 세 요소는?

풀이와 확인

원래 배열을 단순화한 그림과 2×20+7이라는 해석식과 결과 47을 함께 놓는다. 이 표기는 장기력 날짜가 아닌 순수 이십진법 연습임을 적어 체계를 명확히 한다.

비교표가 숨기는 차이

빈칸을 억지로 채우지 않는 비교를 한다.

마야 표기와 키푸를 비교하는 표에는 수의 밑과 기록 재료와 대표 기능을 넣을 수 있다. 그러나 모든 항목에 같은 종류의 답이 있다고 가정하지 않는다. 한 전통에서 알려진 정보가 다른 전통에서는 아직 불확실할 수 있다.

빈칸은 지식이 없었다는 증거가 아니라 현재 자료로 답하기 어렵다는 표시일 수 있다. 모름과 없음과 해당 없음은 서로 다른 상태다. 이를 같은 기호로 처리하면 비교가 부정확해진다.

비교의 목적도 밝혀야 한다. 자릿값의 원리를 배우려는 표와 역사적 전파를 조사하는 표는 필요한 근거가 다르다. 비슷한 구조가 있다는 관찰만으로 직접 교류를 결론 내릴 수는 없다.

상태	뜻
없음	대상이 없다는 근거가 있음
모름	현재 자료로 판단 어려움
해당 없음	비교 항목이 적용되지 않음

자료의 빈칸을 정확한 언어로 구별한다

탐구

두 체계가 모두 0을 표현하는 기능을 가졌다면 서로 전해졌다고 할 수 있을까?

풀이와 확인

공통 기능만으로는 직접 전파를 증명할 수 없다. 시기와 이동 경로와 중간 자료 같은 별도 증거가 필요하다. 독립적인 필요에 따라 비슷한 구조가 나타날 가능성도 검토해야 한다.

나의 작은 전시를 꾸미기

한 주제를 깊이 설명하는 세 장면을 고른다.

작은 전시의 주제를 자리값으로 정했다면 첫 장면에는 19에서 20으로 바뀌는 점막대 모형을 놓을 수 있다. 둘째 장면에는 키푸의 십진 위치를 단순화한 도식을 놓는다. 셋째 장면에서는 관람객이 같은 수를 두 체계로 나타내게 한다.

각 장면에는 하나의 질문을 붙인다. 무엇이 묶이는가와 빈자리를 어떻게 남기는가와 같은 값임을 어떻게 확인하는가가 좋은 예다. 설명을 많이 붙이는 것보다 도형과 계산이 질문에 직접 답하도록 구성한다.

마지막에는 자료 출처와 재구성 여부를 적는다. 실제 유물의 이미지와 학습자가 만든 판을 시각적으로 구분하면 전시의 신뢰도가 높아진다. 관람객의 반응을 보고 어려운 용어와 빠진 단위도 고칠 수 있다.

$$43=2\times20+3$$

$$43=4\times10+3$$

값은 같고 묶음은 다르다

본문의 수량 관계를 나타낸 현대 학습용 도식

탐구

43을 두 체계로 나타내는 활동의 정답을 설명해 보자.

풀이와 확인

순수 이십진법에서는 $2\times20+3$이며 십진법에서는 $4\times10+3$이다. 기호와 재료가 달라도 전체 값은 같다. 키푸 도식을 사용할 때는 실제 유물 복원이 아닌 자리값 학습 그림임을 적는다.

배운 내용을 검산하는 네 문제

표기와 시간과 기록과 공간을 연결한다.

첫 문제는 순수 이십진법의 위 3과 아래 9를 읽는 것이다. 둘째 문제는 2툰 4위날 5킨을 일수로 바꾸는 것이다. 셋째 문제는 백 2와 십 0과 일 6의 수량을 읽는 것이다. 넷째 문제는 8미터와 5미터인 직사각형 모형의 면적을 구하는 것이다.

네 문제는 숫자 모양보다 단위와 자리의 무게를 확인하는 습관을 평가한다. 각각 20과 360과 10과 제곱미터가 계산의 의미를 정한다. 같은 곱셈과 덧셈을 사용해도 체계가 다르면 해석은 달라진다.

답을 쓴 뒤 어떤 가정을 사용했는지 한 문장씩 적어 보자. 순수 이십진법이라는 조건과 장기력의 예외 규칙과 손상 없는 판독과 직사각형 모양이 그 예다. 답의 정확성과 조건의 명확성을 함께 검토한다.

문제	계산	결과
표기	$3\times20+9$	69
기간	$2\times360+4\times20+5$	805일
매듭 모형	$2\times100+0\times10+6$	206
면적	8×5	40 m^2

서로 다른 체계에서 단위와 자리를 확인한다

탐구

네 문제의 답과 핵심 조건을 확인해 보자.

풀이와 확인

첫째는 69다. 둘째는 805일이다. 셋째는 206이다. 넷째는 40제곱미터다. 순서대로 순수 이십진법과 360일 툰과 십진 자리와 직사각형이라는 조건을 사용했다.

다음 질문을 남기며

정확한 계산과 열린 해석을 함께 가져간다.

이 책에서 만난 수학은 종이에 적힌 식에만 있지 않았다. 점과 막대의 배열과 시간의 반복과 끈의 위치와 길의 연결에도 수량과 관계가 들어 있었다. 낯선 매체를 읽는 일은 익숙한 계산을 새로운 질문으로 바꾸는 경험이다.

동시에 모든 그림을 읽었다고 모든 역사를 이해한 것은 아니다. 판독되지 않은 부분과 해석이 여러 개인 부분을 남겨 두어야 한다. 모르는 것을 정확히 표시하면 다음에 어떤 자료가 필요한지 더 분명해진다.

마지막 활동은 한 가지 질문을 골라 출처가 있는 자료와 자신의 계산을 나누어 기록하는 것이다. 달력의 공통 주기나 키푸의 부분합이나 길의 우회 가능성 중 하나를 선택해 보자. 독자가 다시 계산하고 원자료를 찾아갈 수 있는 작은 탐구가 완성의 기준이다.

탐구 단계	남길 기록
질문	대상과 조건
자료	출처와 관찰
계산	식과 검산
해석	결론과 남은 질문

다음 독자가 이어 갈 수 있는 탐구의 기록

탐구

다음 탐구 질문을 어떻게 검증 가능한 형태로 바꿀 수 있을까?

풀이와 확인

마야는 수학을 잘했을까 같은 넓은 질문보다 260일과 365일 순환은 언제 같은 짝으로 돌아올까처럼 조건과 확인 방법이 있는 질문을 고른다. 답 18980일을 계산한 뒤 그 결과가 설명하지 못하는 문화적 의미도 별도로 남긴다.

고대 아메리카관 / 92

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[A1] Smithsonian NMAI | Living Maya Time
https://americanindian.si.edu/nk360/resources/Living-Maya-Time/

[A2] Museo Larco | Inca Quipus
https://www.museolarco.org/en/exhibition/permanent-exhibition/online-exhibition/textiles-from-ancient-peru/inca-quipus/

[A3] NIST Museum | Standardizing an Empire
https://www.nist.gov/nist-museum/standardizing-empire

[A4] Smithsonian NMAI | The Calendar System
https://maya.nmai.si.edu/calendar/calendar-system

[A5] Royal Danish Library | The Guaman Poma Website
https://poma.kb.dk/

[A6] SLUB Dresden | The Dresden Maya Codex Content
https://www.slub-dresden.de/en/explore/manuscripts/the-dresden-maya-codex/content

[A7] INALCO | Quechua oral numeration and its writing in quipus
https://inalco.fr/en/quechua-oral-numeration-and-its-writing-quipus

[A8] Harvard Archaeology | Building Pathways into Khipu Research
https://archaeology.harvard.edu/news/2025/12/building-pathways-khipu-research-openness-access-and-next-generation

[A9] UNESCO | Qhapaq Ñan Andean Road System
https://whc.unesco.org/en/list/1459/

[A10] UNESCO | Historic Sanctuary of Machu Picchu
https://whc.unesco.org/en/list/274

[A11] Smithsonian NMAI | The Bridge at Q’eswachaka
https://americanindian.si.edu/inkaroad/engineering/video/bridge-qeswachaka.html

[A12] Smithsonian NMAI | Maya Math Game
https://maya.nmai.si.edu/maya-sun/maya-math-game

[A13] Smithsonian NMAI | Maya Calendar Converter
https://maya.nmai.si.edu/calendar/maya-calendar-converter

지식의 길 / 93

움직이는 책과 남겨야 할 관계



AI로 제작한 주제 삽화. 특정 유물이나 역사적 장면의 복원도가 아니다.

같은 도형을 그린 여러 장의 종이가 있다고 해서 그 사이의 전승 경로가 저절로 밝혀지는 것은 아니다. 책의 제목과 언어 및 제작 시기를 대조하고 어떤 문장과 풀이가 함께 옮겨졌는지 확인해야 한다. 연결을 그리는 지도는 탐색을 도와주지만 빈 자료를 대신 채워 주지 않는다. 이 관에서는 가능한 길과 확인된 이동을 나누어 읽는다.

번역과 단위 변환 및 표의 복사는 표현을 바꾸면서 관계를 보존해야 하는 작업이다. 숫자를 정확히 옮겨도 열의 단위를 잘못 읽으면 결과가 달라진다. 문장의 단어를 그대로 바꾸어도 모든 경우를 뜻하는 조건이 빠지면 주장이 바뀐다. 여러 지역을 거치는 지식의 역사는 이런 작은 검산의 필요성을 선명하게 보여 준다.

지식의 길 / 94

한 줄이 아닌 길의 그물

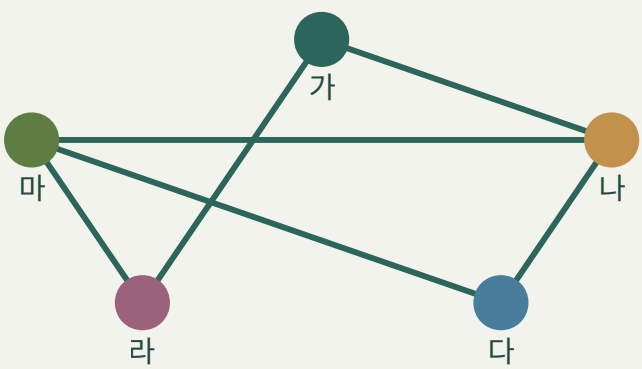
길을 하나로 그리지 않기

지식은 여러 사람과 장소를 거치며 형태를 바꿉니다.

실크로드라는 이름에서 동쪽과 서쪽을 잇는 긴 선 하나를 떠올리기 쉽다. 유네스코의 설명은 서로 연결된 여러 길과 그 위의 도시를 함께 다룬다. 교역망은 상품만 운반하지 않았다. 사람과 신앙 및 기술도 이동했다. 그러나 같은 길에 놓였다는 사실만으로 특정 수학 지식이 그 경로를 지나갔다고 확정할 수는 없다.

이 책에서는 실제 역사 설명과 계산을 위한 가상 모형을 나누어 제시한다. 가상의 다섯 도시를 점으로 표시하고 왕래할 수 있는 구간을 선으로 잇자. 도시의 실제 위치를 그리지 않아도 연결 관계를 비교할 수 있다. 점의 간격이 여행 거리를 뜻하지 않는다는 약속을 먼저 적어야 한다.

출발점에서 도착점까지 이어진 선이 있으면 이 모형에서 이동 가능하다. 그 길이 가장 짧거나 안전하다는 결론은 아직 나오지 않는다. 거리와 계절 및 통행 조건을 추가해야 다른 질문에 답할 수 있다. 모형의 장점은 모든 것을 보여 주는 데 있지 않다. 어떤 질문에 필요한 정보를 남겼는지 분명하게 하는 데 있다.



실제 지리가 아닌 다섯 거점의 가상 연결망

탐구

이 그림의 선분 길이를 자로 재어 실제 여행 거리를 비교할 수 있는가?

풀이와 확인

할 수 없다. 이 그림에는 연결 여부만 주어졌다. 거리 정보가 필요하면 각 구간에 실제 거리나 가정한 거리를 별도로 적어야 한다.

[SR01] UNESCO. Silk Roads: the Routes Network of Chang'an–Tianshan Corridor

출발과 도착 사이의 선택

경로의 수는 갈림길을 어떻게 이어 놓았는지에 따라 달라집니다.

가에서 나로 가는 길이 두 개이고 나에서 다로 가는 길이 세 개라고 하자. 반드시 나를 거치며 앞 구간과 뒤 구간의 선택이 서로를 제한하지 않는다면 가에서 다까지의 선택은 $2\times3=6$개이다. 첫 구간을 하나 고를 때마다 뒤에 세 선택이 붙는 구조이다.

앞 구간을 북쪽길과 남쪽길로 부르고 뒤 구간을 강길과 언덕길과 들길로 부르면 여섯 조합을 빠짐없이 적을 수 있다. 그림을 먼저 그리고 표로 옮겨도 좋다. 곱셈은 가능한 조합들을 같은 크기의 묶음으로 나누어 센 결과이다.

만약 북쪽길에서 도착한 짐은 강길을 사용할 수 없다는 조건을 넣으면 경우의 수는 달라진다. 북쪽길에는 두 선택만 남고 남쪽길에는 세 선택이 있으므로 합계는 다섯이다. 교통망을 계산할 때에는 선택들이 독립적인지 확인해야 한다. 조건을 읽지 않고 갈림길의 수만 곱하면 실제로는 불가능한 조합까지 세게 된다.

첫 구간	가능한 둘째 구간	경로 수
북쪽길	강길 / 언덕길 / 들길	3
남쪽길	강길 / 언덕길 / 들길	3
합계	두 묶음의 합	6

탐구

북쪽길은 강길만 이용하고 남쪽길은 세 길을 모두 이용한다면 몇 개인가?

풀이와 확인

1+3=4개이다. 첫 선택에 따라 뒤의 선택 수가 달라지므로 2×3을 적용하지 않는다. 서로 겹치지 않는 두 경우를 나누어 더한다.

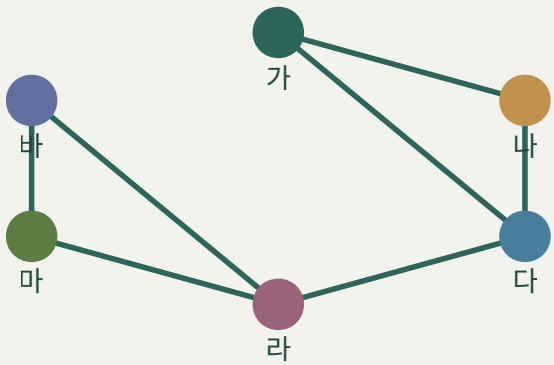
중간 거점의 힘

한 장소의 중요성을 이웃 수 하나로 판단할 수는 없습니다.

가와 나와 다를 삼각형으로 연결하고 라와 마와 바도 삼각형으로 연결하자. 두 묶음 사이에는 다와 라를 잇는 구간 하나만 둔다. 다와 라는 각각 이웃이 세 개이고 나머지 도시에는 이웃이 두 개씩 있다. 이웃 수의 차이는 작아 보여도 두 묶음 사이의 이동은 반드시 다와 라를 거친다.

다와 라 사이의 구간을 지우면 연결망이 둘로 나뉜다. 이런 성질은 여러 경로가 모이는 장소의 역할을 이해하는 데 도움이 된다. 다만 실제 도시의 문화적 중요성은 수학 모형의 연결 수만으로 환원할 수 없다. 학교와 시장 및 언어 공동체 같은 조건도 함께 살펴야 한다.

모형에서는 중요한 연결을 찾는 질문을 정확하게 만들 수 있다. 어떤 구간이 끊어질 때 서로 왕래할 수 없게 되는 도시 쌍이 생기는가를 묻는다. 그림을 한 번에 판단하기 어려우면 구간을 하나씩 지우고 출발 가능한 점들을 표시해 보자. 눈에 띄는 중앙 위치와 연결을 유지하는 역할은 서로 다를 수 있다.



두 묶음을 잇는 다–라 구간을 찾아보는 모형

탐구

가와 나 사이의 구간만 지우면 전체 연결이 끊어지는가?

풀이와 확인

끊어지지 않는다. 가에서 다를 거쳐 나로 갈 수 있다. 두 삼각형을 잇는 다–라 구간과 삼각형 내부의 구간은 전체 연결에서 다른 역할을 한다.

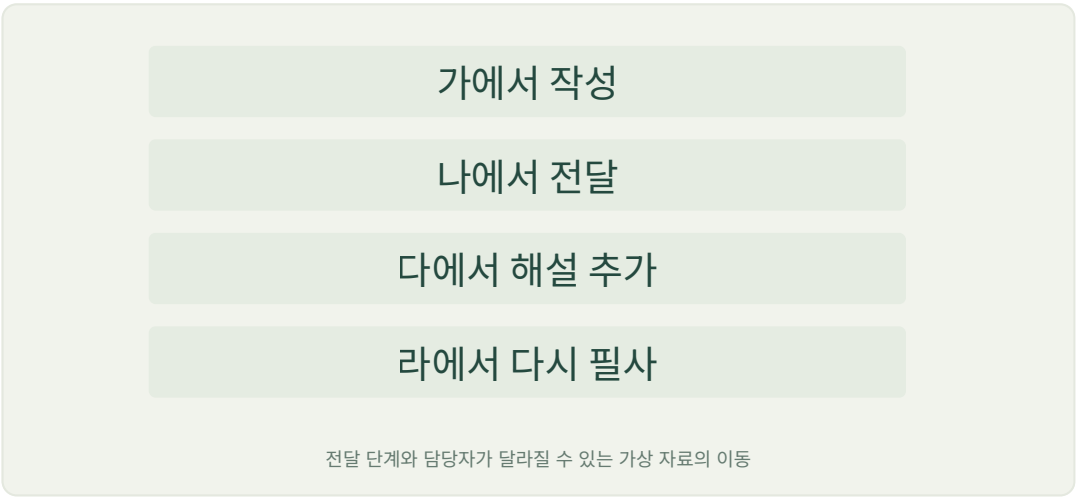
물건이 사람보다 멀리 갈 때

전달의 연쇄와 한 사람의 여행을 구별해야 합니다.

한 장의 계산서가 가에서 나로 옮겨지고 다른 사람이 그것을 다로 가져간 뒤 다시 라에서 복사했다고 하자. 자료는 세 구간을 통과했지만 같은 사람이 처음부터 끝까지 여행했다는 결론은 나오지 않는다. 지식의 이동을 한 명의 영웅적인 여정으로 그리면 중간의 전달자가 사라질 수 있다.

이 관계를 방향이 있는 기록으로 적으면 가→나와 나→다 및 다→라가 된다. 화살표는 자료 전달의 방향을 나타낸다. 나에서 가로 돌아온 자료가 있다는 뜻은 아니며 사람이 왕래할 수 있는 모든 길을 표시한 것도 아니다. 화살표가 무엇을 뜻하는지 범례에 적는 일이 중요하다.

역사 연구에서 여러 기록이 서로 이어질 때에는 자료의 시기도 맞아야 한다. 라의 사본이 다의 사본보다 먼저 만들어졌다면 단순한 전달 순서를 다시 검토해야 한다. 이름이 비슷한 책을 발견한 것만으로 같은 계보라고 확정하지 않는다. 본문의 배열과 특징적인 오류 등 더 구체적인 증거가 필요하다.



전달 단계와 담당자가 달라질 수 있는 가상 자료의 이동

탐구

세 구간의 전달이 확인되면 원저자가 라를 방문했다고 말할 수 있는가?

풀이와 확인

말할 수 없다. 확인된 것은 자료 전달의 연쇄이다. 원저자의 이동은 별도의 여행 기록이나 연대 자료로 입증해야 한다.

계절을 넣으면 달라지는 지도

열려 있는 길과 언제나 쓸 수 있는 길은 다릅니다.

가에서 다로 가는 직접 구간은 8일이 걸리고 나를 거치는 구간은 각각 5일과 5일이 걸린다고 하자. 모든 길을 사용할 수 있다면 직접 가는 8일 경로가 빠르다. 그러나 직접 구간을 겨울에 이용할 수 없다면 겨울의 최소 이동 시간은 10일이다.

같은 연결망이라도 계절에 따라 사용할 수 있는 선이 달라진다. 지도에 선이 그어졌다는 사실만으로 모든 시기의 이동을 설명하지 못하는 이유이다. 실제 여행에서는 고개 상태와 물 공급 및 항해 조건 같은 요소가 경로 선택에 영향을 주었을 것이다. 여기의 일수는 원리를 살펴보기 위해 정한 가상 수치이다.

자료를 표로 만들 때에는 구간과 이동 시간뿐 아니라 이용 가능한 조건을 함께 적는다. 조건이 바뀌었을 때 어느 행을 제외해야 하는지 분명해진다. 수학적으로 가장 빠른 경로를 구했다면 결론에도 적용 범위를 남겨야 한다. 모든 계절에서 빠르다고 쓰는 대신 주어진 조건에서 8일이라고 적는 편이 정확하다.

구간	이동 시간	사용 조건
가→다	8일	겨울에는 불가
가→나	5일	이 모형에서는 상시
나→다	5일	이 모형에서는 상시

탐구

봄에 직접 구간의 대기 시간이 3일 추가되면 어느 경로가 빠른가?

풀이와 확인

직접 가면 8+3=11일이고 나를 거치면 10일이다. 이동 시간과 대기 시간을 함께 계산하면 나를 거치는 경로가 1일 빠르다.

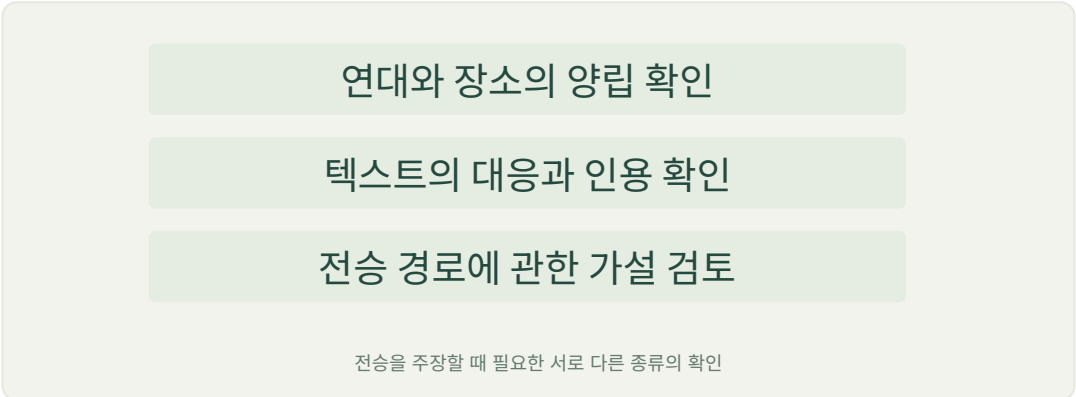
접촉과 전승의 다른 질문

만날 수 있었다는 사실은 배웠다는 사실과 같지 않습니다.

두 학자가 같은 도시에서 활동했다는 기록이 있으면 서로 만날 가능성을 생각할 수 있다. 그렇지만 같은 도시에 있었다는 사실만으로 한 사람이 다른 사람에게 정리를 배웠다고 결론 내릴 수는 없다. 활동 시기가 겹치는지부터 확인해야 하고 수학 내용의 연결을 보여 주는 자료도 필요하다.

논리를 간단한 모형으로 바꾸어 보자. 전승이 있었다면 접촉 가능한 경로가 있었을 것이라는 주장을 세운다. 그 역인 접촉 가능한 경로가 있으면 반드시 전승이 있었다는 주장은 성립하지 않는다. 조건문의 방향을 뒤집는 오류이다. 문장을 화살표로 적으면 두 주장의 차이가 잘 보인다.

전승의 근거로는 번역문의 대응이나 책에 적힌 서지 정보 및 특정 풀이를 인용한 흔적 등이 쓰일 수 있다. 각각의 자료도 해석이 필요하며 하나의 흔적이 모든 경로를 확정하지는 않는다. 역사적 설명은 빈칸이 있는 상태에서도 성립할 수 있다. 알지 못하는 부분을 그대로 표시하는 것이 근거 없는 연결을 추가하는 것보다 유익하다.



전승을 주장할 때 필요한 서로 다른 종류의 확인

탐구

비가 오면 길이 젖는다는 말에서 길이 젖었으므로 비가 왔다고 결론 내릴 수 있는가?

풀이와 확인

그 결론은 반드시 성립하지 않는다. 물을 뿌려도 길이 젖을 수 있다. 결과가 같다고 원인을 하나로 확정하는 오류를 전승 문제에서도 경계해야 한다.

살아남은 기록의 편향

남아 있는 수는 과거 전체의 수와 다를 수 있습니다.

가 지역에서 사본 20권이 발견되고 나 지역에서 5권이 발견되었다고 하자. 이 수만으로 가 지역에서 책을 네 배 많이 읽었다고 말하기는 어렵다. 보존 조건과 조사 범위 및 책을 모으는 방식이 서로 달랐을 수 있기 때문이다. 발견된 자료 수와 원래 제작된 수는 구별해야 한다.

계산 모형에서 가 지역 책의 20%가 남고 나 지역 책의 5%가 남았다고 가정해 보자. 발견 수를 보존 비율로 나누면 두 지역의 원래 수는 모두 100권으로 추정된다. 그러나 실제 보존 비율을 모른다면 이 계산 결과를 역사적 사실로 제시할 수 없다. 가정에 따른 결과일 뿐이다.

다른 가정을 넣어 보는 일은 결과의 민감도를 드러낸다. 나 지역의 보존 비율을 10%로 바꾸면 원래 수는 50권이 된다. 작은 표라도 가정과 관찰을 열로 나누면 무엇을 알고 무엇을 추정했는지 읽기 쉬워진다. 자료가 부족하다는 이유로 계산을 포기하기보다 계산이 말할 수 있는 범위를 명확하게 한다.

지역	발견된 수	가정한 보존 비율	추정한 원래 수
가	20권	20%	100권
나	5권	5%	100권

탐구

나 지역의 보존 비율이 2.5%라는 가정에서는 원래 수가 얼마인가?

풀이와 확인

5÷0.025=200권이다. 보존 비율을 절반으로 가정하면 같은 발견 수에서 추정하는 원래 수는 두 배가 된다. 이 값은 가정의 결과이다.

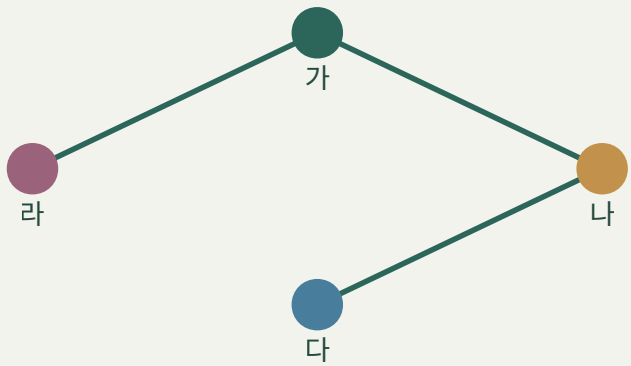
한 장의 연결망을 설명하기

선을 그린 뒤에는 그 선이 뜻하는 것을 문장으로 남깁니다.

가와 나가 연결되고 나와 다가 연결되며 가와 라도 연결된 모형을 보자. 가에서 다로 가려면 나를 거쳐 두 구간을 지나고 라에서 다로 가려면 가와 나를 거쳐 세 구간을 지난다. 여기서는 구간마다 같은 비용을 가정했으므로 구간 수가 적을수록 비용도 적다.

실제 길이 다르다면 구간 수와 거리의 순서는 달라질 수 있다. 두 구간의 합이 100km이고 세 구간의 합이 60km라면 구간이 많은 쪽이 더 짧다. 그래프의 모양만 보고 최단 거리라고 부르기 전에 무엇을 최소화하는지 정해야 한다. 구간 수와 거리 및 시간은 서로 다른 척도이다.

이 장을 읽고 직접 작은 연결망을 만들어 보자. 점은 무엇을 나타내는지 적고 선의 방향과 비용 및 사용 조건을 정한다. 이어 답할 수 있는 질문 두 가지와 답할 수 없는 질문 한 가지를 남긴다. 모형의 한계를 설명하는 일도 수학적 이해의 일부이다. 역사적 경로를 다룰 때에는 모형과 근거 자료를 함께 제시해야 한다.



거리와 시간이 없는 연결망에서는 구간 수만 비교할 수 있다

탐구

라에서 다까지 두 구간만에 이동할 수 있는가?

풀이와 확인

이 모형에서는 불가능하다. 라→가→나→다의 세 구간이 필요하다. 라에서 나로 가는 새 구간을 추가하면 두 구간으로 줄어든다.

지식의 길 / 95

숫자를 옮기면 남는 구조

기호와 수를 따로 보기

서로 다른 글자 모양이 같은 수량을 나타낼 수 있습니다.

열두 개의 돌을 한 줄로 놓은 것과 열 개를 묶고 두 개를 남긴 것은 같은 수량을 나타낸다. 표시는 달라도 셈의 대상은 바뀌지 않는다. 숫자 표기를 비교할 때에는 기호의 모양과 묶음의 규칙을 나누어 보아야 한다. 낯선 기호를 친숙한 모양으로 바꾸는 것만으로 모든 구조가 번역되는 것은 아니다.

교육용 기호로 막대 하나를 1과 네모 하나를 10이라고 약속해 보자. 네모 세 개와 막대 네 개는 34이다. 기호의 위치를 바꾸어도 각 기호의 값을 더한다면 총량은 같다. 반면 십진 자리값 표기에서 34와 43은 다른 수이다. 기호의 순서가 뜻을 결정하는 방식이 서로 다르다.

한 표기에서 다른 표기로 바꾸는 절차는 총량을 먼저 계산한 뒤 새 규칙에 맞추어 다시 쓰는 것이다. 표기의 경제성을 비교하려면 어떤 수를 자주 기록하는지도 고려한다. 적은 기호로 쓸 수 있다는 장점과 손으로 더하기 쉽다는 장점이 언제나 함께 나타나지는 않는다. 이 장의 기호는 실제 고대 문자의 복원이 아닌 학습용 약속이다.

$$10 + 10 + 10 + 1 + 1 + 1 + 1$$

$$3 \times 10 + 4 \times 1$$

$$34$$

총량을 유지하며 덧셈 표기를 자리값 표기로 옮긴다

탐구

10을 뜻하는 기호 두 개와 1을 뜻하는 기호 일곱 개는 십진법으로 얼마인가?

풀이와 확인

2×10+7=27이다. 기호 아홉 개를 썼다는 사실과 나타내는 수량이 27이라는 사실을 구별한다.

같은 세 글자의 다른 무게

자리값은 기호의 위치에 따라 가중치를 부여합니다.

숫자 2와 4와 7로 만든 247에서 각 숫자의 기여는 200과 40과 7이다. 수를 2×100+4×10+7로 펼치면 위치의 역할이 드러난다. 숫자의 모양 자체가 200을 뜻하는 것이 아니라 백의 자리에 놓인 2가 200을 나타낸다.

같은 숫자를 뒤집은 742는 700+40+2이다. 두 수의 차는 495이다. 백의 자리와 일의 자리에 있던 숫자의 차 5가 백의 자리에서는 500을 늘리고 일의 자리에서는 5를 줄이므로 순증가가 495가 된다. 중간의 숫자 4는 움직이지 않아 차이에 영향을 주지 않는다.

이 관계를 일반화하면 서로 다른 세 자리 수를 비교할 때도 계산을 줄일 수 있다. 첫째 숫자와 마지막 숫자의 차의 절댓값에 99를 곱하면 뒤집기 전후의 차의 절댓값을 얻는다. 양쪽을 모두 세 자리 수로 비교하려면 첫째 숫자와 마지막 숫자가 모두 0이 아니어야 한다. 마지막이 0이라 뒤집은 표기가 두 자리가 되어도 자리값의 차이에 관한 식 자체는 성립한다. 표기 규칙에서 시작한 관찰이 대수 관계로 이어지는 예이다.

표기	백의 자리	십의 자리	일의 자리
247	200	40	7
742	700	40	2
차이	500	0	−5

탐구

358과 853의 차는 얼마이며 가운데 숫자 5가 계산에 영향을 주는가?

풀이와 확인

(8−3)×99=495이다. 가운데 자리는 두 수에서 같은 50이므로 차를 구할 때 소거된다. 직접 빼어도 853−358=495이다.

빈자리를 기록하는 약속

빈 칸의 존재를 표시하면 서로 다른 수를 구별할 수 있습니다.

십진 자리값에서 203은 백 두 묶음과 낱개 세 개를 뜻한다. 십의 자리에는 아무 묶음도 없지만 그 자리의 존재는 남겨야 한다. 0을 빼서 23이라고 적으면 백의 자리였던 2가 십의 자리로 옮겨 간다. 비어 있는 양과 빠진 자리의 차이가 수의 뜻을 바꾼다.

여기에서는 오늘 사용하는 표기 규칙의 기능을 살핀다. 역사 속에서 0의 기호와 자리 표시 및 수로서의 연산이 어떻게 발전했는지는 별개의 자료 문제이다. 지금의 편리함을 설명했다고 한 사람이나 한 시점의 발명을 증명한 것은 아니다. 기능을 이해하는 계산과 역사적 기원을 묻는 조사는 함께 하되 섞지 않아야 한다.

203을 열 배로 만들면 2030이 되고 각 숫자의 기여도 열 배가 된다. 맨 뒤에 0을 붙인다는 기억법은 정수의 십진 표기에서 편리하지만 소수에 그대로 붙이면 틀릴 수 있다. 2.03 뒤에 0을 붙인 2.030은 같은 수이다. 숫자의 이동을 자릿값으로 설명하면 기억법의 적용 조건을 알 수 있다.

천	백	십	일
	2	0	3
2	0	3	

203을 열 배로 만들면 각 숫자가 한 자리씩 이동한다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

2.03의 열 배를 구하고 2.030과 비교하라.

풀이와 확인

열 배는 20.3이다. 2.030은 2.03과 같은 값이다. 소수점이 정해 주는 자릿값을 고려해야 하며 끝에 0을 쓰는 행동만으로 판단하면 안 된다.

밑을 바꾸어 같은 수 쓰기

묶음의 크기가 달라져도 총량은 유지됩니다.

십진법의 23을 다섯 개씩 묶는 표기로 바꾸자. 23에는 다섯 묶음이 네 개 들어가고 세 개가 남는다. 따라서 오진법으로 43이라고 쓰며 혼동을 피하기 위해 밑이 5임을 덧붙인다. 이 표기의 4는 4×5를 나타내므로 십진법의 43과 다르다.

오진법의 124를 십진법으로 읽으면 1×25+2×5+4=39이다. 자리의 무게는 오른쪽부터 1과 5와 25가 된다. 십진법에서는 한 자리에 열 개가 모이면 받아올림하지만 오진법에서는 한 자리에 다섯 개가 모이면 다음 자리의 하나로 바꾼다. 기호보다 교환 규칙이 계산의 구조를 결정한다.

표기를 번역할 때에는 중간 검산을 남기는 것이 좋다. 39를 다시 5로 나누면 몫 7과 나머지 4가 나오고 7을 5로 나누면 몫 1과 나머지 2가 나온다. 남은 몫 1을 맨 앞에 써서 124를 얻는다. 서로 반대 방향의 계산을 하면 자리를 거꾸로 적는 오류를 찾을 수 있다.

$$39 = 7 \times 5 + 4$$

$$7 = 1 \times 5 + 2$$

$$39 = 1 \times 25 + 2 \times 5 + 4$$

반복 나눗셈으로 오진법 자리값을 찾는다

탐구

십진법의 31을 오진법으로 나타내라.

풀이와 확인

31=1×25+1×5+1이므로 오진법 111이다. 세 개의 1을 더해 3으로 읽으면 자리의 무게를 빠뜨린 것이다.

받아올림을 교환으로 설명하기

자리값의 규칙은 덧셈의 절차를 뒷받침합니다.

오진법에서 34와 23을 더해 보자. 일의 자리에서 4+3=7이므로 다섯 개를 한 묶음으로 바꾸고 두 개를 남긴다. 다음 자리에는 원래 있던 3과 2에 받아올린 1을 더하여 여섯 묶음이 생긴다. 다시 다섯 묶음을 위 자리 하나로 바꾸면 결과는 112가 된다.

십진법으로 검산하면 오진법 34는 19이고 23은 13이므로 합은 32이다. 결과 112를 십진법으로 바꾸면 25+5+2=32여서 일치한다. 서로 다른 표기를 거치는 검산은 같은 계산 실수를 그대로 반복할 가능성을 줄여 준다.

받아올림을 단순히 작은 숫자 1을 위에 적는 행동으로 배우면 그 1이 무엇을 뜻하는지 놓칠 수 있다. 일의 자리에서 옮긴 1은 다섯 개의 낱개를 묶은 하나이고 다음 자리에서 옮긴 1은 스물다섯 개의 묶음이다. 기호는 같아도 위치에 따라 교환한 양이 다르다. 이 원리는 다른 밑의 자리값 계산에도 이어진다.

단계	계산	남기는 숫자	다음 자리로 옮김
일의 자리	4+3=7	2	1
다섯의 자리	3+2+1=6	1	1
스물다섯의 자리	받아온 1	1	없음

탐구

오진법의 44에 1을 더하면 어떻게 되는가?

풀이와 확인

일의 자리에서 4+1을 교환하고 다음 자리의 4에도 1이 더해져 다시 교환된다. 결과는 오진법 100이다. 십진법으로는 24+1=25이다.

같은 분수의 다른 모습

표현의 길이는 수 자체보다 표기 체계에 좌우될 수 있습니다.

분수 1/2은 십진법으로 0.5라고 짧게 나타낼 수 있다. 그러나 1/3은 0.333…처럼 같은 숫자가 끝없이 반복된다. 길게 쓰인다는 이유로 1/3이 부정확한 수가 되는 것은 아니다. 정확한 분수와 유한하게 잘라 쓴 소수 근삿값을 구별해야 한다.

어떤 분수가 유한소수가 되는지는 약분한 분모와 밑의 관계에 달려 있다. 십진법의 밑 10은 2×5이므로 분모의 소인수가 2와 5뿐인 분수는 유한하게 끝난다. 예를 들어 3/8은 분모에 2만 들어 있어 0.375가 된다. 1/6은 약분할 수 없는 분모에 3이 남아 끝나지 않는다.

표기 밑을 바꾸면 상황도 달라진다. 삼진법에서 1/3은 소수 첫 자리의 1로 나타낼 수 있다. 같은 양을 어느 체계에서는 짧게 쓰고 다른 체계에서는 반복해서 쓴다. 다른 문화의 수 표기를 읽을 때 친숙한 소수 모양만을 기준으로 효율을 판단하기 어려운 까닭이다.

분수	십진법 표현	끝나는가
1/2	0.5	예
3/8	0.375	예
1/3	0.333…	아니오
1/6	0.1666…	아니오

탐구

7/40은 십진법 유한소수가 되는가?

풀이와 확인

$40=2^3\times5$이므로 유한소수로 끝난다. 실제로 $7/40=0.175$이다. 분모에 어떤 소인수가 있는지 살피기 전에 약분이 가능한지도 확인한다.

규칙을 보존하는 번역

올바른 변환은 표현뿐 아니라 계산 결과도 이어 줍니다.

어떤 표기의 수를 다른 표기로 옮길 때 더하기의 결과가 유지되는지 확인할 수 있다. 오진법 12와 21을 먼저 십진법으로 옮기면 각각 7과 11이다. 합은 18이며 이를 다시 오진법으로 나타내면 33이다. 원래 오진법으로 직접 더해도 12+21=33이 나온다.

두 경로가 같은 결과를 준다는 사실은 번역 규칙을 점검하는 좋은 방법이다. 한 경로는 먼저 변환하고 나중에 계산한다. 다른 경로는 먼저 계산하고 나중에 변환한다. 양쪽이 다르면 계산 실수나 변환 규칙의 오해가 있는지 확인한다.

모든 번역이 이런 단순한 수치 대응으로 끝나지는 않는다. 옛 문헌의 문제 상황과 수학 용어에는 당시의 관습이 포함될 수 있다. 하지만 검산 가능한 수의 관계부터 확인하면 해석의 기반을 마련할 수 있다. 문장의 의미를 바꾸지 않았는지 검토하는 일과 수치 결과가 같은지 확인하는 일은 서로를 보완한다.

순서	첫 단계	둘째 단계
변환 먼저	7 + 11	18
계산 먼저	오진법 33	

변환과 덧셈의 순서를 바꾸어 같은 값을 얻는지 확인한다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

오진법 13과 22를 십진법으로 옮겨 합을 구하고 다시 오진법으로 써라.

풀이와 확인

13은 8이고 22는 12이므로 합은 20이다. 오진법에서는 40이다. 직접 더하면 일의 자리 3+2를 받아올려 같은 40을 얻는다.

밑을 모를 때 찾아보기

표기의 규칙을 미지수로 놓으면 새로운 문제를 만들 수 있습니다.

어떤 자리값 표기에서 24가 십진법의 18을 뜻한다고 하자. 밑을 b라고 놓으면 2b+4=18이므로 b=7이다. 숫자 4를 사용할 수 있으려면 밑은 4보다 커야 하므로 b=7은 기호 사용 조건에도 맞는다. 수식의 답과 표기 체계의 조건을 함께 확인했다.

같은 방식으로 어떤 표기의 31이 십진법 16이라면 3b+1=16에서 b=5를 얻는다. 그런데 31이 십진법 10이라고 하면 b=3이 나오며 숫자 3 자체를 밑 3의 한 자리 숫자로 사용할 수 없다. 방정식에 정수해가 있다는 사실만으로 유효한 표기 체계가 되는 것은 아니다.

이 문제는 실제 역사 문헌의 밑을 추정하는 절차를 그대로 대신하지 않는다. 문헌에는 단위와 생략 및 다른 표기 관습이 섞여 있을 수 있다. 여기서는 자리값 체계라는 가정을 먼저 정한 교육용 문제를 다룬다. 가정을 문장으로 적어 두면 계산이 어디까지 유효한지 독자가 따라갈 수 있다.

$$\text{표기 } 24 \rightarrow \text{십진법 } 18$$

$$2b + 4 = 18$$

$$b = 7 > 4$$

밑을 구한 뒤 모든 숫자가 밑보다 작은지 확인한다

탐구

표기 32가 십진법의 20이라면 밑은 얼마인가?

풀이와 확인

3b+2=20이므로 b=6이다. 사용한 숫자 3과 2가 모두 6보다 작으므로 유효하다. 다시 3×6+2=20으로 검산한다.

지식의 길 / 96

기록의 재료와 책의 구조

재료가 바꾸는 기록의 모습

내용을 담는 물건의 구조도 읽는 방식에 영향을 줍니다.

점토판과 두루마리 및 접은 종이책은 글을 담는 방식이 다르다. 같은 계산을 적더라도 줄의 길이와 수정 방법 및 여러 쪽을 넘기는 행동이 달라질 수 있다. 재료가 모든 수학적 생각을 결정하는 것은 아니지만 무엇을 쉽게 기록하고 다시 찾아볼 수 있는지에는 영향을 준다.

가상의 계산표에 열 여섯 개와 행 열 개가 있다고 하자. 한 쪽에 여덟 열과 열 행만 담을 수 있다면 표를 두 쪽에 나누어야 한다. 단순히 칸 수만 절반으로 자르면 행 제목이 둘째 쪽에서 사라질 수 있다. 같은 행을 이어 읽을 수 있도록 식별 정보를 반복해야 한다.

기록을 압축하는 일과 읽기 쉽게 만드는 일은 항상 같은 방향이 아니다. 행 제목을 두 쪽에 반복하면 글자 수가 늘지만 독자는 서로 대응하는 값을 더 쉽게 찾는다. 숫자를 줄이는 것만 효율이라고 부르기보다 쓰는 사람과 읽는 사람의 부담을 함께 생각해 볼 수 있다. 전자책의 쪽번호와 장 제목도 이런 탐색을 돕는다.

행	첫째 쪽	둘째 쪽
가	열 1-8	열 9-16
나	열 1-8	열 9-16
다	열 1-8	

넓은 표를 나누어도 행의 대응을 유지하는 편집 모형 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

행 제목을 둘째 쪽에도 반복하면 왜 도움이 되는가?

풀이와 확인

두 쪽을 동시에 보지 않아도 어떤 대상의 값인지 확인할 수 있다. 반복 정보는 기록량을 늘리지만 대응 오류를 줄이는 역할을 한다.

접으면 생기는 쪽의 수

종이의 면과 책의 쪽을 혼동하지 않아야 합니다.

종이 한 장을 가운데에서 한 번 접으면 잎 두 개가 생긴다. 각 잎에는 앞뒤 두 면이 있으므로 책의 쪽은 네 개이다. 접기 전의 종이 한 장과 접은 뒤의 잎 두 개 및 번호를 붙이는 네 쪽은 서로 다른 단위이다.

이런 종이를 세 장 겹쳐 접어 한 묶음으로 만들면 잎은 여섯 개이고 쪽은 열두 개이다. 바깥쪽 종이의 한 면에는 맨 앞쪽과 맨 뒤쪽이 나란히 놓인다. 책을 펼친 순서대로 1부터 12까지 적은 것과 인쇄할 종이 위의 배치는 다르다.

간단한 모형을 직접 만들어 쪽번호를 붙인 뒤 종이를 다시 펼쳐 보자. 가장 바깥 종이에서는 12와 1 및 2와 11이 짝이 된다. 안쪽 종이는 8과 5 및 6과 7이 짝이 된다. 이 배열은 특정 고서의 제책법을 대표하는 것이 아니라 한 번 접은 종이를 중첩한 교육용 모형이다. 구조의 가정을 분명히 해야 실제 책의 형태와 비교할 수 있다.

종이	한 면의 쪽번호	다른 면의 쪽번호
바깥	12 / 1	2 / 11
가운데	10 / 3	4 / 9
안쪽	8 / 5	6 / 7

탐구

한 번 접은 종이 다섯 장을 겹치면 모두 몇 쪽인가?

풀이와 확인

한 장당 네 쪽이므로 5×4=20쪽이다. 잎의 수는 10개이다. 표지나 별도 삽입물이 없다는 조건에서 계산했다.

없어진 한 장을 찾아내기

쪽번호의 공백은 책의 물리적 구조와 함께 읽어야 합니다.

열두 쪽짜리 중첩 제책 모형에서 바깥 종이 한 장이 빠졌다고 하자. 없어지는 쪽은 1과 2 및 11과 12이다. 연속한 네 쪽이 아니라 처음 두 쪽과 마지막 두 쪽이 함께 사라진다. 종이 한 장에 대응하는 쪽번호를 알면 결락의 모양을 설명할 수 있다.

안쪽 종이가 빠지면 5와 6 및 7과 8이 없어져 연속한 네 쪽이 사라진다. 같은 한 장의 손실이라도 어디에 놓였는지에 따라 번호의 공백이 다르게 보인다. 단순히 네 쪽이 없다는 관찰만으로 어느 종이가 빠졌는지 알 수 없는 까닭이다.

실제 문헌에서는 원래 쪽번호가 없거나 후대에 다시 번호를 붙인 경우도 있을 수 있다. 본문의 연결과 제책 흔적 및 종이의 특징을 함께 보아야 한다. 이 예의 계산은 가능한 설명을 만드는 데 도움을 주지만 실제 자료의 물리적 조사를 대신하지 않는다. 가상 모형과 관찰 결과를 서로 대조하는 방식으로 접근한다.

빠진 종이	사라지는 앞부분	사라지는 뒷부분
바깥	1 / 2	11 / 12
가운데	3 / 4	9 / 10
안쪽	5 / 6	

세 장을 겹쳐 접은 열두 쪽 모형의 결락 패턴 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

> **탐구**
>
> 3쪽과 4쪽 및 9쪽과 10쪽이 없다면 어떤 종이가 빠졌는가?

풀이와 확인

가운데 종이가 빠진 경우와 맞는다. 쪽번호가 원래 구조를 유지하고 있다는 가정 아래 가능한 판단이다.

날짜가 남은 인쇄본

가장 오래된 자료라는 말에는 범위를 붙여야 합니다.

영국도서관의 국제둔황프로젝트는 868년의 날짜가 남아 있는 금강경 인쇄본을 소개한다. 날짜가 명시된 완전한 인쇄본이라는 설명과 인쇄가 그때 처음 시작되었다는 설명은 같은 말이 아니다. 남아 있는 자료의 범위와 기술의 시작을 구별해야 한다.

연대순 목록을 생각해 보자. 제작 시기가 850년에서 900년 사이로 추정되는 자료 가와 868년이라고 적힌 자료 나가 있다. 가가 더 오래되었을 가능성도 있지만 두 자료의 순서를 확정할 수는 없다. 가의 가능한 범위가 나의 연대를 포함하기 때문이다.

날짜 하나가 주어진 자료는 비교하기 편리하지만 그 날짜가 무엇을 뜻하는지 확인해야 한다. 인쇄일인지 발원문 작성일인지 후대의 소장 기록인지에 따라 해석이 달라진다. 이 장에서는 기록된 날짜와 물리적 자료의 설명을 함께 읽는 태도를 강조한다. 정확한 숫자가 보인다는 이유만으로 그 숫자의 역할까지 자동으로 분명해지는 것은 아니다.

자료	알려진 연대	말할 수 있는 것
가	850–900년 추정	범위 안의 여러 시점 가능
나	868년 날짜 표기	기록된 날짜를 확인 가능
비교	구간이 겹침	가와 나의 순서 단정 불가

탐구

자료 가의 범위가 820–850년으로 좁혀진다면 자료 나와의 순서를 알 수 있는가?

풀이와 확인

같은 종류의 제작 시기를 비교한다는 조건 아래 가가 먼저이다. 가의 가장 늦은 시점 850년도 868년보다 이르기 때문이다.

[SR03] British Library IDP. Buddhist texts: The Diamond Sutra

필사와 인쇄의 비용 모형

처음 준비하는 비용과 한 부를 더 만드는 비용을 나누어 봅니다.

가상의 책을 손으로 베끼는 데 한 부당 12시간이 걸린다고 하자. 인쇄 모형에서는 판을 준비하는 데 80시간이 들고 한 부를 더 찍는 데 2시간이 걸린다. n부를 만들 때 걸리는 시간은 필사에서 12n이고 인쇄에서 80+2n이다. 실제 역사적 생산 시간을 재현한 수치는 아니다.

두 시간이 같아지는 지점은 12n=80+2n이므로 n=8이다. 여덟 부에서는 모두 96시간이고 그보다 많이 만들면 이 단순 모형에서 인쇄가 유리해진다. 한 부만 만든다면 필사는 12시간이고 인쇄는 82시간이어서 순서가 반대이다.

생산 방식의 장점을 말할 때 수량을 함께 밝혀야 한다. 또한 수정 비용과 재료비 및 도구의 수명은 이 식에 포함하지 않았다. 책의 내용을 바꾸면 판을 다시 준비해야 할 수 있고 필사도 검수 시간이 필요하다. 모형에 포함된 항목을 명시하면 계산으로 얻은 결론을 실제 상황에 과도하게 확장하는 일을 줄일 수 있다.

부수	필사 시간	인쇄 시간
1	12	82
8	96	96
20	240	

고정 준비 시간과 부수에 비례하는 시간을 나눈 가상 모형 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

인쇄 준비 시간이 100시간이라면 두 방식이 같아지는 부수는 얼마인가?

풀이와 확인

$12n=100+2n$에서 $10n=100$이므로 10부이다. 한 부당 시간 차이 10시간이 준비 시간 100시간을 상쇄하는 지점이다.

줄 수와 글자 수의 관계

판형을 바꾸면 기록량과 가독성이 함께 달라집니다.

한 쪽에 25줄을 놓고 한 줄에 평균 20글자를 적으면 본문은 약 500글자이다. 80쪽의 같은 조판이라면 약 40000글자가 들어간다. 제목과 표 및 그림이 들어가는 공간을 따로 계산하지 않은 단순한 추정이다. 실제 책의 글자 수는 쪽마다 달라진다.

글자 폭과 줄 간격을 모두 20%씩 줄이면 이론적으로 같은 면적에 들어가는 글자 수는 $1\div0.8^2$배가 된다. 이는 약 1.5625배이다. 두 방향의 변화가 곱해지므로 단순히 40%가 늘어나는 것이 아니다. 다만 작은 글자가 읽기에 적절한지는 다른 문제이다.

내용이 부족한 책을 조판만 크게 만들어 쪽수를 늘리면 독자의 기대와 실제 정보량이 어긋날 수 있다. 반대로 글을 지나치게 압축하면 도해와 계산을 따라가기 어렵다. 쪽수와 글자 수 및 시각 자료가 맡는 역할을 함께 평가하는 편이 좋다. 여백도 제목과 본문의 관계를 드러내지만 내용 대신 쪽수를 채우는 수단이 되어서는 안 된다.

항목	계산	값
한 쪽 글자 수	25×20	약 500
80쪽 글자 수	500×80	약 40000
두 방향 20% 축소	1÷0.64	약 1.5625배

탐구

한 쪽 24줄과 한 줄 22글자라면 50쪽에 대략 몇 글자가 들어가는가?

풀이와 확인

24×22×50=26400글자이다. 제목과 그림 및 빈 줄이 차지하는 공간을 빼지 않은 추정값이다. 정확한 원고 분량과 구별한다.

복제된 책의 갈라지는 판본

공통된 차이는 자료 사이의 관계를 살피는 실마리가 됩니다.

원본 가를 보고 나와 다를 각각 베꼈다고 하자. 나에는 한 줄이 빠졌고 다에는 숫자 하나가 바뀌었다. 이어 나를 보고 라를 만들었다면 라에서도 같은 줄의 결락이 보일 수 있다. 이런 공통된 특징은 사본 사이의 관계를 추정하는 단서가 된다.

그러나 같은 오류가 독립적으로 생길 가능성도 있고 필사자가 여러 사본을 대조했을 수도 있다. 사본의 계보를 항상 단순한 나무 모양으로 그릴 수 있는 것은 아니다. 하나의 공통 오류만으로 부모와 자식 관계를 확정하지 않고 여러 독립적인 특징을 살펴야 한다.

교육용 표에서는 각 사본의 특징을 예와 아니오로 기록해 보자. 줄의 결락과 특정 숫자 및 문장의 순서가 어떻게 함께 나타나는지 비교할 수 있다. 표가 계보를 자동으로 증명하는 것은 아니지만 관찰 자료와 가설을 분리해 주는 장점이 있다. 원본이 사라졌다면 어느 형태가 먼저였는지를 판단하는 일은 더 조심스러워진다.

사본	한 줄 결락	숫자 변경
나	있음	없음
다	없음	있음
라	있음	

공통 특징은 계보 가설의 단서이며 그 자체로 확정 증거는 아니다 / 움직임은 표의 행을 차례로 강조합니다.

탐구

라에 나와 같은 결락이 있다는 사실만으로 라가 나를 직접 베꼈다고 확정할 수 있는가?

풀이와 확인

확정할 수 없다. 둘이 공통 조상 사본을 따랐을 수도 있고 같은 오류가 별도로 생겼을 수도 있다. 여러 특징과 연대를 함께 확인해야 한다.

복사본을 남기는 이유

보존 가능성은 사본의 수뿐 아니라 위험의 공유에도 달려 있습니다.

가상 모형에서 한 보관 장소가 일정 기간 안에 손실될 확률을 1/5이라고 하자. 서로 독립적인 두 장소에 사본을 나누어 두면 둘 다 손실될 확률은 $1/5 \times 1/5 = 1/25$이다. 적어도 하나가 남을 확률은 24/25이다. 독립성은 계산을 가능하게 하는 중요한 가정이다.

두 사본을 같은 건물의 같은 방에 두었다면 화재 같은 사건을 함께 겪을 수 있다. 이때 두 손실을 독립이라고 놓고 곱해서는 안 된다. 사본을 늘렸다는 사실만으로 위험이 같은 비율로 줄어드는 것은 아니다. 무엇이 함께 실패할 수 있는지 살펴야 한다.

이 계산은 실제 문헌 보존의 확률을 측정한 결과가 아니다. 보관 방식을 비교하는 현대의 교육용 모형이다. 디지털 파일에서도 복사본을 같은 기기에만 두면 기기 고장이라는 위험을 공유한다. 책과 파일의 차이를 인정하면서도 독립적인 사본과 기록의 중요성이라는 질문을 연결할 수 있다.

$$각\ 장소\ 손실\ 확률 = 1/5$$
$$독립인\ 두\ 장소\ 모두\ 손실 = 1/25$$
$$적어도\ 하나\ 보존 = 24/25$$

독립성 가정 아래 두 사본의 보존 가능성을 계산한다

탐구

서로 독립인 세 장소에 보관하면 모두 손실될 확률은 얼마인가?

풀이와 확인

$(1/5)^3=1/125$이다. 하나 이상 남을 확률은 124/125이다. 실제 위험이 독립이라는 근거 없이 이 값을 현실의 보존 확률로 제시해서는 안 된다.

지식의 길 / 97

번역이 옮겨야 하는 논리

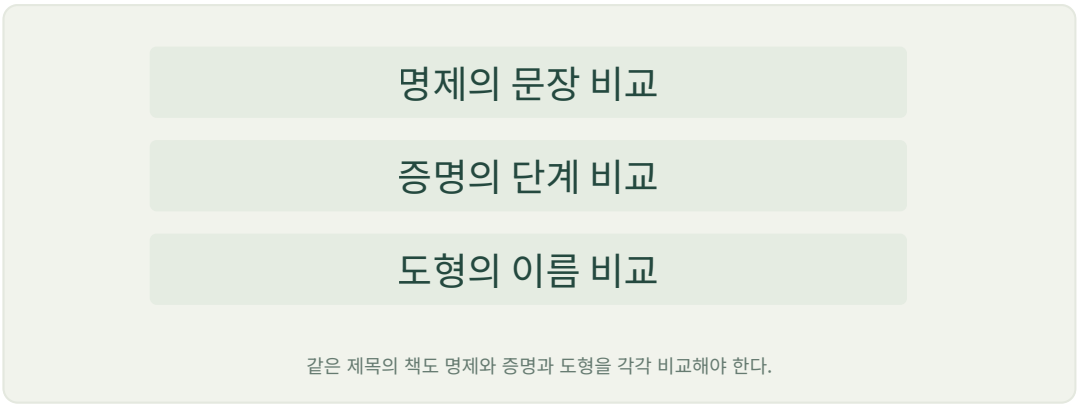
아델라르라는 이름 뒤의 여러 텍스트

한 사람의 이름 아래 전해진 책도 서로 다른 판본과 편집을 품고 있다.

바스의 아델라르는 아랍어를 거쳐 유클리드의 원론을 라틴어로 옮긴 전승과 연결된다. 그러나 아델라르 판본이라고 불린 모든 텍스트의 저자가 같은 인물이라고 단정할 수는 없다. 특히 이른바 제2판본의 저자 귀속은 재검토되어 왔다. 번역사의 이름표도 연구에 따라 더 정밀해진다.

같은 명제가 전해져도 증명을 줄이거나 새 설명을 붙인 텍스트가 있을 수 있다. 명제의 문장과 증명과 도형의 글자 배치를 각각 비교해야 어떤 차이가 생겼는지 알 수 있다. 책 제목이 같다는 사실만으로 두 책의 수학적 내용이 완전히 같다고 볼 수 없다.

이 장에서는 실제 판본을 새로 판정하는 대신 번역이 보존해야 할 조건과 논리를 학습한다. 이어지는 설명의 짧은 문장은 원론의 직접 인용이 아니라 편집자가 만든 예제다. 원자료에 관한 사실과 논리 연습의 문장을 구분하며 읽어 보자.



같은 제목의 책도 명제와 증명과 도형을 각각 비교해야 한다.

탐구

두 책에 같은 명제 문장이 있으면 증명도 반드시 같다고 할 수 있는가?

풀이와 확인

그렇지 않다. 명제는 유지하면서 증명을 요약하거나 다른 논증으로 바꿀 수 있다. 문장과 증명과 도형을 별도로 비교해야 한다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

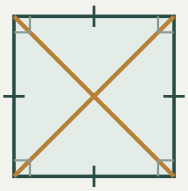
한 단어가 조건을 바꿀 때

도형의 이름을 바꾸는 일은 적용 가능한 대상을 바꾸는 일이기도 하다.

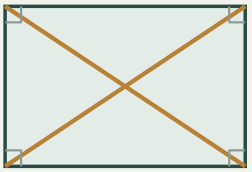
모든 정사각형의 두 대각선 길이는 같다는 문장을 생각하자. 정사각형을 사각형으로 바꾸면 문장은 일반적으로 참이 아니다. 이름 하나가 네 변과 네 각에 관한 조건을 함께 담고 있기 때문이다. 쉬운 단어로 고친다는 이유로 조건을 지워서는 안 된다.

마름모의 두 대각선은 일반적으로 길이가 다를 수 있다. 따라서 네 변이 같다는 조건만으로 대각선 길이가 같다는 결론은 나오지 않는다. 반면 직사각형에서는 대각선 길이가 같다. 여러 도형을 비교하면 결론을 지탱하는 조건이 무엇인지 살필 수 있다.

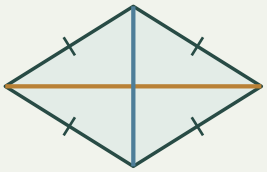
번역 용어를 정할 때에는 현대 단어와 원문의 정의가 같은 범위를 가리키는지 확인한다. 익숙한 번역어가 오히려 독자에게 추가 조건을 떠올리게 할 수도 있다. 용어표에 정의와 예와 반례를 함께 넣으면 의미의 차이를 더 분명히 전달할 수 있다.



정사각형
네 각 직각, 네 변 같음
대각선 길이 같음



3×2 직사각형
네 각 직각
대각선 길이 같음



마름모
네 변 같음
대각선 길이 다름

네 각이 직각이면 대각선이 같고 마름모는 다를 수 있다.

탐구

모든 직사각형은 정사각형이라는 문장을 반례 하나로 검토하자.

풀이와 확인

가로 3과 세로 2인 직사각형이 반례다. 네 각은 직각이지만 네 변의 길이가 같지 않으므로 정사각형은 아니다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

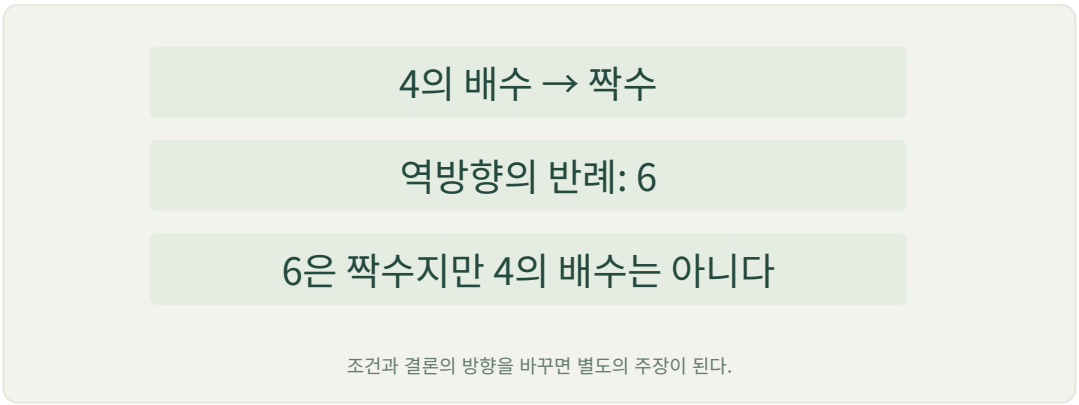
만약이라는 말의 방향

조건에서 결론으로 가는 문장은 그 반대 방향까지 자동으로 보장하지 않는다.

어떤 자연수가 4의 배수이면 짝수라는 말은 참이다. 4k는 2×2k이므로 2의 배수이기 때문이다. 그러나 짝수이면 4의 배수라는 역방향 문장은 거짓이다. 6은 짝수이지만 4의 배수가 아니다. 두 문장에 같은 단어가 있어도 논리의 방향은 다르다.

번역 과정에서 조건과 결론의 순서가 뒤바뀌면 새로운 주장이 된다. 문장을 짧게 고치는 편집에서도 만약과 그러면의 연결을 지켜야 한다. 양쪽 방향이 모두 성립할 때에만 서로 동치인 조건이라고 말할 수 있다.

증명과 반례의 역할도 다르다. 앞의 문장은 모든 4의 배수에 대한 식으로 설명했다. 뒤의 문장은 한 반례 6만으로 거짓임을 보였다. 모든 경우의 주장을 확인하는 방법과 부정하는 방법이 서로 다르다는 점을 이해하자.



조건과 결론의 방향을 바꾸면 별도의 주장이 된다.

탐구

자연수가 10의 배수이면 5의 배수라는 문장의 역은 참인가?

풀이와 확인

아니다. 15는 5의 배수이지만 10의 배수가 아니다. 원래 문장은 참이지만 역방향은 별도의 검토가 필요하다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

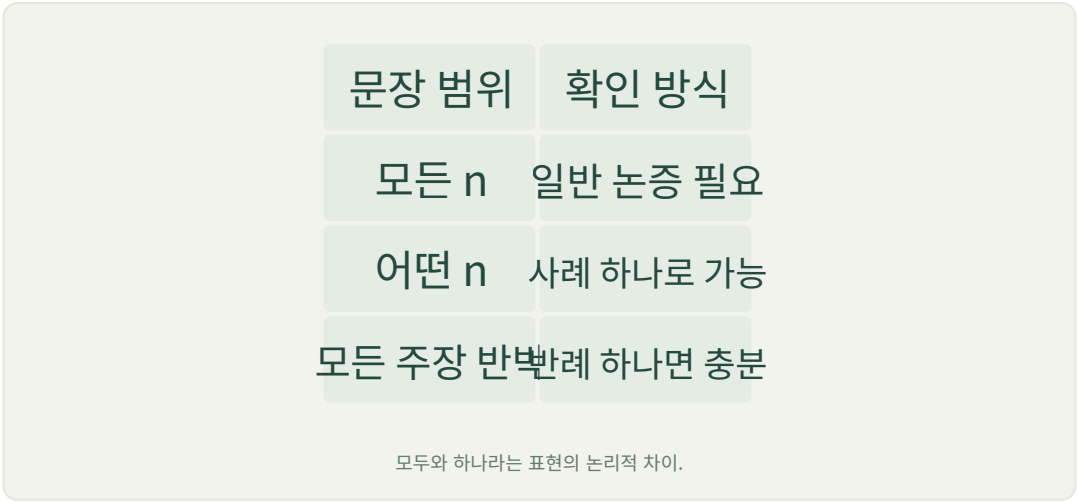
모두와 하나를 구별하기

수학 문장의 범위는 짧은 말 하나에 담길 수 있다.

모든 자연수 n에 대해 $n^2 \geq n$이라는 문장은 각 자연수마다 부등식이 성립한다는 뜻이다. 반면 어떤 자연수 n에 대해 $n^2 = n$이라는 문장은 한 값 이상만 찾으면 된다. n=1을 넣으면 두 번째 문장을 확인할 수 있다. 문장의 범위가 다르면 증명의 부담도 달라진다.

모든이라는 말을 어떤으로 바꾸면 주장이 약해지고 어떤을 모든으로 바꾸면 훨씬 강해진다. 번역에서 이런 표현이 생략되면 독자는 원래 주장보다 넓거나 좁은 내용을 읽게 된다. 수학적 정확성은 전문 용어뿐 아니라 평범한 말에도 달려 있다.

첫 문장은 $n^2-n=n(n-1)$을 보면 설명할 수 있다. $n \geq 1$이면 두 인수가 음수가 아니므로 곱도 음수가 아니다. 자연수에 0을 포함하는 약속에서는 $n=0$도 별도로 넣어 성립함을 확인할 수 있다. 몇 가지 예를 계산하는 것과 모든 경우를 설명하는 일반 논증을 구분하면서 읽어 보자.



모두와 하나라는 표현의 논리적 차이.

탐구

모든 자연수의 제곱은 짝수라는 문장을 어떻게 반박할 수 있는가?

풀이와 확인

$n=1$을 고르면 제곱도 1로 홀수다. 한 반례로 모든이라는 주장이 거짓임을 확인할 수 있다. 여러 홀수 사례를 모두 나열할 필요는 없다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

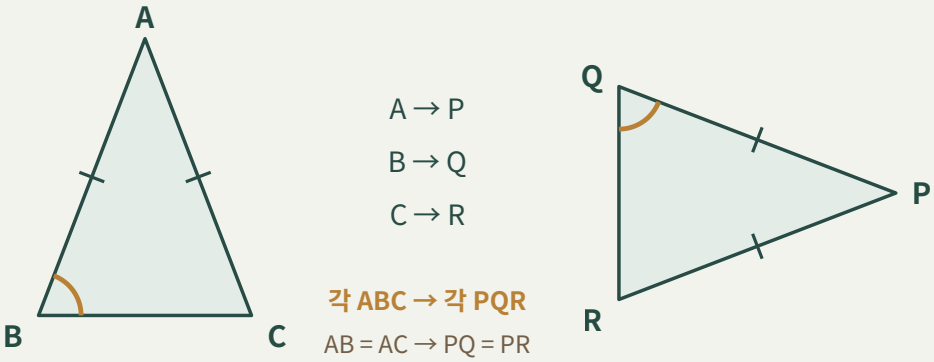
그림의 글자가 이어 주는 증명

도형을 다시 그릴 때에는 모양뿐 아니라 이름의 대응도 보존해야 한다.

삼각형 ABC에서 AB와 AC의 길이가 같다고 하자. 같은 길이인 두 변이 만나는 꼭짓점은 A다. 그림을 회전해도 이 관계는 바뀌지 않지만 새 그림에서 A와 B의 이름을 바꾸고 본문을 그대로 두면 다른 조건을 읽게 된다. 글자와 선의 대응이 증명의 일부다.

재작도에서는 대응표를 먼저 만들 수 있다. 원래 A를 새 P로 바꾸었다면 원래 B와 C가 각각 어느 점이 되는지 기록한다. 본문 속 선분 AB와 각 BAC도 같은 규칙으로 옮긴다. 글자를 하나씩 임의로 고치지 않고 하나의 일관된 변환을 적용한다.

그림이 예뻐졌다는 이유만으로 검수가 끝나지 않는다. 주어진 평행과 수직과 같은 길이 표시가 모두 유지되는지 살핀다. 보기에는 같은 삼각형이어도 대응이 바뀌면 증명에서 지칭하는 대상이 달라질 수 있다. 그림의 가독성과 논리적 충실성을 함께 확인한다.



돌려 그린 삼각형에서도 꼭짓점의 이름과 같은 변 표시를 함께 옮긴다.

탐구

A→P와 B→Q와 C→R로 바꾸면 선분 AC와 각 ABC는 어떻게 옮기는가?

풀이와 확인

선분 AC는 PR이다. 각 ABC는 가운데 점 B가 꼭짓점이므로 각 PQR로 옮긴다. 글자의 순서도 함께 보존해야 한다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

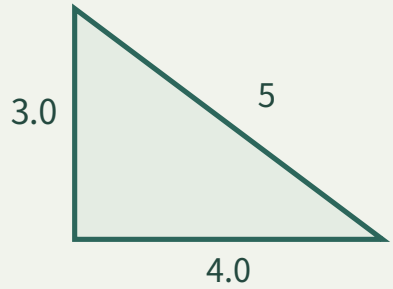
보기 좋은 그림이 증명은 아니다

그려진 한 사례의 모양과 모든 허용 사례의 관계를 나누어 본다.

어떤 삼각형의 꼭짓점을 적당히 배치하면 두 변이 비슷한 길이로 보일 수 있다. 그러나 조건에 같은 길이라는 말이나 표시가 없다면 등변이라고 가정할 수 없다. 그림의 외관은 정보를 읽는 도움이며 주어지지 않은 조건을 추가하는 근거가 아니다.

학습 예제로 가로 4와 세로 3인 직각삼각형을 그리면 빗변은 5다. 축척이 찌그러진 이미지에서는 빗변이 5처럼 보이지 않을 수 있다. 반대로 그림을 보고 눈대중으로 5라고 맞혔다고 관계를 증명한 것은 아니다. 제곱 관계나 다른 논증으로 확인해야 한다.

번역본의 도형이 원본과 다르게 그려졌을 때에는 수학적 관계가 유지되는지 먼저 살핀다. 비례를 정확히 지키지 않은 개념도라도 논리적 정보는 보존될 수 있다. 축척 그림인지 개념도인지 캡션에 적으면 독자의 잘못된 측정을 줄일 수 있다.



$3^2+4^2=5^2$을 만족하는 현대 학습 예제. 그림의 외관과 증명을 구별한다.

탐구

개념도에서 선분 두 개의 화면 길이가 같다면 수학적으로도 같다고 결론 내릴 수 있는가?

풀이와 확인

그럴 수 없다. 같은 길이라는 조건이나 논증이 필요하다. 화면 길이는 그림을 배치하거나 확대하는 과정에서 달라질 수 있다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

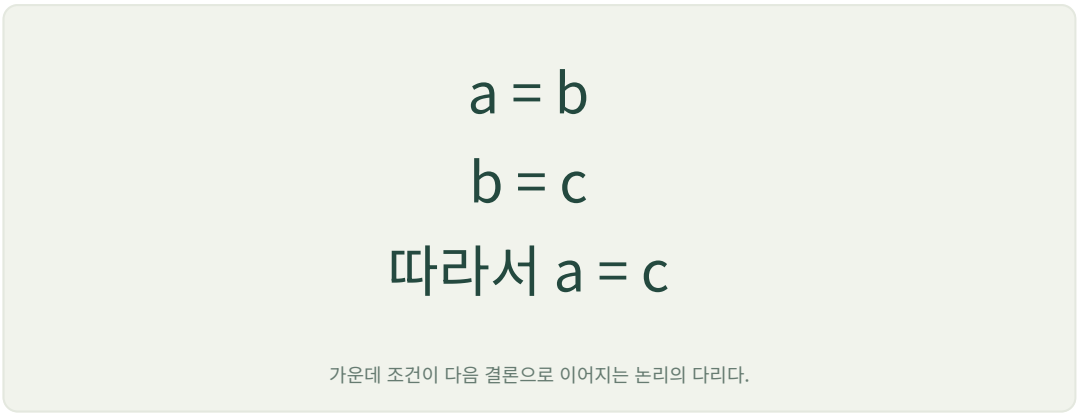
증명의 빠진 다리를 찾기

앞 문장의 결과가 다음 문장의 근거로 어떻게 쓰였는지 살핀다.

a=b이고 b=c이면 a=c라는 연결은 등식의 추이성을 사용한다. 그런데 번역문에 가운데 조건 b=c가 빠지면 a=c라는 결론은 앞 문장만으로 따라오지 않는다. 읽기 쉬운 요약이 되었다고 해도 논증의 필수 연결이 사라진 셈이다.

증명을 검토할 때에는 각 단계 옆에 사용한 조건을 짧게 적어 보자. 주어진 조건을 썼는지 앞에서 증명한 결과를 썼는지 새로운 가정을 도입했는지 나눈다. 순서가 바뀌어 아직 증명하지 않은 결과를 미리 사용하지 않았는지도 확인한다.

모든 설명을 길게 늘여야 한다는 뜻은 아니다. 독자가 이해할 수 있는 수준에서는 여러 자명한 단계를 묶을 수 있다. 그러나 묶은 단계가 왜 성립하는지 풀어서 설명할 수 있어야 한다. 간결한 표현과 논리의 생략은 같은 것이 아니다.



가운데 조건이 다음 결론으로 이어지는 논리의 다리다.

탐구

x+3=10에서 x=7로 가는 단계는 어떤 성질을 사용하는가?

풀이와 확인

등식 양변에서 같은 수 3을 빼도 등식이 유지된다는 성질을 사용한다. 한쪽에서만 3을 빼는 것은 같은 변환이 아니다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

번역 검수표를 직접 만들기

뜻과 기호와 그림을 차례로 대조하면 오류의 종류를 나눌 수 있다.

새 학습 문장으로 양의 수 x가 2보다 크면 x^2은 4보다 크다고 적자. 검수에서는 양의 수라는 범위와 크다라는 엄격한 부등호와 제곱 대상 x를 확인한다. x>2라는 조건만으로 양수임이 따라오지만 설명의 범위를 드러내는 역할도 있다.

이 문장을 x가 −2보다 크면 x^2은 4보다 크다고 잘못 옮기면 x=0에서 곧바로 틀린다. 기호의 작은 차이가 결론을 무너뜨릴 수 있다. 검수에는 문법 읽기뿐 아니라 간단한 수를 넣는 반례 탐색도 포함해야 한다.

마지막에는 원문에 없는 친절한 해설을 별도로 표시한다. 예시를 추가하는 것은 유용하지만 새 예시의 결론까지 원저자의 말처럼 보이면 안 된다. 좋은 번역본은 독자의 이해를 돕는 동시에 자료의 경계를 투명하게 보여 준다.

구분	조건	결론
원래 문장	$x>2$	$x^2>4$
잘못 옮긴 문장	$x>-2$	$x^2>4$
오역의 반례	$x=0$	$0^2<4$

부호를 바꾼 문장에는 x=0이라는 반례가 생긴다

탐구

$x>2$를 $x\geq 2$로 고쳤다면 결론 $x^2>4$는 여전히 항상 참인가?

풀이와 확인

아니다. $x=2$에서는 $x^2=4$다. 조건을 $\geq$로 바꾸려면 결론도 $x^2\geq 4$로 조정하거나 경계값을 별도로 제외해야 한다.

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개 / [SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

지식의 길 / 98

상인의 장부와 계산의 이동

피보나치의 책을 수열 너머로 읽기

수의 이름보다 책이 다룬 계산과 교류의 환경을 함께 살핀다.

피사의 레오나르도는 오늘날 피보나치라는 이름으로 널리 알려져 있다. 취리히 연방공과대학교 도서관의 설명에 따르면 그는 북아프리카 부자야에서 인도 아라비아 수 체계를 접했다. 산반서로 불리는 리베르 아바키는 1202년에 완성되었으며 1228년에 개정되었다.

이 책의 의미를 유명한 수열 하나로만 줄이면 자리값 계산과 교역 문제의 폭넓은 내용을 놓친다. 새로운 표기법이 쓰이려면 기호를 소개하는 데 더해 계산법을 가르치고 실제 문제에서 쓸 수 있게 해야 한다. 책과 교사와 거래 관행이 함께 지식의 이동을 이끈다.

이 장의 가격과 화폐와 거래량은 모두 원리를 설명하기 위해 만든 가상 예제다. 중세의 실제 가격을 복원하거나 특정 원문 문제를 번역한 것은 아니다. 역사적 책의 범위를 소개한 뒤 오늘의 독자가 직접 검산할 수 있는 계산으로 이어 간다.



취리히 연방공과대학교 도서관이 구분한 완성과 개정 시점.

탐구

1202년과 1228년은 같은 사건을 가리키는 두 날짜인가?

풀이와 확인

아니다. 앞의 해는 리베르 아바키의 완성 시점이고 뒤의 해는 개정 시점이다. 초고나 초판과 개정본을 구별해 기록해야 한다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

한 묶음의 값부터 찾기

물건 수와 총액이 비례한다면 한 단위의 값을 거쳐 다른 수량으로 옮길 수 있다.

가상의 시장에서 같은 품질의 천 7필이 84은화라고 하자. 한 필의 값은 84÷7=12은화다. 같은 조건에서 11필을 사면 12×11=132은화다. 물건 수에서 금액으로 가는 비율이 일정하다는 가정 아래 계산한다.

7필에서 11필로 곧장 11/7배를 적용해도 결과는 같다. 다만 포장비나 대량 할인처럼 수량과 단순히 비례하지 않는 항목이 있다면 한 단가만으로 전체 거래를 설명할 수 없다. 문제에서 무엇을 일정하게 두었는지 확인해야 한다.

장부에는 수량과 단가와 총액을 별도 열로 쓰면 좋다. 세 열 중 둘을 알면 나머지를 구할 수 있고 모두 있을 때는 곱셈으로 검산할 수 있다. 단가를 적지 않고 총액만 나열한 기록은 품질 차이나 수량 차이를 비교하기 어렵다.

수량	단가	총액
7	12	84
11	12	132

같은 품질과 일정한 단가를 가정한 가상 거래.

탐구

같은 물건 9개가 117단위 화폐라면 14개의 값은 얼마인가?

풀이와 확인

단가는 117÷9=13이다. 따라서 14개는 182단위 화폐다. 수량에 따른 추가 비용이 없다는 모형의 조건을 사용했다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

교환 비율의 방향을 읽기

어느 화폐 한 단위가 다른 화폐 몇 단위인지 먼저 문장으로 쓴다.

가상의 교환 규칙을 은화 1개=동화 12개로 정하자. 은화 8개는 동화 96개다. 반대로 동화 90개는 은화 7.5개에 해당한다. 같은 비율을 썼지만 변환 방향에 따라 곱셈과 나눗셈이 바뀐다. 이 값은 실제 역사적 환율이 아니다.

종이에 12동화/1은화라고 비율을 적으면 단위의 소거를 볼 수 있다. 8은화에 이를 곱하면 은화 단위가 사라지고 동화만 남는다. 동화에서 은화로 바꿀 때에는 역수 비율을 쓴다. 계산의 방향을 단위가 안내하는 셈이다.

실제 교환에서는 수수료와 매수 매도의 차이가 있을 수 있다. 여기서는 그런 조건을 제외한 순수한 비율 모형을 다룬다. 장부에 사용한 규칙을 적어 두면 나중에 같은 총액을 다른 기준으로 해석하는 혼란을 막을 수 있다.

$$1\text{은화} = 12\text{동화}$$

$$8\text{은화} = 96\text{동화}$$

$$90\text{동화} = 7.5\text{은화}$$

실제 역사적 환율이 아닌 가상 교환 규칙.

탐구

가상 규칙이 금화 1개=은화 15개일 때 은화 45개는 금화 몇 개인가?

풀이와 확인

45÷15=3개다. 은화에서 금화로 바꾸므로 15를 곱하는 것이 아니라 나눈다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

할인은 어느 값에 붙는가

퍼센트는 기준량을 알아야 실제 차액으로 바뀐다.

가상의 물건 정가가 80이고 15퍼센트를 할인한다고 하자. 할인액은 80×0.15=12이며 판매가는 68이다. 할인율 15퍼센트는 줄어든 12를 원래 가격 80으로 나눈 비율이다. 판매가 68을 기준으로 계산한 비율과는 다르다.

판매가 68에서 다시 15퍼센트를 올리면 78.2가 되어 원래 80으로 돌아오지 않는다. 인상률이 붙는 기준이 68로 바뀌었기 때문이다. 같은 퍼센트를 더하고 뺐다고 효과가 상쇄된다고 생각하면 기준량의 변화를 놓친다.

두 변화를 곱셈으로 묶으면 0.85×1.15=0.9775다. 따라서 원래 가격의 97.75퍼센트가 남는다. 변화를 비교할 때에는 변화량과 기준량 및 적용 순서를 함께 적으면 같은 비율의 감소와 증가가 왜 상쇄되지 않는지 분명해진다.

$$80 \times 0.15 = 12$$

$$80 - 12 = 68$$

$$68 \times 1.15 = 78.2$$

할인과 인상의 기준량이 달라지면 같은 비율도 상쇄되지 않는다.

탐구

100에서 20퍼센트 내린 뒤 그 결과를 20퍼센트 올리면 얼마인가?

풀이와 확인

먼저 80이 된다. 그다음 80의 20퍼센트인 16을 더하면 96이다. 원래 값보다 4 작으며 두 변화는 상쇄되지 않는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

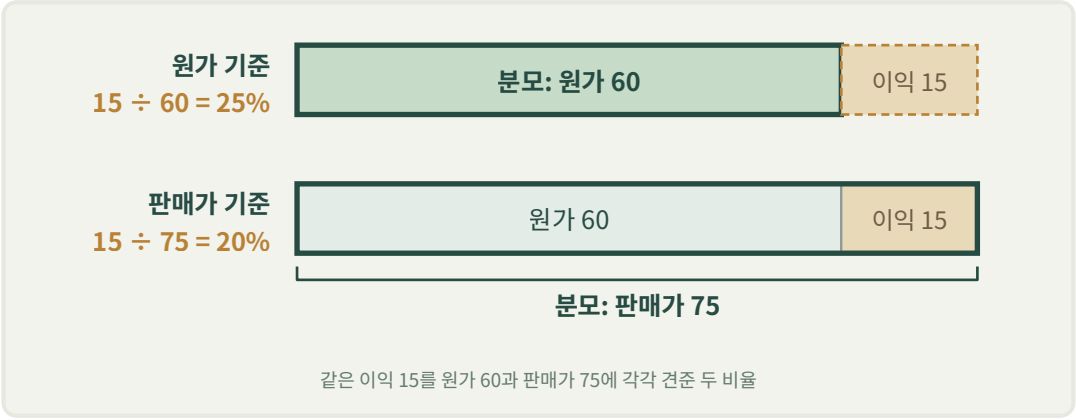
이익률의 두 분모

같은 이익도 원가와 판매가 중 무엇을 기준으로 하느냐에 따라 비율이 달라진다.

가상의 물건을 60에 들여와 75에 팔면 차액은 15다. 이를 원가 60으로 나누면 25퍼센트이고 판매가 75로 나누면 20퍼센트다. 두 비율은 같은 이익을 서로 다른 기준량에 비교한 것이다. 숫자가 다르다고 둘 중 하나가 틀린 것은 아니다.

이익률이라는 말만 적으면 어떤 분모인지 모호하다. 원가 대비 이익률과 판매가 대비 이익 비중이라고 풀어 쓰면 의미가 분명해진다. 역사적 상업 문헌을 오늘의 용어로 옮길 때에도 분모를 확인하지 않으면 계산의 뜻을 잘못 전달할 수 있다.

물건을 들여오는 운송비가 별도로 있다면 실제 원가는 더 커진다. 여기서는 원가 60에 모든 비용이 포함되었다고 가정한다. 포함한 비용과 제외한 비용을 밝히는 일은 계산의 정확성만큼 중요하다. 같은 비율을 비교하려면 기준도 같아야 한다.



같은 이익 15를 원가 60과 판매가 75에 각각 견준 두 비율

탐구

원가 40과 판매가 50에서 두 이익 비율을 구하자.

풀이와 확인

이익은 10이다. 원가 대비는 10/40=25퍼센트이며 판매가 대비는 10/50=20퍼센트다. 분모를 함께 적어야 두 수를 혼동하지 않는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

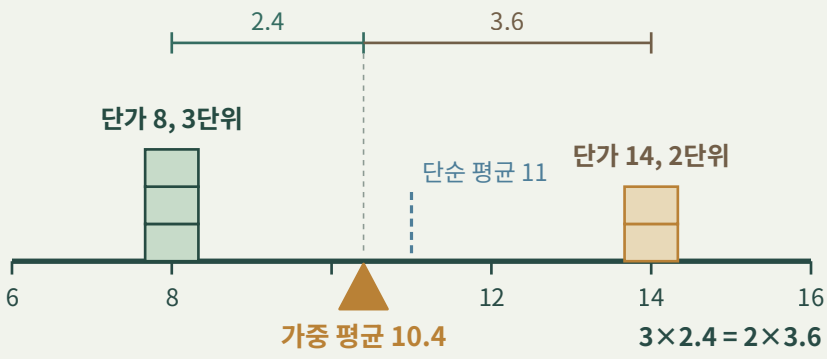
섞인 물건의 평균 단가

단가의 단순 평균보다 각각의 수량을 반영한 평균이 필요하다.

한 단위당 가격 8인 곡식 3단위와 가격 14인 곡식 2단위를 섞는다고 하자. 전체 가치는 3×8+2×14=52이며 총량은 5다. 평균 단가는 52/5=10.4다. 두 단가 8과 14의 단순 평균 11과는 다르다.

값이 싼 곡식의 양이 더 많으므로 평균이 8 쪽으로 조금 더 가까워진다. 수량을 가중치로 삼은 평균이라고 이해할 수 있다. 이 모형에서는 섞으면서 양이 늘거나 줄지 않고 품질 가치가 단순히 합쳐진다고 가정한다.

실제 상품의 품질과 가격이 언제나 이런 선형 관계를 따르는 것은 아니다. 계산을 역사적 실제 거래의 완전한 복원으로 받아들이지 않는다. 다만 전체 가치와 전체 양을 각각 보존한다는 조건 아래 평균을 구하는 방법은 명확하게 검산할 수 있다.



수량을 무게로 놓으면 받침점 10.4에서 양쪽이 균형을 이룬다.

탐구

단가 6인 물건 4단위와 단가 16인 물건 1단위의 평균 단가는 얼마인가?

풀이와 확인

전체 가치는 24+16=40이며 총량은 5다. 평균 단가는 8이다. 단가만 단순 평균한 11은 수량 차이를 반영하지 않는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

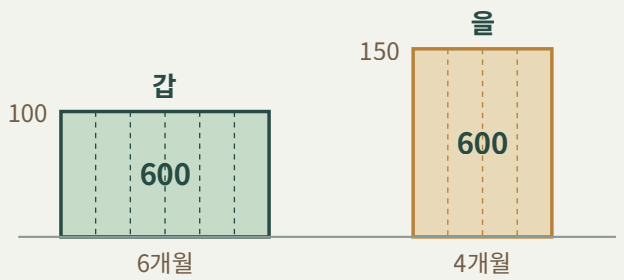
출자와 시간을 함께 셈하기

공동 이익을 나누는 규칙은 미리 정한 기준에 따라 달라진다.

두 사람이 가상의 사업에 자금을 넣었다고 하자. 갑은 100을 6개월 동안 넣고 을은 150을 4개월 동안 넣었다. 자금과 기간의 곱에 비례해 이익을 나누기로 했다면 두 기여량은 모두 600자금개월이다. 따라서 이 규칙 아래에서는 이익을 똑같이 나눈다.

이익이 80이면 각각 40이다. 자금의 크기만 보면 을이 더 많이 받아야 할 것처럼 보이지만 합의한 규칙에는 기간도 들어 있다. 무엇이 공평한가라는 판단과 어떤 규칙을 계산했는가라는 질문을 구별해야 한다. 수학은 정해진 규칙의 결과를 보여 준다.

이것은 공동 출자의 산술을 설명하는 학습 모형이며 실제 계약의 기준을 제안하는 것이 아니다. 현실에서는 노동과 위험과 관리 역할도 고려할 수 있다. 장부에는 적용한 분배 규칙을 명시해야 나중에 다른 기준을 섞는 오류를 줄일 수 있다.



넓이 = 자금×기간

갑 100×6 = 600

을 150×4 = 600

이익 80 → 40과 40

자금을 높이로, 기간을 너비로 놓으면 두 기여량의 넓이가 같다.

탐구

갑이 80을 5개월 동안 넣고 을이 100을 6개월 동안 넣었다면 위 규칙의 분배 비율은 얼마인가?

풀이와 확인

기여량은 400과 600이므로 2대 3이다. 이익이 100이면 갑은 40이고 을은 60을 받는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

합계가 맞아도 장부는 틀릴 수 있다

전체의 일치와 개별 항목의 정확성을 별도로 확인한다.

세 거래의 수량이 4와 6과 10이고 단가가 모두 5라면 금액은 20과 30과 50이다. 총액은 100이다. 첫 금액을 25로 잘못 쓰고 둘째를 25로 잘못 써도 합계는 여전히 100이 된다. 서로 반대인 오류가 합계에서 사라진 것이다.

검수에서는 각 행의 수량×단가와 금액을 확인한 뒤 열의 합계를 확인한다. 전체만 보는 검사와 항목별 검사는 서로 다른 오류를 찾는다. 독립된 두 확인을 사용하면 같은 실수를 반복할 가능성을 줄일 수 있다.

옛 장부의 합계가 맞는다고 모든 기호가 정확히 전사되었다고 결론 내리지 않는다. 반대로 합계가 안 맞으면 필자의 실수뿐 아니라 손상과 판독과 단위 차이도 검토한다. 계산으로 자료를 시험하되 자료의 물리적 흔적과 맥락을 함께 읽는 태도가 필요하다.

거래	맞는 금액	잘못 쓴 금액
첫째	20	25
둘째	30	25
셋째	50	50
합계	100	100

행별 오류가 서로 상쇄되면 합계 검산만으로는 발견할 수 없다

탐구

20과 30이 25와 25로 잘못 적힌 경우 어떤 검사로 오류를 찾는가?

풀이와 확인

각 거래의 수량에 단가를 곱해 개별 금액과 비교한다. 합계 검사만으로는 +5와 −5의 오류가 상쇄되어 드러나지 않는다.

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기

지식의 길 / 99

단위가 바뀌어도 같은 양

변환 사슬의 단위를 지우기

여러 단계를 거치는 환산에서는 각 단계의 비율과 방향을 함께 적는다.

학습용 약속으로 한 상자는 8묶음이고 한 묶음은 12개라고 정하자. 5상자를 낱개로 바꾸면 5×8×12=480개다. 두 단계의 변환을 이어 붙인 것이다. 첫 비율은 묶음/상자이며 둘째 비율은 개/묶음이므로 중간 단위가 차례로 사라진다.

숫자만 적으면 8로 나누어야 하는지 곱해야 하는지 헷갈릴 수 있다. 5상자×8묶음/상자×12개/묶음이라고 단위를 붙이면 최종 단위가 개인지 확인할 수 있다. 계산 결과에 상자와 묶음이 남아 있다면 비율의 방향을 다시 살핀다.

이 단위들은 역사적 도량형의 실제 값이 아니라 원리 설명을 위한 약속이다. 옛 단위를 현대 단위로 바꿀 때에는 시대와 지역별 정의를 먼저 확인해야 한다. 같은 단위 이름이 항상 같은 크기를 뜻한다고 가정하면 정확한 곱셈도 잘못된 결과를 낸다.

5상자

× 8묶음/상자 → 40묶음

× 12개/묶음 → 480개

가상 단위의 변환 사슬에서 중간 단위가 소거된다.

탐구

한 자루가 6봉지이고 한 봉지가 9개라면 7자루는 몇 개인가?

풀이와 확인

7×6×9=378개다. 자루에서 봉지로 바꾼 뒤 봉지에서 낱개로 바꾸는 두 비율을 차례로 적용했다.

왕복 변환이 원래 값으로 돌아오는가

정확한 비율의 역수를 사용하면 같은 양을 되찾을 수 있다.

어떤 가상 길이 단위 A가 B의 5/2배라고 하자. 12A는 30B다. 이를 다시 A로 바꾸려면 2/5를 곱해 12A를 얻는다. 두 비율의 곱은 1이므로 값이 원래대로 돌아온다. 왕복 계산은 방향을 잘못 적용했는지 확인하는 간단한 검사다.

갈 때 5/2를 곱하고 돌아올 때도 5/2를 곱하면 75A라는 틀린 값이 나온다. 단위 이름만 바꾸고 같은 배율을 반복한 것이다. 역방향에는 역수 비율이 필요하다는 점을 식과 문장으로 함께 적어 두면 오류를 줄일 수 있다.

중간에 반올림하면 왕복 결과가 조금 달라질 수 있다. 그런 차이가 생겼을 때 환산 규칙 자체가 틀렸다고 바로 결론 내리지 않는다. 반올림이 어느 단계에서 일어났는지 기록하고 정확한 분수로 다시 계산해 원인을 확인한다.

$$12A \times 5/2 = 30B$$
$$30B \times 2/5 = 12A$$
$$5/2 \times 2/5 = 1$$

정확한 역수 비율을 쓰면 왕복 변환은 원래 양을 보존한다.

탐구

1A=1.5B일 때 10A를 B로 바꾼 뒤 다시 A로 되돌려 보자.

풀이와 확인

10A=15B다. 15B를 1.5로 나누면 10A다. 정확한 비율을 쓰고 중간 반올림이 없다면 왕복 결과는 같다.

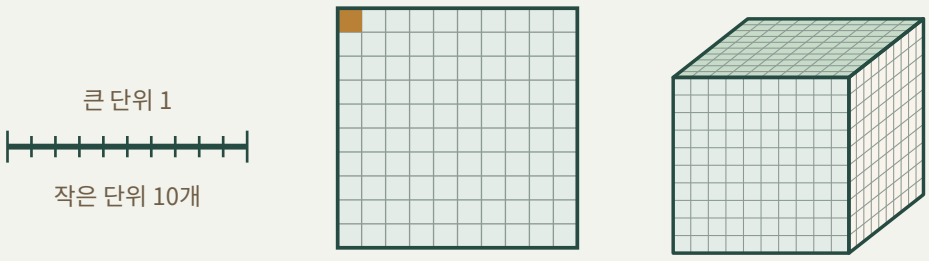
길이 환산을 넓이에 적용하기

단위의 방향이 두 개라면 환산 배율도 두 번 적용해야 한다.

한 큰 길이 단위를 작은 길이 단위 10개로 정하자. 큰 단위 한 변의 정사각형에는 작은 단위 정사각형이 가로 10개와 세로 10개 놓인다. 따라서 큰 넓이 단위 하나는 작은 넓이 단위 100개다. 길이의 변환 배율 10을 넓이에 그대로 쓰면 안 된다.

가로 3큰단위와 세로 2큰단위인 직사각형은 넓이가 6큰넓이단위다. 작은 길이 단위로는 가로 30과 세로 20이므로 넓이는 600이다. 두 경로가 같은 값을 주는지 확인하면 길이와 넓이의 환산 관계가 분명해진다.

도량형 자료를 편집할 때 길이 단위와 넓이 단위가 비슷한 이름을 가졌다고 같은 환산표에 섞지 않는다. 어떤 양을 재는지 제목에 표시하고 제곱 단위를 분명히 쓴다. 표기의 작은 구별이 백 배나 만 배의 오류를 막을 수 있다.



한 변이 10배가 되면 넓이는 100배, 부피는 1000배가 된다.

탐구

길이 단위의 환산 배율이 4일 때 넓이 단위의 환산 배율은 얼마인가?

풀이와 확인

$4^2=16$이다. 두 독립적인 길이 방향에서 각각 네 배가 되기 때문이다. 부피 단위라면 세 방향이므로 $4^3=64$다.

속도의 분모까지 바꾸기

복합 단위에서는 분자와 분모의 환산이 반대 방향으로 작용할 수 있다.

초당 2미터를 시간당 킬로미터로 바꾸어 보자. 한 시간은 3600초이므로 시간당 거리는 7200미터다. 이를 1000으로 나누면 시간당 7.2킬로미터가 된다. 길이만 바꾸거나 시간만 바꾸면 최종 단위가 맞지 않는다.

식으로는 $2\text{m/s} \times 3600\text{s/h} \times 1\text{km/1000m} = 7.2\text{km/h}$다. 초와 미터가 지워지고 킬로미터/시간만 남는다. 단위 소거는 숫자 계산과 별도로 식의 구조가 맞는지 검사하게 한다. 복잡한 환산일수록 단위를 생략하지 않는 편이 안전하다.

이 예제는 현대 단위를 사용한 학습 활동이다. 고대의 여행 시간을 오늘의 속도로 바꿀 때에는 거리가 실제 측정값인지 추정값인지도 확인해야 한다. 단위를 정확히 바꾸어도 원래 거리와 시간의 불확실성까지 사라지는 것은 아니다.

$$2\text{m/s} \times 3600\text{s/h} \times 1\text{km}/1000\text{m} = 7.2\text{km/h}$$

복합 단위는 분자와 분모의 변환을 함께 적용한다.

탐구

시속 18킬로미터를 초당 미터로 바꾸면 얼마인가?

풀이와 확인

18×1000÷3600=5이므로 초당 5미터다. 결과를 다시 3.6배하면 시속 18킬로미터로 돌아온다.

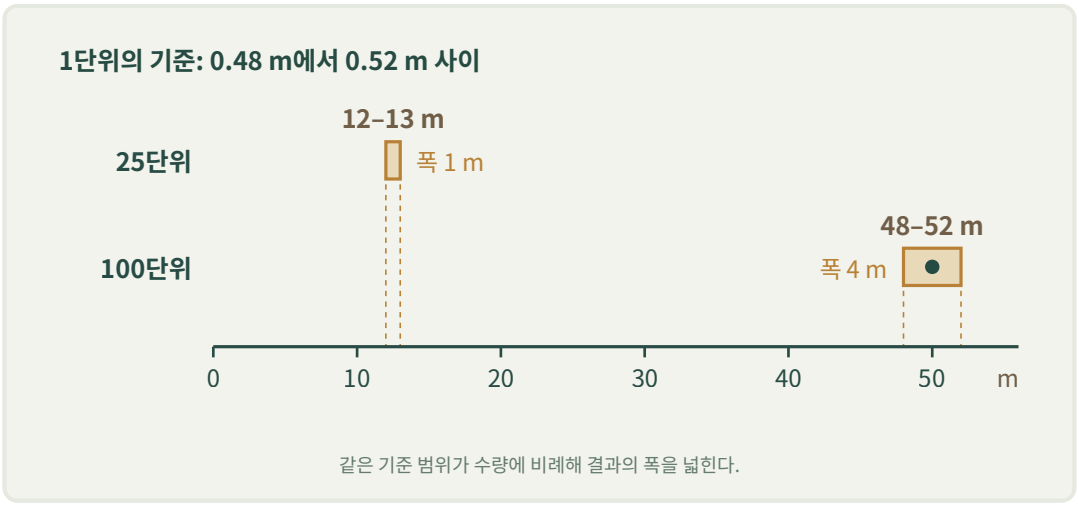
환산 기준이 범위로 주어질 때

단위의 크기가 확실하지 않다면 결과에도 범위를 남겨야 한다.

어떤 기록의 길이 단위 한 개가 현대 길이 0.48미터에서 0.52미터 사이일 수 있다고 가정하자. 기록에 100단위가 적혀 있다면 변환 결과는 48미터에서 52미터 사이다. 가운데 값 50미터만 쓰면 원래의 불확실성이 보이지 않는다.

이 범위는 역사적 특정 단위의 실제 조사값이 아니라 불확실성을 다루는 학습 예시다. 가능한 기준의 범위를 곱해 결과 범위를 구한 것이다. 원래 수량 100 자체도 근사치라면 그 불확실성까지 함께 고려해야 한다.

범위를 표시하는 일은 정확한 계산을 포기하는 것이 아니다. 알려진 정보가 허용하는 정확도를 충실히 표현하는 것이다. 소수 자릿수를 많이 쓰는 것보다 근거 있는 범위를 제시하는 편이 독자에게 더 유용할 수 있다. 출처마다 기준이 다르면 차이를 먼저 설명한다.



같은 기준 범위가 수량에 비례해 결과의 폭을 넓힌다.

탐구

같은 기준 아래 25단위는 몇 미터에서 몇 미터 사이인가?

풀이와 확인

25×0.48=12와 25×0.52=13이므로 12미터에서 13미터 사이다. 단일값을 쓴다면 근사 기준임을 함께 밝혀야 한다.

절대 오차와 상대 오차

같은 차이도 전체 크기에 따라 다른 의미를 가진다.

길이 10을 10.2로 재면 절대 오차는 0.2다. 길이 100을 100.2로 재도 절대 오차는 0.2지만 상대 오차는 각각 2퍼센트와 0.2퍼센트다. 같은 길이 차이를 전체 크기에 대한 비율로 비교하면 정확도의 평가가 달라진다.

단위를 바꾸면 절대 오차의 숫자도 바뀐다. 0.2미터는 20센티미터다. 그러나 상대 오차는 분자와 분모에 같은 변환 배율이 적용되므로 그대로다. 서로 다른 단위로 적힌 측정 결과를 비교할 때 상대 오차가 유용한 이유다.

어떤 계산이 더 정확하다는 말을 할 때에는 비교 기준을 밝혀야 한다. 작은 물건과 큰 물건을 같은 절대 차이로만 평가하면 목적에 맞지 않을 수 있다. 다만 상대 오차도 기준값이 0일 때는 그대로 정의할 수 없으므로 무조건 쓰는 지표는 아니다.

기준값	기록값	절대 차이	상대 차이
10	10.2	0.2	2%
100	100.2	0.2	0.2%

절대 오차가 같아도 전체 크기에 대한 비율은 다르다.

탐구

정확한 값 50을 49로 기록했다면 절대 오차와 상대 오차의 크기는 얼마인가?

풀이와 확인

절대 오차의 크기는 1이다. 상대 오차는 1/50=2퍼센트다. 기록값이 실제 값보다 작다는 방향도 따로 표시할 수 있다.

반올림은 마지막에 하기

중간값을 일찍 줄이면 이후 연산에서 작은 차이가 누적될 수 있다.

1/3단위씩 들어 있는 묶음 30개를 계산하면 정확한 전체는 10단위다. 그러나 한 묶음을 먼저 0.33단위로 반올림하고 30을 곱하면 9.9가 된다. 각 묶음에서 생긴 작은 부족량이 합계에서 0.1로 쌓인 것이다.

계산 중에는 분수나 충분한 자릿수를 유지하고 마지막 결과에서 필요한 정밀도로 정리하는 편이 좋다. 모든 중간값을 무한히 보존할 수는 없으므로 작업 목적에 맞는 오차 범위를 정한다. 반올림한 값에는 정확한 등호 대신 근사 표시를 쓰면 의미가 분명해진다.

옛 계산표의 수를 현대 소수로 바꾸어 편집할 때에도 이런 문제가 생긴다. 원래 표기의 정확한 값을 보존할 열과 읽기 쉬운 근삿값 열을 나누면 좋다. 독자는 계산을 재현할 때 정확한 열을 사용하고 크기를 빠르게 파악할 때 근사 열을 사용할 수 있다.

$$정확히: 30 \times 1/3 = 10$$
$$중간\ 반올림: 30 \times 0.33 = 9.9$$
$$합계의\ 부족량 = 0.1$$

각 항의 작은 반올림 오차가 합계에서 누적된다.

탐구

1/6을 0.17로 먼저 반올림해 60배하면 정확한 값과 얼마나 다른가?

풀이와 확인

근사 계산은 10.2이며 정확한 값은 10이다. 0.2만큼 크다. 한 항의 작은 초과가 60번 더해진 결과다.

변환표에 남겨야 할 정보

숫자와 함께 기준과 시점과 근거를 기록하면 표를 다시 사용할 수 있다.

학습용 변환표를 만들 때 첫 열에는 원래 단위와 둘째 열에는 목표 단위를 적는다. 셋째 열에는 곱할 비율을 적고 넷째 열에는 그 값이 정확한 약속인지 추정치인지 표시한다. 역방향 비율도 함께 적으면 계산자가 방향을 잘못 고를 가능성을 줄일 수 있다.

역사 자료에서는 지역과 시대와 물품 종류를 추가할 수 있다. 같은 이름의 단위라도 무엇을 재는지에 따라 기준이 다를 수 있기 때문이다. 확인되지 않은 항목은 빈칸이나 미상으로 남기고 현대의 익숙한 값으로 임의 보충하지 않는다.

이 표는 단순한 숫자 목록이 아니라 결과를 재현하기 위한 설명서다. 다른 사람이 같은 자료와 같은 규칙으로 계산했을 때 같은 값에 도달할 수 있어야 한다. 지식이 이동하는 길에서 단위와 조건을 함께 옮기는 일은 기호를 번역하는 것만큼 중요하다.

출발 → 목표	곱하는 비율	값의 성격
cm → m	1/100	정의상 정확
m → cm	100	정의상 정확

현대 단위의 교육용 예: 방향과 비율 및 값의 성격을 함께 적는다

탐구

1A=3B라는 학습 약속을 표에 적을 때 정방향과 역방향 곱셈 비율은 무엇인가?

풀이와 확인

A에서 B로는 3을 곱한다. B에서 A로는 1/3을 곱한다. 두 비율의 곱이 1인지 확인하면 왕복 변환을 검산할 수 있다.

지식의 길 / 100

천문표의 줄 사이를 읽기

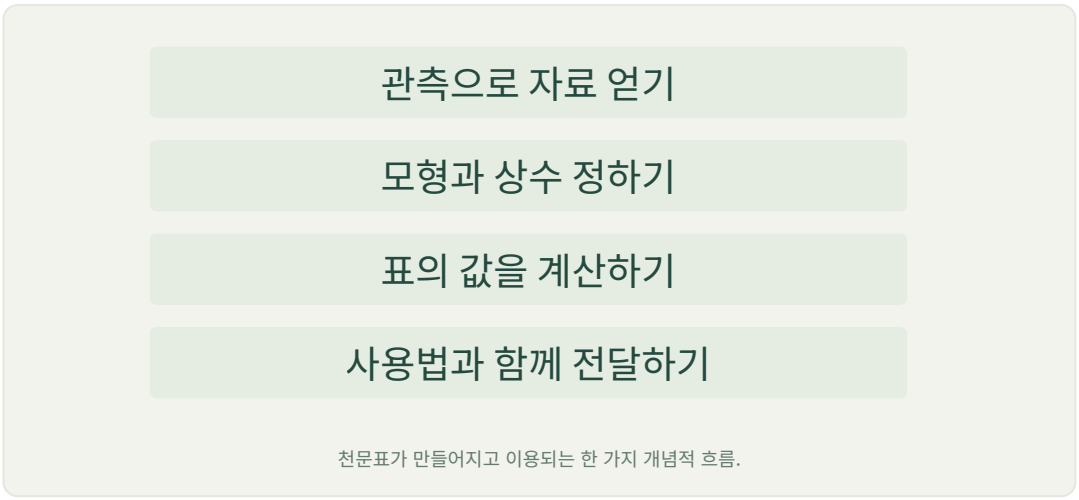
하늘의 움직임을 표로 옮기기

천문표는 관측과 계산과 사용 지침이 함께 작동하는 지식의 도구였다.

케임브리지대학교의 천문학사 자료는 여러 시대의 천문표와 사용 지침을 소개한다. 표는 매번 긴 계산을 처음부터 반복하지 않고 필요한 값을 찾게 해 준다. 그러나 숫자만 있으면 모든 독자가 곧바로 사용할 수 있는 것은 아니다. 기준 날짜와 장소와 열의 뜻을 알아야 한다.

관측한 값을 그대로 모은 표와 이론적 모형으로 계산한 표도 구별한다. 어떤 표는 두 성격을 함께 가질 수 있다. 관측을 바탕으로 모형의 상수를 정한 뒤 많은 날짜의 위치를 계산하는 식이다. 값의 생성 경로를 알면 오차를 해석하는 방법도 달라진다.

이 장의 천체 위치는 실제 하늘을 예측하는 자료가 아니라 계산 원리를 보이기 위한 가상 값이다. 실제 항해나 관측에 사용할 수 있는 천문력이 아니다. 역사적 표의 역할을 이해한 뒤 보간과 주기와 각도 표기의 기초를 직접 계산해 본다.



천문표가 만들어지고 이용되는 한 가지 개념적 흐름.

탐구

숫자가 촘촘한 표라면 모든 값이 직접 관측된 것이라고 볼 수 있는가?

풀이와 확인

그럴 수 없다. 모형으로 계산하거나 관측 사이를 보간한 값일 수 있다. 표의 작성 방법과 사용 지침을 확인해야 한다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

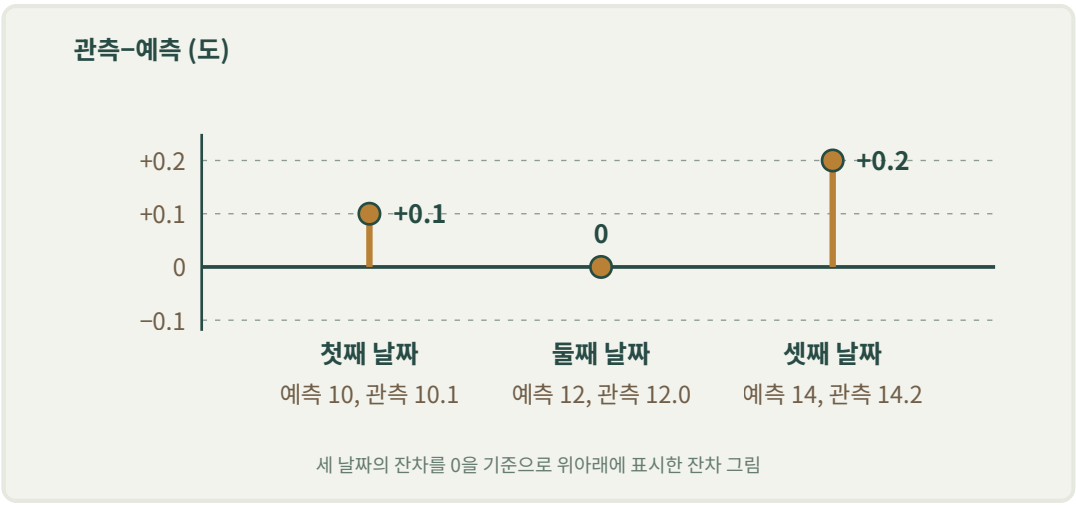
관측과 모형 사이의 차이

예측값에서 관측값이 얼마나 벗어나는지 기록하면 모형을 점검할 수 있다.

가상 관측에서 세 날짜의 위치가 10.1도와 12.0도와 14.2도라고 하자. 모형은 각각 10도와 12도와 14도를 예측한다. 관측에서 예측을 빼면 잔차는 0.1도와 0도와 0.2도다. 잔차의 방향과 크기를 보면 차이가 어떻게 나타나는지 살필 수 있다.

한 잔차가 크다고 곧바로 모형 전체가 틀렸다고 결론 내리지는 않는다. 관측 기구와 시간 기록과 계산 과정에도 오차가 있을 수 있다. 여러 시점의 잔차가 일정한 방향으로 커지는지 또는 무작위처럼 흩어지는지 비교해야 원인을 검토할 수 있다.

반대로 몇 값이 잘 맞는다고 모형이 모든 시점에서 정확하다고 보장할 수 없다. 맞추는 데 사용한 자료와 별도 검증 자료를 구분하면 예측력을 더 잘 평가할 수 있다. 이 학습 모형은 역사적 특정 천문가의 실제 관측값을 재현한 것이 아니다.



세 날짜의 잔차를 0을 기준으로 위아래에 표시한 잔차 그림

탐구

예측 23.4도에 관측 23.1도가 대응한다면 관측−예측 잔차는 얼마인가?

풀이와 확인

−0.3도다. 관측값이 예측값보다 작다는 방향을 음수로 나타낸다. 오차의 크기만 말하면 0.3도다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

도와 분과 초의 자리

각도의 분과 초는 시간의 분과 초와 이름이 같아도 다른 양을 잰다.

각도 1도는 60각분이며 1각분은 60각초다. 12도 30각분은 12.5도다. 여기의 분은 시간 1분이 아니라 각도를 나눈 단위다. 천문 자료에서 같은 기호가 비슷하게 보이므로 표의 열 제목에 각도인지 시간인지 표시해야 한다.

23도 48각분과 2도 35각분을 더하면 각분은 83이 된다. 60각분을 1도로 올려 전체는 26도 23각분이다. 받아올림은 60진 묶음 원리지만 전체 각도는 같은 한 방향의 회전량을 나타낸다. 덧셈 과정에서 단위 이름을 유지한다.

소수 도와 도분초 표기를 섞으면 작은 오류가 생길 수 있다. 12.30도는 12도 30각분이 아니라 12도 18각분이다. 소수 부분 0.30에 60을 곱해야 각분으로 바뀐다. 표기 형태를 먼저 확인한 다음 계산한다.

$$23°48′ + 2°35′$$

$$83′ = 1°23′$$

$$\text{합계} = 26°23′$$

각분 60개를 1도로 올린다. 시간의 분과 구별한다.

탐구

15도 24각분을 소수 도로 바꾸어 보자.

풀이와 확인

24/60=0.4이므로 15.4도다. 15.24도라고 숫자를 붙여 쓰면 다른 각도가 된다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

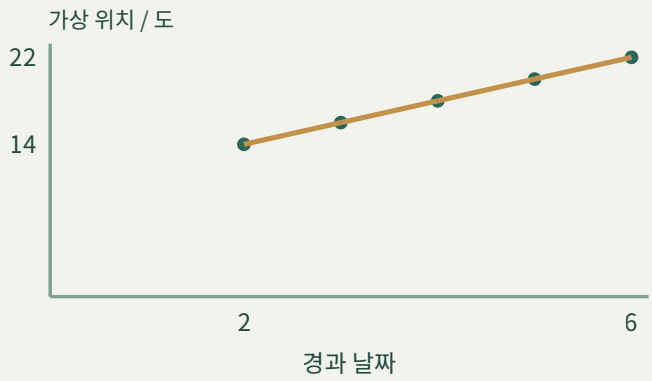
표에 없는 날짜의 값을 구하기

두 값 사이의 변화가 일정하다고 가정하면 중간 값을 비례로 구할 수 있다.

가상 표에서 2일의 위치가 14도이고 6일의 위치가 22도라고 하자. 4일 동안 8도 변했으므로 하루 평균 변화량은 2도다. 3일은 시작에서 하루 뒤이므로 위치를 16도로 추정한다. 이 방법을 선형 보간이라고 한다.

4일처럼 정확히 가운데 시점이면 두 값의 평균 18도를 쓰면 된다. 그러나 3일은 가운데가 아니므로 단순 평균을 쓰면 틀린다. 전체 시간 간격 중 어느 비율만큼 이동했는지 먼저 구하고 같은 비율을 위치 변화에 적용한다.

보간값은 두 표 값 사이를 직선으로 연결한다는 가정에 따른 것이다. 실제 천체의 움직임이 그 구간에서 정확히 일정하다는 뜻은 아니다. 표의 간격과 필요한 정밀도에 따라 보간 오차가 달라질 수 있으므로 결과를 근삿값으로 표시한다.



2일과 6일 사이를 일정한 변화율로 연결한 선형 보간.

탐구

2일 14도와 6일 22도 사이에서 5일의 보간값은 얼마인가?

풀이와 확인

시작에서 3일 지났으므로 전체 4일의 3/4만큼이다. 14+8×3/4=20도로 추정한다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

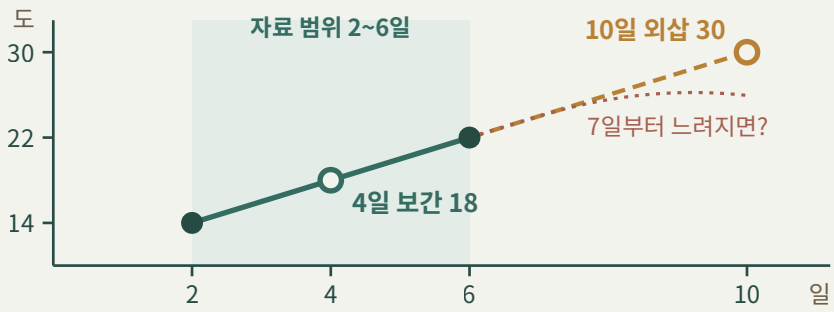
보간과 외삽을 구별하기

주어진 구간 안을 메우는 일과 구간 밖으로 뻗는 일은 다르다.

2일 14도와 6일 22도의 자료로 4일을 구하면 보간이다. 같은 직선 규칙을 10일까지 늘여 30도라고 추정하면 외삽이다. 두 계산은 같은 변화율을 쓰지만 자료가 직접 둘러싸는 범위 안인지 밖인지가 다르다. 표의 이용 범위를 알아야 결과의 성격을 이해할 수 있다.

구간 밖에서는 변화율이 달라질 가능성을 더 주의 깊게 검토해야 한다. 가상 대상이 7일부터 속도를 줄인다면 10일의 실제 값은 30도와 다를 수 있다. 짧은 구간에 잘 맞는 직선이 긴 시간에도 유지된다는 보장은 없다.

역사적 천문표의 사용 지침에는 기준 시점과 적용법이 중요하게 등장한다. 독자는 숫자만 추출하지 말고 어떤 조건 아래 값을 구하도록 했는지 함께 읽어야 한다. 이 장의 선형 예제는 표를 사용하는 기본 원리를 설명하는 현대 학습 모형이다.



2~6일 안의 4일은 보간이고 범위 밖의 10일은 외삽이다.

탐구

0일과 5일의 자료만 있을 때 3일과 8일의 추정은 각각 무엇인가?

풀이와 확인

3일은 주어진 구간 안이므로 보간이다. 8일은 구간 밖이므로 외삽이다. 같은 식을 사용해도 근거가 놓인 범위는 다르다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

한 바퀴를 넘는 각도

회전 위치를 비교할 때에는 360도마다 같은 방향으로 돌아온다는 점을 반영한다.

가상 표의 연속한 두 위치가 358도와 2도라고 하자. 짧은 방향으로 앞으로 움직였다고 가정하면 변화는 −356도가 아니라 +4도다. 두 번째 값을 362도로 풀어 생각한 뒤 차이를 계산하면 회전의 연속성이 드러난다.

중간 위치를 구할 때 두 수를 그대로 평균하면 180도라는 반대 방향을 얻는다. 358과 362의 평균은 360도이며 이를 한 바퀴 안으로 줄이면 0도다. 원형 자료에서는 수직선의 계산을 그대로 적용하기 전에 경계를 어떻게 넘었는지 판단해야 한다.

물론 실제 움직임이 짧은 방향이었다는 가정도 정보다. 오랜 시간 간격이라면 여러 바퀴 돌았을 가능성이 있다. 관측 간격과 운동 모형을 함께 알아야 각도 차이의 올바른 해석을 선택할 수 있다. 이 예제는 한 번의 짧은 전진 이동을 가정한다.

358° → 362°로 풀어 읽기
중간값 = 360°
한 바퀴 안의 방향 = 0°

짧은 전진 이동을 가정하면 358도와 2도의 중간 방향은 0도다.

탐구

359도에서 다음 날 3도로 전진했다고 할 때 하루 변화와 중간 위치는 얼마인가?

풀이와 확인

다음 값을 363도로 보면 변화는 4도다. 중간은 361도이므로 한 바퀴 안에서는 1도다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

주기의 나머지로 날짜 맞추기

반복되는 상태는 전체 경과량을 주기로 나눈 나머지로 찾을 수 있다.

가상의 천체 모형이 12일마다 같은 상태로 돌아온다고 하자. 시작에서 41일 뒤는 12×3일과 5일이 지난 상태다. 따라서 한 주기 안의 5일째와 같은 위치에 대응한다. 전체 날짜와 주기 안의 날짜를 구별하면 표를 여러 번 재사용할 수 있다.

두 모형의 주기가 12일과 18일이면 둘이 동시에 처음 상태로 돌아오는 가장 이른 양의 시간은 최소공배수 36일이다. 그러나 실제 천체의 주기는 정확한 정수 날짜가 아닐 수 있다. 이 계산은 반복과 나머지의 원리를 설명하기 위한 이상화된 모형이다.

정수 주기로 근사한 표를 오래 반복하면 작은 주기 오차가 누적될 수 있다. 한 주기마다 0.1일이 어긋난다면 20주기 뒤에는 2일 차이가 난다. 짧은 기간의 편리함과 긴 기간의 정확도를 함께 검토해야 표의 한계를 이해할 수 있다.

$$41 = 12 \times 3 + 5$$

$$\text{주기 안의 상태} = 5\text{일째}$$

$$12\text{와 }18\text{의 최소공배수} = 36$$

이상화한 정수 주기 모형에서 나머지와 동시 반복을 구한다.

탐구

주기 8일인 모형에서 59일 뒤는 주기 안의 몇 일째인가?

풀이와 확인

59=8×7+3이므로 3일째다. 시작 상태를 0일째로 정했다는 약속을 함께 사용한다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

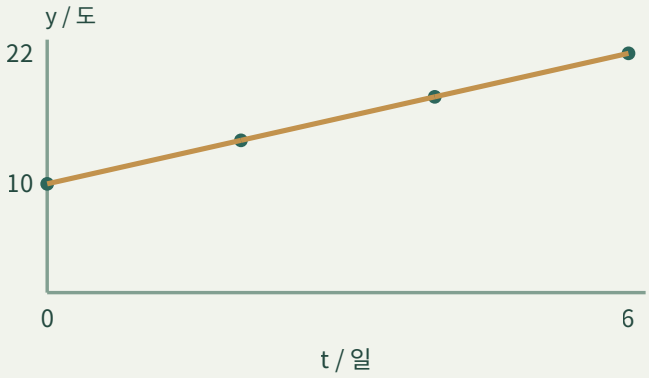
표를 다시 만드는 독자의 실험

입력과 출력과 가정을 적으면 작은 표도 검증 가능한 모형이 된다.

가상 위치를 y=10+2t로 정하고 t가 0과 2와 4와 6일일 때의 표를 만들어 보자. 값은 10도와 14도와 18도와 22도다. 이 표는 직접 관측값이 아니라 정의한 직선 모형의 계산값이다. 같은 표라도 생성 방식을 밝히면 독자가 정확히 이해할 수 있다.

이제 표의 한 칸을 18이 아니라 19로 바꾸어 보자. 이웃한 차이가 4와 5와 3으로 바뀌어 일정한 변화율이 깨진다. 계산 규칙을 알고 있다면 오류를 찾기 쉽다. 실제 자료에서는 일정한 변화가 원래 가정인지 먼저 확인해야 하므로 모든 차이를 실수로 고치지 않는다.

완성한 표 아래에는 시간 기준과 각도 단위와 적용 범위와 보간 규칙을 적는다. 표를 다른 언어로 옮길 때에도 이 설명을 함께 전달해야 한다. 숫자와 사용법이 함께 이동할 때 계산 지식은 새로운 독자에게 실제로 작동하는 도구가 된다.



가상 직선 모형 y=10+2t의 계산값

탐구

위 모형의 3일 위치를 직접 계산한 값과 2일 및 4일 사이 보간값을 비교하자.

풀이와 확인

직접 계산은 10+2×3=16도다. 14도와 18도의 중간도 16도다. 모형 자체가 직선이므로 이 경우 보간이 정확히 일치한다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료 / [SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표

지식의 길 / 101

지도를 읽는 수학

축척은 같은 단위를 비교합니다

지도 위의 짧은 선을 실제 거리로 옮겨 봅니다.

축척 1:50000인 지도에서 1cm는 실제 50000cm에 대응합니다. 미터로 바꾸면 500m입니다. 지도에서 두 점 사이를 3.6cm로 재었다면 실제 평면 거리는 1.8km가 됩니다. 지도 거리와 실제 거리를 비로 비교하기 전에 같은 단위로 맞추어야 합니다. cm와 km를 그대로 나누면 숫자는 작아 보여도 축척의 뜻이 달라집니다.

이 계산은 지도에서 사용한 축척이 해당 구간에 적용된다는 가정 아래 이루어집니다. 넓은 지역을 평면에 나타낸 지도에서는 위치와 방향에 따라 축척이 달라질 수 있습니다. 산길의 실제 이동 거리도 지도에서 두 점을 직선으로 이은 거리보다 길 수 있습니다. 축척 계산으로 얻은 값이 무엇의 거리인지 설명해야 결과를 오해하지 않습니다.

$$1\text{cm} \leftrightarrow 50000\text{cm}=500\text{m}$$
$$3.6\text{cm} \leftrightarrow 1800\text{m}=1.8\text{km}$$
$$7.2\text{cm} \leftrightarrow 3.6\text{km}$$

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

같은 지도에서 7.2cm로 잰 선의 거리는 몇 km인가요?

풀이와 확인

7.2×500m=3600m이므로 3.6km입니다. 지도 길이가 두 배가 되면 같은 축척 아래 실제 거리도 두 배가 됩니다. 단위 환산을 마지막까지 적어 계산을 확인합니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

확대 인쇄하면 축척도 바뀝니다

지도 그림을 키워도 실제 땅은 커지지 않습니다.

축척 1:50000 지도를 가로와 세로 모두 두 배로 확대 인쇄하면 원래 1cm였던 선이 2cm가 됩니다. 실제 거리는 여전히 500m이므로 새 지도에서 1cm는 250m입니다. 새 축척은 1:25000입니다. 지도 파일에 적힌 숫자 축척이 이미지와 함께 확대되어 보이더라도 그 숫자의 내용은 저절로 바뀌지 않습니다.

반면 그림으로 그린 막대 축척은 지도와 같은 비율로 확대되면 실제 거리 표시와의 대응을 유지할 수 있습니다. 확대 후 길이를 재어야 하는 자료에서는 어떤 종류의 축척이 있는지 살펴보는 것이 좋습니다. 가로와 세로를 서로 다른 비율로 늘렸다면 단일한 축척 하나로 모든 방향을 설명할 수도 없습니다. 이미지 편집의 작은 선택이 지리적 해석을 바꿉니다.

인쇄 크기	축척
원래	1:50000
길이 두 배	1:25000
길이 절반	1:100000

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

1:80000 지도를 길이 기준 80퍼센트로 축소하면 새 축척은 무엇인가요?

풀이와 확인

지도 1cm에 해당하던 실제 거리가 축소 후 0.8cm에 대응합니다. 따라서 새 1cm는 100000cm에 해당하여 축척은 1:100000입니다. 축소할수록 분모가 커집니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

지도 면적의 배수는 다릅니다

길이의 축척을 두 번 곱해야 넓이가 됩니다.

축척 1:10000에서 지도 위 1cm는 실제 100m입니다. 지도에서 가로 3cm와 세로 2cm인 직사각형은 실제 가로 300m와 세로 200m를 나타냅니다. 넓이는 60000m^{2}입니다. 지도 넓이 6cm^{2}에 길이 배수 10000만 곱하면 잘못된 답을 얻습니다. 가로와 세로가 각각 확대되므로 넓이 배수는 길이 배수의 제곱입니다.

면적 단위까지 함께 환산하면 결과를 점검하기 쉽습니다. 60000m²는 6ha입니다. 지도에서 1cm²가 실제 10000m²에 대응하므로 6cm²가 6ha라는 같은 답을 얻습니다. 이 값은 지도에서 영역을 직사각형으로 근사한 결과일 수 있습니다. 경계가 휘어 있거나 투영에 따른 넓이 왜곡이 있으면 별도의 보정이나 더 자세한 측정이 필요합니다.



현대 재구성: 크기가 아니라 대응하는 단위를 비교하는 도식

탐구

같은 지도에서 넓이가 2.5cm²인 영역은 이 모형에서 몇 ha인가요?

풀이와 확인

1cm²가 1ha이므로 2.5ha입니다. 실제 단위로는 25000m²입니다. 길이와 넓이에 적용되는 배수를 구분하면 단위가 달라도 같은 결과를 얻습니다.

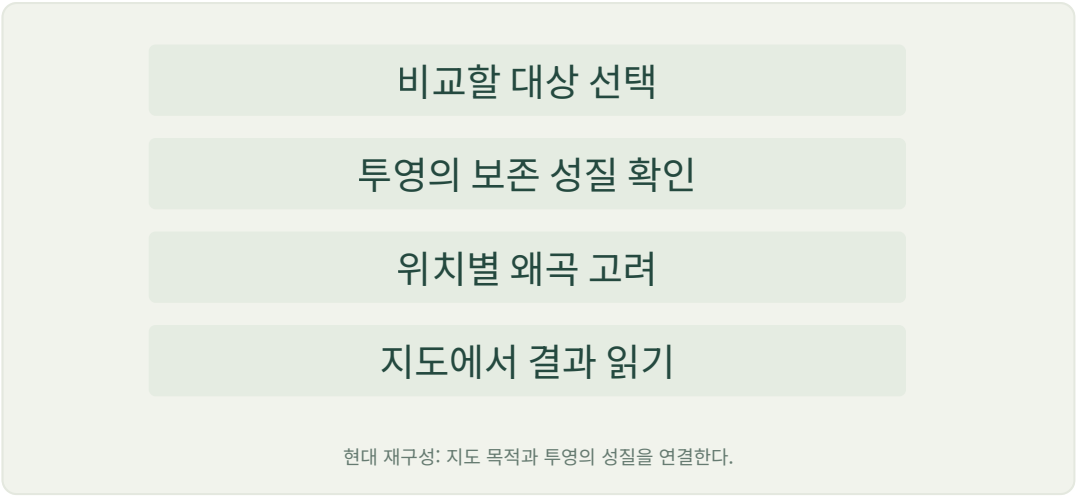
[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

둥근 지구를 펼치는 선택

지도 투영은 보존할 성질을 선택합니다.

구면을 평면으로 옮길 때 모든 거리와 넓이와 각을 동시에 완벽하게 유지할 수는 없습니다. 어떤 지도는 작은 영역의 각을 보존하는 데 유리하고 어떤 지도는 넓이의 비를 보존하는 데 목적을 둡니다. 지도의 모양이 낯설다고 잘못된 지도라고 판단하기보다 무엇을 비교하기 위해 만들어졌는지 살펴야 합니다.

미국 의회도서관은 지도 제작자 존 스나이더의 수학 자료와 프로그램을 보존하고 해석한 사례를 소개합니다. 위성 자료를 지도에 옮기는 과정에도 투영의 수학이 들어갑니다. 이 사실은 지도라는 결과물 뒤에 계산 방법과 입력 자료와 도구가 있음을 보여 줍니다. 단순한 그림으로 보이는 지도를 읽을 때에도 제작 조건을 질문할 수 있습니다.



현대 재구성: 지도 목적과 투영의 성질을 연결한다.

탐구

두 지역의 넓이를 비교하려는데 지도 한쪽이 크게 늘어나 보인다면 무엇을 확인해야 하나요?

풀이와 확인

사용한 투영이 넓이를 보존하는지 확인해야 합니다. 화면에서 픽셀 면적을 재는 것만으로 실제 땅의 넓이 비를 알 수는 없습니다. 지도 설명과 축척의 적용 범위를 함께 읽습니다.

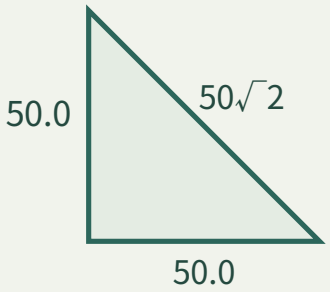
[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

강 건너 점을 재는 삼각형

직접 가지 못해도 각과 기준선으로 거리를 구합니다.

평평한 땅의 두 관측점 A와 B가 100m 떨어져 있다고 합시다. 강 건너 목표점 C를 바라본 두 밑각이 각각 45°라면 삼각형은 이등변직각삼각형입니다. C에서 기준선 AB로 내린 높이는 밑변을 50m씩 나누며 높이도 50m가 됩니다. 직접 강을 건너지 않고 기준선과 각의 관계로 수직 거리를 구한 현대적 측량 예제입니다.

측량에서는 기준선 길이가 정확해야 하고 두 관측이 같은 목표점을 향해야 합니다. 지면이 수평이 아니면 수평 거리와 경사 거리를 구별해야 합니다. 각을 재었다는 사실만으로 모든 조건이 충족되는 것은 아닙니다. 삼각형 그림에 어떤 값이 측정값이고 어떤 값이 계산값인지 표시하면 오차가 어디서 들어올 수 있는지 이해하기 쉽습니다.



현대 재구성: 기준선을 반으로 나누어 만든 직각삼각형

탐구

기준선이 160m이고 두 밑각이 같은 45°이면 목표점의 수직 거리는 얼마인가요?

풀이와 확인

기준선의 절반이 80m이고 생긴 직각삼각형의 두 예각이 45°이므로 높이도 80m입니다. 기준선을 늘린 비율만큼 닮은 삼각형의 모든 길이가 늘어납니다.

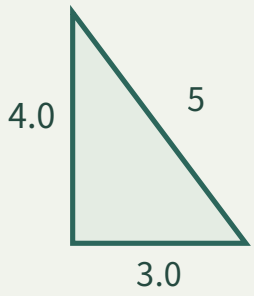
[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

직선 거리와 길의 거리

지도에서 가까워 보여도 돌아가는 길이 필요합니다.

격자형 도로에서 목적지가 동쪽 세 블록과 북쪽 네 블록 떨어져 있다고 합시다. 각 블록의 길이가 같고 대각선 길이 없다면 최단 이동 거리는 일곱 블록입니다. 두 점 사이의 직선 거리는 $\sqrt{(3^2+4^2)}=5$블록입니다. 두 값은 서로 틀린 답이 아니라 서로 다른 이동 조건을 나타냅니다.

길의 거리를 계산하려면 통과할 수 있는 도로를 먼저 정해야 합니다. 강이나 폐쇄된 길이 있으면 돌아가야 하고 일방통행이면 방향도 중요합니다. 지도의 선은 거리뿐 아니라 이동 가능성의 조건을 담습니다. 실제 여행 기록의 속도를 비교할 때에도 직선 거리를 이동 시간으로 나눈 값만으로 이동자의 능력을 판단하지 않습니다. 경로의 형태와 정지 시간을 함께 살펴야 합니다.



현대 재구성: 직선 5와 격자 경로 3+4를 비교한다.

탐구

동쪽 여섯 블록과 북쪽 여덟 블록 떨어진 곳의 직선 거리와 격자 최단 거리는 얼마인가요?

풀이와 확인

직선 거리는 √(36+64)=10블록이고 격자 최단 거리는 14블록입니다. 두 경우 모두 앞 예제의 두 배입니다. 이동 경로의 허용 조건을 답과 함께 적습니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

지도 설명을 완성하는 활동

숫자의 답과 모형의 한계를 한 장에 기록합니다.

축척 1:25000 지도에서 길을 따라 잰 거리가 8cm라면 실제 경로는 약 2km입니다. 직선으로 잰 두 점 사이는 6cm라서 1.5km입니다. 시속 4km로 쉬지 않고 걸으면 길을 따른 이동 시간은 반 시간입니다. 이 세 결과를 한 표에 적으면 지도 거리와 실제 경로와 이동 시간이 어떻게 연결되는지 보입니다.

마지막에는 이 계산의 가정을 적습니다. 지도 확대가 없고 축척이 해당 구간에 적용되며 경로를 따라 잰 길이가 정확하고 속도가 일정하다고 보았습니다. 실제 경사는 별도로 반영하지 않았습니다. 계산을 많이 했다는 사실보다 어떤 질문에 답했고 어떤 조건은 남겨 두었는지 분명히 쓰는 것이 좋은 지도 해설입니다.

양	값
지도 경로	8cm
실제 경로	2km
시속 3km의 시간	40분

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

같은 길을 시속 3km로 걸으면 예상 시간은 몇 분인가요?

풀이와 확인

2km÷3km/h=2/3시간이므로 40분입니다. 직선 거리 1.5km를 사용하면 30분으로 계산되어 실제로 따라갈 길을 빠뜨립니다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

지식의 길 / 102

인쇄된 숫자를 검산하기

같은 판본도 완전히 같지는 않습니다

인쇄된 부분과 손으로 더한 부분을 구별합니다.

미국 의회도서관의 구텐베르크 성서 해설은 인쇄 뒤에 구매자 측에서 붉은색과 푸른색을 더한 부분을 설명합니다. 책의 제작이 한 번의 인쇄로만 끝나지 않을 수 있음을 보여 주는 사례입니다. 한 판에서 나온 책이라도 채색과 메모와 수정 및 보존 상태에 차이가 생길 수 있습니다. 인쇄본이라는 말이 모든 개체의 완전한 동일성을 뜻하지는 않습니다.

수학 책에서도 본문 숫자와 손으로 고친 숫자를 구별해 읽어야 합니다. 36 위에 63이 덧써 있다면 원래의 활자와 수정 흔적을 모두 기록합니다. 어느 값이 계산에 맞는지는 문제 전체와 검산으로 판단합니다. 수정된 숫자를 아무 설명 없이 전사하면 후대 독자가 판본의 차이를 확인할 근거를 잃게 됩니다.

층위	읽힌 값
인쇄 본문	36
손글씨 수정	63
계산 검산	9×7=63

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

문제가 9×7인데 본문은 36이고 손글씨는 63이면 무엇을 기록해야 하나요?

풀이와 확인

인쇄된 값 36과 손으로 고친 값 63을 각각 기록하고 9×7=63이므로 수정값이 계산과 맞는다고 설명합니다. 누가 언제 고쳤는지는 별도의 자료가 없으면 단정하지 않습니다.

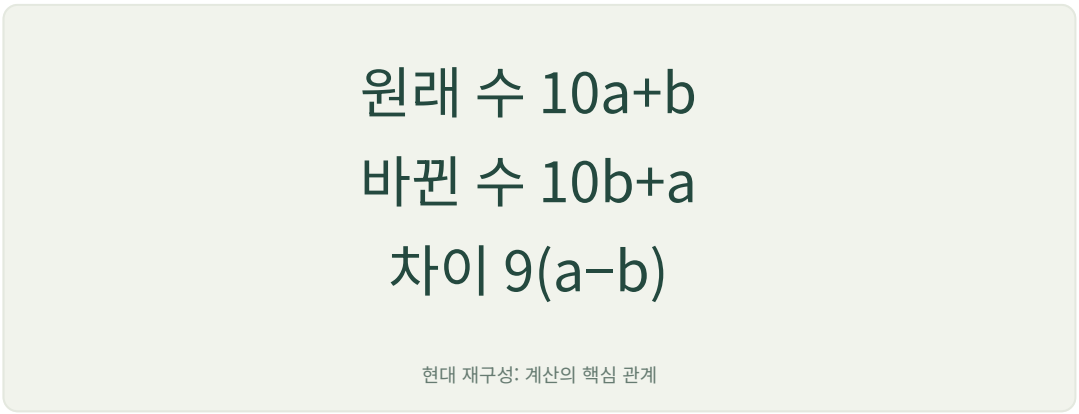
[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

숫자 두 자리가 바뀌면

전도 오류는 자리값의 차이로 설명할 수 있습니다.

두 자리 수 10a+b의 숫자 순서를 바꾸면 10b+a가 됩니다. 두 수의 차이는 9(a−b)입니다. 따라서 두 자리의 전도는 언제나 9의 배수만큼 수를 바꿉니다. 예를 들어 47과 74의 차이는 27입니다. 눈으로 비슷한 두 숫자가 자리만 바뀌었어도 결과의 크기는 상당히 달라질 수 있습니다.

떨어진 두 자리도 같은 방식으로 분석할 수 있습니다. 십의 자리와 일의 자리를 바꾸면 차이에 10−1=9가 붙고 백의 자리와 일의 자리를 바꾸면 100−1=99가 붙습니다. 일반적으로 자리값 10의 m제곱과 10의 n제곱의 차이에 두 숫자의 차를 곱합니다. 어떤 자리끼리 바뀌었는지에 따라 검산에서 보존되는 정보가 달라집니다. 이 관계는 오류의 크기를 설명하지만 실제 전사 과정에서 실수가 생긴 원인까지 알려 주지는 않습니다.



현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

58과 85의 차이를 공식으로 계산해 보세요.

풀이와 확인

9×(8−5)=27입니다. 큰 수에서 작은 수를 뺀 차이를 구했으므로 양수로 나타냈습니다. 원래 순서로 58−85를 계산하면 −27이며 부호가 방향을 나타냅니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

아홉의 나머지 검산

빠른 검사는 일부 정보를 버린다는 한계가 있습니다.

십진수에서 10은 9로 나누면 나머지가 1입니다. 따라서 어떤 수를 9로 나눈 나머지는 자리 숫자의 합을 9로 나눈 나머지와 같습니다. 347의 숫자 합은 14이므로 나머지는 5입니다. 347을 342와 5로 나누어 보아도 같은 결과가 나옵니다. 큰 수를 작은 나머지로 바꾸면 덧셈과 곱셈의 오류를 빠르게 점검할 수 있습니다.

하지만 347과 374의 숫자 합은 모두 14입니다. 순서를 바꾸는 오류는 이 검사에서 드러나지 않을 수 있습니다. 검사를 통과했다고 정답이 증명된 것은 아닙니다. 무엇을 검사하는지 이해하면 빠른 검산을 유용하게 쓰면서도 과신하지 않을 수 있습니다. 다른 계산 방식이나 원자료 대조가 함께 필요합니다.

기록	숫자 합	9의 나머지
492	15	6
429	15	6

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

123×4의 답을 492 대신 429로 적으면 아홉 검산이 오류를 찾을 수 있나요?

풀이와 확인

123의 나머지 6에 4를 곱하면 24의 나머지 6입니다. 492와 429는 모두 숫자 합이 15여서 나머지가 6입니다. 두 답을 구별하지 못하므로 이 오류는 통과합니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

열하나의 나머지는 순서를 봅니다

번갈아 더하고 빼면 다른 종류의 검사가 됩니다.

10은 11로 나누었을 때 −1과 같은 나머지 관계를 가지므로 자리값의 거듭제곱은 1과 −1이 번갈아 나타납니다. 오른쪽부터 숫자를 번갈아 더하고 빼면 원래 수의 11에 대한 나머지를 구할 수 있습니다. 492에서는 2−9+4=−3이므로 나머지는 8입니다. 429에서는 9−2+4=11이므로 나머지는 0입니다.

이 검사는 앞쪽의 아홉 검산이 구별하지 못한 두 수를 구별합니다. 그러나 모든 오류를 찾아내는 것은 아닙니다. 두 기록의 차이가 11의 배수라면 같은 나머지를 갖습니다. 서로 다른 검산을 결합하면 발견할 수 있는 오류의 범위가 넓어지지만 검사 결과를 정답 자체와 동일시해서는 안 됩니다.

$$123 \equiv 2 \pmod{11}$$

$$123 \times 4 \equiv 8$$

$$492 \equiv 8$$

$$429 \equiv 0$$

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

123×4의 올바른 나머지를 11 기준으로 계산해 보세요.

풀이와 확인

123의 나머지는 2입니다. 여기에 4를 곱하면 8이므로 답의 나머지는 8이어야 합니다. 492는 조건을 만족하고 429는 나머지 0이므로 오류로 걸러집니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

두 검사를 통과하는 오류

검사 항목을 늘려도 완전한 보장은 아닙니다.

아홉과 열하나의 나머지를 모두 검사한다고 합시다. 두 수의 차이가 99의 배수이면 두 검사에서 같은 결과를 얻습니다. 올바른 답 492에 99를 더한 591은 9 기준 나머지가 6이고 11 기준 나머지가 8로 모두 같습니다. 두 검사를 통과했지만 123×4의 정답은 아닙니다.

이 예는 검사 방식의 원리를 알고 반례를 설계하는 활동입니다. 실제 교정에서는 역연산이나 대략적인 크기 비교와 원자료 대조를 추가할 수 있습니다. 591÷4는 123이 아니므로 역연산으로 오류가 드러납니다. 검사 도구는 어떤 위험을 줄이는지와 어떤 오류를 남겨 두는지 함께 설명할 때 가장 유용합니다.

수	9의 나머지	11의 나머지
492	6	8
591	6	8
차이 99	0	0

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

492와 591의 차이가 두 나머지 검사를 피하는 까닭을 설명해 보세요.

풀이와 확인

차이 99는 9의 배수이면서 11의 배수입니다. 두 수를 각각 9 또는 11로 나누면 나머지가 같습니다. 검사에서 보존한 정보가 같아도 전체 수는 다를 수 있습니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

교정표에 남길 네 칸

읽힌 값과 제안과 근거를 구분합니다.

계산표의 한 행이 18×7=126이고 다음 판본에는 18×7=162라고 적혀 있다고 합시다. 교정표에는 위치와 원래 읽힌 값과 수정 제안과 이유를 나누어 적습니다. 이유에는 18×7=126이라는 계산과 두 판본의 차이를 함께 남깁니다. 수정 제안이 마음에 든다는 감상보다 독자가 확인할 수 있는 관계를 제시해야 합니다.

숫자 162가 틀렸더라도 그것이 단순한 자리 바꿈인지 다른 행에서 옮겨 온 숫자인지는 별개의 문제입니다. 오류를 바로잡는 판단과 오류의 발생 원인을 추정하는 판단을 섞지 않습니다. 교정된 책에서도 원문을 확인할 길을 남기면 나중에 더 좋은 자료가 발견되었을 때 수정 과정을 다시 검토할 수 있습니다.

위치	읽힌 값	제안	근거
계산표 2행	162	126	18×7
다른 문제	162	유지	18×9

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

문제 자체가 18×9였다면 교정 판단은 어떻게 달라지나요?

풀이와 확인

18×9=162이므로 162가 맞습니다. 답만 비교해서 어느 판본이 옳다고 결정할 수 없으며 문제의 숫자와 계산 과정까지 함께 대조해야 합니다.

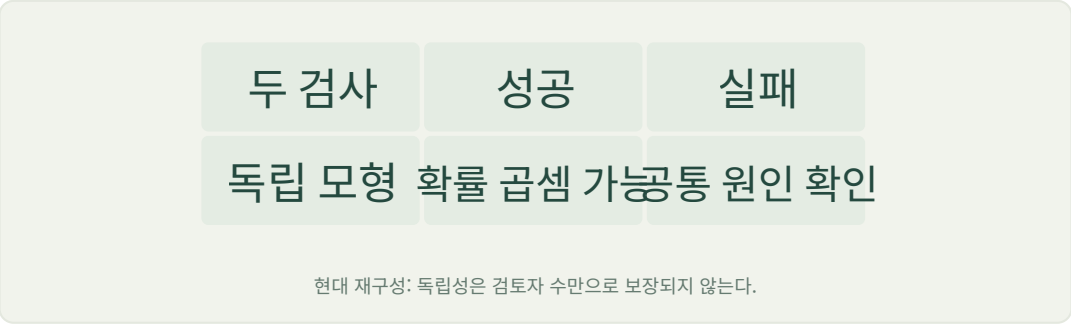
[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

두 사람이 읽어도 같은 실수를 할 수 있습니다

독립된 검토가 무엇인지 생각해 봅니다.

두 교정자가 같은 흐릿한 사진만 보고 숫자를 읽으면 둘 다 3을 8로 오해할 수 있습니다. 검토자가 둘이라는 사실만으로 오류가 완전히 독립적이라고 가정할 수는 없습니다. 첫 사람의 답을 보여 준 뒤 둘째 사람이 확인하는 방식도 같은 판단을 따라가게 만들 수 있습니다. 작업 절차가 어떤 공통 원인을 남기는지 살펴야 합니다.

가상 확률 모형에서 각자의 오류 확률이 0.1이고 오류가 독립이라면 둘 다 틀릴 확률은 0.01입니다. 하지만 같은 자료 결함 때문에 함께 틀리는 경우가 많으면 이 곱셈을 적용할 수 없습니다. 숫자로 품질을 평가할 때에는 독립성이라는 가정이 계산보다 먼저입니다. 별도의 자료나 다른 검산 방법을 활용하면 공통된 실수를 줄일 기회가 생깁니다.



현대 재구성: 독립성은 검토자 수만으로 보장되지 않는다.

탐구

오류 확률 0.2인 두 검사가 독립이라는 가정 아래 둘 다 놓칠 확률은 얼마인가요?

풀이와 확인

0.2×0.2=0.04입니다. 4퍼센트라는 값은 독립성 가정에 따른 모형 결과입니다. 실제 검토의 오류율을 측정하지 않았다면 현실의 정확도처럼 제시해서는 안 됩니다.

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text

지식의 길 / 103

대수 기호와 번역의 약속

등호도 역사를 가진 기호입니다

익숙한 모양이 처음부터 당연했던 것은 아닙니다.

세인트앤드루스대학교의 수학 기호 자료는 등호를 포함한 관계 기호의 사용과 변화를 살펴볼 수 있게 합니다. 로버트 레코드의 1557년 저술은 등호의 역사에서 자주 언급되지만 하나의 기호가 등장한 뒤 곧바로 모든 독자에게 통용된 것은 아닙니다. 서로 다른 표기가 함께 쓰이는 시기에는 같은 모양의 뜻과 다른 모양의 대응을 확인해야 합니다.

오늘의 등호는 양쪽이 같은 값을 나타낸다는 관계를 표현합니다. 3+4=7은 계산 결과를 보여주지만 7=3+4도 같은 관계입니다. 등호를 다음에 답이 나온다는 신호로만 읽으면 3+4=□+2 같은 식에서 혼동하기 쉽습니다. 기호의 역사와 현재의 정의를 함께 살피면 익숙한 표기를 다시 정확하게 읽을 수 있습니다.

$$3+4=7$$

$$7=3+4$$

$$3+4=5+2$$

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

3+4=□+2의 빈칸에는 어떤 수가 들어가나요?

풀이와 확인

왼쪽이 7이므로 오른쪽도 7이어야 합니다. 빈칸에는 5가 들어갑니다. 등호 양쪽의 값을 비교하면 계산을 왼쪽에서 오른쪽으로만 진행해야 한다는 오해를 피할 수 있습니다.

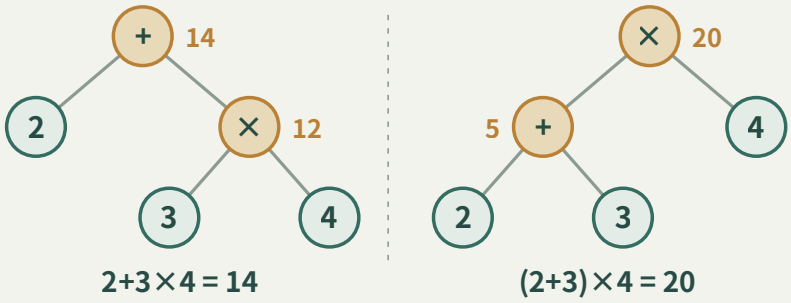
[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

괄호가 문장의 구조를 정합니다

같은 숫자도 묶는 방식에 따라 다른 계산이 됩니다.

2+3×4는 곱셈을 먼저 하여 14가 됩니다. (2+3)×4는 괄호 안을 먼저 계산하여 20이 됩니다. 두 식에는 같은 숫자와 같은 연산이 있지만 구조가 다릅니다. 기호를 번역할 때 글자만 바꾸고 묶음의 관계를 놓치면 원래 문제와 다른 식을 만들 수 있습니다. 문장에서는 무엇의 합을 몇 배 하는지 분명히 적어야 합니다.

긴 분수선도 분자와 분모를 묶는 역할을 합니다. (a+b)/c를 a+b/c처럼 적으면 일반적으로 다른 값이 됩니다. 짧게 줄인 표기가 독자에게 같은 묶음을 전달하는지 확인해야 합니다. 문서를 옮기거나 화면에 표시할 때 줄바꿈이 식의 구조를 흐리게 만들 수 있으므로 괄호와 분수선의 범위를 함께 검토합니다.



식을 나무로 그리면 먼저 계산하는 묶음이 아래쪽 가지에 놓인다.

탐구

a=6과 b=2와 c=4일 때 (a+b)/c와 a+b/c를 비교해 보세요.

풀이와 확인

첫 식은 8/4=2이고 둘째 식은 6+0.5=6.5입니다. 같은 문자와 연산 기호를 사용했지만 나눗셈이 적용되는 범위가 달라 결과가 다릅니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

문자에는 정의가 먼저 필요합니다

x가 무엇인지에 따라 같은 식의 뜻이 달라집니다.

식 2x+3=15에서 x가 물건 개수인지 길이인지 가격인지 정하지 않으면 계산은 가능해도 답의 해석이 비어 있습니다. 물건 두 묶음에 낱개 세 개를 더하여 열다섯 개라면 x는 한 묶음의 개수로 6개입니다. 길이 문제라면 3과 15도 같은 길이 단위를 가져야 두 항을 합칠 수 있습니다.

문자를 정수로 제한하는지 실수로 허용하는지도 적어야 합니다. x/2=3.5는 실수 범위에서는 x=7이며 개수를 뜻하는 정수로도 해석할 수 있습니다. 하지만 2x=7이면 정수 개수 조건에서는 해가 없습니다. 문자 정의는 단순한 도입 문장이 아니라 어떤 답을 허용할지 정하는 수학적 조건입니다.

문자의 뜻	허용 범위	2x=7
실수 값	실수	x=3.5
상자 개수	0 이상의 정수	해 없음

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

2x=7에서 x가 자를 수 없는 상자의 개수라면 x=3.5를 답으로 제시해도 되나요?

풀이와 확인

정수 개수만 허용한다면 조건을 만족하는 해가 없다고 해야 합니다. 3.5는 실수식의 해지만 상황에서 허용한 대상은 아닙니다. 계산 결과와 문제의 범위를 다시 연결해야 합니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

양쪽을 나누기 전에

0일 수 있는 식으로 나누면 해가 사라집니다.

x(x−3)=0에서 양쪽을 x로 나누어 x−3=0이라고 쓰면 x=3만 남습니다. 그러나 원래 식은 x=0도 만족합니다. x가 0이 아니라는 조건을 확인하지 않고 나누었기 때문에 해를 잃었습니다. 올바른 풀이는 두 인수 중 하나가 0임을 이용해 x=0 또는 x=3이라고 쓰는 것입니다.

등가 변형은 허용한 범위 안에서 해의 집합을 보존하는 변화입니다. 식의 모양을 단순하게 만든다고 언제나 등가인 것은 아닙니다. 나누는 식이 0이 될 가능성이 있으면 그 경우를 따로 분리합니다. 역사적 풀이를 현대적으로 정리할 때도 원문이 양의 길이만 다루었는지와 0을 허용했는지 확인해야 같은 해 집합을 비교할 수 있습니다.

$$x(x-3)=0$$

해: $x=0$ 또는 $x=3$

x로 나누려면 $x \neq 0$ 조건 필요

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

$(x-2)(x+5)=0$을 $x-2$로 나누면 어떤 해를 놓치나요?

풀이와 확인

$x=2$를 놓칩니다. 원래 식의 해는 2와 −5입니다. $x-2$가 0이 아닌 경우에만 나누면 −5를 얻고 빠진 경우 $x=2$를 따로 확인해야 합니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

제곱하면 새 후보가 생길 수 있습니다

식의 변형 뒤에는 원래 조건으로 돌아갑니다.

$\sqrt{x}=-2$라는 식은 실수에서 해가 없습니다. 제곱근 기호는 0 이상의 값을 나타내기 때문입니다. 그런데 양쪽을 제곱하면 $x=4$가 나옵니다. 4를 원래 식에 넣으면 $2=-2$가 되어 맞지 않습니다. 제곱하는 변형은 부호 정보를 잃을 수 있으므로 변형된 식의 해가 모두 원래 식의 해인 것은 아닙니다.

복잡한 식을 풀 때 제곱은 유용하지만 그 뒤에 원래 식과 정의역을 확인해야 합니다. 식을 간단히 만든 결과를 후보 목록으로 보고 검증을 거쳐 최종 해를 정하면 안전합니다. 번역된 해설에서 검산 단계가 생략되어 있다면 어떤 조건이 앞에서 이미 주어졌는지 살펴야 합니다. 생략을 그대로 따라가기보다 논리의 연결을 복원합니다.

원래 식	제곱한 후보	검산
$\sqrt{x}=-2$	$x=4$	불성립
$\sqrt{(x+1)}=3$	$x=8$	성립

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

$\sqrt{(x+1)}=3$을 제곱하여 얻은 $x=8$은 원래 식을 만족하나요?

풀이와 확인

$\sqrt{9}=3$이므로 만족합니다. $x+1$이 0 이상이라는 정의역 조건도 만족합니다. 앞의 예와 달리 양쪽이 같은 양의 값이어서 후보가 실제 해로 남습니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

짧은 기호가 숨긴 긴 덧셈

압축된 표기는 범위와 규칙을 함께 담아야 합니다.

1+2+3+4+5를 합 기호로 줄여 쓸 수 있지만 어떤 값에서 시작하고 어디에서 끝나는지 정해야 합니다. 이 페이지에서는 합의 항을 먼저 펼쳐 읽는 방식으로 뜻을 확인합니다. 항이 n이라면 시작점을 1에서 0으로 바꾸어도 0만 더하므로 합은 같습니다. 그러나 항이 n+1이면 새로 더한 항은 1이어서 합이 달라집니다. 압축은 규칙을 이해한 독자에게 편리한 표현입니다.

등차수열 2와 5와 8과 11의 합은 26입니다. 첫 항 2와 간격 3과 항수 4를 알면 전체를 재현할 수 있습니다. 마지막 항 11만 보고 항수를 추정하면 시작점이나 간격이 달라질 수 있어 답이 정해지지 않습니다. 기호를 짧게 만들수록 빠진 정의를 본문이나 범례에 정확히 남겨야 합니다.

항 번호	1	2	3	4	5
값	3	7	11	15	19

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

첫 항이 3이고 간격이 4이며 항수가 5인 수열을 펼쳐 합을 구해 보세요.

풀이와 확인

3과 7과 11과 15와 19이며 합은 55입니다. 양 끝의 합 22가 두 쌍이고 가운데 11이 남으므로 44+11=55로 검산할 수 있습니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

번역 검토표를 만들어 봅니다

말과 기호와 조건이 같은 문제를 가리켜야 합니다.

어떤 수에서 4를 뺀 값의 두 배가 18이라는 문장을 번역한다고 합시다. 올바른 식은 2(x−4)=18입니다. 2x−4=18로 쓰면 두 배 하는 범위가 달라집니다. 첫 식의 해는 13이고 둘째 식의 해는 11입니다. 원래 문장에 각각 넣어 보면 차이가 분명해집니다.

검토표에는 문장의 묶음과 문자 정의와 허용 범위와 검산을 적습니다. 여러 언어 사이의 번역에서도 표의 역할은 같습니다. 번역문이 자연스럽게 읽히는지와 수학적 관계가 유지되는지는 둘 다 필요합니다. 좋은 문장은 정확한 조건을 보존하면서도 독자가 불필요하게 되읽지 않도록 주어와 계산 대상을 분명하게 연결합니다.

문장의 순서	식	해
먼저 4를 뺀 뒤 두 배	2(x−4)=18	13
먼저 두 배 한 뒤 4를 뺌	2x−4=18	11

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

어떤 수의 두 배에서 4를 빼면 18이라는 문장은 어떤 식이며 답은 무엇인가요?

풀이와 확인

2x−4=18이므로 x=11입니다. 11의 두 배 22에서 4를 빼면 18입니다. 원래 수에서 먼저 4를 빼는 앞 문장과 연산 순서가 다릅니다.

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation

지식의 길 / 104

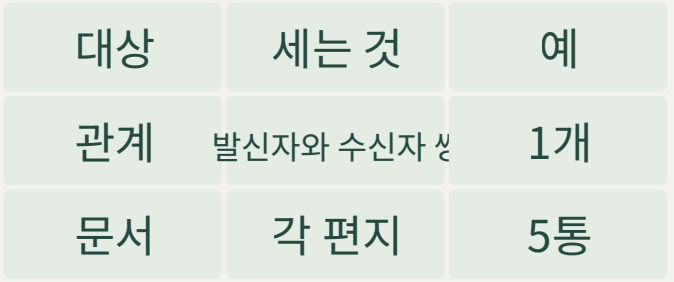
편지와 학술 교류의 기록

편지 모음은 무엇을 보여 줄까요

정리 목록은 원자료에 다가가는 안내입니다.

미국 의회도서관의 오즈월드 베블런 문서군 안내에는 서신과 일기와 저술 초고 및 강의 노트 등이 포함되어 있습니다. 일반 서신 묶음의 연대는 1902년부터 1960년까지로 제시됩니다. 이러한 자료는 완성된 논문만으로는 보이지 않는 질문과 협력 및 학술 활동의 조건을 살펴볼 출발점입니다. 다만 목록에 이름이 있다는 사실만으로 편지의 구체적인 내용을 읽었다고 말할 수는 없습니다.

이 장의 수치 예제는 그 문서군의 실제 통계를 계산한 결과가 아닙니다. 편지 자료를 정리하는 방법을 익히기 위해 별도의 가상 기록을 사용합니다. 발신자와 수신자와 날짜 및 문서 식별번호를 나누어 적으면 사람 사이의 관계와 개별 편지를 구별할 수 있습니다. 자료 안내와 실제 편지와 분석 결과는 서로 다른 층위입니다.



현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

한 사람이 다른 사람에게 보낸 편지가 다섯 통이면 사람 사이 연결은 몇 개이며 문서는 몇 개인가요?

풀이와 확인

방향을 가진 관계는 한 개이고 문서는 다섯 개입니다. 관계 수와 편지 수를 혼동하지 않아야 교류의 범위와 빈도를 따로 분석할 수 있습니다.

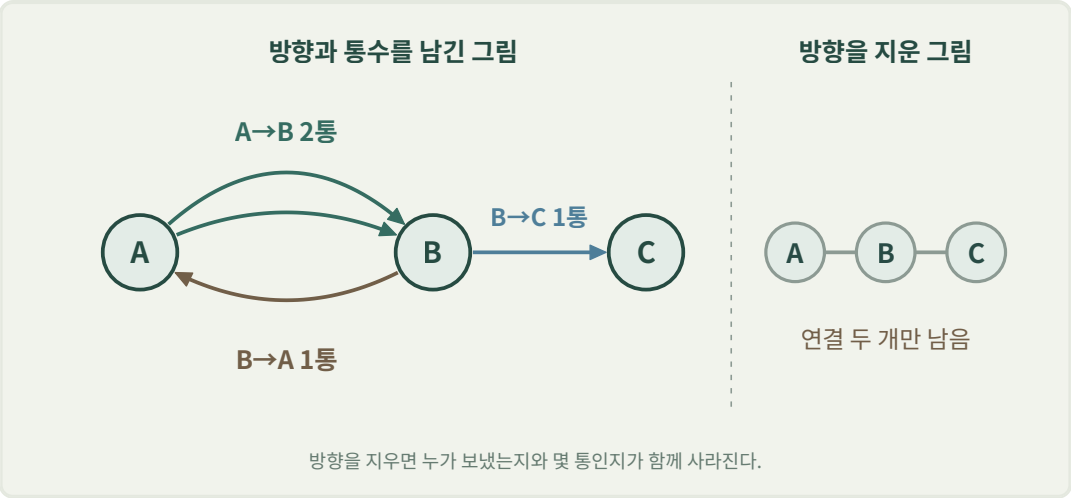
[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

보낸 방향을 남겨야 합니다

편지의 선에는 시작과 도착이 있습니다.

가상의 편지 네 통이 A에서 B로 두 통과 B에서 A로 한 통 및 B에서 C로 한 통이라고 합시다. 방향을 지우면 A와 B가 연결되어 있고 B와 C가 연결되어 있다는 정보만 남습니다. 누가 먼저 질문했고 누가 답했는지 살피려면 방향과 날짜가 필요합니다. 같은 두 사람 사이에서도 발신과 수신의 역할이 바뀔 수 있습니다.

받은 편지만 보존된 문서군에서는 한쪽 방향이 더 많이 남을 수 있습니다. 남은 편지 수를 곧바로 실제 소통의 균형으로 읽으면 보존 방식의 영향을 놓칩니다. 분석 표에 문서군의 수집 범위와 빠진 자료의 가능성을 적어야 합니다. 선의 개수가 많은 그림보다 어떤 선이 어떤 자료에서 왔는지 추적할 수 있는 그림이 더 유용합니다.



방향을 지우면 누가 보냈는지와 몇 통인지가 함께 사라진다.

탐구

이 가상 기록에서 B가 받은 편지와 보낸 편지는 각각 몇 통인가요?

풀이와 확인

받은 편지는 A가 보낸 두 통입니다. 보낸 편지는 A에게 한 통과 C에게 한 통으로 두 통입니다. 관계의 수와 문서 빈도는 표의 별도 칸에 기록합니다.

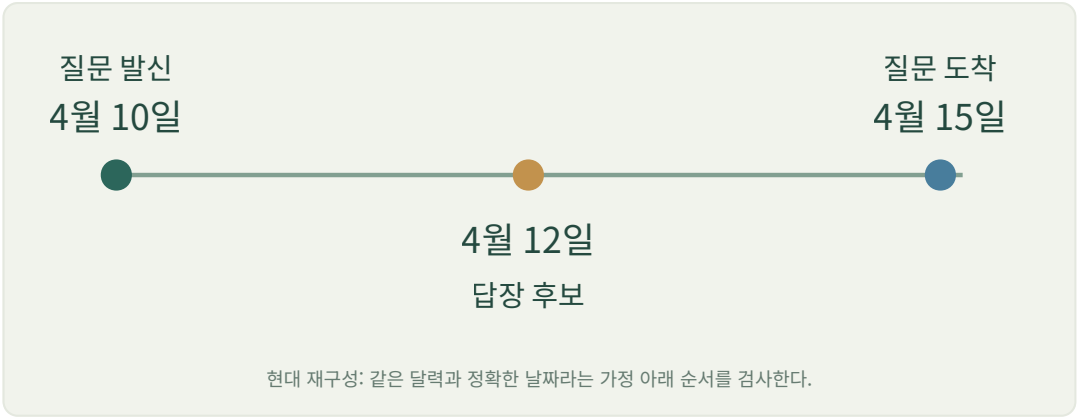
[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

답장을 날짜로 연결하기

시간 순서는 가능한 해석을 제한합니다.

A가 4월 10일에 보낸 질문과 B가 4월 8일에 보낸 편지가 있다고 합시다. 날짜가 정확하고 같은 달력을 사용했다면 두 번째 편지가 첫 질문을 받고 쓴 답장일 수는 없습니다. 내용이 비슷하더라도 시간의 순서가 맞지 않습니다. 독립적으로 같은 문제를 논의했거나 날짜가 잘못 읽혔거나 다른 앞선 질문이 있었을 가능성을 검토해야 합니다.

날짜에는 발신일과 도착일과 기록자가 정리한 추정일이 섞일 수 있습니다. 달력이 다른 자료라면 환산도 필요합니다. 날짜 두 개를 비교하기 전에 각각 무엇의 날짜인지 확인합니다. 연대 검사는 관계를 완전히 증명하지는 않지만 불가능한 연결을 걸러 내는 강력한 조건이 됩니다. 확실한 정보와 수정이 필요한 정보를 구별해서 남깁니다.



현대 재구성: 같은 달력과 정확한 날짜라는 가정 아래 순서를 검사한다.

탐구

질문 발신일이 4월 10일이고 도착일이 4월 15일이라면 4월 12일의 답장이라는 해석에는 어떤 문제가 있나요?

풀이와 확인

그 편지가 질문을 받은 뒤 쓴 답장이라는 해석과 도착일이 충돌합니다. 날짜 오류나 다른 전달 경로 또는 앞선 편지를 확인해야 하며 관계를 바로 확정하지 않습니다.

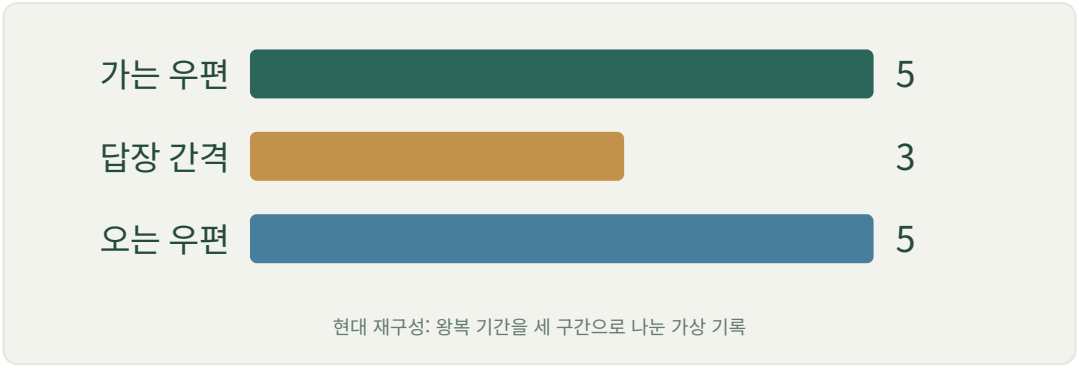
[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

왕복 시간과 답변 시간을 구별합니다

두 날짜 사이에는 여러 과정이 들어 있습니다.

질문을 5월 1일에 보내 5월 6일에 상대가 받고 5월 9일에 답장을 보내 5월 14일에 되받았다고 합시다. 발신부터 최종 수신까지는 13일입니다. 그 가운데 상대가 받은 뒤 답장을 쓰기까지의 간격은 3일입니다. 전체 왕복 시간을 연구자가 생각한 시간과 같다고 보아서는 안 됩니다.

우편 이동과 휴일과 자료 조회 및 실제 집필 시간이 함께 섞일 수 있습니다. 두 시점만 남아 있다면 어느 부분이 얼마나 걸렸는지 정확히 분해할 수 없습니다. 가상 예제에서는 네 날짜가 모두 주어져 구간별 계산이 가능하지만 실제 자료에서는 빈칸을 인정해야 합니다. 빠른 답장과 느린 답장의 이유를 숫자 하나로 단정하지 않습니다.



현대 재구성: 왕복 기간을 세 구간으로 나눈 가상 기록

탐구

이 예제에서 편지가 이동한 두 구간의 시간 합은 얼마인가요?

풀이와 확인

5월 1일부터 6일까지 5일이며 9일부터 14일까지도 5일이어서 합은 10일입니다. 여기에 상대의 답장 준비 간격 3일을 더하면 전체 13일입니다.

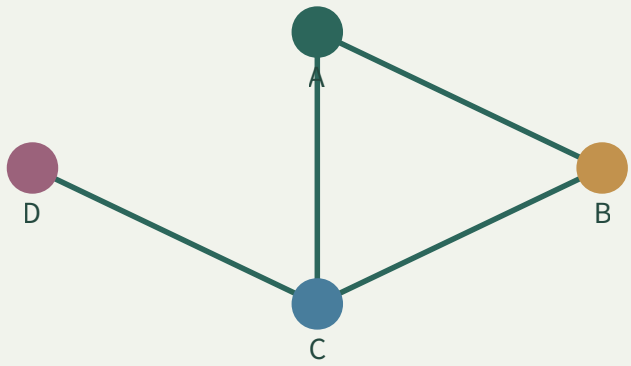
[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

공동 작업의 연결망

한 논문에 함께 참여한 관계와 편지는 다릅니다.

가상의 논문 한 편에 A와 B와 C가 함께 참여하고 다른 논문에는 C와 D가 참여했다고 합시다. 공동 저자 관계를 두 사람의 쌍으로 표시하면 AB와 AC와 BC와 CD의 네 연결이 생깁니다. 첫 논문 한 편이 세 쌍을 만든다는 점에 주의해야 합니다. 논문 수와 사람 수와 연결 수는 각각 다른 양입니다.

공동 저자라는 사실은 연구 기여가 동일하다는 뜻도 아니며 그들 사이의 모든 소통이 편지로 이루어졌다는 뜻도 아닙니다. 어떤 관계를 그리는지 분명히 정의해야 연결망이 자료를 넘어서 추측을 덧붙이지 않습니다. 편지 관계와 공동 저자 관계를 같은 그림에 넣는다면 선의 종류를 구별하고 각 연결의 근거를 남깁니다.



현대 재구성: 두 편의 가상 논문에서 얻은 공동 저자 관계

탐구

저자가 네 명인 논문 한 편은 모든 두 사람의 쌍으로 몇 연결을 만드나요?

풀이와 확인

4×3÷2=6개입니다. 각 쌍을 순서 없이 한 번만 세기 위해 2로 나눕니다. 여섯 연결이 여섯 편의 논문을 뜻하는 것은 아닙니다.

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

확실성에 숫자를 붙일 때

가중치는 자료가 아니라 분석자의 가정일 수 있습니다.

확인된 편지를 가중치 1로 두고 간접 언급만 있는 관계를 0.5로 두는 모형을 생각해 봅시다. A에게 확인된 관계 둘과 간접 관계 하나가 있으면 가중치 합은 2.5입니다. 이 숫자는 분석자가 정한 분류 규칙의 결과입니다. A가 실제로 2.5명과 교류했다거나 해당 관계가 50퍼센트의 확률로 존재했다는 뜻은 아닙니다.

간접 관계의 가중치를 0.2로 바꾸면 합은 2.2가 됩니다. 결과 순위가 이 선택에 크게 달라진다면 결론이 가정에 민감하다는 사실을 밝혀야 합니다. 확실성을 세밀하게 표현하고 싶다는 이유만으로 근거 없는 소수점 숫자를 붙이지 않습니다. 확인됨과 가능성 있음과 미확인이라는 범주 자체가 더 적절할 수도 있습니다.

사람	간접 0.5	간접 0.2
A	2.5	2.2
B	3.0	1.8

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

B가 확인된 관계 하나와 간접 관계 네 개를 가진다면 간접 가중치 0.5와 0.2에서 합은 각각 얼마인가요?

풀이와 확인

0.5에서는 1+4×0.5=3입니다. 0.2에서는 1.8입니다. A의 2.5와 2.2를 비교하면 순위가 뒤바뀌므로 가중치 선택에 민감합니다.

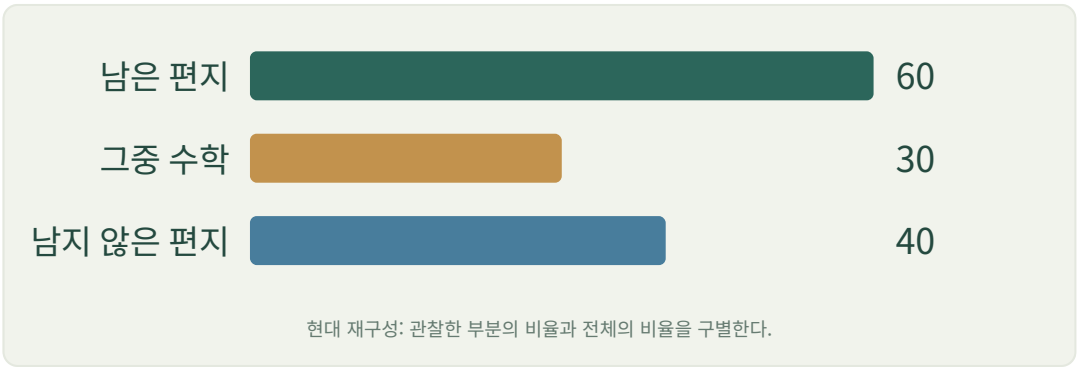
[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

서신의 빈칸은 부재의 증명이 아닙니다

남지 않은 편지는 여러 이유로 설명될 수 있습니다.

어떤 문서군에서 특정 두 사람의 편지가 발견되지 않았다고 해서 두 사람이 한 번도 소통하지 않았다고 결론 내릴 수는 없습니다. 대화나 다른 매체를 사용했을 수 있고 편지가 분실되었을 수도 있으며 아직 조사하지 않은 자료에 남아 있을 수도 있습니다. 확인하지 못했다는 진술과 없었다는 진술은 범위가 다릅니다.

가상의 전체 편지 100통 가운데 60통이 남았다고 해도 남은 60통이 모든 시기와 주제를 고르게 대표한다고 보장할 수 없습니다. 특정 상자의 자료만 보존되었다면 같은 주제에 치우칠 수 있습니다. 남은 비율을 안다는 사실과 대표성을 안다는 사실은 다릅니다. 통계적 추정을 하려면 어떤 선택 과정이 자료를 남겼는지 검토해야 합니다.



현대 재구성: 관찰한 부분의 비율과 전체의 비율을 구별한다.

탐구

남은 편지 60통 중 수학 주제가 30통이면 전체 100통 중 수학 편지가 반드시 50통인가요?

풀이와 확인

아닙니다. 남은 자료가 전체를 대표한다는 근거가 없기 때문입니다. 30/60=50퍼센트는 관찰한 자료의 비율이며 전체 비율을 확정하는 값은 아닙니다.

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

작은 서신 목록을 검토합니다

숫자로 세기 전에 기록 단위를 맞춥니다.

가상의 목록에 A에서 B로 보낸 편지 원본과 같은 편지의 사본이 각각 한 항목씩 들어 있다고 합시다. 문서 객체는 두 개지만 역사적 발신 사건은 하나입니다. 편지 수를 계산할 때 어느 단위를 셀지 먼저 정해야 합니다. 초고와 발송본과 수신본을 모두 독립된 소통으로 세면 교류 빈도가 부풀려질 수 있습니다.

정리표에 사건 식별번호와 자료 식별번호를 나누어 넣으면 하나의 사건을 여러 자료가 뒷받침하는 관계를 표현할 수 있습니다. 날짜와 문구가 같다는 이유만으로 바로 중복이라고 결정하지 않고 실제 사본 관계를 확인합니다. 자료의 다양성을 보존하면서도 통계에서 중복을 피하려면 무엇을 세는지 끝까지 일관되게 유지해야 합니다.

사건	원본	사본
E1	D1	D2
E2	D3	D4
E3	D5	D6

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

발신 사건 세 개에 각각 원본과 사본이 남아 있다면 자료 객체 수와 발신 사건 수는 얼마인가요?

풀이와 확인

자료 객체는 6개이고 발신 사건은 3개입니다. 연구 질문이 보존된 물건의 수인지 실제 소통 횟수인지에 따라 사용할 숫자가 달라집니다.

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid

지식의 길 / 105

디지털 기록과 새로운 길

파일 이름만으로는 부족합니다

자료를 찾고 이해할 정보가 함께 필요합니다.

디지털 이미지에 page1이라는 이름만 붙이면 어느 책의 어느 판본인지 알기 어렵습니다. 자료 식별번호와 제목과 제작 정보 및 원자료의 쪽 표시와 촬영 정보를 나누어 기록하면 같은 번호의 파일이 여러 개여도 구별할 수 있습니다. 이러한 설명 정보를 메타데이터라고 부릅니다. 파일 자체의 내용과 파일을 설명하는 기록이 함께 있어야 이후의 독자가 맥락을 복원할 수 있습니다.

미국 의회도서관은 디지털 자료의 형식을 지속적으로 이용할 수 있는지 평가하기 위한 정보를 제공합니다. 저장했다는 사실만으로 장기적인 읽기가 보장되지는 않는다는 점을 생각하게 합니다. 이 활동에서는 특정 보존 시스템을 구축하지 않고 작은 자료 목록의 필수 칸을 설계합니다. 빈칸을 추측으로 채우기보다 미확인으로 남겨 확인할 과제를 분명히 합니다.

항목	예시
자료 ID	BOOK-A
판본 ID	ED-02
원자료 쪽	12
이미지 순서	15

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

같은 책의 다른 판본 두 개가 모두 12쪽 이미지를 가진다면 무엇으로 구별할 수 있나요?

풀이와 확인

책의 자료 식별번호와 판본 식별번호 및 원자료 쪽 표시를 함께 사용합니다. 단순한 파일 순서 12와 인쇄된 쪽번호 12가 같은지 여부도 별도로 기록해야 합니다.

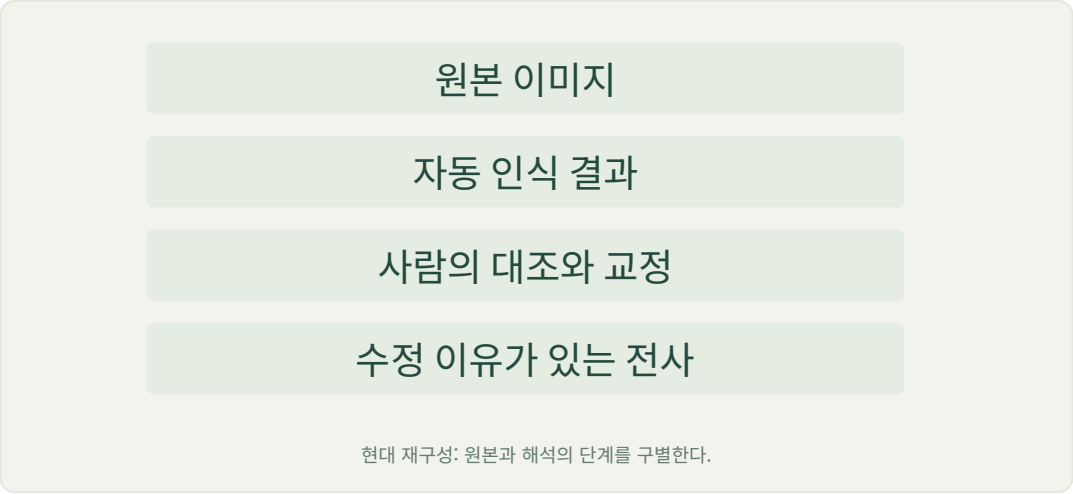
[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

원본 이미지와 전사는 다른 자료입니다

읽기 쉬운 글자로 옮기는 과정에도 판단이 들어갑니다.

스캔 이미지 속 흐릿한 숫자가 1인지 7인지 분명하지 않다고 합시다. 전사문에 7을 적었다면 그 순간 해석이 들어간 것입니다. 원본 이미지를 보존하고 전사문에는 불확실한 위치를 표시하면 다른 사람이 다시 판단할 수 있습니다. 전사문을 원본처럼 취급하면 처음 읽은 사람의 선택이 자료 자체의 사실로 굳어질 수 있습니다.

자동 문자 인식도 같은 검토가 필요합니다. 수학 문서에서는 0과 O 또는 1과 l의 혼동뿐 아니라 위첨자와 분수선의 위치가 의미를 바꿉니다. x^2를 x2로 읽으면 지수와 나란한 문자가 구별되지 않습니다. 오류를 고칠 때에는 이미지의 위치와 수정 전 읽기 및 수정 이유를 남겨 검토의 길을 열어 둡니다.



현대 재구성: 원본과 해석의 단계를 구별한다.

탐구

원본의 x^2를 자동 인식이 x2로 읽었다면 어떤 자료를 함께 남겨야 하나요?

풀이와 확인

원본 이미지와 자동 인식 결과 및 교정된 x^2를 구분해 보존합니다. 위첨자 위치를 근거로 수정했다는 설명을 붙이면 변화의 이유를 확인할 수 있습니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

버전은 덮어쓰기의 흔적을 남깁니다

무엇이 달라졌는지 알아야 다시 검토할 수 있습니다.

첫 전사에서 248이라고 읽은 수를 새 사진을 보고 243으로 고쳤다고 합시다. 최신 파일만 남기면 언제 무엇을 바꾸었는지 알기 어렵습니다. 버전 기록에는 이전 값과 새 값 및 수정 시점과 근거를 적습니다. 내용이 달라진 수정과 띄어쓰기만 바뀐 수정을 구분하면 검토할 범위를 정하기 쉽습니다.

버전 번호가 크다고 항상 더 옳은 내용이라는 뜻은 아닙니다. 새 수정에도 오류가 들어갈 수 있으므로 이전 자료와 비교하고 필요하면 되돌릴 수 있어야 합니다. 여러 사람이 같은 문서를 편집한다면 같은 위치를 서로 다르게 고칠 수도 있습니다. 최종값을 정하기 전에 두 수정의 근거를 비교하는 과정이 필요합니다. 기록은 판단을 대신하지 않고 판단의 근거를 남깁니다.

버전	읽기	근거
v1	248	첫 이미지
v2	243	더 선명한 사진
검토	재확인	원본 위치 대조

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

한 편집자는 243으로 고치고 다른 편집자는 248을 유지했다면 최신 시간만 보고 결정해도 될까요?

풀이와 확인

그렇게 결정하기보다 원본 이미지와 각자의 근거를 비교해야 합니다. 시간은 수정 순서를 알려 주지만 해석의 정확성을 보장하지는 않습니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

간단한 검사값을 만들어 봅니다

내용이 바뀌었는지 작은 수로 살필 수 있습니다.

숫자열 2와 4와 7과 1을 보낼 때 숫자의 합을 10으로 나눈 나머지 4를 검사값으로 붙이는 모형을 만듭니다. 받는 쪽이 2와 4와 8과 1을 받았다면 합은 15이므로 나머지 5가 됩니다. 원래 검사값 4와 달라져 변화가 있었음을 알 수 있습니다. 이 방식은 실제 파일 보존용 암호학적 해시가 아니라 원리를 익히는 작은 예제입니다.

모든 변화가 드러나는 것은 아닙니다. 2와 5와 6과 1의 합도 14이므로 검사값은 4입니다. 서로 다른 내용이 같은 검사값을 갖는 경우를 충돌이라고 부를 수 있습니다. 작은 검사값에는 담을 수 있는 정보가 제한되어 있으므로 같은 값이 나온다는 사실만으로 전체 내용의 동일성을 증명할 수 없습니다.

숫자열	합	검사값
2 4 7 1	14	4
2 4 8 1	15	5
2 5 6 1	14	4

현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

원래 숫자열의 순서를 1과 7과 4와 2로 바꾸면 이 검사가 변화를 찾을 수 있나요?

풀이와 확인

합은 여전히 14이므로 검사값도 4입니다. 순서를 바꾸는 오류를 찾지 못합니다. 이 검사는 값의 합을 보존하고 위치 정보는 버린다는 점을 보여 줍니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

위치의 무게를 넣은 검사

새 정보가 들어가면 발견하는 오류도 달라집니다.

숫자열의 첫 자리에는 1을 곱하고 둘째에는 2를 곱하는 식으로 위치 가중치를 넣어 봅시다. 2와 4와 7과 1의 가중합은 1×2+2×4+3×7+4×1=35입니다. 이를 11로 나눈 나머지는 2입니다. 가운데 4와 7을 바꾼 2와 7과 4와 1의 가중합은 32로 나머지는 10입니다. 순서 변화가 이번에는 드러납니다.

그러나 더 정교해 보이는 이 검사도 충돌을 없애지는 못합니다. 11개의 나머지만 사용하므로 충분히 많은 서로 다른 숫자열 가운데 같은 값을 갖는 것이 반드시 있습니다. 수학적으로 검사값의 종류보다 입력의 종류가 많기 때문입니다. 교실용 검사와 실제 디지털 보존에서 사용하는 강한 무결성 확인 방법의 차이를 구별해야 합니다.

$$1\times2+2\times4+3\times7+4\times1=35$$
$$35\text{의 }11\text{ 나머지}=2$$
$$\text{자리 교환 후 가중합}=32$$
$$32\text{의 }11\text{ 나머지}=10$$

현대 재구성: 계산의 핵심 관계

탐구

두 숫자열의 가중합 35와 46은 이 검사에서 구별되나요?

풀이와 확인

차이가 11이므로 둘 다 나머지 2여서 구별되지 않습니다. 검사값이 같다는 사실과 데이터가 같다는 사실은 다릅니다. 오류의 종류에 맞는 검토가 필요합니다.

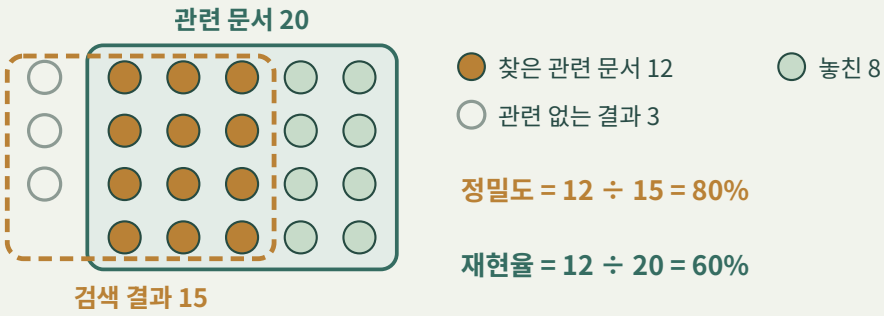
[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

잘 찾은 비율과 놓치지 않은 비율

검색의 성능은 한 숫자로 끝나지 않습니다.

전체 자료에 관련 문서가 20개 있다고 알고 있는 가상 실험에서 검색이 15개를 돌려주고 그 중 12개가 관련 문서라고 합시다. 검색 결과 가운데 관련된 비율인 정밀도는 12/15=80퍼센트입니다. 전체 관련 문서 가운데 찾아낸 비율인 재현율은 12/20=60퍼센트입니다. 두 값은 분모가 다르므로 다른 질문에 답합니다.

결과를 넓게 가져오면 놓치는 문서를 줄일 수 있지만 관련 없는 문서가 늘어날 수 있습니다. 엄격한 검색은 결과가 깔끔해도 중요한 변형 표기를 놓칠 수 있습니다. 실제 역사 자료에서는 전체 관련 문서 수 자체를 모를 때가 많으므로 재현율을 정확히 측정하기 어렵습니다. 모형의 수치와 실제 검색의 한계를 구별하여 결과를 해석합니다.



겹친 12개를 결과 15개와 관련 문서 20개에 각각 나눈다.

탐구

결과 25개 중 관련 문서가 18개이며 전체 관련 문서가 20개라면 두 비율은 얼마인가요?

풀이와 확인

정밀도는 18/25=72퍼센트이고 재현율은 18/20=90퍼센트입니다. 첫 검색보다 더 많이 찾았지만 결과 안의 관련 문서 비율은 낮아졌습니다.

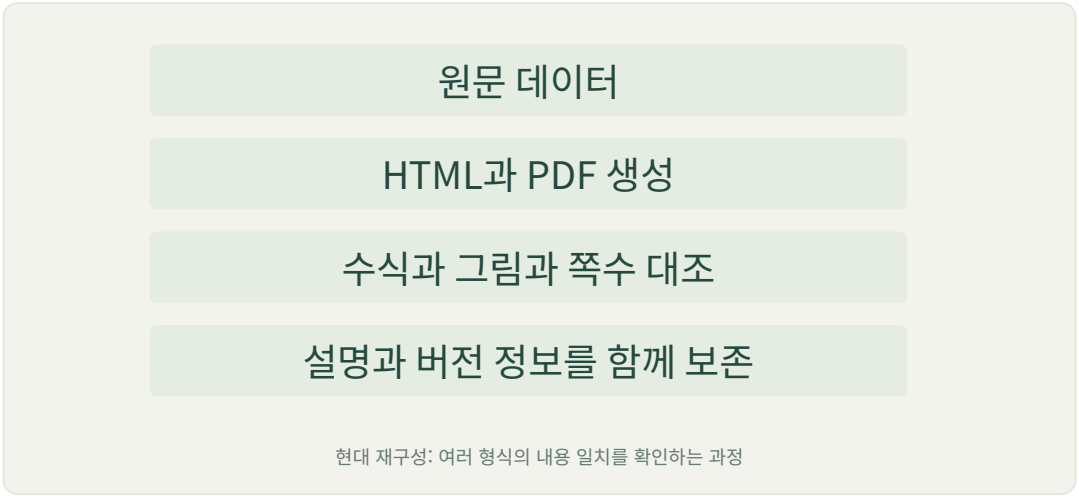
[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

보존은 다시 열어 보는 일까지 포함합니다

사본이 있어도 읽을 수 없다면 활용이 막힙니다.

파일을 여러 곳에 복사해 두는 일은 손실 위험을 줄이는 데 도움이 되지만 오래된 형식을 해석할 프로그램이 없으면 내용을 읽기 어려울 수 있습니다. 의회도서관이 소개한 스나이더 자료에는 오래된 계산기 프로그램을 재구성하여 수학적 작업을 이해한 사례가 있습니다. 보존해야 할 것은 화면에 보이는 결과뿐 아니라 계산 방법과 실행 맥락일 수도 있습니다.

교육용 자료 묶음을 만들 때에는 원문 데이터와 읽기 쉬운 설명 및 사용한 단위와 버전 정보를 함께 넣을 수 있습니다. PDF는 고정된 조판을 보여 주고 HTML은 검색과 상호작용을 제공하지만 두 파일이 같은 내용을 담는지 확인해야 합니다. 형식이 다르면 줄바꿈과 수식 표시가 달라질 수 있으므로 변환 뒤 실제로 열어 검토하는 과정이 필요합니다.



현대 재구성: 여러 형식의 내용 일치를 확인하는 과정

탐구

HTML에는 124쪽이 표시되는데 PDF가 122쪽이라면 무엇을 확인해야 하나요?

풀이와 확인

쪽의 정의와 누락 여부 및 인쇄용 조판을 확인해야 합니다. 화면의 페이지 숫자만으로 PDF의 실제 쪽수가 같다고 가정하지 않습니다. 표지와 목차와 본문의 대응을 차례로 대조합니다.

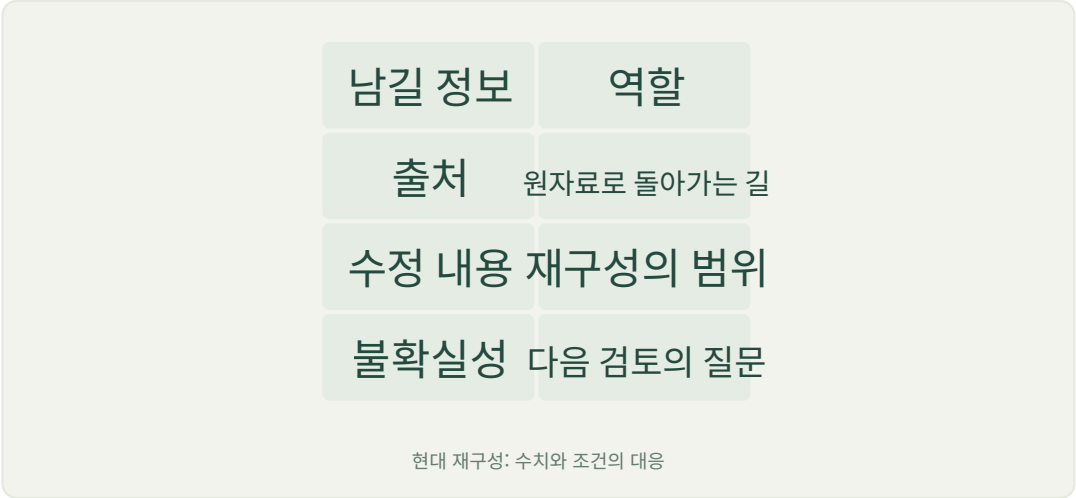
[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats / [SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

새로운 길에도 맥락이 필요합니다

쉽게 복사되는 자료일수록 출처와 설명을 이어 갑니다.

한 장의 문양 이미지를 원래 자료에서 떼어 내면 만든 사람과 장소와 용도 및 해석의 불확실성이 사라질 수 있습니다. 디지털 공개는 접근을 넓히지만 모든 자료를 맥락 없이 재사용해도 된다는 뜻은 아닙니다. 제공 기관의 이용 안내와 자료에 붙은 설명을 확인하고 출처 및 수정 여부를 함께 남기는 태도가 필요합니다.

이 책의 마지막 활동은 스스로 만든 작은 자료 묶음의 설명서를 쓰는 것입니다. 원본과 전사를 구분하고 현대 재구성 예제를 표시하며 계산의 가정을 적습니다. 검색에서 찾지 못한 부분과 아직 확인하지 않은 주장도 남깁니다. 지식의 길은 자료를 멀리 보내는 일뿐 아니라 다음 독자가 그 내용을 검토하고 질문할 수 있는 조건을 마련하는 일이기도 합니다.



현대 재구성: 수치와 조건의 대응

탐구

역사적 문양을 바탕으로 새 색과 배치를 만든 그림에는 무엇을 밝혀야 하나요?

풀이와 확인

참고한 자료의 출처와 새로 바꾼 부분 및 현대 재구성이라는 성격을 밝힙니다. 원래 제작자의 의도나 실제 색을 복원한 것처럼 단정하지 않으며 이용 안내도 확인합니다.

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats

지식의 길 / 106

자료를 다시 엮는 편집자의 작업실

가장 싼 연결과 가장 빠른 경로

망 전체를 연결하는 문제와 두 점 사이를 이동하는 문제는 다른 답을 요구한다.

현대 재구성으로 네 거점 A와 B와 C와 D를 놓자. 설치 비용은 AB가 2이며 BC가 2이고 CD가 2다. AD는 5이며 AC와 BD는 각각 6이라고 정한다. 모든 거점을 연결하는 통로를 가장 싸게 만들려면 AB와 BC와 CD를 골라 총비용 6으로 연결할 수 있다.

그렇다고 A에서 D까지 이동하는 가장 짧은 경로가 항상 그 세 구간인 것은 아니다. 같은 숫자를 이동 거리로 해석하면 세 구간의 합은 6이고 직접 잇는 AD는 5다. 전체 연결망의 설치 비용을 줄이는 목표와 특정 두 점의 이동 거리를 줄이는 목표가 다르다.

실제 교류망에서는 길의 건설과 유지 및 여행자의 선택을 같은 문제로 합쳐서는 안 된다. 여기의 수치는 역사의 측정값이 아닌 모형이다. 지도에서 최적이라는 말을 쓰기 전에 무엇을 최소화하고 누가 그 결정을 내리는지 밝히면 계산의 뜻이 분명해진다.

구간	비용
AB / BC / CD	각 2
AD	5
AC / BD	각 6

> **탐구**
> 모든 거점 연결에 직접 AD까지 추가하면 총 설치 비용은 얼마인가?

풀이와 확인

기존 6에 AD의 5를 더하여 11이다. A와 D의 이동은 줄어들지만 전체 설치 비용은 증가한다.

연대의 범위로 계보를 걸러 내기

불확실한 날짜도 불가능한 전승 가설을 배제하는 데 쓰일 수 있다.

가상의 사본 A가 1180년부터 1210년 사이에 만들어졌고 B는 1195년이며 C는 1170년부터 1185년 사이라고 하자. B가 C를 보고 베꼈을 가능성은 연대만으로 배제할 수 없다. C의 가장 늦은 시점도 B보다 이르기 때문이다. 그러나 시기가 맞는다는 사실이 실제 이용을 증명하지는 않는다.

A가 B를 따랐는지는 판단이 더 어렵다. A의 가능한 범위가 B의 연대를 가로지르므로 A가 더 이를 수도 있고 늦을 수도 있다. 가운데 값 하나로 바꾸어 순서를 확정하면 원래의 불확실성을 없애 버린다. 계보 그림에는 확인된 순서와 가능한 순서를 구별하여 표시한다.

자료에 적힌 날짜가 본문 작성일인지 현존 사본의 필사일인지도 확인해야 한다. 번역의 성립 시점과 뒤에 제작된 한 사본의 시점은 서로 다르다. 계산으로 연대를 비교하기 전에 날짜가 가리키는 사건을 통일해야 한다.

자료	가정한 제작 시기
A	1180–1210년
B	1195년
C	1170–1185년

> **탐구**
> B가 C보다 먼저 만들어졌다는 주장은 위 범위와 양립하는가?

풀이와 확인

같은 종류의 제작일을 비교한다면 양립하지 않는다. C의 상한 1185년이 B의 1195년보다 이르다.

두 계통을 참고한 사본

같은 오류 두 개가 함께 남았을 때에는 합류한 전승도 검토한다.

현대 재구성의 사본 A에는 문제 한 줄이 빠져 있고 B에는 표의 숫자 하나가 바뀌어 있다. C가 A의 본문과 B의 표를 함께 사용했다면 두 특징을 모두 보일 수 있다. 이때 사본을 한 부모에서 한 자식으로만 잇는 단순한 나무는 편집 과정을 충분히 표현하지 못한다.

그러나 두 특징이 함께 있다는 이유만으로 C가 A와 B를 직접 보았다고 단정할 수는 없다. 두 특징을 이미 가진 다른 사본을 이용했을 수도 있다. 같은 위치의 오류가 독립적으로 생겼을 가능성도 검토한다. 여러 특징과 연대 및 실제 문장의 대응을 함께 읽어야 계보 가설을 좁힐 수 있다.

의회도서관의 바티칸 수학 문헌 전시는 번역과 주석 및 다양한 언어의 사본을 함께 소개한다. 이런 자료를 읽을 때 결과가 같은 계산과 문장까지 대응하는 전승을 나누어 질문하면 자료의 차이를 더 잘 볼 수 있다. 이 표의 A와 B와 C는 실제 사본 식별번호가 아니다.

사본	줄 결락	숫자 변화
A	있음	없음
B	없음	있음
C	있음	있음

> **탐구**
> C가 A의 결락을 고쳤다면 A를 이용하지 않았다고 확정할 수 있는가?

풀이와 확인

그럴 수 없다. 다른 자료와 대조하여 빠진 줄을 보충했을 수 있다. 오류의 부재만으로 이용 관계의 부재를 증명하지 않는다.

[SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시

같은 문헌을 세는 두 가지 단위

자료 객체와 내용의 판본을 구별하면 소장 통계를 부풀리지 않을 수 있다.

한 계산서의 원본 한 장과 그것을 찍은 사진 세 장 및 전사 파일 두 개가 있다고 하자. 보존된 파일과 물건을 모두 세면 여섯 객체다. 그러나 계산서의 내용이 서로 같은 계통이라면 여섯 개의 독립된 역사적 증언이라고 부를 수는 없다. 복제와 독립 증거는 다른 관계다.

현대 재구성의 목록에는 객체 식별번호와 원자료 식별번호를 별도 칸에 적는다. 사진 두 장이 같은 면을 다른 조명으로 찍었다면 판독에 새로운 도움을 줄 수 있지만 문헌이 두 개로 늘어난 것은 아니다. 전사 파일의 다른 읽기는 새로운 원본이 아니라 해석의 차이로 기록한다.

검색 결과를 통계로 옮길 때 이러한 묶음을 먼저 확인한다. 같은 사진이 여러 기관 페이지에 나타나면 검색 건수는 늘어도 자료의 독립성이 늘어난 것은 아니다. 많이 찾았다는 말보다 무엇을 몇 개 찾았는지 분명히 쓰는 것이 정확한 조사 보고다.

종류	수	역할
원본	1	역사적 자료
사진	3	원본의 영상
전사	2	판독 결과

탐구

원본 두 장에 각각 사진 네 장이 있으면 객체 수와 원자료 수는 얼마인가?

풀이와 확인

원본 2개와 사진 8개를 합쳐 객체는 10개다. 원자료는 두 장이다. 어떤 단위를 세었는지 결과에 붙인다.

교정 제안을 원문으로 되돌려 보기

숫자가 계산에 맞는다는 사실과 실제 글자가 그렇게 쓰였다는 사실을 구별한다.

흐릿한 계산서에 24×13과 결과 312 또는 372처럼 보이는 숫자가 있다고 하자. 현대 재구성의 곱셈은 24×10+24×3=240+72=312다. 따라서 312라는 읽기가 계산과 잘 맞는다. 하지만 실제 필자가 372를 잘못 적었을 가능성까지 사라진 것은 아니다.

전사에는 보이는 글자를 적고 교정 제안은 별도로 남기는 방법이 있다. 판독이 불확실하면 두 가능성을 표시한 뒤 계산을 근거로 한 해석을 덧붙인다. 수학적으로 자연스러운 답으로 원문을 조용히 바꾸면 과거의 계산 실수나 필사 실수를 연구할 단서가 사라진다.

새 사진에서 분명히 372가 보인다면 계산을 고칠 것이 아니라 원문에 오류가 있다는 설명을 남겨야 한다. 역사 자료를 잘 읽는 일은 모든 숫자를 정답으로 만드는 일이 아니다. 기록된 값과 계산상 기대값이 어긋나는 자리도 자료의 일부로 보존한다.

구분	값	근거
원문 판독	312 또는 372	흐릿한 글자
계산 기대값	312	24×13
교정 판단	별도 기록	이미지와 계산 대조

탐구

원문이 분명히 372일 때 교정판에는 어떤 두 값을 함께 남기는가?

풀이와 확인

원문 기록 372와 계산상 수정 제안 312를 함께 남긴다. 24×13=312라는 근거도 붙인다.

독자가 재현할 수 있는 지식의 길

좋은 자료 묶음은 도착점뿐 아니라 따라갈 수 있는 경로를 남긴다.

이 책의 작은 모형들은 실제 여행과 번역의 모든 조건을 담지 않는다. 대신 어떤 질문에 답하기 위해 어떤 정보를 선택했는지 보여 준다. 마지막에는 스스로 만든 연결망이나 계산표 하나를 골라 다른 사람이 같은 답에 도달할 수 있는 설명을 작성해 보자.

출발 자료와 입력값 및 단위를 먼저 적는다. 다음으로 계산 규칙과 중간값을 남기고 원래 조건으로 돌아가 검산한다. 예를 들어 7상자와 상자당 12묶음 및 묶음당 5개라는 약속은 420개를 준다. 이를 5와 12로 차례로 나누어 7상자로 되돌리면 변환 방향을 확인할 수 있다.

마지막에는 실제 자료와 현대 재구성의 경계를 적는다. 확인하지 않은 연대와 지도에서 생략한 거리 및 판독이 불확실한 숫자는 그대로 표시한다. 책을 읽고 얻은 답이 다음 독자의 질문으로 이어지려면 결론을 믿으라는 요청보다 검토할 수 있는 근거를 남기는 편이 유익하다.

단계	값
상자	7
묶음	7×12=84
낱개	84×5=420
역검산	420÷5÷12=7

> **탐구**
> 중간값을 84묶음으로 남기는 것이 최종값 420개만 쓰는 것보다 어떤 점에서 유용한가?

풀이와 확인

상자에서 묶음으로 바꾸는 단계와 묶음에서 낱개로 바꾸는 단계를 각각 확인할 수 있다. 틀렸을 때 어느 비율을 잘못 썼는지 찾기도 쉽다.

지식의 길 / 107

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[SR01] UNESCO. Silk Roads: the Routes Network of Chang'an–Tianshan Corridor
https://whc.unesco.org/en/list/1442

[SR03] British Library IDP. Buddhist texts: The Diamond Sutra
https://idp.bl.uk/discover/learning/buddhism-on-the-silk-roads/articles/buddhism-on-the-ground/buddhist-texts-the-diamond-sutra/

[SRB01] 세인트앤드루스대학교 아델라르 관련 유클리드 판본 연구 소개
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Extras/Adelard_Euclid/

[SRB02] 미국 의회도서관 바티칸 수학 문헌 전시
https://www.loc.gov/exhibits/vatican/math.html

[SRB03] 취리히 연방공과대학교 도서관 피사의 레오나르도 전기
https://library.ethz.ch/en/sammlungen-und-archive/platforms/virtual-exhibitions/fibonacci-un-ponte-sul-mediterraneo/biography-of-leonardo-of-pisa.html

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료
https://www.sites.hps.cam.ac.uk/starry/tables.html

[SRB05] 케임브리지대학교 휘플과학사박물관 계산표
https://www.whipplemuseum.cam.ac.uk/explore-whipple-collections/calculating-devices/tables

[SRB06] 중세 천문표 학습에 관한 연구
https://www.repository.cam.ac.uk/items/4650c3d4-9da0-4bc7-923b-1a263d35b3e3

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers
https://loc.gov/loc/lcib/0305/cartography.html

[SRC02] 미국 의회도서관. The Gutenberg Bible. Text
https://www.loc.gov/exhibits/bibles/interactives/gutenberg/text.html

[SRC03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Earliest Uses of Symbols of Relation
https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Miller/mathsym/relation/

[SRC04] 미국 의회도서관. Oswald Veblen Papers. Finding Aid
https://tile.loc.gov/storage-services/service/gdc/gdcfindingaidpdfs/ms011049/ms011049.pdf

[SRC05] 미국 의회도서관. Introduction to Digital Formats
https://www.loc.gov/preservation/digital/formats/intro/intro.shtml

관을 잇는 탐구 / 108

수를 쓰는 방식과 변하지 않는 관계

기호를 옮겨도 남는 수

수학사를 비교하는 첫 기준은 낯선 모양 속에서 어떤 관계가 유지되는지 살피는 것이다.

한국관의 산대와 고대 오리엔트관의 자리값을 같은 수직선 위에 놓는 순간 독자는 두 종류의 작업을 한다. 하나는 각 자료가 어떻게 생겼는지 읽는 일이다. 다른 하나는 그 표기가 나타내는 양을 오늘의 수로 해석하는 일이다. 두 번째 작업이 성공했다고 첫 번째 자료의 모든 성격까지 이해한 것은 아니다.

현대 재구성으로 십진법의 137을 세 가지 밑으로 옮겨 보자. 오진법에서는 1×125+0×25+2×5+2이므로 1022다. 십이진법에서는 11×12+5다. 여기에서 11을 새 기호 B로 정하면 B5로 쓸 수 있다. 육십진법에서는 2×60+17이며 이 책에서는 두 자리의 경계를 세로선으로 표시한다.

같은 수를 더 길게 쓰는 체계가 언제나 열등한 것은 아니다. 작은 묶음을 손으로 교환하는 작업에서는 기억해야 할 한 자리 계산이 줄어들 수 있다. 반대로 많은 양을 짧게 기록할 때에는 자리 수가 적은 편이 편리하다. 표기의 장단점은 셈의 대상과 도구와 독자의 훈련에 따라 달라진다.

이 비교표는 세 문명의 실제 기호를 복원한 도판이 아니다. 동일한 양을 여러 약속 아래 다시 표현한 교육용 모형이다. 역사적 표기를 만났을 때에는 값의 대응을 확인한 다음 빈자리와 단위 및 읽는 방향이 원자료에서 어떻게 처리되는지 다시 살펴야 한다.

밑	137의 표현	자리값 전개
5	1022	125+0+10+2
12	B5	11×12+5
60	2 | 17	2×60+17

탐구

오진법 1022를 122로 줄이면 무엇이 달라지는가?

풀이와 확인

1022는 137이고 122는 37이다. 25의 자리가 비었다는 정보를 없애면 앞자리의 무게까지 달라진다.

영을 하나의 사건으로 묶지 않기

빈자리 기호와 수의 연산 규칙을 분리하면 영의 역사를 더 정확하게 읽을 수 있다.

영이라는 말을 들으면 오늘날의 0 하나를 떠올리기 쉽다. 그러나 빈칸을 보존하는 표지와 양이 없다는 진술과 계산에 참여하는 수는 구별되는 기능이다. 서로 다른 자료가 이 가운데 무엇을 보여 주는지 묻지 않으면 닮은 기호를 발견한 일을 같은 개념의 증거로 확대하게 된다.

현대 재구성에서 상자 세 개의 물건 수를 7과 0과 5로 적자. 가운데 상자가 비었다는 사실을 표시한 것이다. 목록을 7과 5만으로 줄이면 물건이 든 상자는 알 수 있지만 원래 세 상자의 순서와 대응을 잃는다. 이때 0은 표 안의 위치를 보존하는 역할을 한다.

합계 7+0+5=12에서 0은 덧셈 결과를 바꾸지 않는 수다. 그러나 7×0=0에서는 곱셈 전체가 달라진다. 같은 기호가 여러 연산 속에서 일관된 규칙을 가져야 하나의 수 체계 안에서 사용할 수 있다. 자리 표시만 확인된 자료에서 이런 규칙 전체가 이미 정립되었다고 추정해서는 안 된다.

나눗셈은 더 신중하게 다루어야 한다. 0÷5=0은 5×0=0으로 확인되지만 5÷0은 어떤 수를 0배해도 5가 되지 않아 정의할 수 없다. 0÷0은 모든 수가 곱셈 조건을 만족하므로 하나의 몫을 정하지 못한다. 기호의 존재와 연산의 허용 범위는 별도로 확인할 질문이다.

질문	확인할 정보
빈자리인가	위치의 유지
양이 없는가	목록의 대상
연산하는 수인가	허용된 계산 규칙

탐구

0÷0을 0이라고 하나로 정하면 보통의 나눗셈과 어떤 차이가 생기는가?

풀이와 확인

0×a=0을 만족하는 a가 하나뿐이지 않다. 나눗셈을 곱셈의 유일한 역으로 쓰는 규칙만으로는 몫을 결정할 수 없다.

분모가 결정하는 끝나는 소수

짧게 적히는 분수의 종류는 밑이 품은 소인수와 연결된다.

같은 분수라도 어떤 자리값 체계에서는 짧고 다른 체계에서는 끝없이 이어진다. 이를 문명의 능력 차이로 읽을 까닭은 없다. 현대 재구성으로 십진법과 십이진법을 비교하면 밑의 선택이 어떤 계산을 편하게 만드는지 직접 확인할 수 있다.

기약분수 a/d가 밑 b에서 소수 k자리 안에 끝나려면 d가 b의 k제곱을 나누어야 한다. 끝나는 표기는 어떤 정수 N을 b의 k제곱으로 나눈 값이기 때문이다. 따라서 분모에 남은 소인수가 밑에 모두 들어 있는지가 핵심이다. 약분하기 전의 분모만 보고 판단하면 조건을 잘못 적용할 수 있다.

십이진법에서 1/8은 18/144이므로 소수 두 자리로 끝난다. 숫자 기호가 0부터 9까지 이어지고 열을 A와 열하나를 B로 쓴다는 약속에서는 0.16이다. 첫 자리 1은 1/12이고 둘째 자리 6은 6/144이므로 합은 1/8이다. 1/5는 12의 거듭제곱을 나누지 못해 유한하게 끝나지 않는다.

이 성질은 각도와 시간처럼 60으로 나누는 체계가 여러 분할에 편리한 이유도 설명한다. 다만 편리한 약수가 많다는 현대적 분석만으로 특정 문화가 왜 그 밑을 선택했는지 증명하지는 못한다. 기능을 분석하는 계산과 기원을 설명하는 자료의 역할을 분리해야 한다.

분수	십진법	십이진법
1/8	0.125	0.16
1/3	순환	0.4
1/5	0.2	순환

탐구

십이진법에서 5/18은 유한하게 끝나는가?

풀이와 확인

$18=2\times3^2$이며 $12^2=144$는 18의 배수다. 따라서 두 자리 안에 끝난다. $5/18=40/144$이므로 십이진법 0.34다.

받아올림의 장부를 만들기

변환 도중 유지되는 양을 기록하면 여러 계산법을 같은 기준으로 검산할 수 있다.

계산 도구의 움직임을 비교할 때에는 손이 얼마나 빨리 움직이는지만 보아서는 부족하다. 산대와 주판과 종이 필산은 자릿값을 보존하는 서로 다른 행동을 요구한다. 교환하기 전과 후의 양이 같다는 관계를 기록하면 도구의 겉모습을 넘어 계산 구조를 비교할 수 있다.

현대 재구성으로 오진법 243과 134를 더하자. 일의 자리에서 3+4=7이므로 2를 남기고 윗자리로 1을 옮긴다. 다음 자리의 합은 4+3+1=8이라 3을 남기고 다시 1을 옮긴다. 마지막은 2+1+1=4이므로 결과는 432다.

십진법으로 읽으면 243은 73이고 134는 44다. 합은 117이며 432를 전개한 $4\times25+3\times5+2$와 일치한다. 이 검산은 다른 표기를 거쳐 같은 양을 확인한다. 같은 손동작을 반복하여 처음 실수를 되풀이하는 검사와는 다른 정보를 제공한다.

받아올림을 설명하는 문장은 단계의 위치를 밝혀야 한다. 첫 번째로 옮긴 1은 낱개 다섯을 묶은 것이고 다음 1은 낱개 스물다섯을 묶은 것이다. 작은 숫자 1만 보이면 같아 보여도 교환한 양은 다르다. 기호와 위치와 조작을 함께 설명할 때 그림이 계산의 근거가 된다.

자리	교환 전 합	남긴 숫자	올림
1	7	2	1
5	8	3	1
25	4	4	0

탐구

오진법 432에서 134를 빼면 어떤 값이 돌아오는가?

풀이와 확인

십진법으로 117−44=73이므로 오진법 243이다. 직접 뺄셈에서는 필요한 자리에서 다섯 묶음으로 풀어 주는 교환을 사용한다.

관을 잇는 탐구 / 109

측정값에서 증명으로 가는 거리

같은 도형을 서로 다른 질문으로 읽기

넓이를 구하는 절차와 그 절차가 성립하는 이유는 연결되어 있지만 같은 설명은 아니다.

넓이 문제는 여러 관을 잇는 좋은 출발점이다. 땅의 크기를 기록하는 일과 도형의 관계를 증명하는 일은 같은 그림을 사용할 수 있다. 그렇지만 측량값의 정확성을 묻는 질문과 모든 도형에 적용되는 명제를 묻는 질문은 구별해야 한다. 문제의 목적이 무엇인지 먼저 밝히면 다른 풀이를 공정하게 비교할 수 있다.

현대 재구성에서 직사각형의 두 변을 12와 7로 두자. 한 단위 정사각형을 일곱 줄로 놓고 각 줄에 열두 개씩 두면 넓이는 84다. 이 설명은 넓이 단위의 선택과 겹침 없는 분할에 의존한다. 단순히 두 수를 곱한다는 지시보다 곱셈이 등장하는 이유를 보여 준다.

이 직사각형을 대각선으로 나누면 두 삼각형이 생긴다. 회전과 겹치기로 두 조각의 합동을 확인하면 각각의 넓이는 42다. 삼각형의 넓이를 절반으로 구하는 관계가 특정 측정값의 우연이 아니라 분할의 구조에서 나왔다. 수치 계산과 일반적 설명이 같은 그림에서 서로를 보완한다.

실제 땅이 울퉁불퉁하거나 경계가 휘면 처음의 직사각형 모형부터 검토해야 한다. 공식이 정확하다는 사실은 측정 대상이 공식의 조건을 만족한다는 보증이 아니다. 독자는 계산식 옆에 사용한 도형 모형과 측정 단위를 적으며 이 차이를 따라가면 좋다.

단계	대상	넓이
처음	12×7 직사각형	84
분할	합동인 두 삼각형	각 42
확대	24×14 직사각형	336

탐구

두 변을 각각 두 배로 늘리면 넓이는 왜 네 배가 되는가?

풀이와 확인

가로의 단위 칸 수와 세로의 단위 칸 수가 각각 두 배가 된다. 곱은 2×2배로 커져 84에서 336이 된다.

측정 오차를 넓이까지 옮기기

입력값에 범위가 있다면 결과의 범위도 계산할 수 있다.

길이 20.0과 너비 12.0을 곱해 240.00이라고 쓰면 자릿수가 많아 정확해 보인다. 그러나 두 길이가 각각 0.1만큼 작거나 클 수 있다는 정보가 있다면 이 표기는 실제 확실성을 과장할 수 있다. 측정에서 중요한 것은 숫자의 길이보다 근거가 허용하는 범위다.

현대 재구성에서 길이를 19.9부터 20.1까지로 두고 너비를 11.9부터 12.1까지로 두자. 모두 양수이므로 가장 작은 넓이는 19.9×11.9=236.81이다. 가장 큰 넓이는 20.1×12.1=243.21이다. 두 범위를 독립적으로 허용한 직사각형 모형의 경계값이다.

중앙값 240에 대한 차이는 아래로 3.19이며 위로 3.21이다. 완전히 대칭적이지 않은 까닭은 작은 길이 변화끼리의 곱도 넓이에 들어가기 때문이다. 흔히 사용하는 대략적인 상대 오차 합은 빠른 추정을 주지만 정확한 끝점 계산과 같지는 않다.

옛 토지 기록을 현대 단위로 옮길 때에는 측정 오차 외에 단위 기준의 불확실성도 있을 수 있다. 두 종류의 범위를 한꺼번에 섞기 전에 어느 정보에서 생겼는지 분리한다. 값 하나로 압축하기보다 가정과 경계를 함께 제시하면 뒤의 독자가 다른 기준으로 다시 계산할 수 있다.

조건	하한	상한
길이	19.9	20.1
너비	11.9	12.1
넓이	236.81	243.21

탐구

너비 12.0은 정확하고 길이만 20.0±0.1이면 넓이 범위는 얼마인가?

풀이와 확인

19.9×12=238.8부터 20.1×12=241.2까지다. 한 길이만 변할 때에는 중앙 넓이 240에서 ±1.2로 대칭이다.

맞는 예와 증명의 경계

유한한 계산의 성공이 무한한 주장을 자동으로 증명하지는 않는다.

여러 관에서 수열과 도형의 패턴을 만난 독자는 자연스럽게 다음 항을 예상하게 된다. 예상은 발견의 중요한 출발점이다. 그러나 얼마만큼 확인했는지와 무엇까지 주장하는지는 구별해야 한다. 앞의 몇 항이 같아도 뒤의 규칙이 같다는 보장은 없다.

현대 재구성에서 1부터 5까지의 입력 n에 대해 n^2을 기록하자. 값은 1과 4와 9와 16과 25다. 다른 식 $n^2+(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)$도 이 다섯 입력에서 정확히 같은 값을 낸다. 각 입력마다 곱의 인수 하나가 0이 되기 때문이다.

n=6에서는 두 식이 갈라진다. 첫 식은 36이고 둘째 식은 36+120=156이다. 다섯 번 일치했다는 관찰은 여섯 번째 일치의 증명이 아니었다. 같은 표를 설명하는 모형이 여럿이면 단순성이나 맥락 같은 추가 기준으로 선택할 수 있지만 그 선택이 논리적 필연성과 같은 것은 아니다.

역사적 계산표에서도 규칙적인 숫자를 발견하면 그 규칙이 전체 표를 만들었는지 확인해야 한다. 작성 지침과 남은 계산 과정이 도움이 된다. 수치 패턴은 유력한 질문을 만들지만 자료가 말하지 않은 의도를 대신 증명하지는 않는다.

n	첫 식	둘째 식
1부터 5	같음	같음
6	36	156

탐구

두 식이 처음 다섯 입력에서 같다는 사실은 무엇을 확실하게 말해 주는가?

풀이와 확인

그 다섯 입력에 한해 값이 같다는 사실이다. 모든 자연수에서 같다는 결론을 얻으려면 일반적인 논증이 필요하다.

오차를 줄이는 반복의 이유

좋은 근삿값은 결과만 아니라 갱신 규칙과 멈춤 조건을 설명할 수 있다.

제곱근을 구하는 문제는 넓이와 수의 계산을 연결한다. 넓이가 2인 정사각형의 한 변은 정확히 어떤 유리수로 쓰이지 않는다. 그렇다고 계산을 멈출 필요는 없다. 현대 재구성에서는 현재의 추정값을 이용하여 더 나은 값으로 갱신하는 방법을 살펴볼 수 있다.

양수 x를 골라 직사각형의 두 변을 x와 2/x로 두면 넓이는 항상 2다. 두 변의 평균을 다음 추정값으로 삼자. x=1.5에서 시작하면 새 값은 (1.5+2/1.5)/2=17/12다. 다시 같은 규칙을 적용하면 577/408을 얻는다.

정확도를 제곱의 차이로 검사하면 $(17/12)^2-2=1/144$다. 다음 값에서는 $(577/408)^2-2=1/166464$로 줄어든다. 값이 그럴듯하게 보이는 것보다 넓이 조건과 얼마나 차이 나는지 계산하는 편이 검산에 유리하다. 단위와 목표 정확도를 정하면 언제 멈출지도 설명할 수 있다.

이 활동은 특정 고대 문헌의 문장을 번역한 것이 아니다. 반복 알고리즘이 무엇을 보존하며 무엇을 개선하는지 비교하기 위한 현대 재구성이다. 역사적 풀이와 비교할 때에는 같은 결과만 확인하지 말고 초기값과 단계와 검산 방식의 실제 대응을 찾아야 한다.

반복	추정값	제곱과 2의 차이
처음	3/2	1/4
한 번	17/12	1/144
두 번	577/408	1/166464

탐구

17/12의 제곱이 2보다 큰지 작은지 소수 없이 판단하라.

풀이와 확인

$17^2=289$이고 $2\times12^2=288$이다. 차이가 양수 1이므로 17/12의 제곱은 2보다 1/144만큼 크다.

관을 잇는 탐구 / 110

절차를 비교하는 대수의 작업실

같은 문제를 두 방법으로 풀기

방법의 비교에는 답의 일치뿐 아니라 각 단계에서 허용한 조건이 필요하다.

수학사의 여러 계산법을 비교할 때 한쪽을 오늘의 공식에 도달하기 전의 미완성 단계로만 보면 중요한 차이를 놓친다. 어떤 방법은 주어진 수에 매우 경제적이고 다른 방법은 일반화하기 쉽다. 실제로 어느 질문에 답하려 했는지 알면 풀이의 선택을 더 잘 이해할 수 있다.

현대 재구성으로 어떤 수의 세 배에 4를 더하면 25라는 문제를 만들자. 식은 $3x+4=25$다. 양변에서 4를 빼고 3으로 나누면 $x=7$이다. 같은 문제에서 x를 먼저 5라고 시험하면 결과는 19라서 목표보다 6 작다. 입력을 1 늘릴 때 결과가 3 늘므로 입력을 2 늘려 같은 답 7을 얻는다.

두 번째 방법이 성립하는 까닭은 출력이 입력에 일정한 비율로 반응하는 일차 관계이기 때문이다. 시험값을 정답과 비례시키는 단순 규칙과는 구별해야 한다. 상수 4가 붙어 있어 $5\times25/19$는 정답이 아니다. 식의 구조를 읽지 않고 비례만 적용하면 다른 문제를 풀게 된다.

여러 관의 풀이를 현대식으로 다시 쓸 때에도 이런 조건을 남긴다. 말로 된 절차를 식으로 옮기는 것은 유용하지만 원문이 사용하지 않은 일반 기호와 정당화까지 원저자에게 돌려서는 안 된다. 재구성의 목적과 원자료의 범위를 함께 밝히는 것이 공정한 비교다.

방법	핵심 계산	답
역연산	(25−4)/3	7
시험과 보정	5+(25−19)/3	7

> **탐구**
>
> 4x+6=30에서 x=3을 시험했다면 얼마를 보정해야 하는가?

풀이와 확인

시험 결과는 18로 목표보다 12 작다. 입력 1당 출력이 4 늘므로 입력을 3 늘려 x=6을 얻는다.

소거는 정보를 버리는가

등가인 행 변환과 필요한 정보를 지워 버리는 조작을 구분한다.

한국관과 동아시아관에서 함께 살펴볼 수 있는 주제 가운데 하나는 여러 조건을 동시에 만족하는 양을 찾는 일이다. 오늘의 연립방정식 표기는 서로 다른 기록 형식을 비교할 언어를 제공한다. 다만 현대 기호가 원자료의 배치와 조작 방식까지 대신하는 것은 아니다.

현대 재구성으로 2x+y=11과 x+3y=13을 풀자. 첫 식의 세 배에서 둘째 식을 빼면 5x=20이 되어 x=4다. 이를 첫 식에 넣으면 y=3이다. 여기에서는 소거한 y의 정보가 완전히 사라진 것이 아니라 남겨 둔 식을 통해 되찾을 수 있다.

두 식을 빼서 나온 5x=20 하나만 남기고 나머지를 버리면 상황이 달라진다. 그 식은 y가 무엇인지 말하지 않는다. 원래 두 조건과 같은 해 집합을 유지하려면 변환한 식과 독립된 식 하나를 함께 보존해야 한다. 계산판이나 표에서 어떤 줄을 남기는지가 논리적으로 중요하다.

검산은 원래의 두 식에서 각각 한다. 2×4+3=11이며 4+3×3=13이다. 중간 식에만 넣어 맞는다고 확인하면 변환 중 잘못 지워진 조건을 찾지 못할 수 있다. 여러 알고리즘을 비교할 때 결과와 함께 되돌아갈 검산 경로를 남겨야 한다.

단계	첫 조건	둘째 조건
시작	2x+y=11	x+3y=13
소거	2x+y=11	5x=20
검산	8+3=11	4+9=13

탐구

5x=20만 보고 y=0을 골라도 원래 문제의 해가 되는가?

풀이와 확인

아니다. x=4와 y=0은 첫 식에서 8이 되어 11과 다르다. 소거한 뒤에도 원래 두 조건을 모두 확인해야 한다.

넓이 그림으로 방정식을 읽기

양의 길이라는 조건을 지키면 완전제곱의 기하적 의미를 볼 수 있다.

대수와 기하는 같은 문제를 서로 다른 대상으로 나타낼 수 있다. 길이를 미지수로 놓은 그림은 식의 변형이 어떤 넓이를 더하는지 보여 준다. 반면 그림이 양의 길이만 담는다는 사실을 잊으면 현대 실수 방정식의 해와 역사적 문제의 허용 범위를 혼동하게 된다.

현대 재구성에서 $x^2+6x=16$을 생각하자. 한 변이 x인 정사각형 옆에 넓이 3x인 직사각형 두 개를 붙이면 한 모서리가 비어 있는 도형이 된다. 빈 부분은 한 변이 3인 정사각형이므로 넓이 9를 더하면 전체가 $(x+3)^2$이다.

따라서 $(x+3)^2=25$다. 양의 길이 x를 구하는 문제에서는 $x+3=5$여서 $x=2$다. 오늘의 실수 범위에서 식 자체를 풀면 $x+3=-5$도 가능해 $x=-8$을 얻는다. 두 해가 모두 식을 만족해도 음의 길이는 처음 도형의 직접적인 변이 되지 않는다.

그림은 빠진 해를 숨기는 나쁜 도구가 아니다. 그림이 다루는 대상의 범위와 식의 범위를 명시하면 두 설명이 서로를 정확하게 보완한다. 문화별 대수 문제를 비교할 때에도 어떤 양을 답으로 인정했는지 살피는 일이 풀이의 모양을 비교하는 것만큼 중요하다.

표현	덧붙인 양	결과
$x^2+6x=16$	양변에 9	$(x+3)^2=25$
양의 길이	$x+3=5$	$x=2$
실수식	$x+3=-5$도 가능	$x=-8$도 해

탐구

$x^2+6x=16$에 $x=-8$을 넣으면 왜 맞는가?

풀이와 확인

$64-48=16$이기 때문이다. 실수 방정식의 해이지만 양의 길이를 찾는 도형 문제에서는 허용되지 않는다.

알고리즘을 비교하는 비용표

빠르다는 평가는 무엇을 한 번의 작업으로 세는지에 따라 달라진다.

같은 곱셈이라도 덧셈을 반복하거나 수를 두 배씩 키우거나 자리값으로 분해할 수 있다. 각 방식의 속도를 비교하려면 작업의 단위를 먼저 정해야 한다. 한 자리 곱셈과 여러 자리 덧셈을 같은 비용으로 둘 것인지도 설명해야 한다. 계산법의 우열은 도구와 학습 조건 없이 하나의 숫자로 정해지지 않는다.

현대 재구성으로 23×13을 계산하자. 23을 열세 번 더하면 덧셈이 열두 번 필요하다. 13을 $8+4+1$로 나누면 23의 두 배 46과 네 배 92와 여덟 배 184를 만들고 $184+92+23=299$를 구할 수 있다. 두 배 만들기도 덧셈 한 번으로 세면 세 번과 두 번을 합쳐 다섯 번이다.

자리값 분해에서는 $23\times10+23\times3$으로 계산한다. 이때 10배를 쓰는 일과 3배를 구하는 일이 얼마나 쉬운지는 표기와 도구에 달렸다. 곱셈표를 이미 외운 독자와 그렇지 않은 독자의 부담도 다르다. 작업 횟수만 적고 전제를 숨기면 비교가 공정하지 않다.

알고리즘의 설명에는 정확성의 이유도 필요하다. 두 배 방식이 맞는 까닭은 $13=8+4+1$과 분배법칙 때문이다. 빨리 나온 답 하나는 절차가 언제나 맞는다는 증명이 아니다. 이 원리를 알면 더 큰 수에도 적용하며 어디서 자리를 잘못 옮겼는지 찾을 수 있다.

배수	값	13을 만들 때
1	23	선택
2	46	제외
4	92	선택
8	184	선택

탐구

23×11을 두 배 방식으로 구할 때 어떤 줄을 골라야 하는가?

풀이와 확인

11=8+2+1이므로 184와 46과 23을 더한다. 합은 253이다. 선택한 배수의 합이 11인지 먼저 확인한다.

관을 잇는 탐구 / 111

자료를 잇는 법과 남겨 둘 빈칸

이동을 말하려면 무엇이 필요한가

지도 위의 가까움과 텍스트의 전승은 서로 다른 증거를 요구한다.

전집의 세계지도는 관을 찾아가는 입구다. 지도에서 가까운 지역을 눌러 이동할 수 있다는 사실이 두 지역의 수학 사이에 직접적인 전승을 증명하지는 않는다. 지역은 탐색을 위한 분류이고 역사적 관계는 자료로 확인해야 하는 주장이다. 책을 잇는 선에는 무엇을 뜻하는지 설명이 필요하다.

유네스코가 소개하는 실크로드는 여러 거점이 이어진 교류망이다. 이 설명은 상품과 사람과 기술이 움직였던 넓은 환경을 이해하게 한다. 그렇지만 특정 정리나 계산법이 어느 도시에서 어느 도시로 전해졌는지는 별도의 텍스트와 연대 및 인물 자료를 요구한다. 일반적인 교류와 개별 전승의 질문을 구분해야 한다.

현대 재구성으로 A의 계산법과 B의 계산법이 같다는 관찰을 하자. 가능한 설명은 직접 전달뿐 아니라 공통 자료의 이용과 독립적인 발견을 포함한다. 양쪽에서 같은 특이한 예제와 같은 오류가 나타나면 단순한 결과의 일치보다 더 구체적인 단서가 된다. 그래도 필사 관계와 시기를 함께 검토해야 한다.

통합본의 비교는 먼저 같은 문제를 나란히 놓고 다른 도구와 표현을 읽는 방식으로 이루어진다. 전승 근거가 부족한 부분은 연결 가능성으로 남겨 둔다. 빈칸이 있다는 이유로 비교의 가치가 없어지는 것은 아니다. 무엇을 확인했고 무엇을 아직 모르는지 분명할수록 다음 연구 질문이 선명해진다.

관찰	곧바로 말할 수 있는 것
같은 결과	수학적 일치
같은 특이한 오류	계보를 검토할 단서
명시적 인용	저자가 밝힌 참조 관계

> **탐구**
> 두 책에 3과 4와 5의 직각삼각형이 나온다는 사실만으로 직접 전승을 확정할 수 있는가?

풀이와 확인

확정할 수 없다. 널리 발견할 수 있는 같은 관계를 다룬 것일 수 있다. 특이한 문장 대응과 연대 및 인용 같은 추가 자료가 필요하다.

[BR01] UNESCO. Silk Roads: the Routes Network of Chang'an–Tianshan Corridor

사본의 나무에 합류가 생길 때

한 자료가 여러 계통을 참고했다면 하나의 직선 계보로는 설명하기 어렵다.

의회도서관의 바티칸 수학 문헌 전시는 그리스어 자료와 아랍어 번역 및 라틴어 번역이 함께 남은 모습을 보여 준다. 번역된 텍스트는 보존의 결과이면서 새로운 독자가 사용한 자료이기도 하다. 전승을 원본 하나가 조금씩 낡아지는 과정으로만 이해하면 주석과 대조와 재편집의 역할이 사라진다.

현대 재구성으로 사본 A에서 한 줄이 빠졌고 사본 B에서는 숫자 하나가 바뀌었다고 하자. 사본 C가 A의 본문을 따르면서 B의 표를 가져오면 두 특징을 함께 지닐 수 있다. C의 직접 조상을 하나로만 정하려는 나무 모형은 이런 합류를 표현하기 어렵다.

특징이 둘 다 있다는 사실은 합류의 증거 후보지만 유일한 설명은 아니다. 두 오류가 독립적으로 생겼거나 이미 두 특징을 가진 다른 사본이 있었을 수도 있다. 자료의 연대와 필체와 배열을 함께 보며 가능한 계보를 비교해야 한다. 계산은 어떤 가설이 관찰과 충돌하는지 보여 줄 수 있다.

교정판은 이런 판단을 독자가 다시 검토할 수 있도록 차이를 남긴다. 읽기 편한 본문 하나를 제시하더라도 어느 위치에서 어떤 자료를 따랐는지 표시해야 한다. 가장 매끄러운 문장이라는 이유만으로 가장 오래된 형태라고 결론 내리지 않는다.

사본	줄 결락	숫자 변화
A	있음	없음
B	없음	있음
C	있음	있음

> **탐구**
>
> C에 A와 B의 특징이 모두 있으면 반드시 두 사본을 직접 보았는가?

풀이와 확인

반드시 그렇지는 않다. 같은 특징을 이미 가진 중간 사본을 따랐을 가능성도 있다. 직접 이용과 간접 전승을 나누어 검토해야 한다.

[BR02] 미국 의회도서관. 바티칸도서관 수학 문헌 전시

번역의 충실성을 시험하는 작은 계산

문장을 자연스럽게 고치는 과정에서도 조건과 연산의 범위는 보존해야 한다.

번역은 단어를 대응시키는 작업을 넘어 독자가 같은 관계를 이해하도록 돕는 일이다. 그런데 친숙한 표현으로 고치다가 원문이 허용하지 않은 조건을 더하거나 필요한 조건을 지울 수 있다. 수학 문장에서는 그런 변화가 간단한 대입만으로 드러나기도 한다.

현대 재구성으로 한 양에 그 절반을 더하면 18이라는 문장을 두 식으로 옮겨 보자. x+x/2=18은 원래 양과 그 절반을 더한다. 반면 (x+x)/2=18은 두 양의 합 전체를 절반으로 한다. 첫 답은 12이고 둘째 답은 18이므로 같은 문장이 아니다.

검토자는 두 번역을 각각 풀기만 하지 말고 원래 문장에 답을 넣어 보아야 한다. 12에 그 절반 6을 더하면 18이다. 18에 그 절반 9를 더하면 27이라 맞지 않는다. 역방향 확인은 자연스러운 문장을 읽으며 지나친 괄호 오류를 발견하게 한다.

역사적 문헌의 번역에서도 수치 검사는 유용하지만 충분조건은 아니다. 한 예에서 답이 우연히 같을 수 있고 용어의 의미가 더 넓은 맥락에 의존할 수도 있다. 원문과 번역과 편집자가 붙인 해설을 구분하면 독자는 어떤 층위를 검토하는지 알 수 있다.

옮긴 식	해	원문 검산
x+x/2=18	12	12+6=18
(x+x)/2=18	18	18+9≠18

탐구

원래 양에서 그 절반을 빼면 9라는 문장은 어떻게 풀리는가?

풀이와 확인

x−x/2=9이므로 x/2=9이며 x=18이다. 18에서 9를 빼면 9가 되어 문장과 맞는다.

관찰과 추정을 표에서 갈라 놓기

정확한 숫자로 표현된 추정도 입력 가정이 바뀌면 결론이 바뀐다.

역사 자료가 적을수록 숫자 하나가 강한 인상을 준다. 발견된 사본 수와 남아 있을 비율을 곱하거나 나누어 과거의 모습을 추정할 수 있지만 계산의 선명함이 가정의 불확실성을 없애 주지는 않는다. 관찰값과 추정 규칙을 표의 다른 열에 두는 것이 좋은 출발점이다.

현대 재구성에서 두 지역의 발견 수를 18권과 12권으로 두자. 남은 비율이 각각 30퍼센트와 10퍼센트라고 가정하면 원래 수의 추정은 60권과 120권이다. 발견 수가 많은 첫 지역보다 둘째 지역의 추정 원래 수가 커진다. 보존 비율이라는 가정이 순서를 바꾼 것이다.

둘째 지역의 비율을 20퍼센트로 바꾸면 두 추정값이 모두 60권이 된다. 실제 비율을 모른다면 어느 결과가 역사적 사실인지 선택할 수 없다. 대신 어느 가정에서 결론이 바뀌는지 제시할 수 있다. 이런 민감도 검토는 불확실성을 숨기지 않으면서 계산을 활용하는 방법이다.

통합본의 도표도 같은 기준으로 읽는다. 연대 범위와 관측 수치와 현대 예제의 가정은 모양이 비슷해도 근거의 종류가 다르다. 캡션에서 숫자의 성격을 확인하는 습관은 잘못된 비교를 막는다. 미확인 값을 0으로 채우면 없다는 관찰과 모른다는 상태가 섞인다는 점도 기억해야 한다.

지역	관찰한 수	가정한 비율	추정
가	18	30%	60
나	12	10%	120
나의 다른 가정	12	20%	60

탐구

둘째 지역의 남은 비율이 15퍼센트라는 가정이면 추정 원래 수는 얼마인가?

풀이와 확인

12÷0.15=80권이다. 이것은 정해진 비율 아래의 추정이며 실제 원래 수를 확인했다는 뜻은 아니다.

관을 잇는 탐구 / 112

여덟 관을 넘나드는 비교 탐구

하나의 저장 문제를 여러 표기로 풀기

같은 조건을 유지한 채 표현을 바꾸면 계산 도구가 맡는 역할을 비교할 수 있다.

이 비교 작업실의 모든 수치는 편집자가 만든 현대 재구성이다. 특정 문명의 실제 세금이나 거래량을 복원하지 않는다. 독자는 같은 문제를 여러 관에서 익힌 방법으로 표현하며 어떤 정보가 유지되는지 살펴본다. 문화의 차이를 문제의 난이도나 우열과 곧바로 연결하지 않는 것이 출발점이다.

곡물 75단위를 세 창고에 2대 3대 5의 비율로 나누자. 비율의 합은 10이므로 한 몫은 7.5단위다. 배분량은 15와 22.5와 37.5이며 합계는 75다. 몫을 정수 개수로 제한하지 않는다는 조건이 있어야 가운데와 마지막의 절반 단위를 허용할 수 있다.

반대로 나눌 수 없는 같은 크기의 상자 75개라면 같은 비율을 정확히 만족하는 정수 배분은 불가능하다. 10몫에 75개를 나누면 한 몫이 정수가 아니기 때문이다. 가까운 배분을 정하려면 남은 상자를 처리할 별도 규칙이 필요하다. 정확한 비례 문제와 근사 배분 문제는 답의 기준이 다르다.

분수와 자리값과 표는 이 차이를 드러내는 서로 다른 장치다. 표에는 대상이 곡물의 양인지 상자의 개수인지 적고 마지막에 합계와 비율을 각각 검산한다. 합계만 맞는 배분이 비율까지 맞는 것은 아니라는 점을 앞서 읽은 장부 검산과 연결해 보자.

대상	가	나	다
곡물 75단위	15	22.5	37.5
상자 80개	16	24	40

탐구

상자 80개라면 같은 비율을 정수로 정확하게 나눌 수 있는가?

풀이와 확인

한 몫이 8개이므로 16개와 24개와 40개로 나눌 수 있다. 합은 80이고 세 수의 비는 2대 3대 5다.

주기가 겹치는 날을 두 번 검산하기

나머지 조건을 목록과 대수로 함께 풀면 시간 표기의 구조가 드러난다.

달력의 여러 주기는 다른 시작점과 다른 간격을 가질 수 있다. 두 행사가 동시에 열린다는 문제를 최소공배수 하나로 처리하려면 시작점도 맞는지 확인해야 한다. 현대 재구성에서는 역사적 달력의 실제 길이를 빌리지 않고 작은 정수 주기로 이 조건을 분명하게 만든다.

어떤 날 x가 5로 나누면 2가 남고 7로 나누면 3이 남는다고 하자. 첫 조건을 만족하는 수는 2와 7과 12와 17과 22처럼 이어진다. 이 가운데 17은 7로 나누면 3이 남는다. 따라서 17은 두 조건을 동시에 만족한다.

두 주기의 최소공배수는 35이므로 17에 35를 더한 52도 같은 조건을 만족한다. 대수로는 x=5k+2를 둘째 조건에 넣어 5k가 7로 나누어 1을 남겨야 함을 얻는다. k=3을 넣으면 15의 나머지가 1이므로 같은 해 17을 찾는다.

어느 하루를 0으로 세는지와 시작일을 포함하는지도 답의 해석을 바꾼다. 수학적으로 맞는 나머지 계산이 실제 날짜와 이어지려면 기준 시점을 기록해야 한다. 각 관의 달력 설명을 비교할 때에는 주기 길이뿐 아니라 기준일과 이름 붙이는 규칙을 함께 읽는다.

후보	5로 나눈 나머지	7로 나눈 나머지
12	2	5
17	2	3
52	2	3

탐구

17 다음에 두 조건을 함께 만족하는 수는 무엇이며 직접 검산하면 어떤가?

풀이와 확인

52다. 52=5×10+2이며 52=7×7+3이다. 같은 조건은 35마다 반복된다.

문양을 비교할 때 이름보다 변환을 보기

회전과 반사의 작용을 직접 확인하면 닮은 모습과 같은 구조를 구별할 수 있다.

문양은 지리적으로 멀리 떨어진 관들을 눈으로 이어 주지만 닮았다는 인상만으로 교류를 단정할 수는 없다. 수학적으로는 어떤 변환 뒤에 모양이 그대로 남는지 살필 수 있다. 역사적으로는 재료와 제작법과 사용 맥락을 따로 확인해야 한다. 구조의 비교와 문화적 해석은 서로 다른 질문이다.

현대 재구성으로 원 둘레의 네 자리에 검정과 흰색을 번갈아 놓자. 위와 아래가 검정이고 좌우가 흰색이면 반 바퀴 회전 후 같은 배열이 된다. 한 바퀴의 사분의 일만 회전하면 색이 서로 바뀌어 원래 배열과 다르다. 색을 구별한다는 조건이 대칭의 종류를 결정한다.

네 자리가 모두 같은 색이면 사분의 일 회전도 대칭이다. 모양의 위치는 그대로인데 색의 정보만 바꾸어 대칭이 달라졌다. 따라서 문양을 단순화한 도해를 만들 때 무엇을 생략했는지 밝혀야 한다. 색과 선의 굵기와 겹침 순서를 없애면 원자료와 다른 대칭을 얻을 수 있다.

여러 관의 문양을 비교하는 활동에서는 그림 아래에 보존한 특징을 적는다. 같은 변환 구조를 가진 두 문양도 같은 의미를 가진다고 말할 수는 없다. 수학적 분류는 공통점 하나를 보여주는 도구이며 제작자의 의도를 전부 설명하는 결론이 아니다.

배열	90° 회전	180° 회전
두 색 교대	다름	같음
모두 같은 색	같음	같음

> **탐구**
> 교대하는 두 색의 네 자리 배열을 180° 돌리면 같지만 90° 돌리면 다른 까닭은 무엇인가?

풀이와 확인

180°는 같은 색 자리끼리 대응시키고 90°는 서로 다른 색 자리로 옮긴다. 색을 구별하는 한 두 변환의 결과가 다르다.

독자가 다음 판본의 편집자가 될 때

책을 마치는 활동은 답을 외우는 일이 아니라 다른 사람이 검토할 수 있는 설명을 만드는 일이다.

여덟 관을 다 읽었다면 하나의 예제를 골라 작은 전시 페이지를 만들어 보자. 먼저 원자료에서 확인한 사실을 두세 문장으로 적는다. 그다음 독자가 따라 할 수 있는 현대 재구성 계산을 제시한다. 마지막으로 두 부분을 어떻게 연결했으며 무엇은 아직 확인하지 못했는지 설명한다.

현대 재구성의 문제를 18×17로 정하면 결과는 306이다. 18×(10+7)=180+126으로 계산한 뒤 17×(20−2)=340−34로 다시 확인한다. 서로 다른 분해가 같은 결과를 주는지 보는 것이다. 숫자가 맞더라도 그 계산이 역사적 원문에 실제로 나타난다는 주장은 따로 확인해야 한다.

도판을 만들었다면 축척과 방향과 단위 및 생략한 요소를 캡션에 적는다. 자료를 번역했다면 원문과 편집자의 해설을 나눈다. 여러 판본에서 값이 다르면 최신 파일의 숫자를 무조건 고르지 말고 왜 선택했는지 근거를 남긴다. 결과뿐 아니라 판단의 경로가 다음 독자의 출발점이 된다.

통합본의 세계지도와 관별 책은 이러한 왕복 읽기를 돕는다. 한 지역에서 시작해 수의 표기와 측정과 절차라는 주제를 따라 다른 관으로 이동할 수 있다. 어느 길로 읽더라도 확인한 사실과 계산의 가정과 남아 있는 질문을 함께 가져간다면 지식은 단순히 모인 자료를 넘어 다시 검토할 수 있는 책이 된다.

검토 대상	남길 기록
역사 설명	자료와 해당 위치
재구성 계산	가정과 검산
새 도판	단위와 생략
수정	바뀐 값과 이유

> **탐구**
>
> 18×17=306을 기록한 현대 예제에서 역사적 사실과 구별하여 남길 말은 무엇인가?

풀이와 확인

수치는 편집자가 정한 현대 재구성이며 원문 문제의 직접 번역이 아니라는 설명이다. 참고한 자료와 계산 검산도 각각 표시한다.

관을 잇는 탐구 / 113

참고 자료와 자료 읽기

본문의 계산과 도해는 개념을 설명하기 위한 현대의 재구성이다. 역사 자료에 직접 남은 문제는 본문에서 따로 밝혔다. 표지 삽화는 AI로 제작한 시각적 해석이며 특정 유물의 복원도가 아니다.

[BR01] UNESCO. Silk Roads: the Routes Network of Chang'an–Tianshan Corridor
https://whc.unesco.org/en/list/1442

[BR02] 미국 의회도서관. 바티칸도서관 수학 문헌 전시
https://www.loc.gov/exhibits/vatican/math.html

고대 오리엔트관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이 장은 개정판에 새로 붙인 보충 탐구다. 본문의 각 장이 계산의 결과나 조건을 말로 설명하고 지나간 자리에서 그림을 하나 더 그려 그 이유를 눈으로 확인하도록 구성했다. 단원마다 이어 읽을 본문의 장을 표시했으므로 해당 장을 읽은 뒤 펼치면 흐름이 자연스럽다.

여기에 실은 도해와 수치는 별도 표시가 없는 한 오늘의 독자를 위한 현대 재구성이다. 옛 자료가 실제로 이런 그림을 남겼다는 뜻은 아니며 자료가 말하는 범위는 각 단원 끝의 출처에서 따로 확인할 수 있다. 이번 개정에서는 본문에서 표로만 보여 주던 일부 도해도 실제 그림으로 다시 그렸다.

이어 읽기 / 직사각형 속에 숨은 미지수

차와 넓이 문제를 자르고 붙여 보기

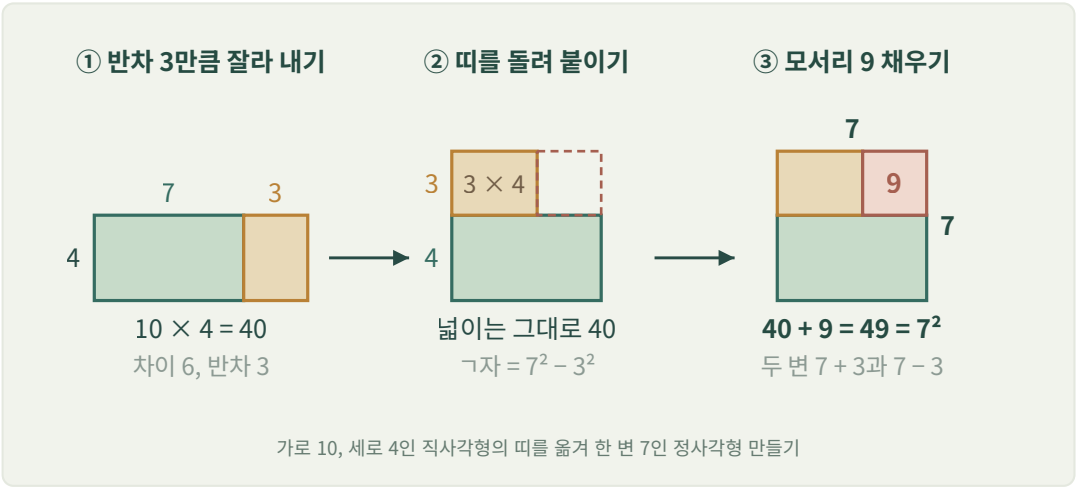
반차를 제곱해 넓이에 더하는 절차를 실제 조각 옮기기로 확인한다.

5장의 「반으로 나눈 차이」에서는 길이 차이가 6이고 넓이가 40인 직사각형을 반차 3으로 풀었다. 반으로 하고 제곱해 더한 뒤 제곱근을 구하는 순서는 기억하기 쉽지만 왜 그 순서가 맞는지는 식만으로 잘 보이지 않는다. 여기서는 직사각형을 실제로 자르고 붙이는 현대 재구성으로 같은 절차를 다시 읽는다. 그림의 조각들은 학습용 모형이며 특정 점토판의 그림을 옮긴 것이 아니다.

가로 10과 세로 4인 직사각형에서 긴 변의 남는 부분 6을 반으로 나누어 폭 3인 띠 하나를 잘라 낸다. 남은 부분은 가로 7과 세로 4이고 잘라 낸 띠는 3×4다. 이 띠를 돌려 남은 조각의 위쪽에 붙이면 한 변 7인 정사각형에서 모서리 하나가 빠진 ㄱ자 모양이 된다. 조각을 옮겼을 뿐이므로 넓이는 여전히 40이다.

빠진 모서리는 한 변 3인 정사각형이므로 넓이 9를 채우면 40+9=49인 온전한 정사각형이 생긴다. 49의 제곱근 7은 이 정사각형의 한 변이며 원래 두 변의 가운데 값이다. 처음 잘라 낸 반차 3을 7에 더하면 긴 변 10을 얻고 7에서 빼면 짧은 변 4를 얻는다. 반으로 하라와 제곱하라와 더하라와 뿌리를 구하라라는 네 지시가 각각 자르기와 모서리 재기와 채우기와 한 변 읽기에 대응한다.

일반적으로 두 변을 m+h와 m−h로 쓰면 ㄱ자 모양의 넓이는 m^2-h^2이고 모서리를 채운 정사각형은 m^2이다. 따라서 넓이에 h^2을 더하면 언제나 가운데 값의 제곱이 된다. 그림은 양의 길이만 다루므로 음수 해가 끼어들 자리가 없다. 같은 그림을 합과 넓이 문제에 거꾸로 쓰면 큰 정사각형에서 모서리를 덜어 내는 과정이 된다.



가로 10, 세로 4인 직사각형의 띠를 옮겨 한 변 7인 정사각형 만들기

탐구

차이가 4이고 넓이가 21인 직사각형을 같은 방식으로 자르고 붙이면 채울 모서리와 두 변은 무엇인가?

풀이와 확인

반차는 2이므로 폭 2인 띠를 잘라 옮기고 한 변 2인 모서리 넓이 4를 채운다. 21+4=25이므로 큰 정사각형의 한 변은 5다. 두 변은 5+2=7과 5−2=3이며 $7\times3=21$과 $7-3=4$로 두 조건을 모두 확인한다.

[06] 스토니브룩대학교 바빌로니아의 정사각형과 방정식

이어 읽기 / 플림프턴 322와 직각삼각형

네 삼각형으로 확인하는 직각 관계

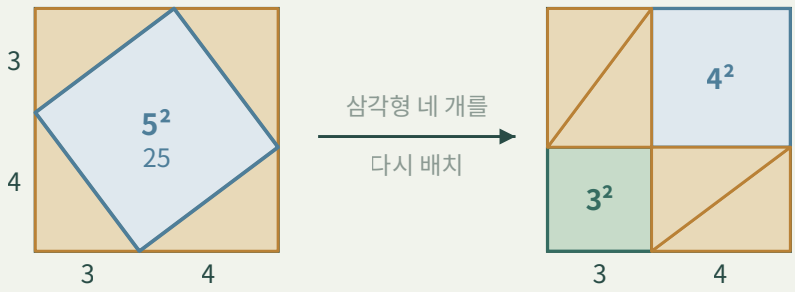
같은 정사각형 안에서 삼각형 네 개를 옮기면 $3^2+4^2=5^2$이 넓이의 관계로 드러난다.

7장은 3과 4와 5에서 9+16=25가 성립함을 수로 확인하고 그 배수와 생성 공식을 다루었다. 그러나 두 짧은 변의 제곱을 더하면 왜 빗변의 제곱이 되는지는 계산 결과로만 받아들였다. 여기서는 한 변 7인 정사각형 두 개를 이용한 현대 학습용 증명으로 그 관계를 넓이로 보여 준다. 이 증명은 오늘의 설명 방식이며 플림프턴 322의 필자가 이런 그림을 썼다는 뜻은 아니다.

왼쪽 정사각형의 네 모서리에 짧은 변이 3과 4인 직각삼각형을 하나씩 놓는다. 각 변 위에서 3과 4가 차례로 이어지므로 한 변은 7이 되고 가운데에는 네 빗변으로 둘러싸인 기울어진 사각형이 남는다. 삼각형의 두 예각을 합하면 직각이므로 이 사각형의 네 각도 모두 직각이고 네 변은 모두 5다. 따라서 가운데는 넓이 25인 정사각형이며 전체 49에서 삼각형 네 개의 넓이 24를 뺀 값과도 일치한다.

오른쪽 정사각형에서는 같은 삼각형 네 개를 두 쌍으로 묶어 3×4 직사각형 두 개를 만든다. 두 직사각형을 서로 마주 보는 모서리에 놓으면 남는 자리는 한 변 3인 정사각형과 한 변 4인 정사각형이다. 두 그림은 같은 49에서 같은 24를 뺐으므로 남은 넓이도 같다. 따라서 9+16=25가 수의 계산이 아니라 넓이의 이동으로 확인된다.

짧은 변을 a와 b로 바꾸어도 논증은 그대로다. 한 변 a+b인 정사각형에서 삼각형 네 개의 넓이 2ab를 빼면 한쪽 배치에서는 c^2이 남고 다른 쪽 배치에서는 a^2+b^2이 남는다. 배수 삼각형 6과 8과 10을 넣으면 한 변 14인 정사각형에서 같은 그림이 네 배의 넓이로 다시 나타난다. 수표의 검산과 그림의 증명은 서로 다른 종류의 확인이므로 함께 놓고 읽으면 좋다.



한 변 7인 정사각형에서 삼각형 네 개를 옮겨 25 = 9 + 16 확인

탐구

짧은 변이 5와 12인 직각삼각형으로 같은 그림을 그리면 큰 정사각형과 가운데 정사각형의 넓이는 각각 얼마인가?

풀이와 확인

큰 정사각형의 한 변은 17이므로 넓이는 289다. 삼각형 하나의 넓이는 30이고 네 개는 120이다. 289−120=169=13^2이며 오른쪽 배치에서도 25+144=169로 같은 값을 확인한다.

이어 읽기 / 이집트의 수와 두 배 계산

두 배로 늘리기와 절반으로 줄이기 비교

왼쪽 수를 절반으로 줄여 가는 현대 계산법이 두 배 표와 같은 줄을 고른다는 것을 확인한다.

8장의 두 배 표는 19를 16+2+1로 나눈 뒤 해당 줄의 오른쪽 값을 더해 19×23=437을 얻었다. 오늘날 학습 자료에는 한쪽 수를 절반으로 줄이고 다른 쪽 수를 두 배로 늘리는 계산법도 자주 소개된다. 이 절차는 고대 이집트 문헌의 방법으로 소개하는 것이 아니라 두 배 표의 구조를 다른 방향에서 비교하기 위한 현대 학습용 모형이다. 두 방법이 같은 줄을 고르는 이유를 따라가 본다.

왼쪽에는 19에서 시작해 반으로 나누고 나머지를 버린 9와 4와 2와 1을 적는다. 오른쪽에는 23에서 시작해 46과 92와 184와 368을 적는다. 왼쪽 수가 홀수인 줄만 골라 오른쪽 값을 더하면 23+46+368=437이다. 고른 줄은 두 배 표에서 1과 2와 16에 해당하는 줄과 정확히 같다.

이 절차가 맞는 까닭은 각 줄에서 남은 곱과 모은 값의 합이 변하지 않기 때문이다. 19×23에서 홀수 19는 23 하나를 먼저 모으고 나머지 18×23을 9×46으로 바꿀 수 있다. 짝수 4는 4×92=2×184처럼 아무것도 모으지 않고 반으로 줄여도 곱이 같다. 그림 오른쪽 열의 식은 모든 줄에서 437을 유지하며 마지막 줄의 남은 곱 368이 모은 값 69와 합쳐지면서 계산이 끝난다.

두 배 표 방법은 큰 묶음부터 빼 나가며 16+2+1을 찾고 절반 방법은 홀짝을 차례로 읽어 같은 분해를 작은 묶음부터 찾는다. 앞의 방법에는 뺄셈이 필요하고 뒤의 방법에는 반으로 나누기가 필요하므로 계산 비용의 성격이 다르다. 어느 쪽이든 오른쪽 열은 두 배만 하면 되므로 덧셈 중심의 계산이라는 공통점이 있다. 다만 같은 구조를 공유한다는 사실만으로 한쪽이 다른 쪽에서 나왔다고 말할 수는 없다.

절반 (÷2)	두 배 (×2)	홀수?	모은 값	남은 곱 + 모은 값
19	23	●	23	19 × 23 + 0
9	46	●	69	9 × 46 + 23
4	92	○	69	4 × 92 + 69
2	184	○	69	2 × 184 + 69
1	368	●	437	1 × 368 + 69
홀수 줄: 23 + 46 + 368 = 437				모든 줄에서 437

19 × 23을 절반과 두 배로 계산할 때 홀수 줄만 모으는 과정

탐구

13×21을 절반으로 줄이는 방법으로 계산하면 어떤 줄을 고르는가?

풀이와 확인

왼쪽은 13과 6과 3과 1이고 오른쪽은 21과 42와 84와 168이다. 홀수인 13과 3과 1의 줄을 골라 21+84+168=273을 얻는다. 8장의 두 배 표에서 고른 1과 4와 8의 줄과 같으며 13×21=273으로 확인된다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

이어 읽기 / 가정한 값에서 답으로

두 번 가정해 고정항 문제 풀기

고정된 더하기 항이 있어도 시험값 두 개의 결과를 비교하면 답을 찾을 수 있다.

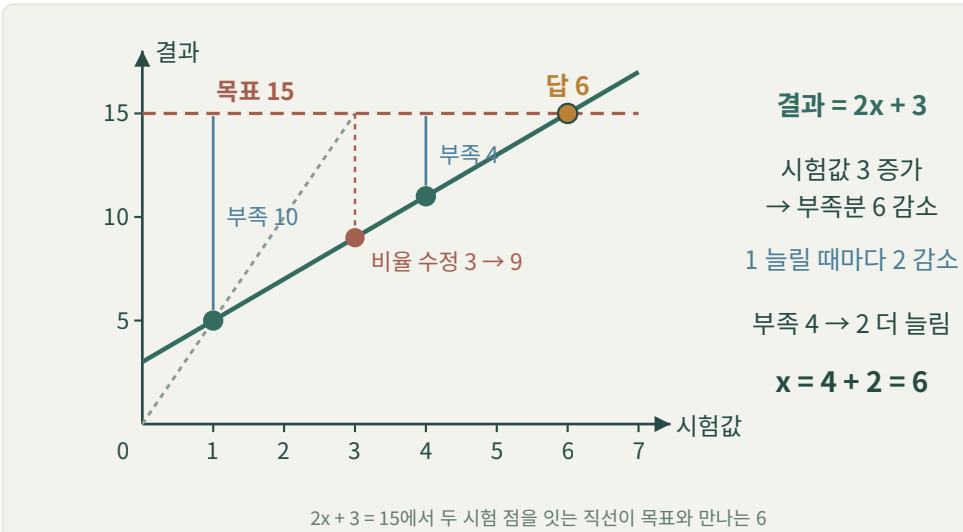
10장의 「고정된 수를 더하면 달라진다」는 2x+3=15에 시험값 하나의 비율 수정을 적용하면 틀린다는 것을 보였다. 시험값 1의 결과 5를 세 배로 맞추어 x=3을 택하면 실제 결과는 9이기 때문이다. 그러면 고정항을 먼저 빼는 방법 외에 시험값만으로 답을 찾는 길은 없을까? 여기서는 시험값을 두 번 넣는 현대 재구성을 학습용 모형으로 살펴본다.

시험값 1을 넣으면 결과는 5로 목표 15보다 10 부족하다. 시험값 4를 넣으면 결과는 11로 4 부족하다. 시험값을 3 늘렸더니 부족분이 6 줄었으므로 시험값을 1 늘릴 때마다 부족분은 2

씩 준다. 남은 부족분 4를 없애려면 시험값을 2 더 늘려야 하므로 x=6이며 2×6+3=15로 확인된다.

그래프에서 보면 2x+3의 값은 세로축의 3에서 출발하는 직선 위에 있다. 시험값 하나의 비율 수정은 원점과 시험 점을 잇는 점선을 따라가므로 실제 직선과 어긋난다. 두 시험 점을 잇는 직선은 실제 관계와 일치하므로 목표 높이 15와 만나는 곳이 곧 답이다. 비율 수정이 성공하려면 직선이 원점을 지나야 한다는 10장의 설명을 그림으로 다시 본 셈이다.

이 방법은 결과가 시험값에 따라 직선으로 변하는 문제, 곧 ax+b 꼴에서만 정확하다. 결과가 x^2처럼 휘어지는 관계라면 두 점을 잇는 직선은 근삿값만 준다. 한 번의 가정이 통하는 범위와 두 번의 가정이 통하는 범위를 구별하면 각 절차의 조건이 더 선명해진다. 두 번 가정하는 규칙의 역사적 출처는 이 책의 자료 범위를 넘어서므로 여기서는 계산 원리만 다룬다.



2x + 3 = 15에서 두 시험 점을 잇는 직선이 목표와 만나는 6

탐구

3x+5=26에서 시험값 2와 5를 넣어 두 번 가정하는 방법으로 답을 구하라.

풀이와 확인

시험값 2의 결과는 11로 15 부족하고 시험값 5의 결과는 20으로 6 부족하다. 시험값을 3 늘릴 때 부족분이 9 줄었으므로 1 늘릴 때마다 3씩 준다. 남은 부족분 6을 없애려면 2를 더 늘려 x=7이며 3×7+5=26으로 확인된다.

[011] 세인트앤드루스대학교 이집트 수학 파피루스

이어 읽기 / 경사와 원과 밭의 넓이

팔각형으로 다시 보는 원 넓이 규칙

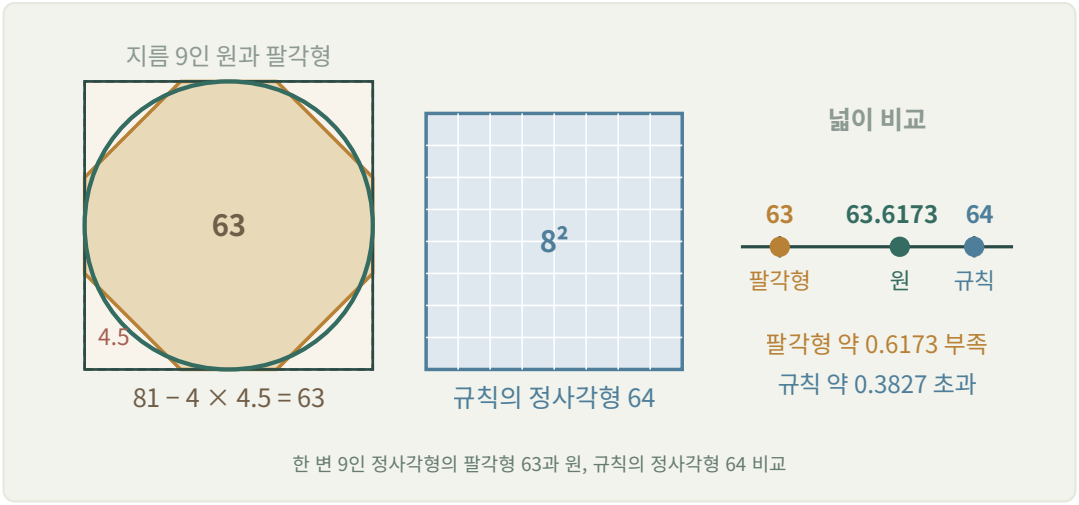
한 변 9인 정사각형의 모서리를 잘라 낸 팔각형은 원의 넓이와 규칙의 값 64를 잇는 학습용 모형이 된다.

11장은 지름의 1/9을 덜어 낸 길이를 제곱하는 규칙으로 지름 9인 원의 넓이를 64로 계산하고 정확한 값 약 63.6173과 비교했다. 그런데 왜 하필 8의 제곱이 원에 가까운 넓이가 되는지는 수치만으로는 잘 보이지 않는다. 여기서는 원을 둘러싼 정사각형에서 모서리를 잘라 내는 학습용 모형으로 그 값을 가늠한다. 이 모형은 규칙이 실제로 이렇게 만들어졌다고 주장하는 것이 아니라 수치를 이해하기 위한 현대 재구성이다.

지름 9인 원은 한 변 9인 정사각형 안에 꼭 들어간다. 정사각형의 각 변을 3씩 세 부분으로 나누고 네 모서리에서 짧은 변이 3인 직각이등변삼각형을 잘라 내면 팔각형이 남는다. 잘라 낸 삼각형 하나의 넓이는 4.5이므로 네 개의 합은 18이고 팔각형의 넓이는 81−18=63이다. 그림에서 팔각형은 비스듬한 변 쪽에서 원의 일부를 잘라 내고 곧은 변 쪽에서는 원 밖으로 조금 나간다.

팔각형 63은 원의 넓이보다 약 0.6173 작고 규칙의 값 64는 약 0.3827 크다. 63에 가까운 제곱수를 찾으면 $8^2=64$이므로 한 변 8인 정사각형이 자연스러운 후보가 된다. 상대 오차로 보면 팔각형은 약 0.97퍼센트 부족하고 규칙은 약 0.60퍼센트 초과한다. 팔각형보다 규칙이 오히려 원에 더 가깝다는 점도 확인할 수 있다.

지름을 d로 두면 같은 방법의 팔각형 넓이는 $d^2-2(d/3)^2=7d^2/9$이다. 이 값은 π를 28/9, 곧 약 3.111로 쓰는 것과 같아서 규칙이 쓰는 256/81, 곧 약 3.160보다 오늘의 π에서 더 멀다. 두 근사의 차이는 지름 9에서 넓이 1이며 일반적으로 $d^2/81$이므로 지름의 제곱에 비례해 커진다. 근사 규칙을 평가할 때 같은 대상을 여러 모형으로 둘러싸 비교하면 판단 근거가 분명해진다.



한 변 9인 정사각형의 팔각형 63과 원, 규칙의 정사각형 64 비교

탐구

지름 18인 원에 같은 팔각형 모형을 적용하면 넓이는 얼마이며 규칙의 값과 얼마나 다른가?

풀이와 확인

한 변 18인 정사각형의 넓이는 324이고 모서리 삼각형은 짧은 변이 6이므로 하나에 18, 네 개에 72다. 팔각형 넓이는 324−72=252다. 규칙의 값은 16^2=256이므로 차이는 4이며 지름 9일 때 차이 1의 네 배다.

[O12] 대영박물관 린드 파피루스의 수학 문제

인도관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

인도관의 본문과 이어지는 다섯 단원이다. 각 단원 위에 표시한 장을 먼저 읽으면 그림이 무엇을 확인하는지 분명해진다.

이어 읽기 / 줄과 넓이의 기하학

두 정사각형을 하나로 합치는 그림

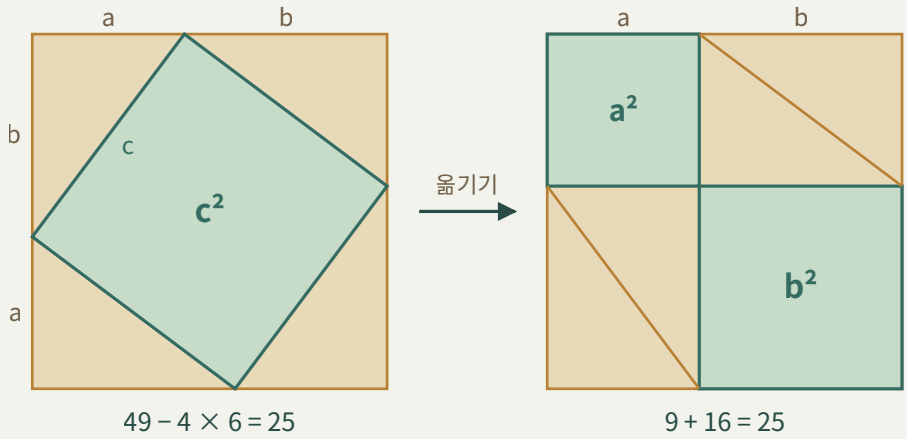
넓이가 a^2과 b^2인 두 정사각형을 넓이를 잃지 않고 하나의 정사각형으로 바꾸는 방법을 조각 옮기기로 확인한다.

1장에서는 한 변이 1인 정사각형의 대각선으로 넓이가 2인 정사각형을 만들었다. 이것은 크기가 같은 두 정사각형을 하나로 합친 특수한 경우이다. 크기가 다른 두 정사각형을 합치려면 어떤 길이를 새 변으로 삼아야 할까? 슐바수트라를 다룬 연구는 이런 넓이 보존 작도를 제단 제작 지식의 중요한 부분으로 소개한다.

한 변이 $a+b$인 큰 정사각형을 두 번 그려 보자. 왼쪽 그림에서는 네 모서리에 두 변이 a와 b인 직각삼각형을 하나씩 두고 가운데에 기울어진 정사각형을 남긴다. 오른쪽 그림에서는 같은 네 삼각형을 두 직사각형으로 모아 한쪽 구석에 a^2을, 다른 구석에 b^2을 남긴다. 두 큰 정사각형의 넓이가 같고 빼낸 네 삼각형도 같으므로 남은 부분의 넓이도 같다.

따라서 가운데 정사각형의 넓이 c^2은 a^2+b^2과 같다. 식으로는 $(a+b)^2-4\times(ab/2)=a^2+b^2$이다. $a=3$과 $b=4$를 넣으면 $49-24=25$이고 $9+16=25$이므로 새 정사각형의 한 변은 5이다. 결국 두 정사각형을 합친 정사각형의 변은 두 변을 직각으로 놓은 삼각형의 빗변이다.

이 그림은 두 변을 직각으로 놓으면 빗변의 제곱이 두 정사각형의 합이 된다는 것을 넓이의 언어로 보여 준다. 1장의 3과 4와 5로 직각을 확인하는 방법은 이 관계의 역을 쓰는 것이다. 다만 여기 그린 조각 배치는 현대 재구성이며 특정 문헌의 그림을 옮긴 것이 아니다. 실제 줄로 작도할 때는 두 변을 직각으로 놓는 단계가 먼저 정확해야 하므로 앞에서 다룬 3과 4와 5의 매듭 확인이 다시 필요하다.



같은 큰 정사각형에서 네 삼각형을 빼면 c^2과 a^2+b^2이 남는다.

탐구

한 변이 5와 12인 두 정사각형을 하나로 합치면 새 정사각형의 한 변은 얼마인가?

풀이와 확인

큰 정사각형의 넓이는 $17^2=289$이고 네 삼각형의 넓이는 $4\times30=120$이다. 남은 넓이는 169이므로 한 변은 13이다. $25+144=169$로도 같은 값을 확인할 수 있다.

[S1] Ancient Indian Mathematics: Sulbasutras – A Mathematical Review

이어 읽기 / 방정식이 묻는 조건

제곱 완성 그림을 일반식으로

$x^2+6x=16$에서 쓴 띠와 모서리의 그림은 계수가 무엇이든 같은 방식으로 작동한다.

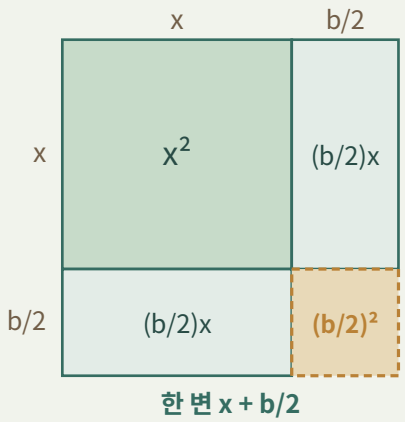
5장의 그림은 $x^2+6x=16$에서 넓이 $3x$인 띠 두 개와 넓이 9인 모서리를 사용했다. 6을 일반적인 양수 b로 바꾸면 띠의 폭은 $b/2$가 되고 두 띠의 넓이는 각각 $(b/2)x$이다. 두 띠를 정사각형 x^2의 오른쪽과 아래쪽에 붙이면 넓이는 x^2+bx가 되며 모서리에 한 변 $b/2$인 빈칸이 남는다.

빈 모서리에 넓이 $(b/2)^2$을 보태면 한 변이 $x+b/2$인 정사각형이 완성된다. 같음을 유지하려면 우변 c에도 같은 넓이를 더해야 하므로 $(x+b/2)^2=c+(b/2)^2$이다. x가 양의 길이라면 양변

의 양의 제곱근을 택해 $x=\sqrt{(c+(b/2)^2)}-b/2$를 얻는다. 5장의 예에 $b=6$과 $c=16$을 넣으면 $\sqrt{25}-3=2$가 되어 앞의 답과 일치한다.

이 일반식은 b가 홀수일 때도 그대로 쓸 수 있다. 띠의 폭이 분수가 될 뿐 그림의 구조는 달라지지 않는다. 표의 세 예에서 보듯 보태는 넓이는 언제나 b의 절반을 제곱한 값이며 그 결과 우변 $c+(b/2)^2$이 어떤 유리수의 제곱이 되면 답이 근호 없이 나오고, 그렇지 않으면 답은 제곱근을 포함한 길이로 남는다.

그림은 x가 양수이고 b와 c도 양수라는 조건을 전제로 한다. 순수한 방정식으로 보면 $x+b/2$가 음수인 경우도 해가 되므로 음의 근이 하나 더 있다. 이 장에서 본 것처럼 도형 문제의 답과 방정식의 해 집합을 구분해 적어야 한다. 여기서 쓴 문자식과 근의 표현은 학습용으로 정리한 현대 재구성이다.



$$x^2 + bx = c$$

$$x^2 + bx + (b/2)^2 = c + (b/2)^2$$

$$(x + b/2)^2 = c + (b/2)^2$$

$$\mathbf{x = \sqrt{(c + (b/2)^2)} - b/2}$$

x > 0인 길이 조건에서의 답

예: b = 4, c = 21이면 x = 3

폭 b/2인 띠 두 개와 모서리 $(b/2)^2$으로 정사각형을 완성한다.

식	보태는 넓이	완성된 제곱	양의 해
$x^2+6x=16$	9	$(x+3)^2=25$	2
$x^2+4x=21$	4	$(x+2)^2=25$	3
$x^2+8x=20$	16	$(x+4)^2=36$	2

탐구

$x^2+3x=10$을 같은 그림으로 풀면 모서리에 보태는 넓이와 양의 해는 무엇인가?

풀이와 확인

띠의 폭은 3/2이므로 모서리 넓이는 9/4이다. $(x+3/2)^2=10+9/4=49/4$이므로 $x+3/2=7/2$이고 $x=2$이다. 4+6=10으로 확인된다.

[S3] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Brahmagupta

이어 읽기 / 쿠타카와 정수의 길

두 주기를 한 격자에 펼치기

4일 주기와 7일 주기의 만남을 4행 7열의 격자에 날짜를 채워 넣어 한눈에 본다.

6장의 두 신호 문제에서 첫 신호는 4의 배수인 날에 켜지고 둘째 신호는 7로 나눈 나머지가 1인 날에 켜졌다. 날짜 t마다 4로 나눈 나머지와 7로 나눈 나머지를 함께 적으면 t를 4행 7열 격자의 한 칸에 놓을 수 있다. 행은 4로 나눈 나머지이고 열은 7로 나눈 나머지이다. 하루가 지나면 두 나머지가 모두 1씩 늘어나므로 한 칸 아래와 한 칸 오른쪽으로 옮겨 가며 끝에 이르면 반대편으로 돌아온다.

0일부터 27일까지 채우면 28칸이 하나도 겹치지 않고 모두 찬다. 4와 7의 최소공배수가 28이므로 28일 전에는 같은 나머지 쌍이 다시 나오지 않기 때문이다. 첫 신호의 날은 맨 윗줄에 모이고 둘째 신호의 날은 나머지 1의 열에 모인다. 그 줄과 열이 만나는 칸은 하나뿐이며 그 칸에 적힌 수가 첫 만남인 8일이다.

28일이 지나면 격자를 처음부터 다시 채우므로 만남은 8과 36과 64처럼 28일 간격으로 되풀이된다. 이것은 본문의 일반식 $t=8+28k$를 그림으로 읽은 것이다. 이처럼 서로소인 두 주기에서는 어떤 나머지 쌍을 골라도 한 주기 안에 정확히 한 번 나타난다. 현대에는 이 성질을 중국인의 나머지 정리라는 이름으로 부르지만 여기서는 격자 모형으로만 설명한다.

두 주기가 서로소가 아니면 상황이 달라진다. 주기가 4와 6이면 날짜의 나머지 쌍은 24칸 가운데 12칸에만 나타난다. 4와 6이 모두 짝수이므로 두 나머지의 홀짝이 언제나 같아야 하기 때문이다. 이는 6장에서 최대공약수가 우변을 나누어야 정수해가 있다고 한 조건과 같은 내용이다. 이 격자는 그 조건을 확인하는 학습용 모형이다.



4행 7열 격자에서 첫 줄과 나머지 1의 열이 만나는 칸은 8이다.

탐구

첫 신호는 4의 배수인 날에, 둘째 신호는 6으로 나눈 나머지가 1인 날에 켜진다면 두 신호는 만날 수 있는가?

풀이와 확인

만날 수 없다. 4의 배수는 짝수이지만 6으로 나눈 나머지가 1인 수는 6y+1 꼴이어서 홀수이다. 4x=6y+1의 좌변은 짝수이고 우변은 홀수이므로 정수해가 없다. 최대공약수 2가 1을 나누지 못한다는 조건과 같은 결론이다.

[S2] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Aryabhata I

이어 읽기 / 수열로 읽는 변화

정사각형을 나누어 읽는 무한합

넓이 1인 정사각형을 계속 나누면 등비급수의 부분합과 남은 오차가 함께 보인다.

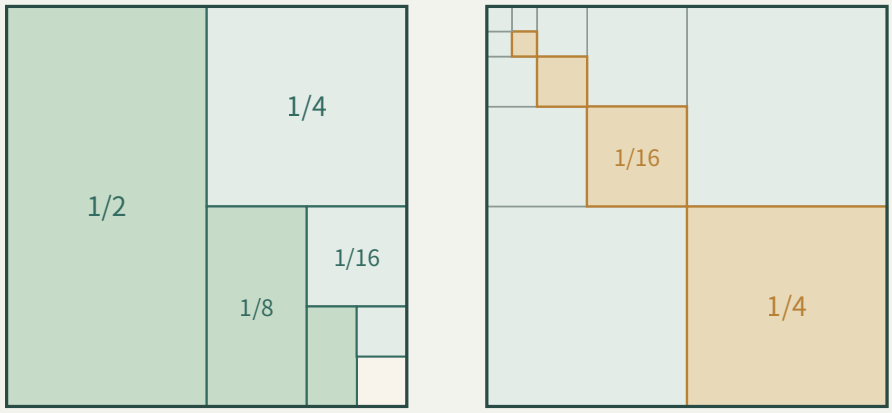
9장에서는 1/2+1/4+1/8+…의 부분합이 1−1/2^n이라는 식을 구했다. 넓이가 1인 정사각형을 반으로 자르고 남은 쪽을 다시 반으로 자르는 일을 되풀이하면 이 식을 그림으로 읽을 수 있다. 여섯 번 자르면 색칠한 조각의 넓이는 63/64이다. 남은 빈칸의 넓이 1/64가 바로 부분합과 1의 차이이다.

같은 생각을 공비 1/4인 급수에 적용해 보자. 정사각형을 네 칸으로 나누어 오른쪽 아래 한 칸을 칠하고 왼쪽 위 칸을 다시 네 칸으로 나누는 일을 되풀이한다. 각 단계에서 칠하지 않은

두 칸과 칠한 한 칸은 넓이가 같으므로 어느 겹에서나 칠한 부분은 그 겹의 1/3이다. 따라서 1/4+1/16+1/64+…은 1/3에 다가간다.

세 항까지 더하면 21/64이다. 1/3과의 차이는 1/192이며 이는 아직 나누지 않은 왼쪽 위 칸 1/64의 1/3과 같다. 일반적으로 n항 부분합은 (1−(1/4)^n)/3이므로 차이는 (1/4)^n/3이다. 9장의 빼기 방법으로 구한 공식과 그림이 같은 결과를 준다.

그림은 남은 넓이가 얼마인지 보여 주므로 오차를 제어하는 근거가 된다. 그러나 그림 몇 단계만으로 무한 과정이 끝난다고 말하지는 않는다. 남은 넓이를 원하는 만큼 작게 만들 수 있다는 사실을 식으로 확인할 때 무한합의 값이 정해진다. 여기의 정사각형 분할은 학습용 모형이다.



1/2 + 1/4 + ⋯ + 1/64 = 63/64
남은 빈칸이 오차 1/64

1/4 + 1/16 + 1/64 + ⋯ = 1/3
겹마다 세 칸 중 한 칸

반씩 나누면 합이 1에, 네 칸 중 한 칸씩 칠하면 1/3에 다가간다.

더한 항 수	공비 1/2의 부분합	공비 1/4의 부분합
1	1/2	1/4
2	3/4	5/16
3	7/8	21/64

탐구

1/4+1/16+1/64+1/256의 값과 1/3과의 차이는 얼마인가?

풀이와 확인

합은 85/256이다. 1/3과의 차이는 1/768이며 이는 (1/4)^4/3과 같다. 항 하나를 더할 때마다 차이가 4분의 1로 줄어든다.

[S5] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Bhaskara II

이어 읽기 / 사인표와 하늘의 계산

반현과 호와 접선의 길이 비교

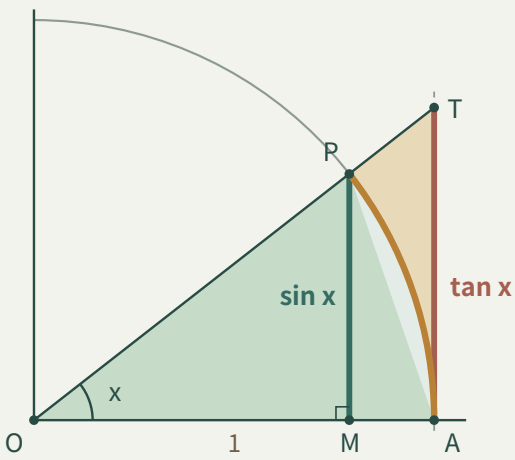
반지름 1인 원에서 세 넓이를 비교하면 작은 각에서 사인값이 라디안 값에 가까운 이유가 드러난다.

11장에서는 반지름 1인 원에서 중심각 2x인 현의 절반, 곧 각 x에 대한 반현의 길이가 sin x임을 보았고 라디안은 호의 길이라는 점도 확인했다. 그렇다면 같은 각에 대응하는 반현과 호는 얼마나 다를까? 그림에서 점 P에서 내린 수선 PM이 반현 sin x이고 A에서 P까지의 호 길이가 x이다. A에서 그은 접선이 반직선 OP와 만나는 점을 T라 하면 AT의 길이는 tan x이다.

세 도형의 넓이를 비교하자. 삼각형 OAP는 밑변 1과 높이 sin x를 가지므로 넓이가 sin x/2이다. 부채꼴 OAP의 넓이는 원 전체 넓이 π에 x/(2π)를 곱한 x/2이다. 삼각형 OAT는 밑변 1과 높이 tan x를 가지므로 넓이가 tan x/2이다. 세 도형이 차례로 앞의 도형을 품으므로 0<x<π/2에서 sin x<x<tan x가 성립한다.

부등식의 양쪽을 sin x로 나누면 1<x/sin x<1/cos x이다. x가 0에 가까워지면 cos x는 1에 가까워지므로 sin x/x도 1에 가까워진다. 표에서 x=0.1이면 비율이 약 0.9983이지만 x=1이면 약 0.8415로 떨어진다. 작은 각도에서 sin x를 x로 바꾸어 써도 된다는 말은 이런 오차의 크기를 알고 쓸 때에만 의미가 있다.

이 비교는 표를 만들 때도 쓸모가 있다. 각도를 라디안으로 바꾸어 두면 아주 작은 각의 사인값은 라디안 값 자체로 어림하고 그 오차가 어느 쪽으로 치우치는지도 알 수 있다. 여기의 넓이 논증은 현대의 교과서식 설명이며 아리아바타의 사인표가 이 방법으로 만들어졌다고 주장하는 것은 아니다.



반지름 1인 원

- 반현 PM = sin x
- 호 AP = x
- 접선 AT = tan x

- 삼각형 OAP sin x / 2
- 부채꼴 OAP x / 2
- 삼각형 OAT tan x / 2

sin x < x < tan x

0 < x < π/2 (라디안)

삼각형 OAP, 부채꼴 OAP, 삼각형 OAT 순으로 넓이가 커진다.

x (라디안)	sin x	tan x	sin x / x
0.1	0.0998	0.1003	0.9983
0.5	0.4794	0.5463	0.9589
1.0	0.8415	1.5574	0.8415

탐구

x=0.5일 때 sin x와 x와 tan x의 크기 순서를 확인하고 반현과 호의 차이를 구하자.

풀이와 확인

$\sin 0.5 \approx 0.4794$이고 $\tan 0.5 \approx 0.5463$이므로 $0.4794 < 0.5 < 0.5463$이다. 반현과 호의 차이는 약 0.0206이다. 각이 클수록 차이가 커지므로 근사는 작은 각에서만 쓴다.

[S2] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Aryabhata I

동아시아관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

동아시아관의 본문과 이어지는 다섯 단원이다. 각 단원 위에 표시한 장을 먼저 읽으면 그림이 무엇을 확인하는지 분명해진다.

이어 읽기 / 유휘와 도형을 나누는 생각

변을 두 배로 늘리는 연 모양 넓이

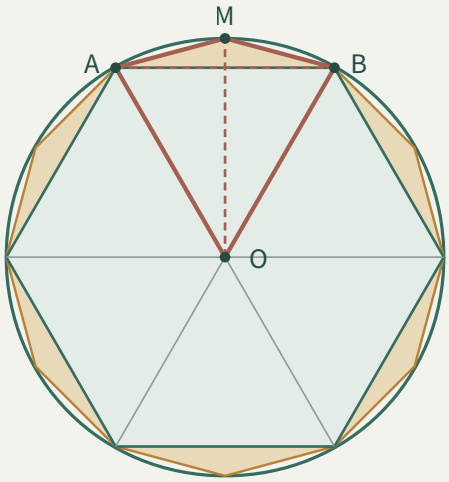
정다각형의 변을 두 배로 늘릴 때 생기는 연 모양 사각형이 원 넓이의 아래 경계와 위 경계를 함께 알려 준다.

반지름 1인 원에 내접한 정육각형의 한 변 AB를 생각하자. 호 AB의 가운데 점 M을 잡아 중심 O와 이으면 OM은 현 AB를 수직으로 이등분한다. 사각형 OAMB는 두 대각선이 서로 수직인 연 모양이므로 넓이는 두 대각선의 곱의 절반인 1×1÷2이다. 이러한 연 여섯 개가 빈틈없이 모여 정십이각형을 이루므로 정십이각형의 넓이는 3이 된다.

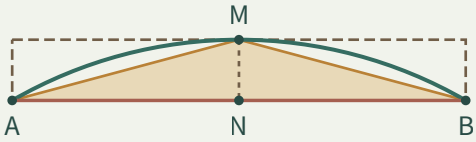
이 관계는 변의 수와 상관없이 성립한다. 반지름 1인 원에 내접한 정n각형의 한 변을 s라 하면 정2n각형의 넓이는 n×s÷2이며 이는 정n각형 둘레의 절반과 같다. 정십이각형의 한 변은 구고 관계를 두 번 써서 $\sqrt{(2-\sqrt{3})} \approx 0.5176$으로 구할 수 있다. 따라서 정이십사각형의 넓이는 $12\times\sqrt{(2-\sqrt{3})}\div 2$로 약 3.1058이다. 각도를 쓰지 않고 변의 길이만으로 넓이를 이어 간다는 점이 이 방법의 특징이다.

위쪽 경계는 현과 호 사이의 활꼴에서 나온다. 현 AB의 중점을 N이라 하고 AB 위에 높이가 MN인 직사각형을 세우면 활꼴은 이 직사각형 안에 들어간다. 삼각형 AMB의 넓이는 직사각형의 절반이므로 활꼴 하나의 넓이는 삼각형 AMB 넓이의 두 배보다 작다. 삼각형 AMB 여섯 개의 합은 정십이각형과 정육각형의 넓이 차인 약 0.402이므로 원의 넓이는 2.598+2×0.402, 즉 약 3.402보다 작다.

같은 논리를 정십이각형과 정이십사각형에 적용하면 원주율은 3.1058보다 크고 3.2117보다 작다는 결론을 얻는다. 아래 경계가 3.1보다 크므로 정십이각형 하나만으로는 판단할 수 없었던 질문, 곧 원의 넓이가 3.1보다 큰지에 이제 답할 수 있다. 이 전개는 다각형을 세분하는 생각을 현대 기호로 정리한 현대 재구성이며 유휘의 주석에 적힌 계산 순서를 그대로 옮긴 것은 아니다.



한 변 AB를 확대한 그림



삼각형 AMB = 직사각형의 절반

활꼴은 직사각형 안에 들어간다

원의 넓이 < 3 + (3 − 2.598) ≈ 3.402

연 OAMB와 활꼴을 감싸는 직사각형으로 세운 원 넓이의 경계

비교한 두 다각형	아래 경계	위 경계	경계의 폭
정육각형과 정십이각형	3	3.4019	0.4019
정십이각형과 정이십사각형	3.1058	3.2117	0.1058
정이십사각형과 정사십팔각형	3.1326	3.1594	0.0268

탐구

표에서 변의 수를 두 배로 할 때마다 경계의 폭은 대략 몇 분의 일로 줄어드는가?

풀이와 확인

경계의 폭은 0.4019에서 0.1058로, 다시 0.0268로 줄어든다. $0.4019 \div 0.1058 \approx 3.80$이고 $0.1058 \div 0.0268 \approx 3.95$이므로 한 단계마다 대략 4분의 1로 줄어든다. 활꼴 하나의 밑변은 약 절반이 되고 높이는 약 4분의 1이 되며 활꼴의 개수는 두 배가 되므로 전체로는 약 4분의 1이 된다고 설명할 수 있다. 폭이 이렇게 줄어드는 규칙을 알면 원하는 정밀도를 얻기 위해 몇 번 더 나누어야 하는지 미리 어림할 수 있다.

[EA03] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Liu Hui

이어 읽기 / 조충지와 근삿값의 정밀도

사이 분수를 거듭하여 355/113에 닿기

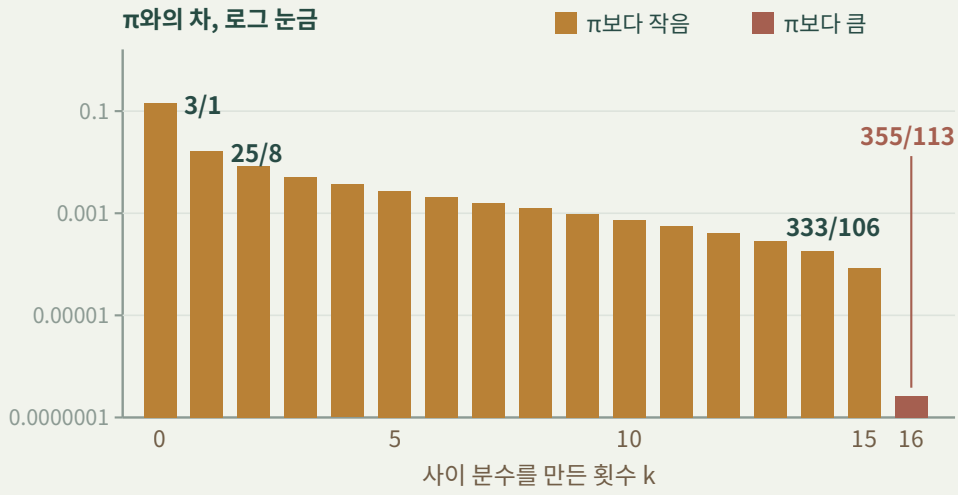
한쪽 경계를 고정하고 사이 분수를 거듭 만들면 오차가 줄어드는 순서를 한눈에 볼 수 있다.

앞에서 본 사이 분수의 성질을 한 번만 쓰지 않고 되풀이해 보자. 3/1은 π보다 작고 22/7은 π보다 크므로 출발 구간은 3/1과 22/7 사이이다. 사이 분수 25/8은 3.125로 π보다 작으므로 아래 경계를 25/8로 바꾼다. 위 경계 22/7은 그대로 두고 새 아래 경계와의 사이 분수를 다시 만든다.

아래 경계를 바꿀 때마다 분자에는 22가, 분모에는 7이 더해지므로 k번째 분수는 (3+22k)/(1+7k)로 쓸 수 있다. k가 15일 때 분수는 333/106이며 여전히 π보다 약 0.0000832 작다. k가 16이 되는 순간 분수는 처음으로 π를 넘어서는데 그 분수가 355/113이다. 이때 오차는 약 0.000000267로 앞 단계보다 300배 이상 작아진다.

그래프에서 앞의 열다섯 단계는 오차가 천천히 줄어든다. 위 경계 22/7을 고정한 채 분자와 분모에 22와 7만 거듭 더하므로 분수가 22/7 쪽으로 조금씩만 움직인다. 마지막 분수가 특별히 가까운 까닭은 113π가 정수 355에 매우 가깝기 때문이며 이는 분모를 고정하여 찾아본 계산과 같은 사실이다. 오차의 감소가 고르지 않다는 점도 앞의 표에서 본 유리수 근사의 불규칙함과 이어진다.

이 절차는 사이 분수의 성질을 확인하기 위한 학습용 모형이다. 조충지가 355/113을 어떤 경로로 얻었는지는 전하지 않으므로 이 계산을 그의 방법이라고 말할 수 없다. 다만 알려진 결과를 오늘의 도구로 재현해 보면 어떤 분수가 왜 눈에 띄는지 설명할 수 있다. 결과의 확인과 발견 경로의 복원을 구별하는 태도는 이 장 전체의 원칙과 같다.



3/1에서 22/7 쪽으로 사이 분수를 만들 때 π와의 차

k	분수	π와의 차
0	3/1	약 −0.1416
1	25/8	약 −0.0166
15	333/106	약 −0.0000832
16	355/113	약 +0.000000267

탐구

이번에는 333/106을 아래 경계로, 355/113을 위 경계로 두고 사이 분수를 만들면 어떤 분수가 되며 π보다 큰가 작은가?

풀이와 확인

분자와 분모를 각각 더하면 688/219이다. $688 \div 219 \approx 3.1415525$이므로 π보다 약 0.00004 작다. 이 분수는 333/106보다는 π에 가깝지만 분모가 더 큰데도 355/113보다 훨씬 멀다. 사이 분수를 만든다고 해서 언제나 더 좋은 근삿값이 되는 것은 아니라는 앞 단원의 주의를 다시 확인할 수 있다.

[EA04] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Zu Chongzhi

이어 읽기 / 손자산경과 나머지의 만남

나머지 격자에 수를 채워 보기

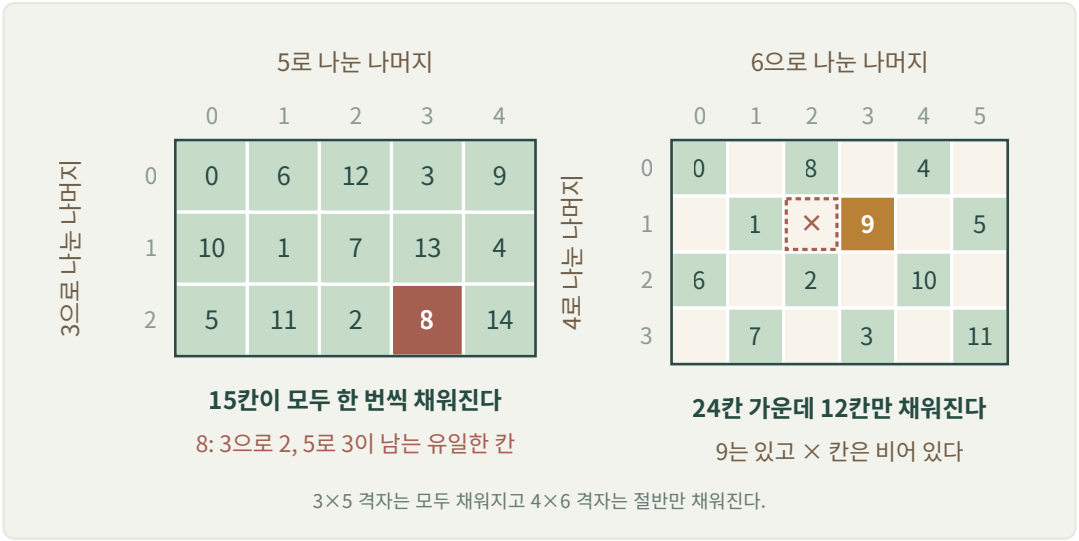
두 나머지를 행과 열의 번호로 삼으면 해가 하나뿐인 까닭과 해가 없는 경우가 한 그림에 나타난다.

3으로 나눈 나머지를 행 번호로, 5로 나눈 나머지를 열 번호로 하는 3×5 격자를 그리자. 0부터 14까지의 수를 차례로 넣으면 수가 1 커질 때마다 한 칸 아래와 한 칸 오른쪽으로 비스듬히 이동하고 끝에 닿으면 반대편에서 다시 들어온다. 이렇게 넣은 열다섯 수는 열다섯 칸을 하나씩 모두 채운다. 따라서 3으로 나누어 2가 남고 5로 나누어 3이 남는 칸에는 정확히 하나의 수 8이 들어 있다.

모든 칸이 채워지는 까닭은 두 수가 같은 칸에 들어갈 수 없다는 데 있다. 0부터 14 사이의 두 수가 같은 칸에 있다면 그 차는 3과 5로 모두 나누어떨어지므로 15의 배수여야 한다. 그런데 두 수의 차는 1 이상 14 이하이므로 이런 일은 일어나지 않는다. 겹치지 않는 열다섯 수가 열다섯 칸에 들어가므로 빈칸이 남을 수 없다.

4와 6으로 4×6 격자를 만들면 사정이 달라진다. 0부터 차례로 넣으면 12에서 이미 출발 칸으로 돌아오므로 스물네 칸 가운데 열두 칸만 채워진다. 채워진 칸은 행과 열의 번호가 모두 짝수이거나 모두 홀수인 칸이며 나머지 칸에는 어떤 정수도 들어가지 않는다. 4로 1이 남고 6으로 3이 남는 칸에는 9가 있지만 4로 1이 남고 6으로 2가 남는 칸은 비어 있다.

두 격자를 나란히 놓으면 서로소 조건과 최대공약수 조건이 한 장면으로 정리된다. 비스듬한 이동이 모든 칸을 지나려면 두 법의 최소공배수가 칸의 수와 같아야 하며 이는 두 수가 서로소일 때 일어난다. 이 격자는 나머지 문제의 구조를 보기 위한 현대식 학습용 모형이며 손자산경의 풀이 방식을 그린 것은 아니다.



탐구

3으로 나눈 나머지와 4로 나눈 나머지로 격자를 만들면 몇 칸이 채워지며 3으로 2가 남고 4로 1이 남는 가장 작은 수는 무엇인가?

풀이와 확인

3과 4는 서로소이므로 0부터 11까지의 열두 수가 3×4 격자의 열두 칸을 모두 채운다. 행 2와 열 1의 칸에 들어가는 수는 5이다. $5=3\times1+2$이고 $5=4\times1+1$이므로 두 조건을 모두 만족한다. 이 수에 12를 더한 17과 29도 같은 칸으로 돌아온다.

[EA05] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Sun Zi

이어 읽기 / 진구소와 계산 절차의 설계

세제곱근에서 자리 하나를 더 얻기

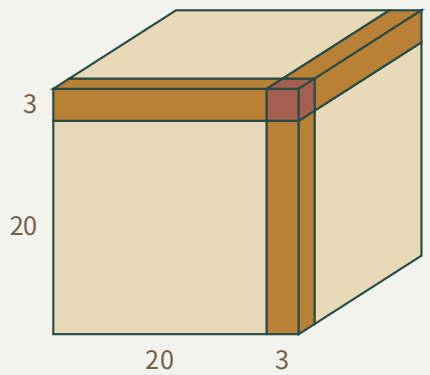
정육면체에 얇은 판과 막대를 덧붙이면 $(a+h)^3$을 이루는 네 종류의 부분이 그대로 보인다.

앞에서는 $(a+h)^2$을 정사각형에 띠 두 개와 작은 정사각형을 덧붙이는 그림으로 읽었다. 같은 생각을 한 차원 올리면 한 모서리가 a인 정육면체에 두께 h인 층을 세 방향으로 덧씌우는 장면이 된다. 덧붙는 부분은 $a\times a\times h$인 판 세 개와 $a\times h\times h$인 막대 세 개와 한 모서리가 h인 작은 정육면체 하나이다. 따라서 $(a+h)^3=a^3+3a^2h+3ah^2+h^3$이며 계수 1과 3과 3과 1은 이항계수 삼각형의 한 줄과 같다.

12167의 세제곱근을 자리별로 찾아보자. $20^3=8000$이고 $30^3=27000$이므로 십의 자리 숫자는 2이며 a=20으로 둔다. 남은 양 12167−8000=4167을 덧붙일 부분의 부피로 보고 h를 고른다. h=3이면 $3\times400\times3+3\times20\times9+27=3600+540+27=4167$이 되어 남은 양과 정확히 같으므로 세제곱근은 23이다.

h를 정할 때에는 덧붙는 부피가 남은 양을 넘지 않는 가장 큰 숫자를 고른다. h=4를 넣으면 4800+960+64=5824가 되어 4167보다 크므로 너무 크다. 판 세 개의 부피 $3a^2h$가 가장 큰 몫을 차지하므로 $4167\div1200\approx3.47$로 후보를 어림한 뒤 막대와 작은 정육면체까지 더하여 확인하면 된다. 나눗셈으로 어림하고 전체 부피로 검산하는 두 단계는 제곱근에서 본 구조와 같다.

구장산술에는 제곱근과 함께 세제곱근을 구하는 문제들이 실려 있다. 여기의 판과 막대 그림은 자리별 계산의 원리를 설명하기 위한 현대 재구성이며 옛 책의 산가지 배열이나 계산 순서를 복원한 것은 아니다. 세 자리 이상의 세제곱근에서는 앞에서 얻은 값을 새 a로 삼아 같은 과정을 되풀이한다. 자리마다 남은 양과 덧붙인 부피를 기록해 두면 계산이 어디에서 어긋났는지 찾기 쉽다.



안쪽 정육면체	$20^3=8000$
판 3개	$3\times20^2\times3=3600$
막대 3개	$3\times20\times3^2=540$
작은 정육면체	$3^3=27$

$23^3=8000+4167=12167$

안쪽 정육면체는 가려져 보이지 않는다

한 모서리 20인 정육면체에 두께 3인 판과 막대를 덧붙인 23^3

부분	개수	하나의 부피	합
안쪽 정육면체	1	8000	8000
판	3	1200	3600
막대	3	180	540
작은 정육면체	1	27	27

탐구

13824의 세제곱근을 같은 방법으로 구하라.

풀이와 확인

$20^3=8000$이므로 $a=20$이고 남은 양은 5824이다. $5824\div1200\approx4.85$이므로 $h=4$를 먼저 시험한다. $3\times400\times4+3\times20\times16+64=4800+960+64=5824$로 남은 양과 같으므로 세제곱근은 24이다. 앞 문단에서 너무 크다고 버린 5824가 바로 이 문제의 덧붙는 부피였다는 점도 확인할 수 있다.

[EA02] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nine Chapters on the Mathematical Art

[EA06] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Qin Jiushao

이어 읽기 / 양휘의 삼각형과 수의 배열

대각선을 따라 더하면 꺾이는 자리

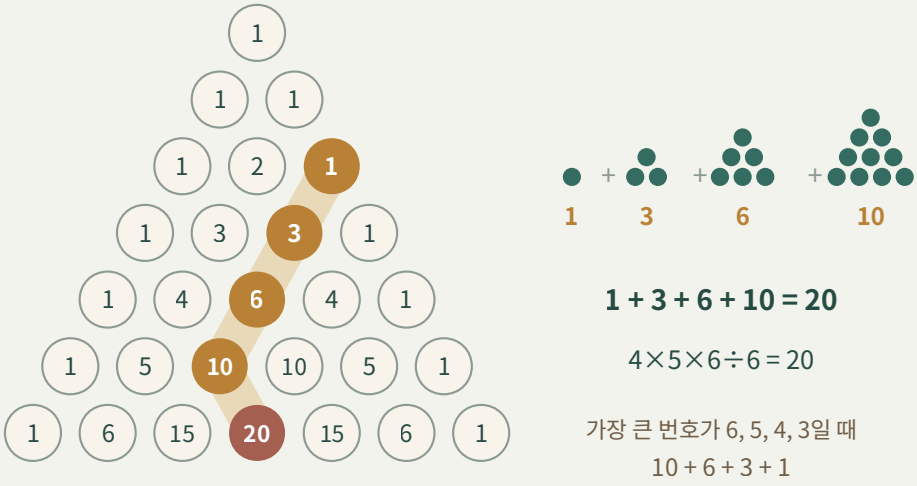
삼각수를 차례로 더한 합이 이항계수 삼각형의 다음 줄에 나타나는 까닭을 덧셈 규칙과 선택의 개수로 설명한다.

이항계수 삼각형에서 1과 3과 6과 10으로 이어지는 대각선을 따라가 보자. 네 수의 합 20은 10의 바로 아래 줄에서 대각선을 한 칸 벗어난 오른쪽 칸에 놓여 있다. 더한 칸들이 곧은 막대를 이루고 합이 놓인 칸이 꺾인 끝을 이루므로 그림은 갈고리 모양이 된다. 한 항을 더 더하면 1+3+6+10+15=35로 한 줄 더 아래의 칸에 닿는다.

이웃을 더하는 규칙으로 이유를 설명할 수 있다. 20은 바로 위의 10과 10을 더한 값이고 오른쪽의 10은 다시 그 위의 6과 4를 더한 값이다. 4를 3과 1로 펼치고 마지막 1을 그 위의 1로 바꾸면 20=10+6+3+1이 된다. 매번 오른쪽 칸만 위로 펼쳤으므로 대각선 위의 수들만 남는다.

선택의 개수로도 같은 결과를 얻는다. 1부터 6까지의 번호 가운데 세 개를 고르는 경우는 20가지이며 이를 고른 번호 중 가장 큰 번호에 따라 나눈다. 가장 큰 번호가 6이면 나머지 둘을 1부터 5 가운데에서 고르므로 10가지이고 가장 큰 번호가 5와 4와 3이면 각각 6가지와 3가지와 1가지이다. 네 경우는 겹치지 않으면서 모든 선택을 포함하므로 합은 20이다.

1과 3과 6과 10은 공을 삼각형 모양으로 늘어놓은 층의 개수이므로 이 합은 네 층으로 쌓은 삼각뿔 더미의 공 개수이다. 일반적으로 n층 더미의 공은 $n(n+1)(n+2)/6$개이며 $n=4$이면 $4\times5\times6\div6=20$이다. 주세걸의 책에는 이와 같은 합의 공식이 실려 있다고 소개된다. 그림의 갈고리 배열과 선택의 분류는 그 공식을 이해하기 위한 현대 재구성이다.



삼각수 1, 3, 6, 10의 합 20이 놓이는 갈고리 모양의 자리

탐구

첫째부터 스무째 삼각수까지 모두 더하면 얼마인가?

풀이와 확인

$n=20$을 대입하면 $20\times21\times22\div6=1540$이다. 이 값은 1부터 22까지의 번호 가운데 세 개를 고르는 경우의 수와 같다. 가장 큰 번호가 3, 4, 5부터 22까지일 때 나머지 둘을 고르는 경우의 수는 차례로 1, 3, 6부터 210까지로 첫째부터 스무째 삼각수와 같다. 작은 n에서 공식과 직접 합을 비교하여 검산해 두면 큰 n에서도 믿고 쓸 수 있다.

[EA07] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Yang Hui

[EA08] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Zhu Shijie

이슬람 아랍관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

이슬람 아랍관의 본문과 이어지는 다섯 단원이다. 각 단원 위에 표시한 장을 먼저 읽으면 그림이 무엇을 확인하는지 분명해진다.

이어 읽기 / 여섯 형식과 완전제곱

넓이 그림으로 다시 읽는 $x^2 = 6x + 16$

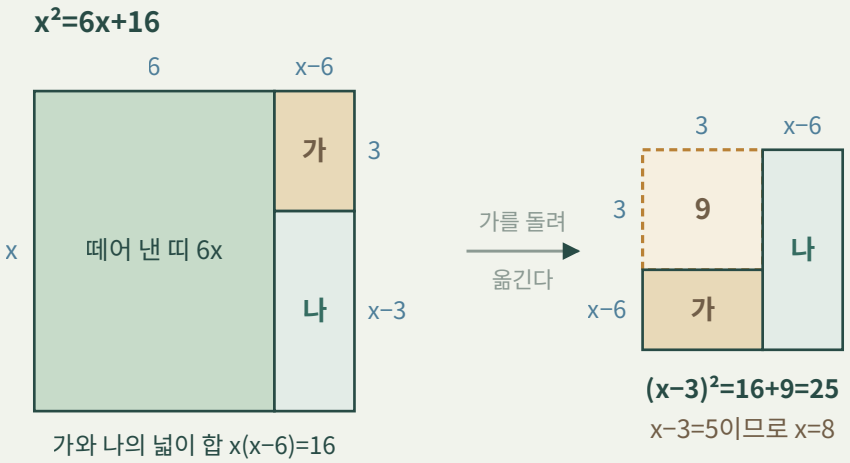
정사각형에서 띠를 떼어 낸 나머지를 옮겨 붙이면 $x^2=6x+16$도 넓이 그림으로 풀 수 있다.

4장에서는 $x^2=6x+16$을 현대 기호로 정리하여 $(x-3)^2=25$를 얻었다. 그러나 $x^2+6x=16$처럼 정사각형 바깥에 띠를 붙이고 모서리를 채우는 그림은 이 형식에 그대로 쓸 수 없다. 이번에는 제곱에서 근의 배수를 떼어 낸 나머지가 16이라는 관계를 넓이로 읽는다. 여기의 그림은 양의 길이만 다루는 학습용 모형이며 특정 원문의 도해를 복원한 것은 아니다.

한 변이 x인 정사각형에서 폭 6인 띠를 잘라 내면 넓이 $6x$가 빠지고 가로 $x-6$과 세로 x인 직사각형이 남는다. 식 $x^2=6x+16$에 따르면 이 남은 직사각형의 넓이는 16이다. 남은 직사각형을 위에서 높이 3인 곳에서 가로로 잘라 위 조각을 가, 아래 조각을 나라고 부르자. 가는 가로 $x-6$과 세로 3인 조각이고 나는 가로 $x-6$과 세로 $x-3$인 조각이다.

나는 그대로 두고 가를 90° 돌려 나의 왼쪽 아래에 붙이면 한 변이 $x-3$인 정사각형에서 3×3 모서리가 빠진 모양이 된다. 빠진 모서리의 넓이 9를 채우면 $(x-3)^2=16+9=25$가 된다. 양의 길이로 읽으면 $x-3=5$이므로 $x=8$이다. 그림을 $x=8$의 비율로 그리면 처음 정사각형은 8×8이고 띠의 넓이는 48이며 남은 직사각형은 $2\times8=16$이어서 모든 조각의 넓이가 맞는다.

6을 반으로 나눈 3이 그림에서 두 번 쓰인다는 점에 주목하자. 한 번은 남은 직사각형을 자르는 높이이고 다른 한 번은 채워 넣는 모서리의 변이다. $x^2+6x=16$에서는 정사각형 바깥에 띠를 붙였고 이번에는 정사각형 안에서 띠를 떼어 냈다. 반으로 나누고 제곱하는 계산은 같아도 조각의 배치가 다르므로 두 형식을 따로 다룬 이유가 넓이 그림에서도 드러난다.



떼어 내고 남은 넓이 16을 옮겨 붙이면 모서리 9가 빈다.

단계	넓이 관계
띠를 떼어 냄	$x^2-6x=16$
가를 돌려 붙임	$(x-3)^2-9=16$
모서리를 채움	$(x-3)^2=25$

탐구

$x^2=10x+24$를 같은 넓이 그림으로 풀 때 떼어 낼 띠의 폭과 채워 넣을 모서리의 넓이는 얼마인가?

풀이와 확인

폭 10인 띠를 떼어 내면 남은 직사각형의 넓이 $x(x-10)$이 24가 된다. 이를 높이 5에서 잘라 옮기면 한 변 $x-5$인 정사각형에서 5×5 모서리가 빠진 모양이 되므로 채울 넓이는 25다. $(x-5)^2=49$이므로 양의 길이는 $x=12$다. 검산하면 $12^2=144$이고 $10\times12+24=144$다.

[khwarizmi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Khwarizmi

이어 읽기 / 타비트와 수의 관계

n을 늘려 보는 타비트의 친화수 정리

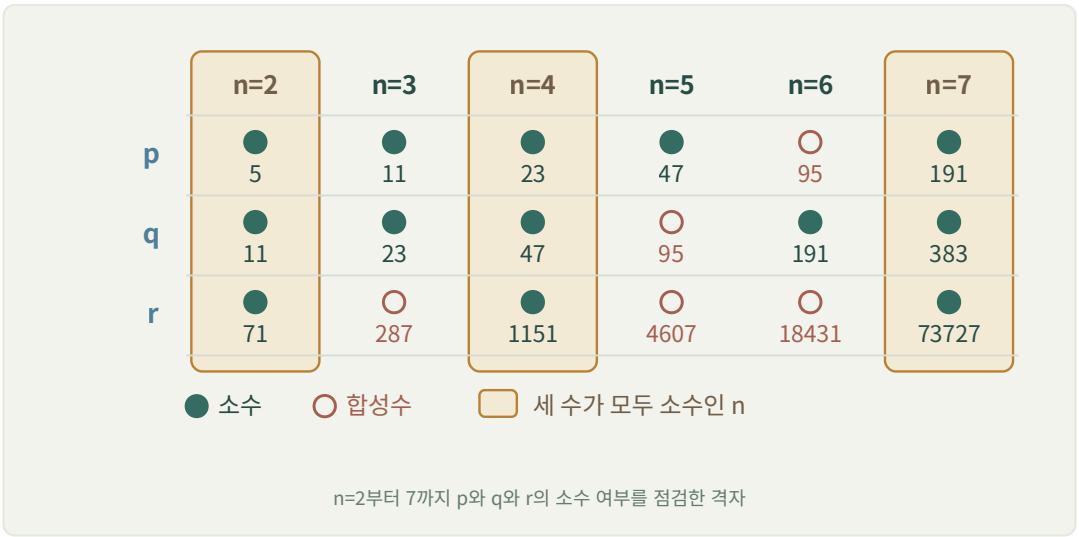
세 소수 조건을 n=7까지 점검하면 정리가 실제로 새 친화수를 만드는 경우가 드물게 나타난다.

타비트의 정리는 $p=3\times2^{n-1}-1$과 $q=3\times2^{n}-1$과 $r=9\times2^{2n-1}-1$이 모두 소수일 때 $2^{n}pq$와 $2^{n}r$이 친화수임을 보장한다. 본문에서는 n=2에서 220과 284를 얻고 n=3에서 $r=287=7\times41$ 때문에 조건이 실패하는 것을 보았다. 이번에는 n을 7까지 늘려 세 조건이 동시에 성립하는 경우를 찾는다. 이 단원의 수표는 현대 계산으로 만든 재구성이며 원문에 실린 표를 옮긴 것이 아니다.

n=4이면 p=23과 q=47과 r=1151이다. 1151은 제곱근이 34보다 작으므로 31 이하의 소수로 나누어 보면 충분하며 어느 것으로도 나누어떨어지지 않는다. n=5에서는 $q=95=5\times19$가 실패하고 n=6에서는 p=95와 $r=18431=7\times2633$이 실패한다. n=7에서는 p=191과 q=383과 r=73727이 모두 소수여서 조건이 다시 성립한다.

n=4가 주는 두 수는 $A=2^{4}\times23\times47=17296$과 $B=2^{4}\times1151=18416$이다. 16의 약수 합은 31이므로 A의 전체 약수 합은 $31\times24\times48=35712$이고 B의 전체 약수 합은 $31\times1152=35712$다. 두 수의 합도 17296+18416=35712여서 본문의 일반 증명이 말한 대로 공통 약수 합과 일치한다. 같은 방식으로 n=7에서는 9363584와 9437056이라는 쌍을 얻는다.

표를 보면 공식에 n을 넣는 일은 쉽지만 세 수가 함께 소수가 되는 경우는 드물다. 또한 이 정리는 충분조건일 뿐이어서 이 형태로 만들 수 없는 친화수도 있다. 예를 들어 $1184=2^{5}\times37$과 $1210=2\times5\times11^{2}$은 서로의 진약수 합이지만 $2^{n}pq$와 $2^{n}r$의 꼴이 아니다. 정리가 보장하는 범위와 친화수 전체를 구별하는 것이 이 탐구의 결론이다.



n=2부터 7까지 p와 q와 r의 소수 여부를 점검한 격자

항목	A=17296	B=18416
소인수분해	$2^4\times23\times47$	$2^4\times1151$
전체 약수 합	$31\times24\times48=35712$	$31\times1152=35712$
진약수 합	18416	17296

탐구

n=4의 B=18416에서 진약수 합이 17296이 되는지 약수 합을 곱으로 묶어 확인하라.

풀이와 확인

$18416=2^4\times1151$이고 1151은 소수이므로 전체 약수 합은 $(1+2+4+8+16)(1+1151)=31\times1152=35712$다. 자기 자신을 빼면 $35712-18416=17296$이다. A의 진약수 합도 $35712-17296=18416$이므로 두 방향이 모두 확인된다.

[thabit] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Thabit ibn Qurra

이어 읽기 / 투시와 삼각형의 언어

높이 하나로 사인법칙 세우기

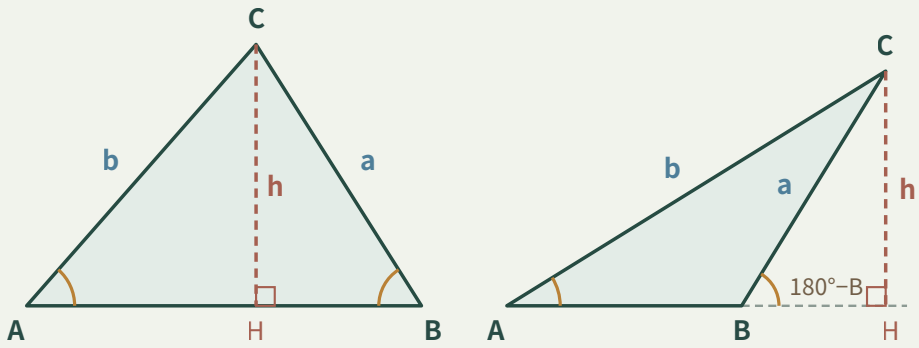
한 꼭짓점에서 내린 높이를 두 직각삼각형에서 각각 표현하면 사인법칙이 나온다.

본문은 높이를 두 가지 방식으로 나타내면 사인법칙이 나온다고 한 문장으로 소개했다. 여기서는 그 과정을 그림으로 따라가고 한 각이 둔각인 경우에도 같은 식이 성립하는지 확인한다. sin이라는 기호와 증명의 배열은 오늘의 교과서식 표현이며 투시의 원문 논증을 옮긴 것은 아니다. 삼각형의 변과 맞은편 각을 짝짓는 규칙이 어디에서 오는지 보는 것이 목표다.

예각삼각형 ABC에서 꼭짓점 C에서 변 AB에 수선을 내리고 그 발을 H라고 하자. 직각삼각형 AHC에서 빗변은 b이므로 CH=b sin A다. 직각삼각형 BHC에서는 빗변이 a이므로 CH=a sin B다. 같은 길이 CH를 두 식으로 나타냈으므로 a sin B=b sin A이고 양변을 sin A×sin B로 나누면 a/sin A=b/sin B를 얻는다.

B가 둔각이면 수선의 발 H는 변 AB의 연장선 위, B 바깥쪽에 놓인다. 이때 직각삼각형 BHC에서 B에 있는 각은 180°−B이므로 CH=a sin(180°−B)다. 서로 보각인 두 각의 사인값은 같으므로 이 값은 a sin B와 같고 결론은 예각의 경우와 같아진다. 앞의 사인법칙이 두 삼각형을 허용하는 단원에서 보각 후보를 검사한 이유도 바로 이 성질에 있다.

수치로 확인해 보자. A=30°와 B=45°와 a=10이면 사인법칙으로 b=10×sin45°/sin30°=10√2이며 약 14.14다. 높이를 두 방식으로 계산하면 b sin A는 약 14.14×0.5=7.07이고 a sin B는 10×0.7071로 약 7.07이다. 두 값이 일치하므로 높이라는 하나의 길이가 두 변과 두 각을 묶어 준다는 사실을 수치로도 확인할 수 있다.



C에서 내린 높이 h를 두 직각삼각형에서 각각 나타낸다.

탐구

A=30°와 B=120°와 a=6일 때 b와 높이 CH를 구하고 두 방식으로 검산하라.

풀이와 확인

$b=6\times\sin120°/\sin30°=6\times(\sqrt{3}/2)/(1/2)=6\sqrt{3}$이며 약 10.39다. 높이는 $b\sin A=6\sqrt{3}\times1/2=3\sqrt{3}$으로 약 5.20이다. B가 둔각이므로 $a\sin(180°-B)=6\times\sin60°=3\sqrt{3}$으로 계산해도 같은 값이 나온다. 나머지 각 C는 30°이므로 이 삼각형은 a=c=6인 이등변삼각형이다.

[tusi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Nasir al-Din al-Tusi

이어 읽기 / 알카시와 정밀한 계산

정다각형으로 원주율을 위아래에서 조이기

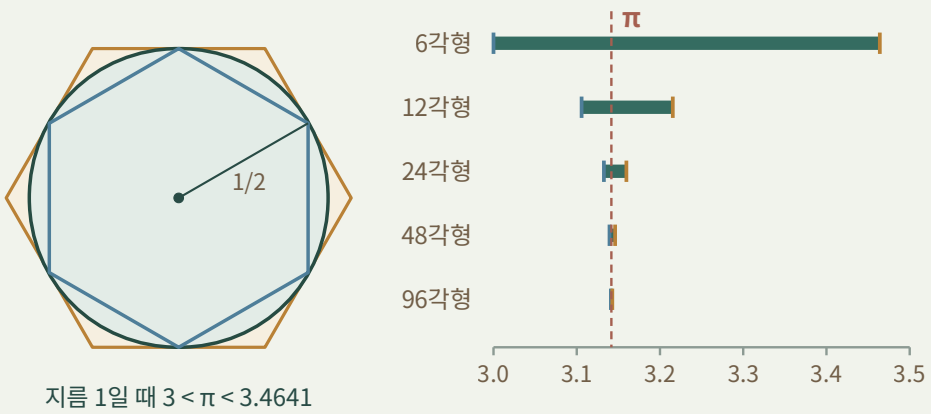
원의 안과 밖에 같은 정다각형을 그리면 원주율이 놓일 구간을 확실하게 정할 수 있다.

앞의 제곱근 단원에서는 위아래 경계를 차례로 좁혀 $\sqrt{2}$의 범위를 정했다. 원주율도 같은 생각으로 다룰 수 있다. 지름이 1인 원에 내접하는 정다각형의 둘레는 원주보다 짧고 외접하는 정다각형의 둘레는 원주보다 길므로 그 사이에 π가 놓인다. 이 단원의 그림과 수치는 알카시의 원주 계산을 읽기 위한 학습용 모형이며 그의 계산 절차를 그대로 복원한 것은 아니다.

정육각형에서 시작하면 계산이 쉽다. 내접 정육각형의 한 변은 반지름 1/2과 같으므로 둘레는 3이다. 외접 정육각형은 중심에서 각 변까지의 거리가 1/2이므로 한 변이 $1/\sqrt{3}$이고 둘레는 $2\sqrt{3}$, 곧 약 3.4641이다. 따라서 $3<\pi<3.4641$이라는 첫 구간을 얻는다.

변의 수를 두 배씩 늘리면 내접 둘레는 $n\times\sin(180°/n)$이고 외접 둘레는 $n\times\tan(180°/n)$이다. 12각형에서는 3.1058과 3.2154 사이, 24각형에서는 3.1326과 3.1597 사이, 96각형에서는 3.1410과 3.1427 사이로 좁아진다. 두 경계의 차이는 약 0.4641과 0.1096과 0.0270과 0.0067과 0.0017로 변의 수를 두 배 할 때마다 거의 1/4로 줄어든다.

1/4이라는 비율은 우연이 아니다. 라디안으로 잰 작은 각 θ에서 $\tan\theta$와 $\sin\theta$의 차이는 대략 $\theta^3/2$이다. $\theta=\pi/n$을 넣으면 두 경계의 차이 $n(\tan\theta-\sin\theta)$는 $\pi^3/(2n^2)$에 가깝고 n을 두 배 하면 이 값은 1/4이 된다. 따라서 자리 하나를 더 확실히 얻으려면 변의 수를 약 $\sqrt{10}$, 곧 3.16배쯤 늘려야 한다. 아주 많은 자리의 원주율을 얻으려면 변의 수가 매우 큰 다각형과 정밀한 제곱근 계산이 함께 필요하다는 사실을 이 어림이 보여 준다.



원 안팎의 정육각형과 변의 수를 늘릴 때 좁아지는 π의 구간

정다각형	아래 경계	위 경계	차이
6각형	3	3.4641	약 0.4641
12각형	3.1058	3.2154	약 0.1096
24각형	3.1326	3.1597	약 0.0270
48각형	3.1394	3.1461	약 0.0067
96각형	3.1410	3.1427	약 0.0017

탐구

192각형에서 두 경계의 차이는 대략 얼마일지 96각형의 결과로 어림하라.

풀이와 확인

변의 수를 두 배 하면 차이가 약 1/4로 줄므로 0.0017의 1/4인 약 0.0004를 예상할 수 있다. 실제 계산값은 약 0.00042이며 $\pi^3/(2\times192^2)$로 어림한 값과도 거의 같다. 이 어림은 근삿값의 크기를 예상하는 데 쓰이며 경계 자체는 sin과 tan을 정확히 계산해야 확정된다.

[kashi] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Al-Kashi

이어 읽기 / 하늘을 읽는 원판

입체사영으로 원판의 원 크기 정하기

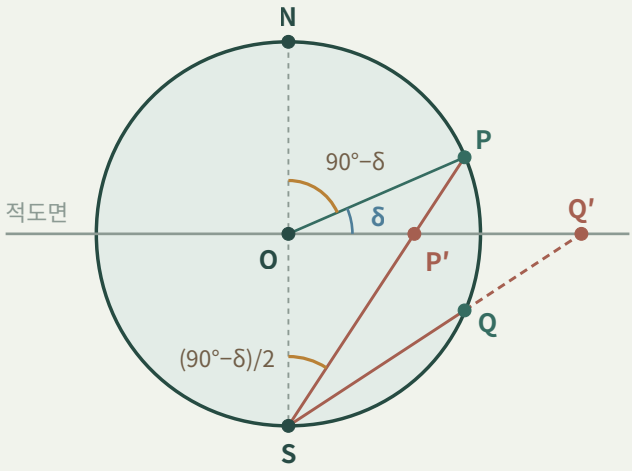
구 위의 원이 평면 위의 원으로 옮겨질 때 그 반지름은 원주각 하나로 계산된다.

본문은 구면의 점을 한 극점에서 평면으로 옮기는 입체사영을 소개하고 투영이 모양을 바꾸면서 관계를 보존한다고 설명했다. 여기서는 천구를 반지름 R인 구로 보고 남쪽 극 S에서 적도면으로 투영할 때 천구의 적도에서 각 δ만큼 떨어진 원이 평면에서 반지름 얼마의 원이 되는지 계산한다. 천극을 축으로 도는 원은 평면에서도 중심 O를 공유하는 원이 되므로 반지름 하나만 알면 된다. 계산은 이상적인 구를 가정한 학습용 모형이다.

북쪽 극 N과 남쪽 극 S와 중심 O를 지나는 단면을 그리고 원 위의 점 P가 적도면에서 δ만큼 올라가 있다고 하자. 중심각 NOP는 90°−δ이다. 원주각은 같은 호에 대한 중심각의 절반이므로 S에서 본 각 NSP는 (90°−δ)/2다. 직선 SP가 적도면과 만나는 점을 P′라 하면 삼각형 SOP′는 O에서 직각이므로 OP′=R tan((90°−δ)/2)가 된다.

이 식에 값을 넣어 보자. δ=0°이면 tan 45°=1이므로 적도는 반지름 R인 원 그대로 남는다. 학습용 값 δ=23.5°이면 반지름은 약 0.656R이고 δ=−23.5°이면 약 1.525R이다. 원판의 바깥 원을 반지름 12cm로 정하고 그것이 δ=−23.5°의 원이라고 하면 R은 약 7.87cm이고 δ=23.5°의 원은 약 5.16cm가 된다.

흥미로운 검산이 하나 있다. 서로 부호만 다른 두 각의 원에 대해 $\tan(45°-\delta/2)\times\tan(45°+\delta/2)=1$이므로 두 반지름의 곱은 언제나 R^2이다. 실제로 0.656×1.525는 약 1이다. 또한 δ가 −90°에 가까워지면 반지름이 한없이 커지므로 남쪽 극 근처는 원판에 담을 수 없고 어딘가에서 원판을 잘라야 한다. 어느 위도용 판인지를 따로 정해야 했던 것처럼 원판의 크기 역시 투영의 성질에서 나온 선택이다.



OP′ = R tan((90°−δ)/2)

δ=90°: 0

δ=23.5°: 약 0.656R

δ=0°: R

δ=−23.5°: 약 1.525R

원주각은 중심각의 절반이다.

남쪽 극 S에서 투영하면 P는 적도면 위의 P′로 옮겨진다.

천구 적도에서의 각 δ	평면 원의 반지름
90°	0
23.5°	약 0.656R
0°	R
−23.5°	약 1.525R

탐구

δ=60°인 별이 그리는 원은 평면 원판에서 반지름이 R의 몇 배인 원으로 옮겨지는가?

풀이와 확인

(90°−60°)/2=15°이므로 반지름은 R tan 15°이며 약 0.268R이다. 천극에 가까운 별일수록 원판의 중심 가까이에 작은 원을 그린다. 같은 식으로 δ=−60°를 넣으면 R tan 75°로 약 3.732R이 되어 두 값의 곱이 R^2임을 다시 확인할 수 있다.

[astro-model] Dominic Ford. Building a Model Astrolabe. 2012

[astro] 메트로폴리탄 박물관. Astronomy and Astrology in the Medieval Islamic World

한국관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

한국관의 본문과 이어지는 다섯 단원입니다. 각 단원 위에 표시한 장을 먼저 읽으면 그림이 무엇을 확인하는지 분명해집니다.

이어 읽기 / 삼국과 고려의 산학

수선의 발이 밖에 놓인 삼각형의 넓이

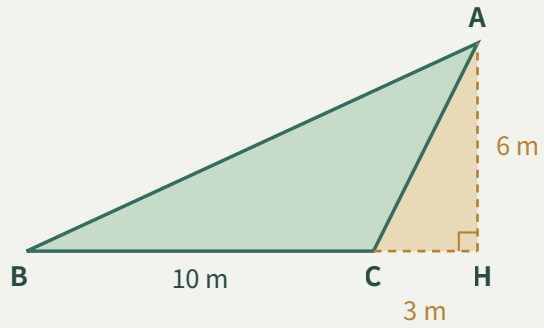
꼭짓점이 밑변 바깥쪽 위로 옮겨 가도 넓이 공식이 그대로인 이유를 빼기로 확인합니다.

본문은 삼각형의 꼭짓점이 밑변의 바깥쪽 위로 옮겨 가도 넓이 공식이 같다고 설명했습니다. 이때 꼭짓점에서 밑변이 놓인 직선에 내린 수선의 발은 삼각형 밖에 놓입니다. 공식이 같다는 말을 믿고 넘어가기보다 이미 아는 넓이로 직접 확인해 보면 둔각삼각형도 낯설지 않게 됩니다. 여기서는 큰 직각삼각형에서 작은 직각삼각형을 빼는 방법을 사용합니다.

밑변 BC가 10 m이고 꼭짓점 A에서 내린 수선의 발 H가 C에서 3 m 바깥에 있다고 합시다. 높이 AH는 6 m입니다. 직각삼각형 ABH는 밑변 13 m와 높이 6 m를 가지므로 넓이가 39 m^2입니다. 직각삼각형 ACH의 넓이는 $3 \times 6 \div 2 = 9$ m^2입니다. 삼각형 ABC는 큰 직각삼각형에서 작은 직각삼각형을 뺀 부분이므로 넓이는 30 m^2입니다.

바깥 거리 3 m를 다른 값으로 바꾸어도 결과는 같습니다. 바깥 거리를 e로 쓰면 큰 직각삼각형의 넓이는 $(10 + e) \times 6 \div 2$이고 작은 직각삼각형의 넓이는 $e \times 6 \div 2$입니다. 두 식을 빼면 e가 들어간 부분이 정확히 지워지고 $10 \times 6 \div 2$만 남습니다. 꼭짓점을 밑변과 평행하게 옮기면 e만 달라지므로 넓이가 변하지 않는다는 본문의 설명이 이 계산으로 뒷받침됩니다.

이 방법은 높이를 왜 밑변이 놓인 직선까지 재야 하는지도 보여 줍니다. 빼기에 쓰인 두 직각삼각형은 모두 같은 높이 AH를 공유합니다. 기울어진 변 AC의 길이를 높이로 잘못 쓰면 두 넓이의 차가 맞지 않습니다. 토지를 도형으로 나타낼 때도 측정한 길이가 수직 거리인지 먼저 확인해야 합니다.



직각삼각형 ABH

$13 \times 6 \div 2 = 39$

직각삼각형 ACH

$3 \times 6 \div 2 = 9$

삼각형 ABC

$39 - 9 = 30$

$= 10 \times 6 \div 2$

큰 직각삼각형에서 작은 직각삼각형을 빼면 밑변 × 높이 ÷ 2가 남습니다.

바깥 거리	큰 직각삼각형	작은 직각삼각형	삼각형 ABC
1 m	33 m^2	3 m^2	30 m^2
3 m	39 m^2	9 m^2	30 m^2
6 m	48 m^2	18 m^2	30 m^2

탐구

밑변 8 m와 높이 5 m인 삼각형에서 수선의 발이 밑변의 연장선 위 4 m 바깥에 놓였습니다. 두 직각삼각형의 넓이를 빼서 삼각형의 넓이를 구해 보세요.

풀이와 확인

큰 직각삼각형의 밑변은 $8 + 4 = 12$ m이므로 넓이는 $12 \times 5 \div 2 = 30$ m^2입니다. 작은 직각삼각형의 넓이는 $4 \times 5 \div 2 = 10$ m^2입니다. 두 넓이의 차는 20 m^2이며 $8 \times 5 \div 2 = 20$과 같습니다. 바깥 거리 4 m는 계산 과정에서 지워지므로 결과에 영향을 주지 않습니다.

[2] MATHESIS 전시실 1. 국학과 산가지와 첨성대 및 토지 측량

이어 읽기 / 조선의 시간과 측정

단면적이 바뀌는 통의 물높이 그래프

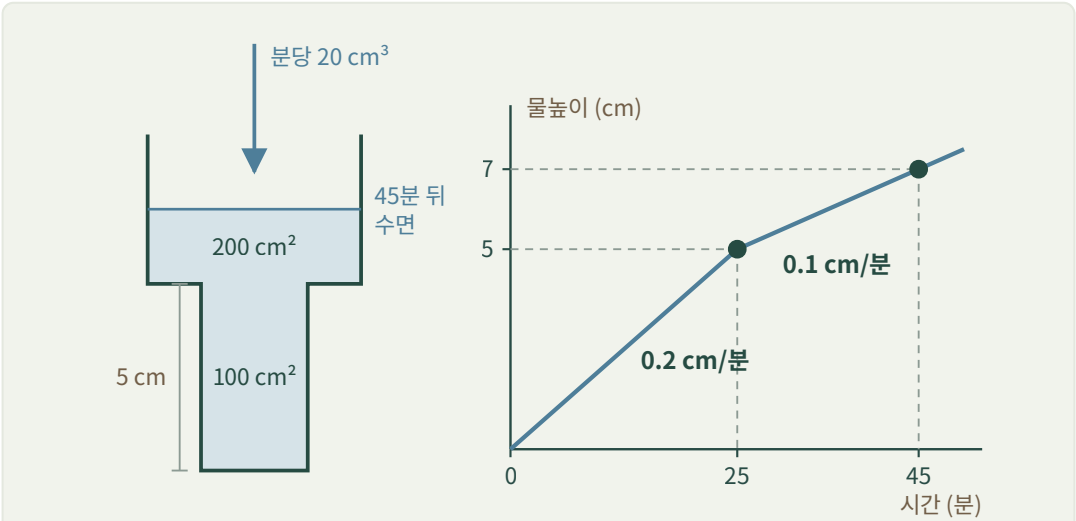
통의 폭이 중간에 달라지면 시간과 물높이의 그래프가 꺾입니다.

본문은 단면적이 일정한 통에서 물높이의 증가량이 시간에 비례한다는 것과 단면적이 두 배인 통은 덜 올라간다는 것을 따로 보였습니다. 이 두 사실을 한 통 안에 함께 넣어 볼 수 있습니다. 아래쪽 5 cm는 단면적이 100 cm^2이고 그 위는 단면적이 200 cm^2인 계단 모양의 통을 생각해 봅시다. 물은 분당 20 cm^3씩 일정하게 들어온다고 가정합니다.

아래쪽에서는 1분마다 $20 \div 100 = 0.2$ cm씩 올라갑니다. 아래쪽 부피 500 cm^3를 채우는 데 25분이 걸리므로 25분 뒤 물높이는 5 cm입니다. 그 뒤로는 같은 부피가 넓은 단면에 퍼지므로 1분마다 0.1 cm씩만 올라갑니다. 45분 뒤의 물높이는 $5 + 20 \times 0.1 = 7$ cm가 됩니다.

그래프로 옮기면 두 개의 선분이 25분에서 이어지며 꺾입니다. 각 선분의 기울기는 유량을 그 구간의 단면적으로 나눈 값입니다. 거꾸로 그래프의 기울기만 읽어도 통의 단면적을 알아낼 수 있습니다. 기울기가 0.1 cm/분인 구간의 단면적은 $20 \div 0.1 = 200$ cm^2입니다.

위로 갈수록 조금씩 넓어지는 통이라면 꺾이는 점이 하나가 아니라 계속 이어져 그래프가 완만하게 휘어집니다. 이때 같은 간격의 시간 눈금은 통의 벽에서 점점 좁은 간격으로 놓여야 합니다. 이 설명은 물시계의 원리를 살피기 위한 학습용 모형이며 자격루의 실제 부품을 복원한 것은 아닙니다.



단면적이 두 배가 되는 높이에서 그래프의 기울기가 절반이 됩니다.

시간	0분	10분	25분	35분	45분
물높이	0 cm	2 cm	5 cm	6 cm	7 cm

탐구

같은 통에서 물높이가 8 cm가 되는 때는 물을 넣기 시작한 지 몇 분 뒤일까요? 아래쪽 단면적이 50 cm^2였다면 꺾이는 시각은 어떻게 바뀔까요?

풀이와 확인

5 cm를 넘은 뒤에는 1분에 0.1 cm씩 오르므로 3 cm를 더 오르는 데 30분이 걸립니다. 따라서 25 + 30 = 55분 뒤입니다. 아래쪽 단면적이 50 cm^2라면 아래쪽 부피는 250 cm^3이므로 12.5분 만에 5 cm에 도달합니다. 첫 구간의 기울기는 0.4 cm/분으로 더 가팔라집니다.

[3] MATHESIS 전시실 2. 세종 시대의 관측 및 시간 측정 기구

이어 읽기 / 수의 배열과 방정식

3차 마방진의 가운데 수가 5인 이유

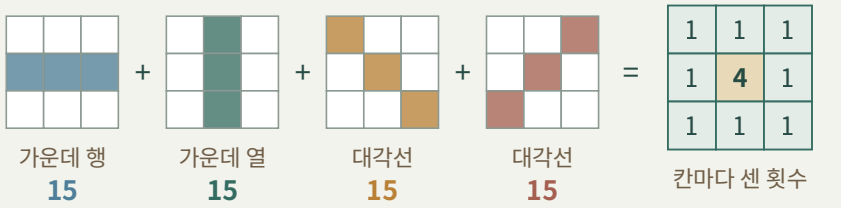
가운데 칸을 지나는 네 줄을 더하면 가운데 수가 하나로 정해집니다.

본문의 3차 마방진에서는 5가 가운데에 있고 마주 보는 두 수의 합이 10입니다. 그런데 이것이 그 배열에서 우연히 생긴 모습인지 모든 3차 마방진에서 반드시 성립하는 성질인지는 따로 따져야 합니다. 배열을 하나씩 만들어 보지 않고도 답할 수 있습니다. 한 행의 합이 15라는 사실을 구한 방법처럼 전체를 세는 방법을 한 번 더 사용합니다.

가운데 칸을 지나는 줄은 가운데 행과 가운데 열 및 두 대각선으로 모두 네 개입니다. 네 줄의 합은 각각 15이므로 모두 더하면 60입니다. 이 덧셈에서 가운데가 아닌 여덟 칸은 정확히 한 번씩 들어가고 가운데 칸만 네 번 들어갑니다. 따라서 60은 아홉 수의 합 45에 가운데 수를 세 번 더 더한 값입니다.

식으로 쓰면 45 + 3 × (가운데 수) = 60이므로 가운데 수는 5입니다. 이제 가운데를 지나는 줄에서 양 끝 두 수의 합은 15 − 5 = 10이 되어야 합니다. 본문에서 관찰한 짝의 합 10은 이 계산의 결과이며 모든 3차 마방진에 공통으로 나타납니다. 관찰을 증명으로 바꾸는 데 필요했던 것은 각 칸이 몇 번 세어졌는지 기록하는 일이었습니다.

같은 생각을 더 밀고 가면 다른 칸에 대해서도 알 수 있습니다. 1부터 9까지 한 번씩 쓰는 3차 마방진을 컴퓨터로 모두 찾으면 여덟 개이며 어느 것이든 가운데는 5이고 모퉁이에는 짝수만 놓입니다. 이 사실은 현대적 점검의 결과입니다. 최석정의 『구수략』이 이런 방식으로 논증했다는 뜻은 아닙니다.



네 줄의 합 $4 \times 15 = 60 = 45 + 3 \times$ (가운데 수)

가운데 수 $= (60 - 45) \div 3 = 5$

가운데를 지나는 네 줄을 더하면 가운데 칸만 네 번 세어집니다.

탐구

3차 마방진에서 9가 모퉁이 칸에 올 수 없는 이유를 설명해 보세요.

풀이와 확인

9가 모퉁이에 있으면 가운데 5를 지나 마주 보는 모퉁이에는 1이 옵니다. 9가 속한 행과 열에서는 각각 나머지 두 칸의 합이 6이어야 하고 그 칸에는 5와 1이 들어갈 수 없습니다. 남은 수 2와 3과 4와 6과 7과 8에서 합이 6인 짝은 2와 4뿐입니다. 서로 겹치지 않는 짝이 두 개 필요하므로 불가능하며 9는 변의 가운데 칸에 놓여야 합니다.

[4] MATHESIS 전시실 3. 최석정과 홍정하 및 19세기 산서

[20] 한국민족문화대백과사전. 『구수략』

이어 읽기 / 현대의 수학과 열린 질문

정사각형의 대칭은 왜 여덟 가지인가

네 회전에 네 반사를 더하면 정사각형을 제자리에 놓는 조작이 모두 모입니다.

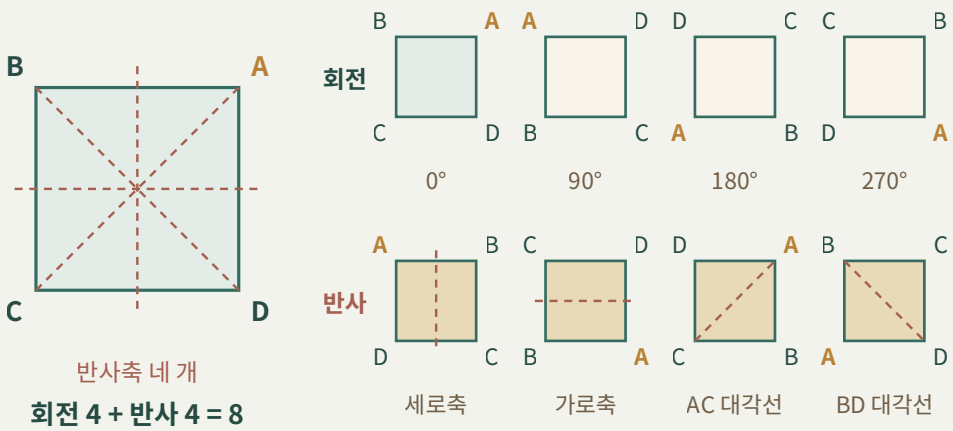
본문은 정사각형의 네 회전이 하나의 군을 이룬다는 것을 보였고 탐구 해설에서는 뒤집기를 포함하면 대칭이 여덟 가지가 된다고 짧게 덧붙였습니다. 여기서는 그 여덟 가지가 무엇이

며 왜 더 많을 수 없는지 살펴봅니다. 꼭짓점에 A와 B와 C와 D라는 이름을 반시계 방향으로 붙이고 A를 오른쪽 위에 둡니다. 조작이 끝난 뒤 정사각형은 같은 자리를 차지하고 이름만 옮겨 갑니다.

회전은 0°와 90°와 180°와 270°의 네 가지입니다. 반사는 세로축과 가로축 및 두 대각선을 기준으로 하는 네 가지입니다. 반사축이 대각선이면 그 대각선 위의 두 꼭짓점은 제자리에 남고 다른 두 꼭짓점이 맞바뀝니다. 그림의 아래 줄을 보면 반사한 뒤에는 이름이 시계 방향 순서로 읽힌다는 공통점이 보입니다.

여덟 가지보다 많을 수 없는 이유는 세어 보면 알 수 있습니다. A가 갈 수 있는 자리는 네 모퉁이 가운데 하나입니다. A의 자리가 정해지면 이웃한 B는 A의 양옆 두 모퉁이 가운데 하나에만 갈 수 있습니다. A와 B의 자리가 정해지면 C와 D의 자리도 저절로 정해지므로 가능한 경우는 4 × 2 = 8가지입니다.

본문의 순서를 바꾸면 달라지는 조작도 이 여덟 가지 안에서 설명됩니다. 세로축 반사 뒤에 90° 회전을 하면 오른쪽 위의 점이 왼쪽 아래로 가는데 이는 BD 대각선에 대한 반사 한 번과 같습니다. 두 조작을 이어 해도 여덟 가지 밖으로 나가지 않으므로 여덟 대칭도 군을 이룹니다. 1부터 9까지 쓰는 3차 마방진 여덟 개가 하나의 배열을 이 여덟 대칭으로 옮겨 얻은 것이라는 사실도 이 대칭으로 설명됩니다. 다만 3차 마방진이 본질적으로 하나뿐이라는 점은 따로 확인한 사실입니다.



네 회전과 네 반사가 꼭짓점 이름을 서로 다르게 옮깁니다.

조작	A의 자리	B의 자리
0° 회전	오른쪽 위	왼쪽 위
90° 회전	왼쪽 위	왼쪽 아래
세로축 반사	왼쪽 위	오른쪽 위
AC 대각선 반사	오른쪽 위	오른쪽 아래

탐구

90° 회전 뒤에 세로축 반사를 하면 여덟 대칭 가운데 어느 것과 같을까요? 꼭짓점 A와 B가 어디로 가는지 따라가 확인해 보세요.

풀이와 확인

90° 회전으로 오른쪽 위의 A는 왼쪽 위로 가고 왼쪽 위의 B는 왼쪽 아래로 갑니다. 이어 세로축 반사를 하면 A는 오른쪽 위로 돌아오고 B는 오른쪽 아래로 갑니다. A가 제자리에 있고 B와 D가 맞바뀌었으므로 A와 C를 지나는 대각선에 대한 반사와 같습니다. 순서를 바꾼 본문의 경우에는 BD 대각선 반사가 되었으므로 두 결과가 다르다는 것도 확인됩니다.

[5] MATHESIS 전시실 4. 근대 교육과 이임학 및 허준이

이어 읽기 / 현대의 수학과 열린 질문

경로 그래프의 계수와 파스칼 삼각형

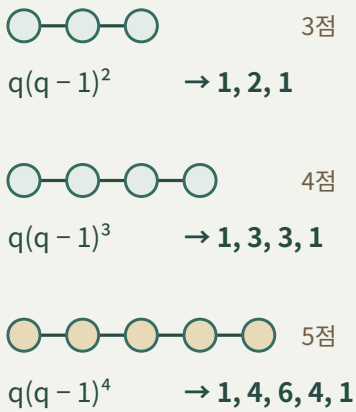
점을 일렬로 이은 그래프에서는 로그 오목성이 모든 크기에서 성립함을 보일 수 있습니다.

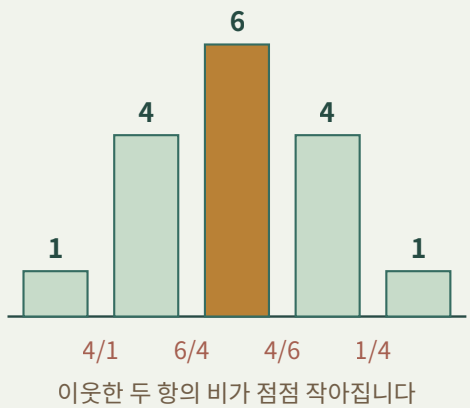
본문은 세 점 경로의 색칠 다항식 $q(q-1)^2$을 구하고 끝에 점 하나를 더 붙이면 $q(q-1)^3$이 된다는 것을 보였습니다. 점을 하나 더 이을 때마다 새 점은 이웃한 한 점의 색만 피하면 되므로 $(q-1)$이 한 번씩 더 곱해집니다. 따라서 n개의 점을 일렬로 이은 경로의 색칠 다항식은 q에 $(q-1)$을 $n-1$번 곱한 식입니다. 이 규칙 덕분에 작은 예를 넘어 경로 전체를 한꺼번에 다룰 수 있습니다.

식을 전개하면 부호를 뗀 계수가 파스칼 삼각형의 한 줄과 같습니다. 세 점에서는 1과 2와 1이고 네 점에서는 1과 3과 3과 1이며 다섯 점에서는 1과 4와 6과 4와 1입니다. $(q-1)$을 거듭 곱할 때 각 항의 계수가 바로 위 줄의 이웃한 두 수의 합으로 만들어지기 때문입니다. 마지막에 곱하는 q는 차수만 하나씩 올리고 계수는 바꾸지 않습니다.

다섯 점 경로의 계수에서 이웃한 두 항의 비를 차례로 구하면 4와 1.5와 약 0.67과 0.25로 점점 작아집니다. 양수인 수열에서 이 비가 줄어든다는 것은 가운데 항의 제곱이 양옆 항의 곱보다 크거나 같다는 조건과 같은 내용입니다. 실제로 $4^2 = 16$은 1×6보다 크고 $6^2 = 36$은 4×4보다 큽니다. 파스칼 삼각형의 어느 줄에서나 이 비는 앞으로 갈수록 작아지므로 경로 그래프의 계수는 항상 로그 오목합니다.

경로 그래프는 계수가 간단한 식으로 주어지는 특별한 경우입니다. 일반적인 그래프에서는 계수를 이처럼 한 줄의 공식으로 쓸 수 없습니다. 허준이의 연구는 일반적인 그래프의 색칠 다항식 계수를 다루었으며 그 증명에는 훨씬 깊은 도구가 필요했습니다. 이 단원의 계산은 그 질문의 모양을 경험하기 위한 학습용 예입니다.





경로의 점이 늘면 계수가 파스칼 삼각형의 다음 줄이 됩니다.

경로의 점 수	부호를 뗀 계수	세 색일 때
3	1, 2, 1	12
4	1, 3, 3, 1	24
5	1, 4, 6, 4, 1	48

탐구

여섯 점을 일렬로 이은 경로의 색칠 다항식에서 부호를 뗀 계수를 구하고 세 색으로 칠하는 가짓수를 계산해 보세요. 계수가 로그 오목성 조건을 만족하는지도 확인해 보세요.

풀이와 확인

계수는 파스칼 삼각형의 다음 줄인 1과 5와 10과 10과 5와 1입니다. 세 색이면 첫 점이 3가지이고 나머지 다섯 점이 각각 2가지이므로 $3 \times 32 = 96$가지입니다. 가운데 항을 차례로 검사하면 $5^2 = 25 \geq 1 \times 10$과 $10^2 = 100 \geq 5 \times 10$과 $10^2 = 100 \geq 10 \times 5$와 $5^2 = 25 \geq 10 \times 1$이 모두 성립합니다. 이웃한 항의 비도 5와 2와 1과 0.5와 0.2로 점점 작아집니다.

[18] 국제수학연맹. June Huh 필즈상 수상 사유

[KR27] June Huh. Milnor numbers of projective hypersurfaces and the chromatic polynomial of graphs

아프리카관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

아프리카관의 본문과 이어지는 다섯 단원이다. 각 단원 위에 표시한 장을 먼저 읽으면 그림이 무엇을 확인하는지 분명해진다.

이어 읽기 / 알렉산드리아에서 증명을 읽다

두 교점을 잇는 선과 수직이등분선

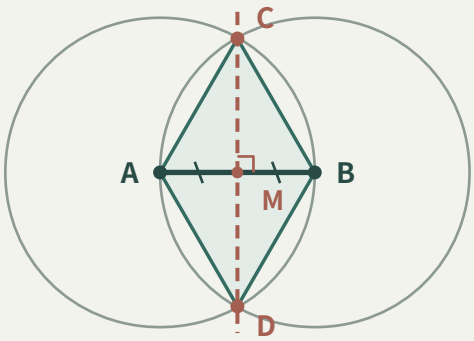
정삼각형 작도에서 쓰지 않은 두 번째 교점까지 이으면 선분의 중점과 수직선을 함께 얻는다.

2장의 정삼각형 작도에서는 A 중심 원과 B 중심 원의 교점 가운데 하나만 C로 택했다. 두 원은 선분 AB의 위쪽과 아래쪽에서 한 번씩 만나므로 아래쪽 교점을 D라고 부를 수 있다. C와 D를 잇는 직선이 AB와 만나는 점을 M이라 하자. 이 단원에서는 CD가 AB를 수직으로 이등분한다는 사실을 2장의 방식대로 근거를 이어 확인한다.

먼저 길이의 같음을 모은다. C와 D는 두 원 위에 모두 있으므로 CA와 CB와 DA와 DB는 모두 반지름이며 AB와 같다. 따라서 사각형 ACBD는 네 변이 같은 마름모다. 삼각형 ACD와 삼각형 BCD는 CA = CB와 DA = DB를 가지고 변 CD를 공유하므로 세 변이 각각 같아 합동이다.

이 합동에서 각 ACM과 각 BCM이 같다는 결론을 얻는다. 이제 삼각형 ACM과 삼각형 BCM을 비교하면 CA = CB이고 끼인각이 같으며 변 CM을 공유하므로 두 삼각형도 합동이다. 따라서 AM = BM이고 각 AMC와 각 BMC가 같다. 두 각의 합은 일직선이 만드는 180°이므로 각각 90°가 되고 CD는 AB의 수직이등분선이다.

이 설명은 원론의 문장을 옮긴 것이 아니라 정삼각형 작도의 그림을 넓힌 현대 재구성이다. 작도에 쓴 동작은 원 두 개와 직선 하나뿐이지만 결론에는 중점과 직각이라는 두 가지 정보가 들어 있다. 실제 종이에서는 컴퍼스의 오차 때문에 M이 정확한 중점에서 조금 벗어날 수 있다. 측정으로 확인한 값과 논증으로 얻은 결론을 구별하는 태도는 2장과 같다.



모두 반지름 AB와 같다

CA = CB = DA = DB

삼각형 ACD와 BCD 합동

삼각형 ACM과 BCM 합동

AM = MB

각 AMC = 90°

두 원의 두 교점 C와 D를 이으면 AB의 수직이등분선이 된다.

관계	근거
CA = CB = DA = DB = AB	두 원의 반지름
삼각형 ACD와 BCD 합동	세 변이 각각 같다
삼각형 ACM과 BCM 합동	두 변과 끼인각이 같다
AM = BM과 각 AMC = 90°	합동인 삼각형의 대응

탐구

AB = 6 cm로 작도했다면 두 교점 사이의 거리 CD는 얼마일까?

풀이와 확인

M은 AB의 중점이므로 AM = 3 cm이고 AC = 6 cm다. 각 AMC가 직각이므로 $CM^2 = 6^2 - 3^2 = 27$이며 CM은 약 5.20 cm다. CD는 그 두 배인 약 10.39 cm이고 정확한 값은 $6\sqrt{3}$ cm다. 실제로 잰 길이가 이 값과 조금 다르면 작도의 오차를 의심할 수 있다.

[EUCLID] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Euclid of Alexandria

이어 읽기 / 그림자에서 지구의 크기까지

그림자 비율에서 각도로 바꾸는 근사

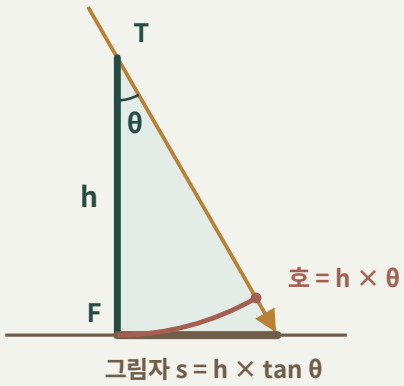
작은 각에서는 그림자 비율에 57.3을 곱해도 각도에 매우 가깝지만 각이 커지면 차이가 빠르게 커진다.

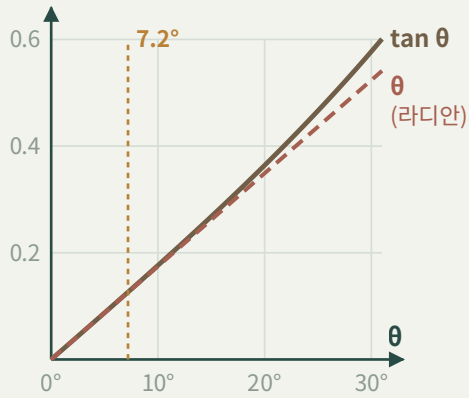
3장의 막대 실험은 tan θ = s/h라는 관계를 사용했다. 그런데 비율 s/h에서 각 θ를 얻으려면 탄젠트의 역함수를 계산해야 한다. 각이 작을 때에는 더 간단한 근사가 있다. 각을 라디안으로 재면 θ ≈ s/h이고 이를 도로 바꾸면 θ ≈ 57.3 × s/h가 된다. 여기서 57.3은 180/π의 근삿값이다.

근사의 이유는 그림에서 보인다. 막대 끝 T를 중심으로 반지름이 h인 호를 그리면 막대의 발 F에서 햇빛 선까지 이어지는 호의 길이는 h × θ다. 반면 그림자 길이 s는 h × tan θ다. 호는 직각삼각형의 안쪽으로 휘어 있어 그림자보다 짧고 각이 작을수록 두 길이는 거의 같아진다. 이 비교는 고대의 계산 절차를 복원한 것이 아니라 현대 학습용 모형이다.

숫자로 확인해 보자. 높이 80 cm인 막대의 그림자가 10 cm이면 s/h = 0.125다. 실제 각은 약 7.13°이고 근사값은 약 7.16°이므로 차이는 0.04°쯤이다. 그러나 s/h = 0.5이면 실제 각은 약 26.57°인데 근사값은 약 28.65°가 되어 2° 넘게 벗어난다. 호가 그림자보다 짧으므로 이 근사는 언제나 실제 각보다 큰 값을 준다.

이 작은 차이가 둘레 계산에서 어떻게 드러나는지도 볼 수 있다. 실제 각이 7.2°인 그림자 비율은 약 0.1263이며 근사로 바꾸면 약 7.24°가 된다. 거리 800 km를 고정하면 둘레는 40000 km 대신 약 39789 km로 계산된다. 근사를 쓸 때에는 그 오차가 측정 자체의 오차보다 충분히 작은지 함께 확인한다.





반지름 h인 호는 그림자보다 짧고 작은 각에서는 거의 같아진다.

그림자 비율 s/h	실제 각	57.3 × s/h	차이
0.125	약 7.13°	약 7.16°	약 0.04°
0.25	약 14.04°	약 14.32°	약 0.29°
0.5	약 26.57°	약 28.65°	약 2.08°

탐구

그림자 비율이 0.25일 때 근사로 얻은 각과 실제 각의 차이는 얼마일까?

풀이와 확인

근사값은 $180/\pi \times 0.25 \approx 14.32°$이고 실제 각은 약 $14.04°$이므로 차이는 약 $0.29°$다. 비율이 0.125일 때의 차이 약 $0.04°$보다 8배쯤 크다. 비율이 두 배가 될 때 차이가 대략 세제곱인 8배로 늘어나므로 이 근사는 작은 각에서만 쓰는 편이 안전하다.

[ERATOSTHENES] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Eratosthenes

이어 읽기 / 방정식과 주석의 전통

제곱의 차를 넓이로 보기

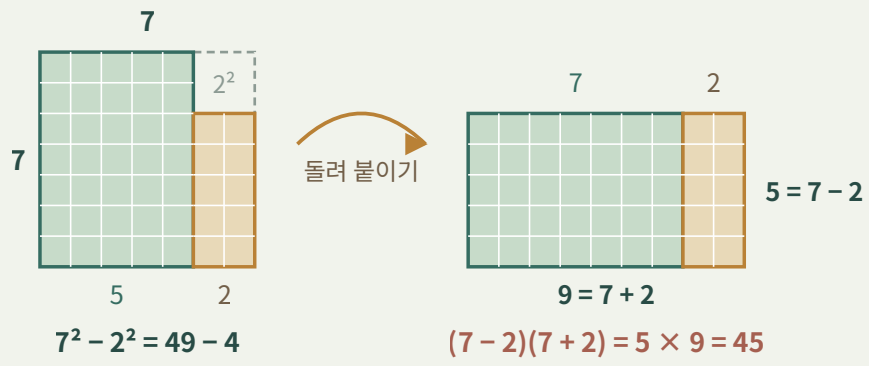
큰 정사각형에서 작은 정사각형을 떼어 낸 모양을 옮겨 붙이면 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$가 그림으로 보인다.

4장은 $x^2 - y^2 = 45$를 $(x - y)(x + y) = 45$로 바꾸어 약수 쌍을 살폈다. 이 인수분해는 전개해서 확인할 수 있지만 넓이 그림으로도 설명할 수 있다. 한 변이 x인 정사각형의 모서리에서 한 변이 y인 정사각형을 떼어 내면 남은 넓이가 $x^2 - y^2$다. 남은 ㄱ자 모양을 두 직사각형으로 잘라 다시 배치해 본다.

$x = 7$과 $y = 2$로 확인하자. 49에서 4를 뺀 모양은 가로 5와 세로 7인 직사각형 하나와 가로 2와 세로 5인 직사각형 하나로 나뉜다. 첫 조각을 돌려 눕히면 가로 7과 세로 5가 되고 둘째 조각을 옆에 붙이면 가로 $7 + 2 = 9$와 세로 5인 직사각형이 된다. 넓이는 $5 \times 9 = 45$로 $49 - 4$와 같다.

일반적인 경우에도 조각의 크기를 문자로 그대로 읽을 수 있다. 첫 조각은 가로 $x - y$와 세로 x인 직사각형이고 둘째 조각은 가로 y와 세로 $x - y$인 직사각형이다. 두 조각을 세로 $x - y$에 맞추어 이으면 가로가 $x + y$인 직사각형이 된다. 조각을 겹치거나 버리지 않았으므로 $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$가 성립한다.

이 그림은 x와 y가 양수이고 x가 y보다 클 때의 넓이 모형이다. 0이나 음수를 포함하는 경우에는 넓이 대신 전개식으로 등식을 확인해야 한다. 디오판토스의 저술이 이런 그림을 사용했다는 뜻이 아니며 이 장의 다른 예제처럼 학습용 모형이다. 완성된 직사각형의 세로 5와 가로 9가 4장에서 찾은 약수 쌍 5와 9에 그대로 대응한다는 점도 살펴본다.



7 × 7에서 2 × 2를 떼고 옮겨 붙이면 5 × 9 직사각형이 된다.

탐구

x = 9와 y = 6일 때 같은 방법으로 만든 직사각형의 세로와 가로는 얼마일까?

풀이와 확인

세로는 9 − 6 = 3이고 가로는 9 + 6 = 15다. 넓이는 3 × 15 = 45이며 81 − 36 = 45와 같다. 이 직사각형은 4장의 약수 쌍 3과 15에 해당하고 해 x = 9와 y = 6을 그림으로 확인해 준다.

[DIOPHANTUS] 세인트앤드루스대학교 MacTutor. Diophantus of Alexandria

이어 읽기 / 요루바 수 이름과 기준량

스무 개씩 두 번 묶어 세 자리 만들기

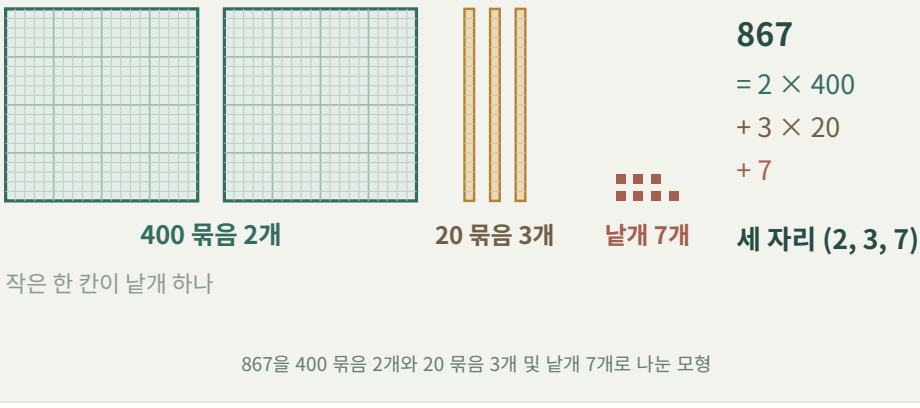
스무 개 묶음을 다시 스무 개씩 묶으면 400을 단위로 하는 세 번째 자리가 생긴다.

7장은 67 = 3 × 20 + 7처럼 수를 스무 개 묶음과 낱개로 나누었고 자리값 20진 표기를 현대 활동으로 따로 만들 수 있다고 했다. 이 단원은 그 모형을 한 단계 넓힌다. 스무 개 묶음이 스무 개 모이면 20 × 20 = 400개짜리 큰 묶음이 된다. 그러면 수를 400 묶음의 개수와 20 묶음의 개수 및 낱개로 나타낼 수 있다.

867을 예로 들자. 867을 20으로 나누면 몫이 43이고 나머지가 7이다. 몫 43을 다시 20으로 나누면 몫이 2이고 나머지가 3이다. 따라서 867 = 2 × 400 + 3 × 20 + 7이며 세 자리는 큰 자리부터 2와 3과 7이다.

반복 나눗셈이 옳은 이유는 식을 되짚으면 보인다. 867 = 43 × 20 + 7에서 43을 2 × 20 + 3으로 바꾸어 넣으면 2 × 400 + 3 × 20 + 7을 얻는다. 가운데 자리와 마지막 자리는 각각 0부터 19까지의 수다. 두 자리로 만들 수 있는 가장 큰 값은 19 × 20 + 19 = 399로 400보다 작으므로 각 수의 세 자리는 하나로 정해진다.

이 표기는 요루바어의 수 이름을 옮긴 것이 아니라 스무 개 묶음이라는 관점에서 만든 현대 표기 모형이다. 실제 수 이름은 덧셈과 뺄셈을 섞어 쓰고 방언에 따라 다를 수 있으므로 이 자리 표기와 일대일로 대응시키지 않는다. 다만 묶음 수와 나머지를 구별하는 7장의 생각이 자리값의 바탕이 된다는 점은 확인할 수 있다.



867을 400 묶음 2개와 20 묶음 3개 및 낱개 7개로 나눈 모형

나눗셈	몫	나머지
867 ÷ 20	43	7
43 ÷ 20	2	3
2 ÷ 20	0	2

탐구

1000을 같은 방식의 세 자리로 나타내 보자.

풀이와 확인

1000 = 50 × 20 + 0이고 50 = 2 × 20 + 10이다. 따라서 1000 = 2 × 400 + 10 × 20 + 0이며 세 자리는 2와 10과 0이다. 되짚어 계산하면 800 + 200 + 0 = 1000이다. 가운데 자리의 10은 20보다 작으므로 하나의 자리에 들어갈 수 있다.

[YORUBA] Felix Abídèmí Fábùnmi. Vigesimal Numerals on Ifè Dialects of Yorùbá. Linguistik Online

이어 읽기 / 소나의 선과 연결

차수의 합과 홀수 점의 개수

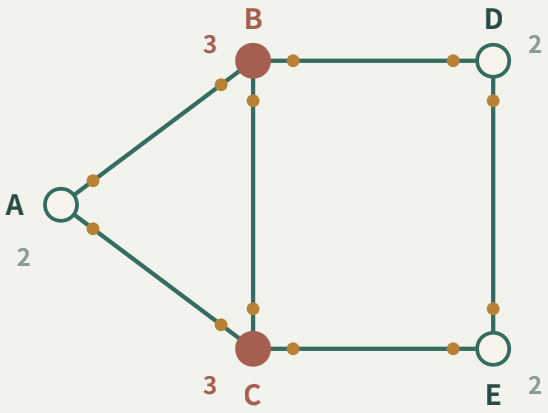
모든 선은 끝을 두 개 가지므로 차수의 합은 언제나 짝수이고 홀수 차수의 점은 짝수 개만 생긴다.

8장은 연결된 그래프에서 홀수 차수의 점이 없거나 두 개이면 한붓 경로를 찾을 수 있다고 했다. 그렇다면 홀수 점이 하나이거나 세 개인 그래프는 왜 예로 나오지 않았을까? 그런 그래프는 처음부터 만들 수 없기 때문이다. 이 단원은 그 이유를 선의 끝을 세는 방법으로 설명한다.

선 하나는 양 끝에서 두 점에 붙는다. 그래서 모든 점의 차수를 더하면 각 선이 정확히 두 번씩 세어진다. 차수의 합은 선의 수의 두 배이므로 언제나 짝수다. 그림의 그래프는 선이 6개이고 차수가 2와 3과 3과 2와 2이므로 합은 12 = 2 × 6이다.

차수의 합이 짝수이면 홀수 차수의 점도 짝수 개여야 한다. 짝수 차수들의 합은 짝수이므로 나머지 홀수 차수들의 합도 짝수여야 하는데 홀수를 홀수 개 더하면 홀수가 되기 때문이다. 따라서 홀수 점의 수는 0이나 2나 4처럼 짝수만 가능하다. 그림에서는 B와 C 두 점이 홀수이므로 B에서 출발해 A와 C와 B와 D와 E를 차례로 지나 C에서 끝나는 한붓 경로를 찾을 수 있다.

이 성질은 점과 선으로 정한 그래프 모형 안의 결론이며 소나 도안의 의미를 설명하는 것은 아니다. 도안을 그래프로 옮길 때 교차점을 연결점으로 볼지에 따라 차수가 달라지므로 먼저 규칙을 적어야 한다. 규칙이 정해진 뒤에는 차수의 합을 검산 도구로 쓸 수 있다. 차수를 세었는데 합이 홀수라면 어느 점에서 선을 빠뜨렸거나 두 번 센 것이다.



- 선의 끝 = 선마다 2개

차수의 합

2 + 3 + 3 + 2 + 2 = 12

= 2 × (선 6개)

홀수 점: B와 C

한붓 경로

B → A → C → B → D → E → C

선마다 끝이 두 개이므로 차수의 합 12는 선의 수 6의 두 배다.

탐구

차수가 3과 3과 3과 2인 네 점으로 이루어진 그래프를 그릴 수 있을까?

풀이와 확인

그릴 수 없다. 차수의 합이 3 + 3 + 3 + 2 = 11로 홀수인데 차수의 합은 선의 수의 두 배여야 하기 때문이다. 홀수 점이 세 개라는 사실만 보아도 같은 결론을 얻는다. 그림을 그리다 보면 어딘가에서 선 하나의 끝이 남게 된다.

[SONA] 유네스코 무형문화유산. Sona drawings and geometric figures on sand

고대 아메리카관 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

고대 아메리카관의 본문과 이어지는 다섯 단원이다. 각 단원 위에 표시한 장을 먼저 읽으면 그림이 무엇을 확인하는지 분명해진다.

이어 읽기 / 스무 개씩 묶는 계산

반복 나눗셈으로 큰 수를 세 자리에 놓기

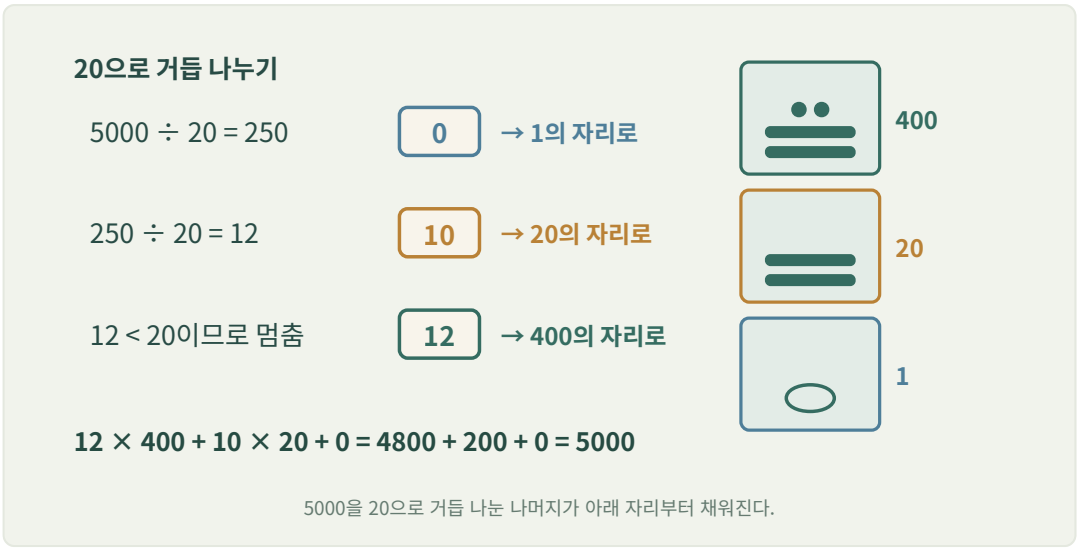
20으로 나누는 일을 되풀이하면 큰 수의 자리가 아래부터 하나씩 정해진다.

3장은 47과 843처럼 비교적 작은 수를 순수 이십진법으로 바꾸었다. 같은 방법을 5000이라는 큰 수에 적용해 보자. 5000을 20으로 나누면 몫은 250이고 나머지는 0이다. 이 첫 나머지 0이 가장 아래인 1의 자리에 놓인다.

다음에는 몫 250을 다시 20으로 나눈다. 몫은 12이고 나머지는 10이므로 20의 자리에 10이 놓인다. 마지막 몫 12는 20보다 작아 더 나눌 수 없으므로 그대로 400의 자리가 된다. 따라서 5000은 위부터 12와 10과 0으로 나타낸다.

검산은 자리 무게를 곱해 더하는 방향으로 한다. 12×400+10×20+0은 4800+200으로 5000이다. 점막대 그림에서는 위 자리에 막대 둘과 점 둘, 가운데 자리에 막대 둘, 아래 자리에 0의 표시가 들어간다. 나눗셈은 아래 자리부터 답을 주지만 읽을 때는 위 자리의 큰 무게부터 확인한다는 점이 3장의 설명과 같다.

세 자리로 나타낼 수 있는 가장 큰 수도 이 구조에서 바로 구할 수 있다. 세 자리에 모두 19를 놓으면 19×400+19×20+19=7999다. 여기에 1을 더하면 모든 자리에서 올림이 이어져 8000에는 넷째 자리가 필요하다. 십진법에서 999 다음에 1000이 오는 것과 같은 구조이며 이 계산은 순수 이십진법의 학습용 모형이다.



5000을 20으로 거듭 나눈 나머지가 아래 자리부터 채워진다.

탐구

순수 이십진법으로 2400을 나타내면 각 자리에 무엇이 놓일까?

풀이와 확인

2400÷20은 몫 120과 나머지 0이고 120÷20은 몫 6과 나머지 0이다. 따라서 위부터 6과 0과 0이 놓인다. 6×400=2400으로 검산되며 아래 두 자리가 모두 비어 있으므로 0의 표시를 두 번 남겨야 값이 6으로 줄어들지 않는다.

[A12] Smithsonian NMAI. Maya Math Game

이어 읽기 / 장기력으로 긴 시간을 세다

빌림이 두 번 이어지는 장기력 뺄셈

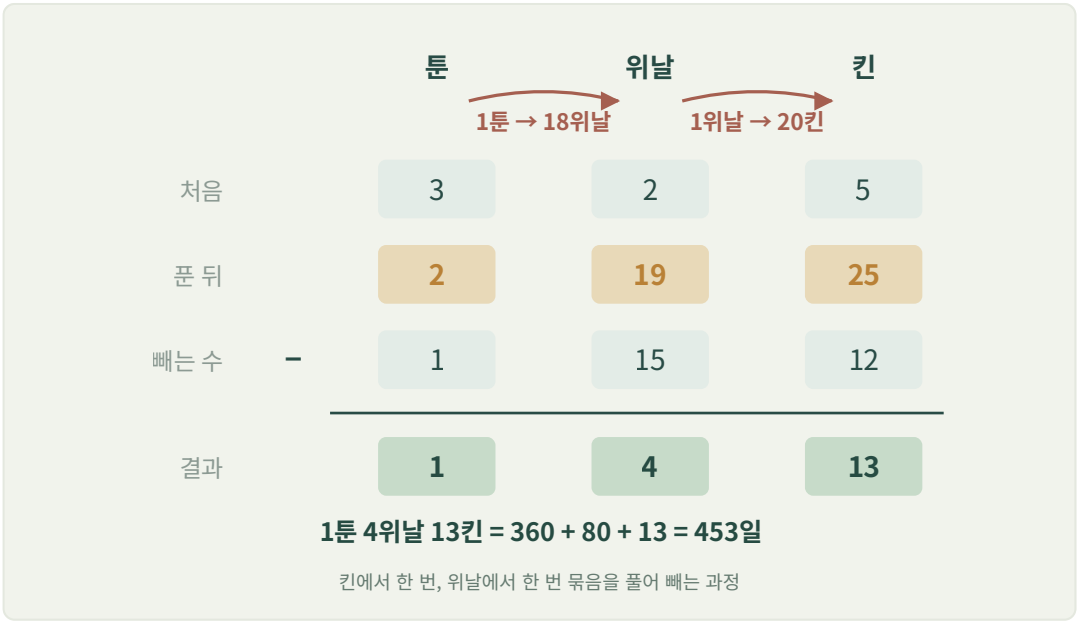
자리마다 교환 크기가 다른 빌림을 한 단계씩 따라간다.

4장의 날짜 차이 단원은 빌림이 필요하면 전체 일수로 먼저 바꾸는 편이 편리하다고 했다. 여기서는 일수로 바꾸지 않고 자리별로 빼는 방법을 직접 따라가 본다. 예제는 같은 기준점에서 잰 가상의 두 기록 3툰 2위날 5킨과 1툰 15위날 12킨이다. 앞의 값에서 뒤의 값을 빼면 두 기록 사이의 상대 기간이 나온다.

먼저 킨의 자리에서는 5에서 12를 뺄 수 없다. 위날 하나를 풀면 20킨이 되므로 위날은 1이 되고 킨은 25가 된다. 25−12=13이 킨 자리의 결과다. 다음으로 위날의 자리에서도 1에서 15를 뺄 수 없으므로 툰 하나를 풀어야 한다.

이때 툰 하나는 20위날이 아니라 18위날이다. 위날은 1+18=19가 되고 19−15=4가 남으며 툰은 2−1=1이 된다. 결과는 1툰 4위날 13킨이다. 툰 하나를 20위날로 잘못 풀면 위날이 6으로 나와 답이 40일 커진다.

검산은 전체 일수로 한다. 앞의 기록은 3×360+2×20+5=1125일이고 뒤의 기록은 360+15×20+12=672일이다. 차는 453일이며 1툰 4위날 13킨도 360+80+13=453일이다. 두 경로가 같은 답을 주면 빌림 과정에서 교환 크기를 바르게 썼다는 것을 확인할 수 있다.



단계	툰	위날	킨
처음	3	2	5
위날 하나를 킨으로	3	1	25
툰 하나를 위날로	2	19	25
1툰 15위날 12킨을 뺀 결과	1	4	13

탐구

2툰 0위날 3킨에서 0툰 17위날 9킨을 빼면 어떻게 될까?

풀이와 확인

킨 3에서 9를 빼려면 위날을 풀어야 하는데 위날이 0이므로 먼저 툰 하나를 18위날로 푼다. 그다음 위날 하나를 20킨으로 풀면 1툰 17위날 23킨이 되고 빼면 1툰 0위날 14킨이 남는다. 전체 일수로는 723−349=374일이며 360+14=374로 일치한다.

[A13] Smithsonian NMAI. Maya Calendar Converter

[A4] Smithsonian NMAI. The Calendar System

이어 읽기 / 두 달력이 맞물리는 날

도달하는 짝은 전체 조합의 몇 분의 1인가

두 순환이 함께 움직일 때 실제로 지나는 짝과 지나지 않는 짝을 격자에서 센다.

5장은 길이 4와 6인 작은 순환을 실험하며 처음 짝이 12번 이동한 뒤에 돌아온다고 설명했다. 이 실험을 세로 4칸과 가로 6칸의 격자에 옮기면 다른 질문이 보인다. 색 넷과 도형 여섯을 짝짓는 방법은 모두 24가지다. 그러나 하루에 한 칸씩 함께 움직이는 순환은 그 가운데 일부만 지난다.

0일의 짝을 색 0과 도형 0으로 놓고 날마다 두 번호를 하나씩 늘리면 12일 동안 서로 다른 짝 12개를 지난 뒤 출발점으로 돌아온다. 격자에서 이 칸들을 칠하면 정확히 절반만 채워진다. 칠해진 칸은 두 번호의 차가 짝수인 칸이며 차가 홀수인 칸에는 한 번도 도착하지 않는다. 5장에서 주기 6과 8의 두 나머지는 짝홀성이 같아야 한다고 한 조건과 같은 종류의 제한이다.

일반적으로 두 주기 a와 b의 순환이 지나는 짝의 수는 두 수의 최소공배수와 같다. 전체 조합 a×b를 최소공배수로 나누면 최대공약수가 나오므로 지나는 짝은 전체의 1/최대공약수다. 4와 6에서는 24÷12=2이므로 절반이다. 4와 7처럼 최대공약수가 1이면 28가지 짝을 모두 지난다.

260일과 365일 순환에 적용하면 전체 조합은 94900가지이고 실제로 나타나는 짝은 18980가지다. 94900÷18980=5이므로 가능한 조합의 5분의 1만 달력 위에 나타난다. 나머지 5분의 4는 계산표를 잘못 만들었을 때 생기는 짝이며 5장의 호환 조건이 이를 걸러 낸다. 이 분석은 반복 구조에 대한 현대 수학 모형이며 실제 날짜 이름의 의미를 다루지 않는다.



4칸과 6칸 순환은 24가지 짝 가운데 절반인 12칸만 지난다.

두 주기	전체 조합	지나는 짝	비율
4와 6	24	12	1/2
4와 7	28	28	1
260과 365	94900	18980	1/5

탐구

주기 6과 9인 두 순환은 전체 조합 가운데 몇 가지 짝을 지날까?

풀이와 확인

전체 조합은 $6 \times 9 = 54$가지다. 두 수의 최대공약수가 3이므로 최소공배수는 18이고 순환이 지나는 짝은 18가지다. $54 \div 18 = 3$이므로 전체의 3분의 1이며 두 나머지를 3으로 나눈 나머지가 같은 짝만 나타난다.

[A4] Smithsonian NMAI. The Calendar System

이어 읽기 / 하늘의 반복을 표에 담다

365일 바퀴 위에 찍히는 584일 주기의 다섯 자리

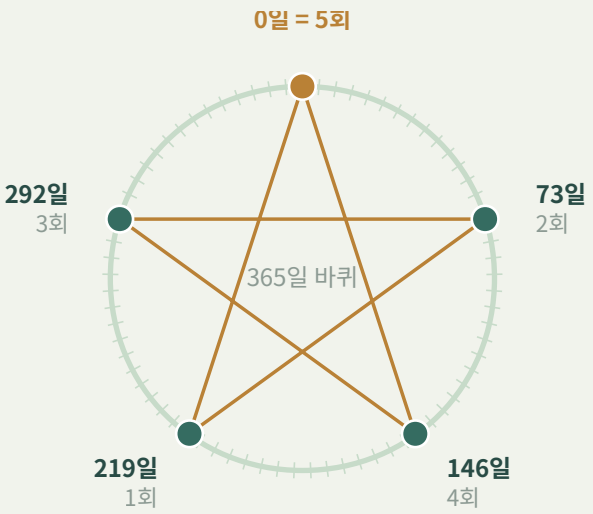
584일씩 나아간 위치를 365로 나눈 나머지로 추적하면 별 모양이 나타난다.

6장은 584×5=365×8=2920이라는 정수 모형을 보였다. 이 관계를 365일 순환의 바퀴 위에 그려 보면 584일 주기의 시작점이 어디에 놓이는지 알 수 있다. 0일에서 출발해 584일씩 나아가며 매번 365로 나눈 나머지를 적는다. 이 나머지가 365일 순환 안에서의 위치 번호다.

584를 365로 나누면 나머지가 219이므로 첫 주기는 219번 위치에 닿는다. 이어서 1168과 1752와 2336과 2920의 나머지는 차례로 73과 292와 146과 0이다. 다섯 번째에 0으로 돌아오므로 쓰이는 위치는 다섯 곳뿐이다. 다섯 위치는 모두 73의 배수이며 바퀴를 정확히 다섯 등분한다.

다섯 자리만 나타나는 까닭은 최대공약수에 있다. 584=8×73이고 365=5×73이므로 두 주기의 최대공약수는 73이다. 584를 더할 때마다 위치는 73의 배수 사이에서만 움직이고 365÷73=5개의 자리를 돈다. 한 번에 73의 세 배씩 건너뛰므로 순서대로 이으면 별 모양의 오각형이 그려진다.

2920일이 두 순환이 처음으로 함께 출발점에 돌아오는 시점이라는 사실도 이 그림에서 읽을 수 있다. 584×365÷73=2920이므로 5장의 최소공배수 계산과 같은 구조다. 다만 이것은 584와 365를 정확한 정수로 놓은 학습용 모형이다. 6장이 강조했듯이 실제 관측의 작은 차이는 이 정수 그림에 나타나지 않는다.



584 = 365 + 219

584 = 8 × 73

365 = 5 × 73

219 = 3 × 73

쓰이는 위치는 다섯 곳

5회 뒤 2920일에 0으로

584일씩 나아간 위치가 365일 바퀴의 다섯 곳에 별 모양으로 찍힌다.

탐구

584일 주기를 일곱 번 진행하면 365일 바퀴의 어느 위치에 놓일까?

풀이와 확인

584×7=4088이며 4088=365×11+73이므로 위치는 73이다. 다섯 번마다 0으로 돌아오므로 일곱 번째는 두 번째와 같은 자리라는 점으로도 확인할 수 있다. 두 번째 위치 1168을 365로 나눈 나머지도 73이다.

[A6] SLUB Dresden. The Dresden Maya Codex Content

이어 읽기 / 산비탈을 바꾸는 기하

비탈면의 넓이와 계단 발판의 넓이

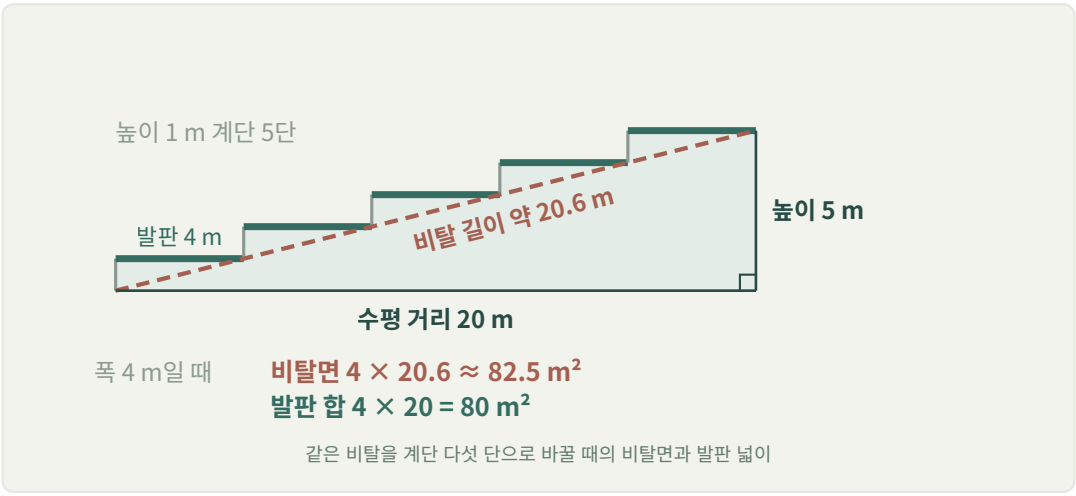
같은 비탈을 계단으로 바꾸면 경작할 수 있는 넓이가 어떻게 달라지는지 계산한다.

10장은 경사진 면의 넓이와 위에서 내려다본 수평 투영 면적이 같지 않을 수 있다고 지적했다. 그 차이를 피타고라스 정리로 직접 계산해 보자. 수업용 비탈은 수평 거리 20 m에서 높이가 5 m 올라가고 폭은 4 m라고 정한다. 이는 10장의 25퍼센트 경사 모형과 같은 비율이다.

비탈을 따라 잰 길이는 직각삼각형의 빗변이다. $20^2+5^2=425$이므로 빗변은 $\sqrt{425}$로 약 20.6 m다. 따라서 비탈면의 넓이는 $4\times\sqrt{425}$로 약 82.5 m^2다. 같은 땅을 위에서 내려다본 수평 투영 면적은 $4\times20=80$ m^2다.

이 비탈을 높이 1 m와 수평 깊이 4 m인 다섯 단의 계단으로 바꾸었다고 하자. 다섯 발판의 수평 길이를 모두 합하면 20 m이므로 발판 넓이의 합은 80 m^2로 수평 투영 면적과 같다. 계단의 벽면은 높이 합 5 m에 폭 4 m를 곱한 20 m^2지만 이 면은 경작면이 아니다. 따라서 발판 넓이는 비탈면보다 약 2.5 m^2 작으며 비탈면의 약 97퍼센트다.

경사가 완만할수록 두 넓이의 차이는 작아진다. 수평 거리와 높이 차가 같은 100퍼센트 경사에서는 비탈면이 수평 투영 면적의 $\sqrt{2}$배인 약 1.41배가 된다. 그래서 넓이를 보고할 때는 비탈을 따라 잰 값인지 수평으로 잰 값인지 반드시 적어야 한다. 이 수치는 실제 유적의 치수가 아닌 학습용 모형이다.



같은 비탈을 계단 다섯 단으로 바꿀 때의 비탈면과 발판 넓이

경사	수평 투영 면적	비탈면 넓이	비율
20퍼센트 (30 m, 6 m)	120 m^2	약 122.4 m^2	약 1.02
25퍼센트 (20 m, 5 m)	80 m^2	약 82.5 m^2	약 1.03
100퍼센트 (20 m, 20 m)	80 m^2	약 113.1 m^2	약 1.41

탐구

수평 거리 30 m에서 높이 차가 6 m인 비탈에서 폭 4 m 비탈면의 넓이는 수평 투영 면적보다 얼마나 클까?

풀이와 확인

빗변은 $\sqrt{(30^2+6^2)}=\sqrt{936}$으로 약 30.6 m이고 비탈면 넓이는 약 122.4 m^2다. 수평 투영 면적은 $4\times30=120$ m^2이므로 차이는 약 2.4 m^2다. 10장의 탐구에서 구한 20퍼센트 경사는 25퍼센트 모형보다 완만하므로 넓이의 비율도 약 1.02로 더 작다.

[A10] UNESCO. Historic Sanctuary of Machu Picchu

지식의 길 / 보충

그림으로 다시 읽는 보충 탐구

지식의 길의 본문과 이어지는 다섯 단원이다. 각 단원 위에 표시한 장을 먼저 읽으면 그림이 무엇을 확인하는지 분명해진다.

이어 읽기 / 한 줄이 아닌 길의 그물

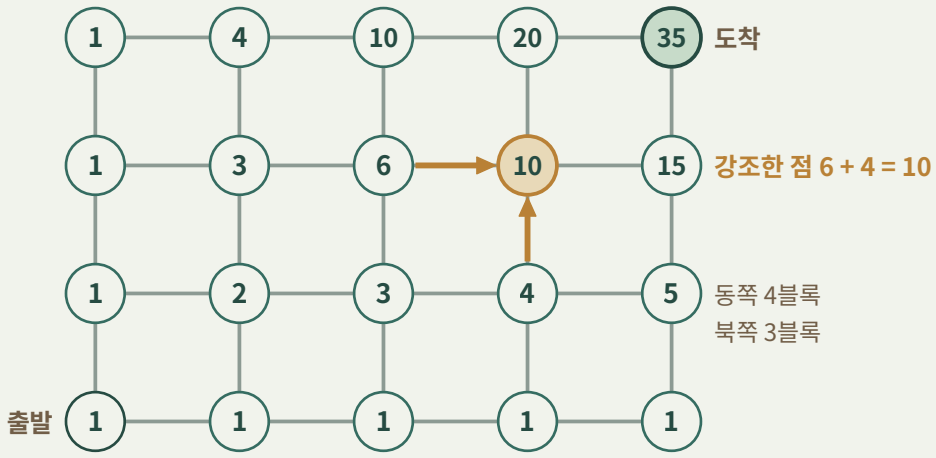
격자 길에서 경로 수를 더해 세기

갈림길마다 도착하는 경로 수를 더해 가면 곱셈 하나로 셀 수 없는 연결망도 빠짐없이 셀 수 있다.

1장에서는 반드시 나를 거치는 길에서 앞 구간 2개와 뒤 구간 3개의 선택을 곱해 2×3=6을 얻었다. 이 곱셈은 모든 경로가 같은 중간 거점을 지나고 앞뒤 선택이 서로를 제한하지 않을 때 성립한다. 도로가 격자처럼 얽혀 있으면 경로마다 지나는 거점이 달라 한 번의 곱셈으로는 셀 수 없다. 이런 연결망에서는 각 교차점에 도착하는 방법의 수를 차례로 적어 나가는 편이 확실하다.

현대 재구성으로 동쪽 4블록과 북쪽 3블록 떨어진 목적지까지 동쪽과 북쪽으로만 가는 경로를 세어 보자. 어떤 교차점에 도착하는 마지막 걸음은 서쪽 이웃에서 오거나 남쪽 이웃에서 온다. 두 경우는 겹치지 않으므로 그 교차점의 경로 수는 두 이웃의 수를 더한 값이다. 출발점과 같은 줄이나 같은 열에 있는 교차점은 한 방향으로만 갈 수 있으므로 모두 1로 시작한다.

이 규칙으로 표를 채우면 둘째 줄은 1과 2와 3과 4와 5가 되고 셋째 줄은 1과 3과 6과 10과 15가 된다. 마지막 줄은 1과 4와 10과 20과 35이므로 목적지까지의 최단 경로는 35개다. 일곱 걸음 가운데 북쪽 걸음 세 개의 자리를 고르는 방법을 세면 7×6×5÷(3×2×1)=35가 되어 결과가 일치한다. 공식은 빠르지만 덧셈 표는 길 하나가 막힌 경우에도 그대로 쓸 수 있다는 장점이 있다.



각 교차점의 수는 서쪽과 남쪽 이웃의 수를 더한 값이다.

탐구

출발점에서 동쪽 1블록과 북쪽 1블록 떨어진 교차점에서 동쪽으로 나가는 구간 하나가 막히면 목적지까지의 경로는 몇 개인가?

풀이와 확인

막힌 구간을 지나는 경로는 그 교차점까지 가는 2가지와 다음 교차점에서 목적지까지 가는 6가지를 곱한 12개다. 따라서 35−12=23개가 남는다. 막힌 구간을 빼고 덧셈 표를 다시 채워도 마지막 수가 23이 되어 두 방법이 일치한다.

이어 읽기 / 기록의 재료와 책의 구조

겹쳐 접은 종이의 쪽번호 규칙

한 번 접은 종이를 여러 장 겹치면 같은 면에 나란히 놓이는 두 쪽의 합이 언제나 같다.

3장에서는 세 장을 겹쳐 접은 열두 쪽 모형에서 바깥 종이에 1과 2 및 11과 12쪽이 놓인다는 것을 확인했다. 이 배치에는 눈에 띄는 규칙이 있다. 한 면에 나란히 놓이는 두 쪽은 12와 1, 2와 11처럼 합이 모두 13이다. 가운데 종이의 10과 3, 안쪽 종이의 8과 5에서도 합은 13이다.

규칙의 이유는 쪽번호를 매기는 순서에 있다. 책을 넘기면 앞쪽 절반에서는 바깥 종이부터 안쪽 종이로 들어가며 번호가 늘고 뒤쪽 절반에서는 안쪽에서 바깥으로 나오며 번호가 는

다. 그래서 바깥에서 k번째 종이는 앞에서 k번째 잎과 뒤에서 k번째 잎을 함께 가진다. 앞에서 센 번호와 뒤에서 센 번호를 더하면 전체 쪽수에 1을 더한 값이 된다.

일반적으로 n장을 겹쳐 접으면 쪽은 4n개이고 바깥에서 k번째 종이에는 2k−1과 2k 및 4n+1−2k와 4n+2−2k쪽이 놓인다. 짝이 되는 두 쪽의 합은 4n+1이다. n=3이면 13이 되어 앞의 모형과 맞고 n=5이면 21이 된다. 이 식은 한 번 접은 종이를 중첩한 교육용 모형에서만 성립하며 실제 제책은 접는 횟수와 묶는 방식에 따라 다를 수 있다.

이 규칙은 결락을 판단할 때 바로 쓸 수 있다. 쪽 하나가 빠진 것을 발견하면 4n+1에서 그 번호를 빼어 같은 종이의 짝 쪽을 찾는다. 3장의 질문처럼 3과 4 및 9와 10쪽이 함께 없다면 3+10과 4+9가 모두 13이므로 가운데 종이 한 장이 빠졌다는 설명과 맞는다. 빠진 쪽들의 짝이 맞지 않으면 여러 장의 손실이나 다른 제책 구조를 함께 검토한다.



세 장을 겹쳐 접으면 같은 면에 놓이는 두 쪽의 합은 13이다.

종이	쪽번호	짝의 합
바깥	1, 2, 11, 12	13
가운데	3, 4, 9, 10	13
안쪽	5, 6, 7, 8	13

탐구

다섯 장을 겹쳐 접은 20쪽 모형에서 7쪽과 같은 종이에 놓이는 쪽은 무엇인가?

풀이와 확인

n=5이므로 짝의 합은 4n+1=21이다. 2k−1=7에서 k=4이므로 7쪽은 바깥에서 넷째 종이에 있고 같은 종이에는 8쪽과 21−8=13쪽 및 21−7=14쪽이 놓인다. 7과 14, 8과 13의 합이 모두 21인지 확인하면 계산이 맞다.

이어 읽기 / 천문표의 줄 사이를 읽기

곡선 위에서 직선 보간의 오차 가늠하기

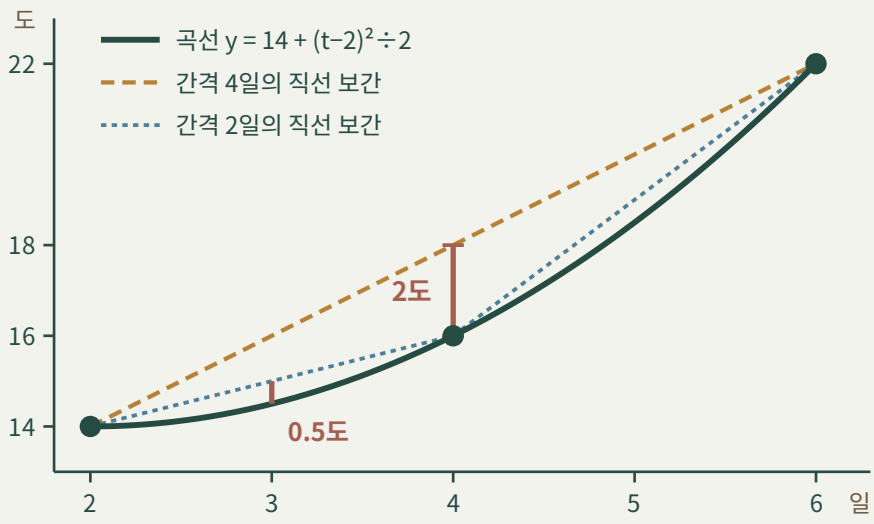
표의 간격을 절반으로 줄이면 이차 곡선에서 직선 보간의 최대 오차는 4분의 1로 줄어든다.

케임브리지대학교의 천문표 자료가 보여 주듯 표는 긴 계산을 반복하지 않고 필요한 값을 찾게 해 주는 도구다. 7장의 보간은 두 표 값 사이를 직선으로 잇는다는 가정에 기댄다. 실제 움직임이 곡선이라면 보간값과 참값 사이에 차이가 생긴다. 이 차이가 얼마나 커질 수 있는지 미리 가늠하면 표의 간격을 정하거나 결과에 붙일 오차의 범위를 정할 수 있다.

학습용 모형으로 가상 위치가 $y=14+(t-2)^2\div2$라는 곡선을 따른다고 하자. 2일에는 14도이고 6일에는 22도이므로 7장의 표와 같은 두 값을 지난다. 직선 보간은 4일에 18도를 주지만 곡선의 값은 16도다. 3일과 5일에서는 차이가 각각 1.5도이고 가운데인 4일에서 2도로 가장 크다.

이차 곡선에서는 이 최대 차이를 간단한 식으로 쓸 수 있다. 구간의 길이를 h라 하고 곡선이 휘는 정도를 나타내는 이계도함수를 f''라 하면 가운데에서의 차이는 $h^2\times f''\div8$이다. 이 모형에서는 $h=4$이고 $f''=1$이므로 $16\div8=2$가 되어 직접 계산한 값과 같다. 이차식이 아닌 곡선에서도 구간 안에서 f''의 크기가 가장 큰 값을 넣으면 오차의 상한으로 쓸 수 있다.

중요한 점은 오차가 h^2에 비례한다는 사실이다. 표에 4일 값 16도를 추가해 간격을 2일로 줄이면 최대 오차는 $2^2\times1\div8=0.5$도가 된다. 실제로 3일에서 곡선은 14.5도이고 2일과 4일을 잇는 직선은 15도이므로 차이는 0.5도다. 간격을 절반으로 줄이려면 표의 줄 수가 두 배로 늘지만 오차는 4분의 1로 줄어든다.



곡선과 두 직선 보간의 차이는 가운데에서 2도와 0.5도다.

표 간격	최대 오차	확인한 날짜
4일	2도	4일
2일	0.5도	3일과 5일

탐구

같은 곡선에서 표 간격을 1일로 줄이면 직선 보간의 최대 오차는 얼마인가?

풀이와 확인

h=1이므로 $1^2 \times 1 \div 8 = 0.125$도다. 2일과 3일 사이의 가운데인 2.5일에서 곡선은 $14 + 0.25 \div 2 = 14.125$도이고 직선은 14와 14.5의 평균인 14.25도이므로 차이는 0.125도다. 간격 2일의 0.5도보다 다시 4분의 1로 줄었다.

[SRB04] 케임브리지대학교 천문표 역사 자료

이어 읽기 / 지도를 읽는 수학

밑각이 다른 삼각형으로 강 건너 거리 재기

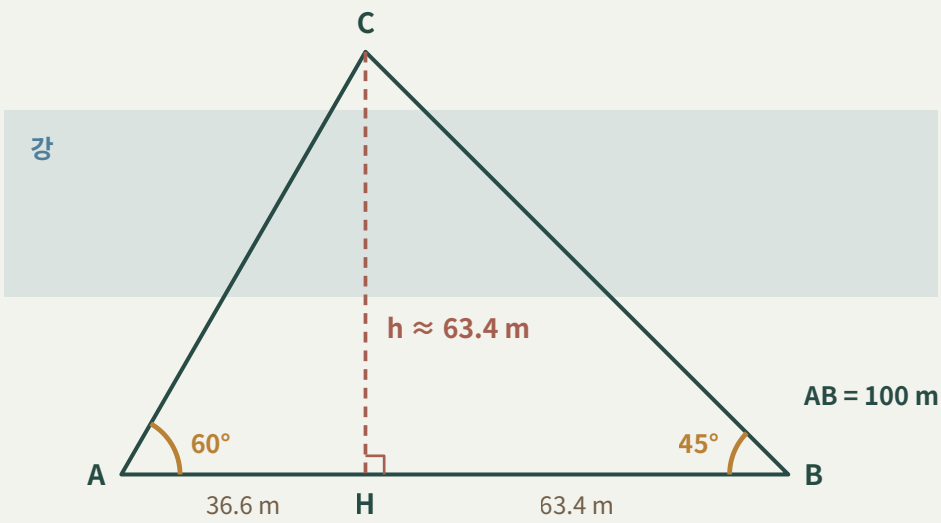
두 밑각이 같지 않아도 높이를 공통의 미지수로 놓으면 기준선과 두 각만으로 거리를 구할 수 있다.

8장의 예제는 두 밑각이 모두 45°여서 높이가 기준선의 절반인 50 m로 바로 나왔다. 실제 측량에서는 목표점이 기준선 가운데의 맞은편에 놓인다는 보장이 없다. 두 밑각이 다르면 C에서 기준선에 내린 수선의 발 H가 한쪽으로 치우친다. 이때에도 높이를 공통의 미지수로 놓으면 기준선 하나와 두 각만으로 거리를 구할 수 있다.

현대 재구성으로 기준선 AB가 100 m이고 A의 밑각이 60°이며 B의 밑각이 45°라고 하자. 높이를 h라 하면 직각삼각형 BHC는 직각이등변삼각형이므로 BH는 h와 같다. 직각삼각형 AHC에서는 h÷AH=tan 60°≈1.732이므로 AH=h÷1.732이다. 두 조각의 합이 100 m라는 조건에서 h×(1+1÷1.732)=100이라는 식을 얻는다.

이 식을 풀면 h≈63.4 m이고 AH≈36.6 m이며 BH≈63.4 m다. 각이 큰 A 쪽으로 수선의 발이 다가가고 높이는 두 각이 모두 45°일 때의 50 m보다 커진다. 일반적으로 두 밑각을 α와 β라 하면 h=AB÷(1÷tan α+1÷tan β)이다. α와 β에 모두 45°를 넣으면 1÷tan 45°=1이므로 h=100÷2=50이 되어 8장의 결과와 일치한다.

이 계산은 평평한 땅과 정확한 각 측정을 가정한다. A의 각을 61°로 잘못 읽으면 높이는 약 64.3 m가 되어 1 m 가까이 달라진다. 결과를 적을 때에는 측정한 기준선과 두 각을 계산으로 얻은 높이와 구별하여 표시한다. 그래야 오차가 어느 측정에서 들어왔는지 나중에 되짚어 볼 수 있다.



60°와 45°의 밑각에서 높이는 약 63.4 m이고 H는 A 쪽으로 치우친다.

구분	값	성격
기준선 AB	100 m	측정값
A와 B의 밑각	60°와 45°	측정값
높이 h	약 63.4 m	계산값

탐구

기준선이 100 m이고 두 밑각이 모두 60°라면 목표점까지의 높이는 얼마인가?

풀이와 확인

$1 \div \tan 60° \approx 0.577$이므로 $h = 100 \div (0.577 + 0.577) \approx 86.6$ m다. 두 각이 같으므로 수선의 발은 기준선의 가운데에 오고 AH=BH=50 m다. $50 \times \tan 60° \approx 50 \times 1.732 = 86.6$ m로 다시 계산해도 같은 값이 나온다.

[SRC01] 미국 의회도서관. Geography by the Numbers

이어 읽기 / 인쇄된 숫자를 검산하기

아홉 검산이 성립하는 이유를 묶음으로 보기

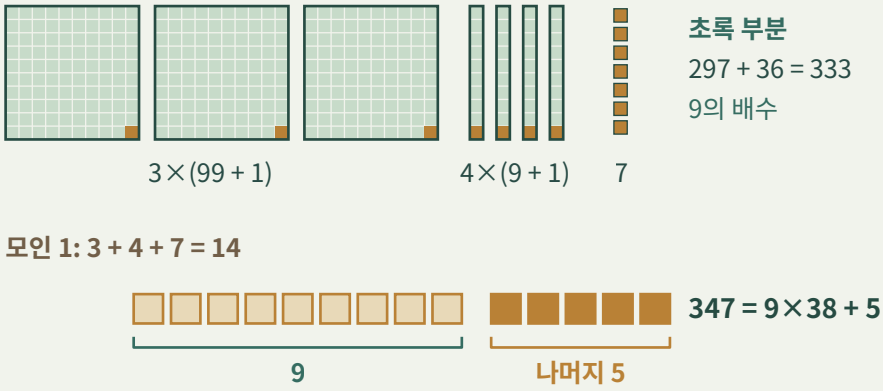
100을 99와 1로, 10을 9와 1로 나누어 보면 자리 숫자의 합이 왜 아홉의 나머지를 주는지 드러난다.

9장은 10을 9로 나눈 나머지가 1이라는 사실에서 숫자 합 검산을 이끌어 냈다. 이 연결을 묶음 그림으로 풀어 보면 규칙이 우연이 아니라는 점을 확인할 수 있다. 347은 백 묶음 3개와 십 묶음 4개 및 낱개 7개로 이루어진다. 각 묶음을 9의 배수인 부분과 남는 1로 나누는 것이 핵심이다.

백 묶음 하나는 99와 1로 나누고 십 묶음 하나는 9와 1로 나눌 수 있다. 그러면 347=3×99+4×9+(3+4+7)이 된다. 앞의 두 항 297과 36은 모두 9의 배수이므로 9로 나눈 나머지에 영향을 주지 않는다. 남는 것은 각 묶음에서 떨어져 나온 1들과 낱개를 모은 3+4+7=14이며 이것이 바로 숫자의 합이다.

14도 같은 방법으로 9와 5로 나누면 나머지는 5다. 따라서 347을 9로 나눈 나머지는 5이며 9장에서 구한 값과 같다. 1000=999+1처럼 모든 자리값이 9의 배수에 1을 더한 꼴이므로 자리 수가 늘어도 같은 논리가 이어진다. 숫자의 순서를 바꾸어도 모이는 1의 개수는 같으므로 그림은 9장의 전도 오류가 이 검사를 통과하는 까닭도 함께 보여 준다.

11의 검산도 같은 틀로 읽을 수 있다. 10은 11−1이고 100은 99+1이므로 십의 자리에서는 묶음마다 1이 모자라고 백의 자리에서는 1이 남는다. 그래서 자리마다 더하기와 빼기를 번갈아 하게 된다. 347에서는 7−4+3=6이므로 11로 나눈 나머지는 6이며 347=11×31+6으로 확인된다.



각 묶음에서 떨어진 1을 모으면 숫자의 합 14와 나머지 5가 된다.

탐구

5286을 9로 나눈 나머지를 자리 숫자의 합으로 구하고 묶음의 분해로 설명하라.

풀이와 확인

5+2+8+6=21이고 21을 9로 나눈 나머지는 3이므로 답은 3이다. 5286=5×999+2×99+8×9+(5+2+8+6)에서 앞의 세 항은 모두 9의 배수이므로 나머지는 숫자의 합이 결정한다. 실제로 5286=9×587+3이다.